LE MIROIR DES MATHS

UNIVERSITÉ DE CAEN
BASSE - NORMANDIE

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 74 02** - Fax. : **02 31 56 74 90**
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO DEUX : Juin 2008

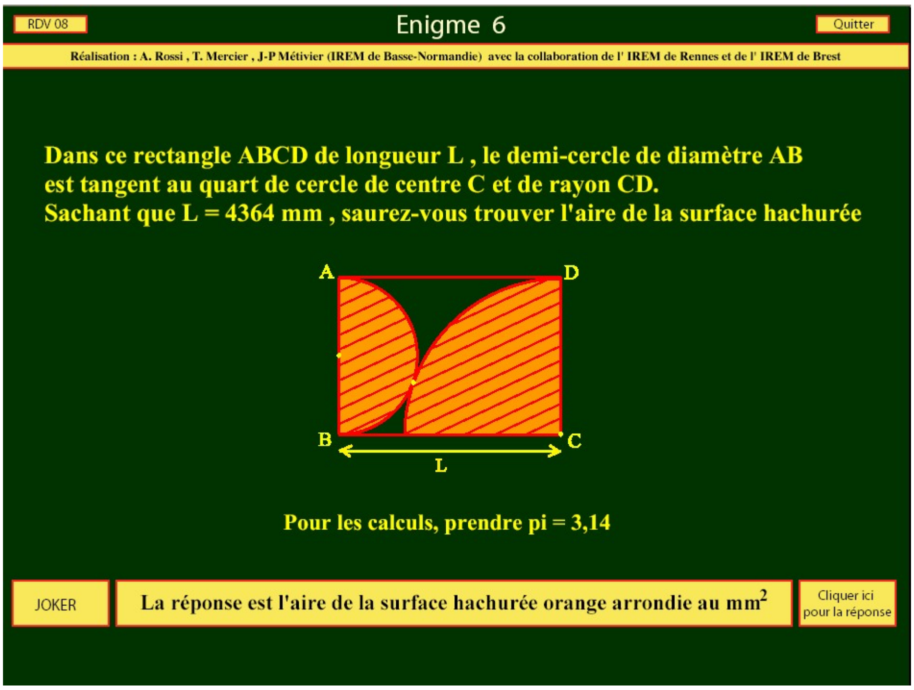
LE MIROIR DES MATHS

NUMÉRO DEUX : Juin 2008

Sommaire

le Rallye Dynamique et Virtuel de l'Irem de Basse-Normandie

Cette année 2007/2008 a été celle de la 5ème édition du "R.D.V." . Le principe reste le même : l'épreuve met en compétition les classes de 3ème et de 2nde, autour de la recherche d'énigmes mathématiques, avec communication des réponses à ces énigmes via internet.



Une nouveauté cette année : en plus des classes de l'académie de Caen, celles de l'académie de Rennes ont été invitées à participer. Ainsi ce sont en tout 114 classes des deux académies qui se sont confrontées le vendredi 4 avril dernier.

Comme l'année précédente, chaque classe, sous la responsabilité d'un professeur, devaient résoudre des énigmes mathématiques, dont les énoncés sont fournis par un programme sur ordinateur ; le site internet conçu spécialement pour ce rallye, permet aussi bien les inscriptions, les informations, le déroulement du rallye virtuel, et l'affichage des résultats. Ce site qui avait déjà été optimisé et amélioré, grâce au travail de Nicolas Levasseur de l'université de Caen , a dû être actualisé et enrichi en raison de l'extension du rallye à l'académie de Rennes. Merci à Jean-Philippe Métivier, doctorant au sein du "GREYC" groupe de recherche en informatique à l'université de Caen, d'avoir si efficacement effectué ce travail.

Cette année, la classe arrivée en tête du classement général, toutes académies confondues, a été une classe de troisième : La classe de 3ème A du collège Roger Martin du Gard de Bellême dans l'Orne. Pour le niveau 2nde, la meilleure classe a été la 2nde 2 du Lycée Kerichen de Brest, qui termine 3ème du classement général. La meilleure classe de 2nde pour l'académie de Caen a été la 2nde 2 du lycée Charles de Gaulle à Caen, et c'est la classe de 3ème 2 du collège Saint-Hilaire de Allaire qui arrive en tête de sa catégorie dans l'académie de Rennes.

Dans l'académie de Caen, les élèves des classes arrivées en tête de leur catégorie, ont gagné chacun un lot offert par "Texas-instruments", et ont fait gagner à leur établissement un lot offert par la régionale de l'APMEP en Basse-Normandie. Un abonnement à une revue scientifique a également été offert aux établissements dont les classes sont arrivées en 2ème ou 3ème position dans leur catégorie.

Une nouvelle édition est prévue pour l'année 2008/2009, avec sans doute une collaboration plus étroite avec l'académie de Rennes.

Chiffres arabes dans l'Athènes normande

Après avoir traqué la présence de chiffres romains dans le patrimoine caennais, je m'attaque aujourd'hui aux chiffres arabes. On peut certes en voir partout, mais je vous propose d'aller à leur recherche dans le haut-lieu des études orientalistes qu'était Caen au dix-septième siècle...

Une controverse caennaise : l'origine des chiffres arabes.

Les chiffres arabes sont ceux que nous utilisons chaque jour ($0, 1, 2, 3, \dots, 9$) dans le cadre de la numération de position en base 10. Nous les appelons ainsi, pour les opposer aux chiffres romains, parce que l'Europe chrétienne médiévale savait les avoir empruntés au monde arabo-islamique. Mais les Arabes les ont-ils inventés ou les tenaient-ils eux-mêmes d'une autre civilisation ? Vers 1680, une vive controverse portant sur cette question opposa deux érudits natifs de Caen et membres de sa fameuse *Académie*, qui se réunissait alors, comme aujourd'hui, en l'Hôtel d'Escoville.

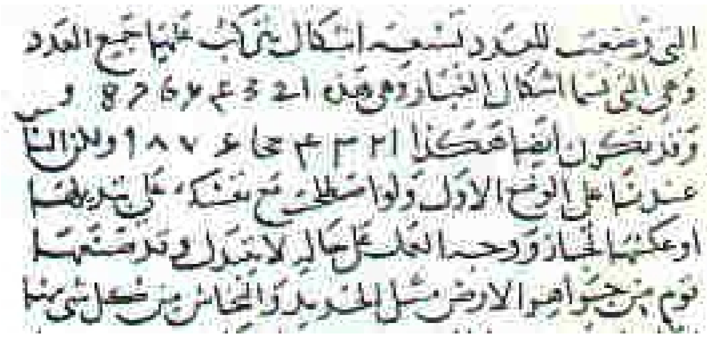
D'un côté, le catholique Pierre-Daniel Huet (1630-1721), futur évêque d'Avranches. Un ahurissant puits d'érudition, autant littéraire que scientifique, mathématicien et arabisant à ses heures, mais parfois imprudent dans ses premiers jugements et refusant surtout de jamais en démordre. Dans sa *Demonstratio evangelica ad serenissimum Delphinum* de 1679 et dans divers écrits postérieurs, Huet attribua aux Grecs l'origine des chiffres arabes, selon lui issus de la déformation des lettres de l'alphabet grec. Il se fondait sur le fait que les Grecs utilisaient des lettres pour écrire les nombres et avait "fortifié son opinion" en découvrant des chiffres arabes dans un manuscrit grec attribué à Boèce. Et voici comment il imaginait le processus d'altération :

« Le β étant accourci de ses deux extrémités, a produit le 2. Si vous inclinez un peu le γ sur son côté gauche, & que vous en retranchiez le pied, & que vous arrondissiez un peu la corne gauche vers le côté gauche, vous ferez un 3. Le Δ a fait le 4, en dressant perpendiculairement la jambe gauche, & l'allongeant un peu en dessous de la base, & allongeant la base du côté gauche… » [1]

De l'autre, le protestant Étienne Lemoine (1624-1689), longtemps pasteur à Rouen. Depuis 1676, il était professeur de théologie à Leyde, où il avait jadis appris l'arabe, mais restait en étroit contact avec ses amis de Caen. Très lié à Huet, il s'opposa néanmoins à lui sur l'origine des chiffres. En écrivant ses *Mémoires*, Huet semble encore tout étonné qu'on ait pu s'opposer à lui : « il n'hésita pas de combattre mon avis ». Et d'expliquer : « il ne pouvait souffrir qu'on enlevât l'honneur de cette invention aux Arabes, à l'égard desquels il se montrait très partial ». Je n'ai pu encore trouver la dissertation de Lemoine, imprimée dans le second tome de ses *Varia Sacra*, mais Vignal-Marville en ses *Mélanges* nous en livre l'argument essentiel, semblable à celui de Huet et tout aussi fragile : « M. le Moine donne toute la gloire [des chiffres] aux Arabes, fondé entr'autres choses, sur la grande conformité qu'il remarque entre les chifres statiques & les caractères arabesques ».

L'étude critique contemporaine des manuscrits grecs, arabes et sanskrits a montré que les deux thèses sont fausses ! Nos chiffres ne résultent point de l'évolution d'un système de numération additive alphabétique, qu'il soit grec ou arabe, mais du système de numération positionnelle décimale attesté chez les Indiens, seulement enrichi du chiffre zéro. À vrai dire, les auteurs arabes (al-Khuwârizmî, al-Uqlîdisî), puis latins (Fibonacci) ont toujours été très clairs sur cette origine indienne. Mais bien des facteurs empêchaient de la prendre au sérieux : la représentation qu'on se faisait des Grecs comme pères de toutes les sciences latines, la troublante présence de chiffres arabes dans des manuscrits grecs qu'on croyait très anciens, la prise de conscience de la richesse de la science arabe, la faible connaissance de de la culture sanskrite (dont Huet fut paradoxalement l'un des premiers diffuseurs). Alors que l'hypothèse indienne se confirmait peu à peu, l'hypothèse grecque garda droit de cité jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle ; quant à l'hypothèse arabe, elle reste populaire au Maghreb où certains chercheurs s'évertuent encore à la démontrer. Hier comme aujourd'hui, l'erreur a souvent été de se focaliser sur la forme des chiffres, pur artefact très variable dans le temps et dans l'espace, en oubliant l'essentiel : le principe positionnel et le choix de la base 10. Au sein du monde arabe, les chiffres existent d'ailleurs sous deux formes principales, elles-mêmes soumises à moult variations : les chiffres arabes orientaux, utilisés de l'Egypte jusqu'au Golfe, et les chiffres arabes maghrébins (c'est-à-dire occidentaux), ceux que Fibonacci a popularisés dans l'Europe médiévale.

Cette dualité est signalée dès le douzième siècle par Ibn al-Yâsamîn : on observera les deux séries dans le fragment reproduit ci-dessous et commenté dans [2]. Elle reste une réalité contemporaine qui déroute tout visiteur occidental en Orient.



Pourtant Orientaux et Maghrébins se targuent tous de posséder les chiffres les plus authentiquement arabes ! Les coopérants égyptiens ou syriens, nombreux au Maghreb après les indépendances, ont tenté de convaincre que l’arabisation devait s’y accompagner d’un passage aux chiffres orientaux, ce qui a entraîné des raidissements bien compréhensibles. Plus objectivement, il apparaît que chiffres arabes d’Orient et d’Occident ne sont que deux variantes d’un seul et même système, et sont aussi arabes – ou plus exactement indo-arabes – les uns que les autres.

On le voit, le sujet des chiffres arabes reste non exempt de mythes, de convictions fortement ancrées, de polémiques ; encore n’avons-nous fait que les effleurer. Que les vifs échanges qu’il suscite parfois puissent rester à l’image de la controverse qui opposa Huet à Lemoine : pas plus que la différence de leurs religions, elle ne porta atteinte à leur amitié, demeurée intacte jusqu’à la mort.

Pierre-Daniel Huet

Samuel Bochart

Multiplications et divisions dans un manuscrit arabe à Caen.

Nous nous tournons maintenant vers celui qui fut le maître et le modèle de tous ces jeunes érudits attirés par l'Orient, les Huet, les Lemoine, les Morin - ses confrères à l'Académie de Caen : je veux parler du pasteur caennais Samuel Bochart (1599-1667), immense savant polyglotte, excellent arabisant, auteur aussi d'un traité de géométrie dont je parlerai une autre fois. De Bochart, la bibliothèque de Caen a hérité un remarquable petit fonds de manuscrits arabes que j'ai étudié dans [3]. Principalement constitué de traités de sciences naturelles et d'ouvrages religieux, il ne recèle pas de texte mathématique, hélas. Cependant, j'ai découvert, dans les marges d'une version arabe du livre biblique des *Psaumes*, des opérations arithmétiques ! Il s'agit d'additions, de multiplications et de divisions, effectuées sur des nombres entiers écrits en chiffres arabes orientaux. Leur analyse ne me semble pas dépourvue d'intérêt pour l'histoire de l'arithmétique.

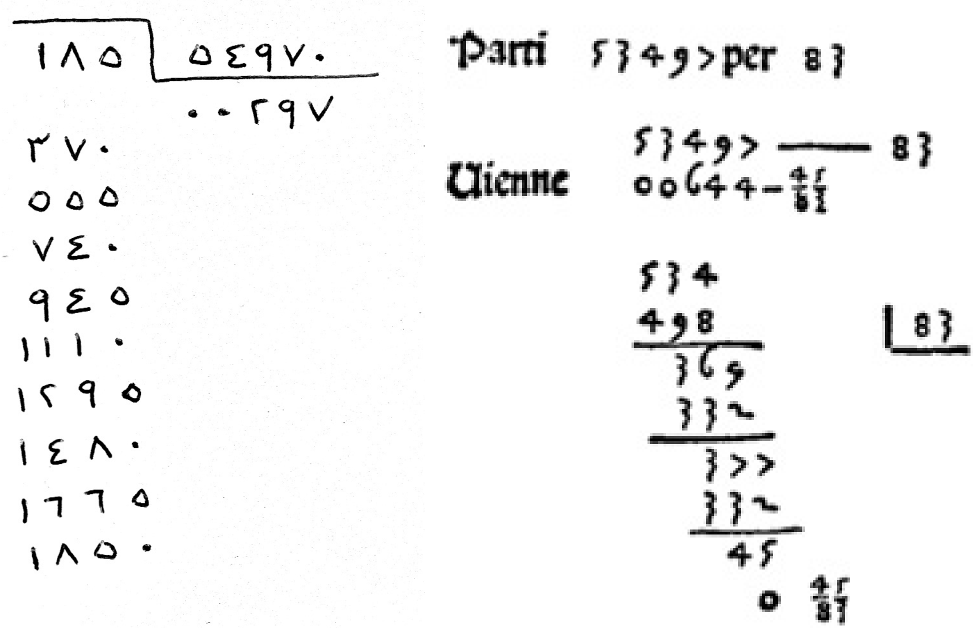
Je décris d'abord sommairement le volume, dont la cote est in-8^o2. C'est un petit livre (150 mm sur 200 mm) formé de 213 feuillets assemblés par des lacets de cuir et modestement couvert d'une feuille de parchemin. Chaque page comporte 11 lignes d'une écriture assez soignée (dans les manuscrits arabes, le nombre de lignes par page, constant dans tout le livre, est presque toujours impair). Il est mutilé de la fin et s'interrompt au psaume 122 (il y a normalement 150 psaumes, en fait 151 dans la tradition orientale). Les psaumes sont répartis en 7 matines et 20 cathismes, servant dans la liturgie byzantine à la lecture continue, et les matines séparées par de jolies frises rouges et noires. Les opérations qui nous intéressent se trouvent dans les marges des f. 12, 26, 27, 202 et 203.

D'où vient notre manuscrit, et comment est-il arrivé à Caen ? Le copiste n'a porté aucune information, mais s'agissant d'un manuscrit liturgique chrétien arabe unilingue, il est probable qu'il provienne de Syrie, où l'on trouve la plus profondément arabisée des communautés chrétiennes du Proche-Orient, la communauté melkite (ou « grecque » – peut-être de Tripoli (actuel Liban), où fut copié le manuscrit « jumeau » in-8^o3 et où subsiste aujourd'hui encore une importante population melkite. Il appartint à Claude Sarrau (1603-1651), magistrat protestant aux parlements de Normandie, puis de Paris, érudit et chasseur de manuscrits. Un ex-dono daté du 20 juillet 1648 indique qu'il fut offert par Sarrau à son ami Samuel Bochart. Cette date constitue donc un *terminus ante quem* de sa copie, probablement réalisée au début du dix-septième siècle, mais aussi de toute évidence des calculs en chiffres orientaux dans ses marges, dont la présence invalide l'hypothèse autrefois émise selon laquelle Sarrau aurait lui-même été le copiste. En 1732, il fut donné par l'arrière petit-fils de Bochart au sein d'un lot de 2005 volumes ayant appartenu à son aïeul à la bibliothèque de l'université de Caen, transférée à la ville de Caen en 1806 et à l'agglomération de Caen-la-mer en 2003.

Je décris maintenant les opérations que j'ai trouvées dans le manuscrit, en transcrivant par commodité les chiffres orientaux en chiffres occidentaux.

Première surprise : les multiplications du psautier de Caen sont effectuées selon l'algorithme que nous avons appris à l'école, où l'on part du chiffre des unités du second facteur). Elles sont de plus disposées conformément à l'usage actuel. J'en ai compté deux correctement menées ($287 \times 19 = 5453$ et $184 \times 285 = 52440$), plus une troisième erronée et inachevée (1655×453) ainsi que l'addition $2009 + 2583 + 287 = 56539$ que je crois être partie de la multiplication de 287 par 197. Cette technique de multiplication qui nous est familière l'était-elle dans le Moyen Orient du premier dix-septième siècle ? Il semble que non. J'ai inspecté le plus célèbre manuel arabe de cette époque, intitulé *Khulâsat al-ḫisâb wa l-jabr wa l-muqâbala* (*Quintessence du calcul et de l'algèbre*) [4]. L'auteur, Bahâ' ad-Dîn al-3âmilî (1547-1622), avertit certes que les méthodes de multiplication sont nombreuses, mais la seule qu'il présente, celle qu'il considère comme la plus nette, est la méthode traditionnelle dite du treillis (*ṯarîqat ash-shabaka*), qui procède en partant du chiffre de plus haut poids et fut connue en Europe sous le nom de multiplication par jalousies.

Les divisions sont intrigantes. Examinons celle qui se trouve au recto du feuillet 203, reproduite de ma main ci-dessous et à gauche :



Le dividende 54970 est posé à droite, le diviseur 185 est posé à gauche et un *vinculum* (trait de liaison) en forme de marche d’escalier les relie en passant au-dessous du premier et au-dessus du second. Au-dessous du diviseur, le calculateur a complété la table de ses dix premiers multiples, ce qui devrait donner : 370, 555, 740, 925 , 1110, 1295, 1480, 1665, 1850. Il a, sans conséquence, noté 945 au lieu de 925. Sous le vinculum, à la verticale du dividende, on lit 00297, ce qui est bien la valeur du quotient. Rien d’autre ! Le reste, égal à 25, n’est pas indiqué, pas plus qu’aucun résultat intermédiaire. Une grande part de calcul mental semble donc à l’œuvre. La présence de la table indique clairement qu’est mis en œuvre un algorithme fournissant l’un après l’autre les chiffres du quotient en ne divisant par le diviseur qu’un segment initial convenable du dividende. Il est difficile d’être plus précis en l’absence de résultats intermédiaires, mais la présentation de l’opération fait penser à la division que nous pratiquons, dite à l’italienne – comme celle reproduite ci-dessus à droite et tirée du *Trattato di Aritmetica* de Filippo Calandri (1491). Selon la ritournelle naguère bien connue, cela donne : « en 549 combien de fois 185 ? il y va 2 fois, il reste 1797 ; en 1797 combien de fois 185 ? il y va 9 fois, il reste 1320 ; en 1320 combien de fois 185 ? il y va 7 fois, il reste 25 ». L’usage de dresser systématiquement la table des multiples du diviseur fut parfois préconisé en France — voir le *Traité d’arithmétique* de Laisant et Lemoine (1895). On note, comme dans le cas de la multiplication, que la méthode de division à l’œuvre dans notre manuscrit diverge nettement de l’algorithme traditionnel de l’arithmétique arabe, le seul présenté dans *Khulâsat al-ẖisâb*, qui se présente sous forme de tableau avec déplacement progressif du diviseur.

Toutes les opérations de notre psautier semblent s’inscrire dans une série d’exercices de type scolaire, dont les valeurs numériques présentent un air de famille (184, 185, 285, 197, 297,...) Le calculateur est peu aguerri et commet de nombreuses erreurs de calcul. Par exemple, avant de mener à bien comme on l’a vu la division de 54970 par 185, il l’a posée une première fois, mais tant commis d’erreurs dans la table des multiples de 185 (donnant 370, 555, 720, 915, 1100, 1275, 1470, 1665, et 1840 !) qu’il a tout recommencé au feuillet suivant. Ailleurs, il a voulu diviser 5246 par 285, dressé correctement la table des multiples de 285, mais trouvé un quotient de 29 au lieu de 18, sans doute suite à un décalage dans la lecture de la table ; la multiplication qui suit $184 \times 285 = 52440$ semble alors être une vérification dans le problème de la la division de 52460 par 285.

En conclusion, le manuscrit de Caen montre que l'arithmétique enseignée aux profanes dans la Syrie du début du dix-septième siècle ressemble davantage à celle que nous pratiquons, qu'on fait remonter aux arithmétiques commerciales italiennes du quinzième siècle, qu'à l'arithmétique arabe traditionnelle du traité de Bahâ' ad-Dîn. Elle inclut la division, alors très peu enseignée en Europe, mais s'attache au seul quotient et non au reste. Plus largement, ce manuscrit nous rappelle que des techniques de calcul aujourd'hui banales sont le produit d'innombrables traités arithmétiques arabes, puis latins, apparus dès l'adoption des chiffres indiens. Bien loin d'être, comme le croient certains, des mécaniques vides de sens, les algorithmes de multiplication et de division décrits par al-Khuwârizmî et et perfectionnés par ses successeurs révèlent tout le sens et toute la valeur de la numération de position en base 10. Sans eux, elle ne serait que lettre morte.

bibliographie.

[1] Pierre-Daniel Huet, *Huetiana, ou Pensées diverses de M. Huet*, Paris, 1722

[2] Mahdi Abdeljaouad, *Les arithmétiques arabes (9e-15e siècles)*, Tunis, 2008

[3] Pierre Ageron, *Les manuscrits arabes de la Bibliothèque de Caen*, Annales de Normandie, Caen, à paraître

[4] Bahâ' ad-Dîn al-3âmilî, *Khulâsat al-ḫisâb wa l-jabr wa l-muqâbala*, édité par Galal Shawky, Alep, 1976 (ou réimpr. le Caire, 1981) [en arabe]

La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez (I)[1]

Première partie : la sinusoïde selon Roberval, *Compagne de la Roulette*

Jean-Pierre LE GOFF, IREM de B.-N.
Caen, juin 2008.

L'usage que l'on fait de la trigonométrie aujourd'hui en masque souvent l'histoire. Qu'il s'agisse des rapports trigonométriques, qui, comme la racine "trigone" l'indique, permettaient, et permettent toujours, de mesurer les angles d'un triangle en fonction de ses côtés et de ses hauteurs, ou qu'il s'agisse des courbes sinusoïdes, qui décrivent les variations de ces rapports, l'on a tendance à oublier que ces fameux rapports de grandeurs linéaires, pour nous sans dimension, étaient autrefois appelés des "lignes" : un sinus – un sinus verse ou une tangente, etc. – était défini comme une grandeur linéaire que l'on rapportait au rayon d'un cercle fixé d'avance : le fait que ce rayon était donné en puissance de 10, 10 000, 100 000, etc., montre bien que l'on savait que les angles ainsi "mesurés" l'étaient par le truchement de "lignes" avec une précision qui dépendait de l'ordre de grandeur du rayon choisi. Il ne s'agit pas alors de confondre les "lignes" trigonométriques avec les courbes sinusoïdales qui représenteront leurs variations : cela suppose d'abord que la géométrie analytique des courbes se soit muée, avec la mathématisation de la physique et/ou le développement des techniques lors de l'avènement de la science rationnelle, en analyse des phénomènes mesurables et exprimables sous une forme fonctionnelle ou tabulée ; de tels phénomènes s'avèrent alors représentables par des courbes connues ou par de nouvelles courbes qu'il s'agissait de construire, géométriquement ou point par point.

En l'occurrence, les courbes trigonométriques sont apparues assez tard[2], eu égard au fait que la trigonométrie relève de la plus haute antiquité : nul doute que la tablette sumérienne bien connue qui propose, plusieurs siècles avant notre ère, une liste de nombreux triplets "pythagoriciens" – pardonnez cet anachronisme – procède tout autant, si ce n'est plus, des besoins de l'astronomie – la position des étoiles étant fixée par la déclinaison angulaire en regard de l'horizon, c'est-à-dire du plan tangent du lieu d'observation – que des besoins supposés d'une théorie arithmétique des nombres dont on voit bien qu'elle prendra plutôt son essor en Grèce. La nécessité de mesurer les angles est donc fort ancienne et elle est longtemps associée à la mesure et à la comparaison des triangles, comme l'attestent, par exemple, les instruments de visée de type "bâton de Jacob" ou "arbalestrille" ou les instruments de Gerbert pour mesurer les grandeurs inaccessibles.

*
*   *

Première partie :
la première apparition masquée : une occasion manquée ?

Première apparition : *la compagne de la Roulette*.

---

1 Cet article est la première partie, revue et corrigée d'un *Petit Papier* paru avec le n° 18 de l'*Écho* de l'IREM de B.-N., mai 2002.

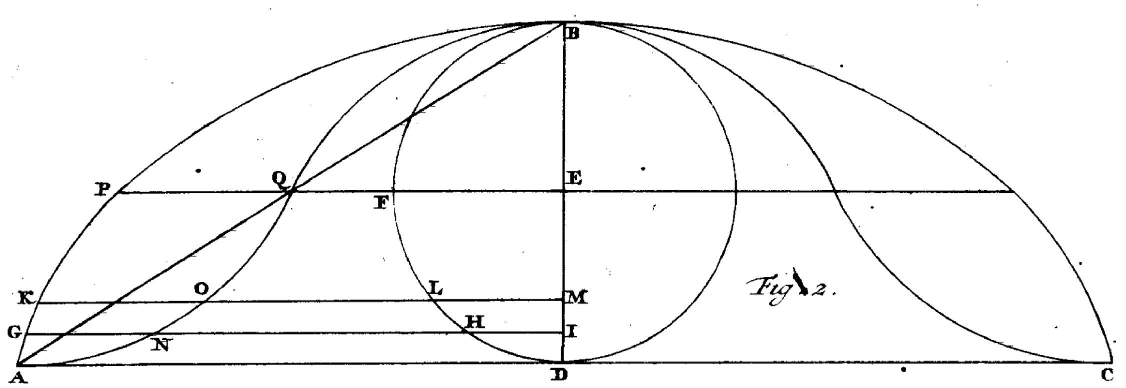
2 Comme on le verra dans les parties troisième *& sqq.* de cet article, qui prolonge et complète celui publié initialement en 2002, l'usage du mot "*sinusoïde*" et la construction effective de cette courbe, pour ce qu'elle est et l'usage qu'on peut en faire es qualité, date du premier quart du XVIIIème siècle, et apparaît sous la plume de l'ingénieur – bien évidemment militaire – , architecte et hydraulicien, Bernard Forest de Bélidor (1698-1761).

lorsqu'il cherchait à quarrer la *cycloïde* – dite aussi *roulette* ou *trochoïde* –, c'est-à-dire la courbe engendrée par un point de la circonférence d'une roue circulaire d'axe horizontal tournant sans glisser sur une ligne droite d'un plan horizontal, en sorte que l'axe reste parallèle à lui-même dans son mouvement. C'est dire si l'on est loin, en apparence, des questions de trigonométrie pure. Néanmoins, cette courbe est construite point par point par Roberval, comme d'ailleurs la cycloïde elle-même, selon des considérations angulaires pour la cycloïde et par translation horizontale de longueur variable pour sa *compagne*, puisque chacun des points de cette dernière est obtenue en utilisant le "sinus" du point de la roue en mouvement – en fait, notre moderne cosinus multiplié par le rayon de la roue – tel qu'il se présente en chaque point de son mouvement. Le lecteur comprendra aisément ces constructions en suivant l'exposé de Roberval dans l'extrait que voici, et qu'il peut retrouver commenté dans un ouvrage récent du *Cercle de lecture* de l'IREM[3].

Roberval s'intéresse à la cycloïde, dès 1634 ; il semble qu'il connaît l'aire d'une arche de la courbe dès avant 1637. Il traitera de la quadrature de la trochoïde à la fin de ses *Observations* (pp. 63-66 de l'éd. de 1730), dans un passage qui fait suite à la recherche de la tangente à la cycloïde. Roberval donne aussi cette quadrature de la cycloïde dans son *Traité des Indivisibles*, et c'est l'objet du second extrait. Le premier texte a été rédigé par un tiers, élève de Roberval ; lorsque l'auteur parle de *la seconde façon* de *l'exemple précédent*, c'est précisément au passage sur la tangente à la *Roulette* qu'il fait allusion.

*

* *



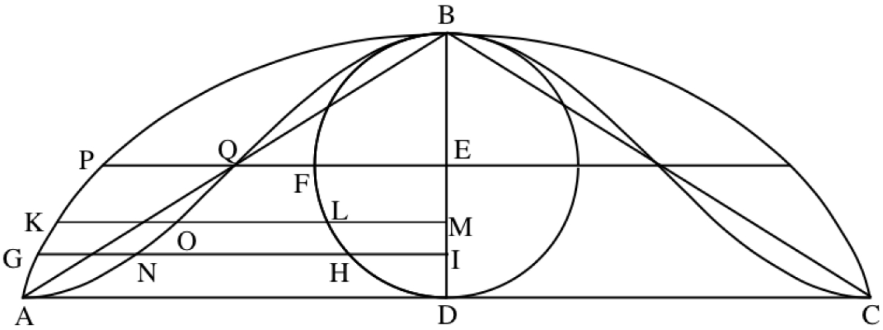
[…] *Douzième exemple, de la compagne de la Roulette.*

C'est ainsi que l'a voulu nommer M. de Roberval qui l'a inventée, et qui en a imaginé l'hypothèse et la description en cette sorte.

Soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est AC l'axe BD, le centre du cercle dans l'axe est E, et le cercle de la Roulette BFD à l'entour de l'axe. Entendez que la Roulette est décrite par la seconde façon qui en a été donnée dans l'exemple précédent ; c'est à savoir que pendant que le cercle de la Roulette glisse depuis A jusqu'en C, en sorte que son centre E décrit d'un mouvement uniforme une ligne parallèle et égale à AC, en même temps le point mobile A parcourt par un mouvement uniforme la circonférence de ce cercle, et décrit la Roulette par le mouvement composé de ces deux ; imaginez maintenant que pendant que ce point parcourt ainsi la circonférence DFB, un autre point A ou D mobile dans le diamètre du cercle, qui est toujours perpendiculaire à AC, monte le long de ce diamètre de D vers B d'un mouvement inégal, en sorte qu'il soit toujours également élevé sur la base AC, comme est le point

3 BESSOT, D., LANIER, D., LE GOFF, J.-P. *& alii* (Cercle d'Histoire des Sciences de l'IREM de Basse-Normandie). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Recueil de textes, d'Euclide à Pascal, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 1999.

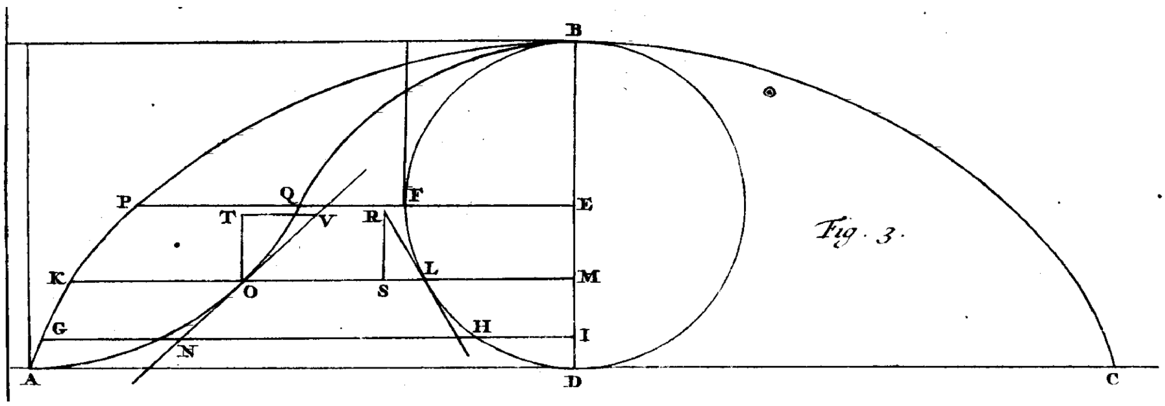
qui décrit la Roulette, c'est-à-dire qu'ayant tiré du point de la Roulette comme G, la ligne GHI coupant la circonférence du cercle en H et l'axe en I, lorsque le point mobile qui décrit la Roulette se rencontre en G dans la Roulette, le point qui décrit cette compagne se rencontre en I dans l'axe.



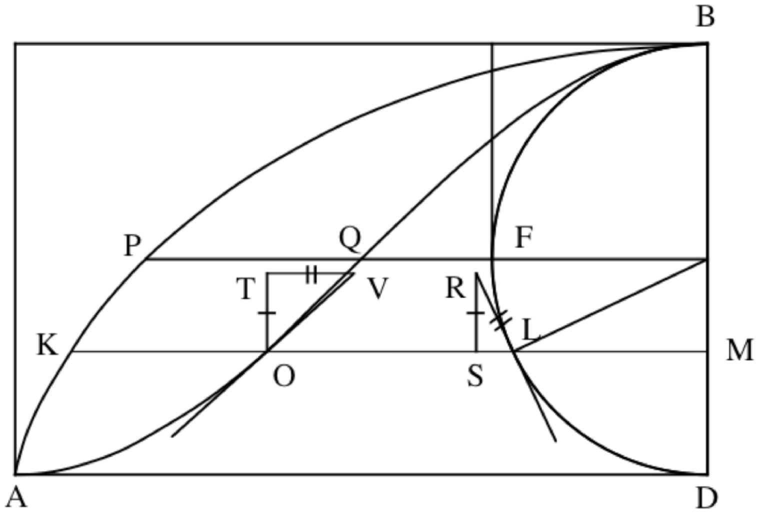
D'où il s'ensuit, que pour décrire cette ligne, ayant tiré des points de la Roulette des lignes parallèles à AC, si dans chacune de ces lignes, à commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la même ligne comprise entre la demi-circonférence du cercle et son axe, l'on aura les points par lesquels cette ligne est décrite. Ainsi tirant comme nous avons dit, la ligne GHI, si dans la même ligne vous prenez GN égale à HI, vous aurez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoïde ; de même prenant dans KLM la ligne KO égale à LM, vous aurez un autre point O de la même ligne [courbe]. Et si par le centre E vous tirez EF perpendiculaire à BD, et si vous la prolongez en P jusqu'à la Roulette ; ayant pris de P vers F la ligne PQ égale à EF, dans la même ligne PF vous aurez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-ci, et auquel elle change de courbure, comme vous remarquerez mieux ci-après. Or ç'a été la même chose de décrire le cercle autour de l'axe de la Roulette, que de lui donner toutes les diverses positions qu'il a en glissant sur la ligne AC, ce qui a déjà été remarqué dans la Roulette.

Ceci posé vous voyez que le point qui décrit cette ligne-ci est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre inégal, et desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se prenant dans les lignes AD, BD ou dans leurs parallèles.

Et parce que le point qui décrit cette ligne-ci monte de la même façon que celui qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, et composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvements droits, l'un parallèle à AD et l'autre à BD, l'on aura dans la ligne parallèle à BD la quantité du mouvement qui fait monter ce point ; et sachant la raison de la base AC à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme et égal à AC, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme et égal à la dite circonférence, si l'on fait que, comme la circonférence du cercle est à AC, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du mouvement parallèle à AC du point de cette ligne-ci qui est réciproque à celui du cercle auquel on a tiré la touchante.



Par exemple, soit la Roulette ABC du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle et le reste, comme il a été dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L, réciproque du point O, la touchante du cercle LR, et je compose le mouvement LR de deux, RS, SL, dont l'un RS est parallèle à BD ; puis comparant les mouvements du point O à ceux du point L, puisque par la supposition le point O monte autant que le point L, je tire OT parallèle et égale à RS, ce sera la direction et la quantité de ce premier mouvement du point O ; puis après, parce que le point O a dans une ligne parallèle à AC un mouvement égal à celui du point L le long de la circonférence de son cercle, c'est-à-dire un mouvement égal à celui du point L le long de la touchante LR, ayant tiré TV parallèle à AC, et égale à LR, j'aurai les directions et la raison des deux mouvements du point O, et partant la ligne OV sera la touchante de cette ligne au point O ; ce qu'il fallait faire. […]



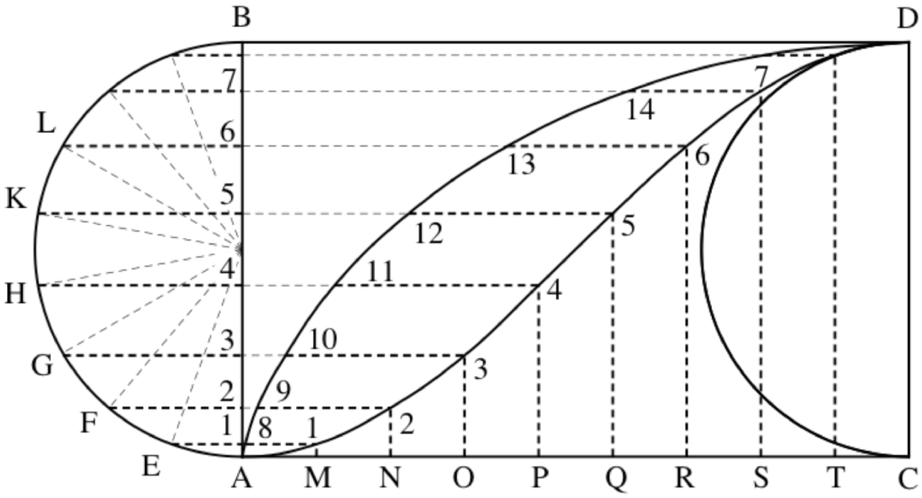
*

* *

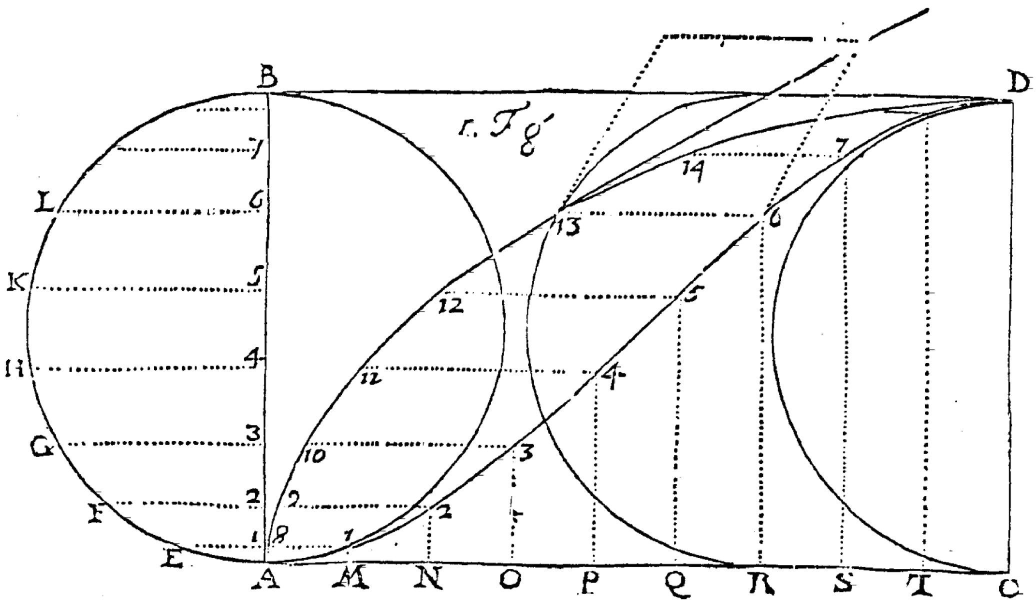
Voici maintenant l'extrait du *Traité des Indivisibles* (pp. 250-253 de l'éd. de 1693).

[…] EXPLICATION DE LA ROULETTE.

Nous posons que le diamètre AB du cercle AEFGB se meut parallèlement à soi-même, comme s'il était emporté par quelqu'autre corps, jusqu'à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité du dit diamètre marche par la circonférence du cercle AEFGB, et fait autant de chemin que le diamètre, en sorte que quand le diamètre est en CD, le point A est venu en B, et la ligne AC se trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette course du diamètre se divise en parties infinies et égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles et aux parties de AC parcourues par le diamètre, comme il a été dit. En après je considère le chemin qu'a fait le dit point A porté par deux mouvements, l'un diamètre en avant, l'autre du sien propre dans la circonférence. Pour trouver le dit chemin, je vois que quand il est venu en E, il est élevé au-dessus de son premier lieu duquel il est parti ; cette hauteur se marque tirant du point E au diamètre AB un sinus E1, et le sinus Verse A1 est la hauteur du dit A quand il est venu en E. De même quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F2, et A2 sera la hauteur de A quand il aura fait deux portions de la circonférence, et tirant le sinus G3, le sinus Verse A3 sera la hauteur de A quand il est parvenu en G ; et faisant ainsi de tous les lieux de la circonférence que parcourt A, je trouve toutes les hauteurs et élévements par dessus l'extrémité du diamètre A, qui sont A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 ; donc, afin d'avoir les lieux par où passe le dit point A, à savoir la ligne qu'il forme pendant ses deux mouvements, je porte toutes ses hauteurs sur chacune des diamètres M, N, O, P, Q, R, S, T, et je trouve que M1, N2, O3, P4, Q5, R6, S7 sont les mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends les mêmes sinus E1, F2, G3, etc. et je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamètre, et je les tire vers le cercle, et des extrémités de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, et l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D.



Je sais comme s'est faite la ligne A 8 9 D ; mais pour savoir quels mouvements ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A est monté par la ligne AB, et a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, et ainsi toujours également d'un espace à l'autre jusqu'à ce que le diamètre soit arrivé en CD ; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, et se rejoignant ensemble aux deux extrémités A D. Or chaque partie contenue entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenue dans la circonférence d'icelui ; car les unes et les autres sont composées de lignes égales, à savoir de la hauteur A1, A2, etc. et des sinus E1, F2, etc. qui sont les mêmes que ceux des diamètres M, N, O, etc. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallélogramme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, et la ligne AC à la ligne BD ; et partant selon Archimède, la moitié est égale au cercle, auquel ajoutant le demi-cercle, à savoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle et demi pour l'espace A 8 9 D C ; et faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle. […]



*

* *

Commentaire du second texte de Roberval (*cf.* aussi *Aux origines…*, *op. cit.*).

Roberval se propose de *quarrer* une demi-arche de cycloïde, c'est-à-dire de calculer l'aire du segment ACD-14-13-12-11-10-9-8-A. Il s'agit d'une "quadrature" relative, quoiqu'exacte, puisque le résultat va s'exprimer "exactement" en fonction de l'aire du cercle générateur et non d'un carré donné : on devrait d'ailleurs plutôt parler de "circulature" ou de "disquature", puisqu'il s'agit d'exprimer l'aire de cette portion d'arche en proportion – rationnelle ou constructible à la règle et au compas – de celle d'un disque –, mais il n'y a pas quadrature absolue puisqu'il est impossible de réaliser la quadrature exacte du dit cercle (c'est-à-dire de trouver un carré d'aire égale qui serait constructible à la règle et au compas). Pour ce faire, il construit, pour chacun des points 8, 9, etc., 14, de la cycloïde, un point 1, 2, 3, etc., 7, obtenu sur des parallèles à la base AC de la courbe, "à droite" de celle-ci, et tels que 8-1 = E-1, longueur de ligne E-1 "ordonnée" – comme le disaient les Grecs – dans le demi-cercle AEFGHKLBA sur le diamètre AB, et de même pour toutes les lignes semblables : 9-2 = F-2, 10-3 = G-3, 11-4 = H-4, 12-5 = K-5, 13-6 = L-6, etc. Il en résulte, selon un principe de la théorie des *Indivisibles*, imaginée au début du XVIIème siècle par Cavalieri[4] et ici appliquée par Roberval, que "toutes les lignes" horizontales du segment en forme de "vague" A-8-9-10-11-12-13-14-D-7-6-5-4-3-1-A sont égales à "toutes les lignes" horizontales du demi-cercle AEFGHKLB-7-6-5-4-3-2-1-A et que les aires de ces deux surfaces sont égales ; tout se passe comme si l'on avait "tassé" les lignes 8-1, 9-2, 10-3, 11-4, 12-5, 13-6, 14-7 et leurs semblables "contre" le diamètre AB, après les avoir déplacées parallèlement à elles-mêmes sur les horizontales qu'elles définissent, comme avec cet outil à aiguilles parallèles que les menuisiers utilisent pour relever le profil des moulures. C'est très probablement le même principe qui a servi d'heuristique aux anciens pour établir la constance de l'aire des triangles ayant même base et même hauteur : le déplacement du sommet A d'un triangle ABC sur une parallèle au support de la base BC ne change pas la longueur des lignes découpées par AB et AC sur toute autre parallèle située entre la base et le lieu de A.

L'aire de la "vague" comprise entre la *cycloïde* et sa *compagne* vaut donc un demi-cercle générateur. Comme la dite *compagne de la roulette* (en fait la sinusoïde) possède un centre de symétrie situé au centre du rectangle ABDC, elle partage ce rectangle en deux parties égales en aires puisque superposables :

aire (AMNOPQRSTCD-7-6-5-4-3-2-1-A) = *aire* (A-1-2-3-4-5-6-7-DBA).

Or, l'aire du rectangle vaut le produit de AC par AB, c'est-à-dire de la longueur d'une demi-circonférence par celle d'un diamètre, ce qui donne πR ´ $2R = 2\pi R^2$. L'aire de la "vague" vaut donc πR^2, c'est-à-dire l'aire du cercle générateur. Une demi-arche de cycloïde, composée d'une arche de sinusoïde et d'une vague, vaut donc, en aire, un disque augmenté d'un demi-disque. Une arche de cycloïde contient, pour finir, trois disques tels que celui inclus dans le cercle générateur, en aire :

aire (arche de cycloïde) = 3 *aire* (cercle générateur) = $3\pi R^2$.

À suivre : *Deuxième partie : la sinusoïde selon Pitot, de l'espace au plan.*

*
* *

4 Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) est un mathématicien italien de l'Ordre des Jésuates, né à Milan et professeur à Bologne, où il mourut ; il publia en 1635, une *Géométrie des Indivisibles*, qui préfigure le calcul infinitésimal et les rectangles infiniment petits de Leibniz : *Geometria Indivisibilibus Continuorum, nova quadam ratione promota, Authore F. Bonaventura Cavaliero Mediolan*[*sis*, *i. e.* milanais]. *Ord. Jesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr. Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore…* Bononiæ [Bologne], Typis Clementis Ferronij, M. DC. XXXV. [1635].

Bibliographie succincte

Sources des textes & sources secondaires

CARAVELLI, Vito. *Le Traité des Hosoèdres* (1751). Trad. du latin en fr. par P. Ver Eecke, publication extraite de *Mathesis*. Paris, 1959.

CAVALIERI, Francesco Bonaventura. *Geometria Indivisibilibus Continuorum, nova quadam ratione promota, Authore F. Bonaventura Cavaliero Mediolan*[*sis*, *i. e.* milanais]. *Ord. Jesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr. Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore…* Bononiæ [Bologne], Typis Clementis Ferronij, M. DC. XXXV. [1635].

ROBERVAL, Gilles PERSONNE (de —). *Observations sur la Composition des Mouvemens, et sur le Moyen de trouver les Touchantes des Lignes Courbes*, in *Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique, par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences*, Paris, 1693, pp. 63-66. Rééd. in *Memoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666, jusqu'à 1699*. Tome VI. Paris, 1730.

—. *Traité des Indivisibles*, in *Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique, par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences*, Paris, 1693, pp. 250-253. Rééd. in *Memoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666, jusqu'à 1699*. Tome VI. Paris, 1730.

Ouvrages de référence

COLLECTIF (BESSOT, D., LANIER, D., LE GOFF, J.-P. & *alii* (Cercle d'Histoire des Sciences de l'IREM de Basse-Normandie). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Recueil de textes, d'Euclide à Pascal, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 1999. En particulier : pp. 91-98, 176-180 & 225-227.

COLLECTIF (HEMILY : ARSAC, Cécile, ARSAC, Gilbert & KELLER, Olivier, IREM de Lyon). *Textes fondateurs du Calcul infinitésimal*. Recueil de textes, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 2006.

*

* *

Bonjour à tous, nous sommes heureux de vous présenter notre brochure :

Nouvelles pratiques de la géométrie

De la manipulation des objets géométriques à leur formalisation

Dans les pages qui suivent, nous vous en proposons :

- Une présentation où nous expliquons notre démarche, ses buts et ses outils, virtuels ou réels : la géométrie sans utiliser le compas, les pliages, les puzzles, les systèmes articulés.
- Des bonnes feuilles afin de vous donner l'envie d'utiliser ces outils, pour votre plaisir et celui de vos élèves.
- Un résumé de la table des matières pour vous en dire plus long.
- La bibliographie, afin de rendre à César ce qui lui appartient.

Toutes remarques et/ou commentaires seront accueillis avec reconnaissance.

Vous pouvez trouver certaines de nos publications en ligne sur le site IREM de Basse-Normandie dans le paragraphe « relations internationales » paragraphe « documents disponibles » car nous écrivons aussi des textes en espagnol et bilingues.

D. SALLES-LEGAC salles@math.unicaen.fr
R. RODRIGUEZ HERRERA ruben.rodriguez@caen.iufm.fr

PRÉSENTATION DE L' OUVRAGE

Nous vous proposons, dans cet ouvrage, des activités, de niveau collège et seconde, destinées à aborder la géométrie plane de façon ludique en utilisant soit des restrictions de matériel (pas de compas, pas d'équerre, pas de rapporteur par exemple) ou, au contraire du matériel peu habituel en classe (pliages, mètre articulé, pantographe, inverseur, barrettes de meccano etc.)

Est-il possible de pratiquer la géométrie au collège sans compas, sans rapporteur et sans équerre ? Lorsque, dans notre groupe "Géométrie au collège" de l'I.R.E.M. de Basse Normandie, Ruben Rodriguez nous a proposé de travailler sur une géométrie à la règle non-graduée seule et au crayon permettant le report des longueurs, nous avons été très intéressés. Nous connaissions déjà la géométrie au compas seul, étudiée par Mohr (en 1672) puis Mascheroni (en 1797), mais cela nous semblait un raffinement de mathématicien quelque peu difficile à utiliser au collège. Nous avons tout de même, au vu des démonstrations qu'il nous proposait, cru à la possibilité d'y intéresser de jeunes élèves. Les premières démonstrations de la constructibilité des lignes géométriques classiques : bissectrice d'un angle, droite orthogonale à une droite donnée, droite parallèle à une droite donnée etc, ont déjà été exposées dans notre ouvrage " Du dessin perçu à la figure construite" (voir la bibliographie).

Nous avons été séduits par l'aspect "constructiviste" de la géométrie sans compas, aussi avons-nous cherché des variantes aux différentes démonstrations de Ruben Rodriguez, ensuite quels outils, autres que le compas, pouvaient résoudre les problèmes posés.

L'univers géométrique accessible aux collégiens est plein d'outils merveilleux parfois plus puissants que le compas et l'équerre. Par exemple, le pliage avec glissement permet de trisecter les angles, alors que le compas ne le peut pas. Le mètre articulé des menuisiers permet de construire de superbes heptagones que ne peut pas construire le compas. Le pantographe des artistes peintres permet d'effectuer sans problème les homothéties et les règles de trois etc.

Nous avons ainsi quelque peu divergé de la géométrie à la règle seule pour construire des activités, plutôt manuelles, afin d'introduire ou de réinvestir des notions fondamentales de la géométrie plane au collège.

Le professeur pourra donc, soit **utiliser nos activités pour aborder de nouvelles notions ou propriétés**, soit s'en servir pour **revoir ces notions ou propriétés dans un contexte moins traditionnel que celui du cours**.

BONNES FEUILLES

Nous vous proposons quelques « bonnes feuilles » espérant vous donner envie de nous lire plus avant.

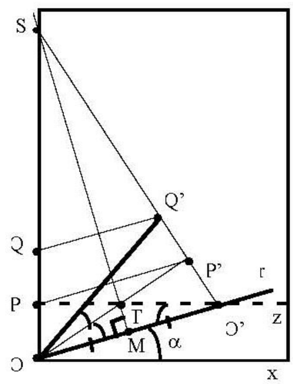
II - 2 : Diviser un angle en trois angles égaux (pour la classe de seconde)

La trisection de l'angle a beaucoup intéressé les mathématiciens et, du temps des géomètres grecs, on ne savait pas prouver qu'elle n'était pas réalisable à la règle et au compas, (on ne le saura qu'au XIX ème siècle) encore moins à la règle et au transporteur (*) !

Nous vous présentons, dans ce paragraphe, deux activités :

- Une **trisection d'angle par pliage avec glissement** (méthode présentée par D. Boursin et V. Larose voir bibliographie).
- Une **trisection d'angle à l'aide d'une équerre particulière**, proposée par David Wells sans démonstration (voir la bibliographie).

II – 2.1 : Diviser un angle en trois angles égaux à l'aide d'un pliage avec glissement (pour la classe de seconde)



Etude préliminaire pour le professeur

Sur une feuille de format A4 traçons un angle $\widehat{xOr}$ de mesure α, ($0 < \alpha < 30$ en degrés) de telle sorte que le côté [Ox) soit confondu avec le petit côté de la feuille.

Soit O' un point de [Or), traçons la médiatrice [MS] de [OO'] qui rencontre le grand côté de la feuille en S. Le triangle OSO' est isocèle.

Traçons la droite (O'z) parallèle à [Ox), passant par O' qui rencontre [OS] en P. Appelons P' le symétrique du point P par rapport à l'axe [SM].

Traçons, sur [OS] le point Q tel que P soit le milieu de [OQ]. Appelons Q' le symétrique de Q par rapport à [SM].

Enfin, traçons la droite [Qt), parallèle à [Ox) et [Pz), qui passe par Q.

Alors les points O, P, Q respectivement O', P', Q' sont, par construction, symétriques par rapport à l'axe [SM].

Nous remarquons que le point T, point de rencontre des diagonales du trapèze isocèle PP'O'O est sa propre image dans la symétrie d'axe [SM].

Les points Q, P, O étant équidistants, leurs images par la symétrie d'axe [SM], le sont de même.

Le triangle OPO' a pour image par la symétrie le triangle O'P'O. Le premier étant rectangle en P, le second l'est en P', ce qui montre, puisque O'P' = P'Q' que [OP'] est la médiatrice de [O'Q'] et la bissectrice de l'angle $O'\hat{O}Q'$: les angles $O'\hat{O}P'$ et $P'\hat{O}Q'$ ont même mesure (= α). (a)

Les triangles OPO' et O'P'O étant symétriques par rapport à l'axe [ST], les angles $O\hat{O}'P$ et $O'\hat{O}P'$ ont même mesure (= α). (b)

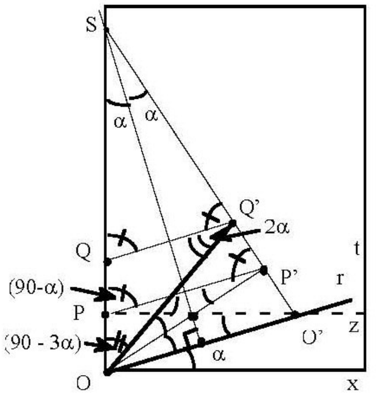
(*) Nous appelons (selon la terminologie de Carrega, voir la bibliographie) "transporteur" tout instrument permettant de reporter sur une droite une distance donnée, sans la mesurer : compas à pointes sèches ou traits sur une règle non nécessairement graduée.

Les demi-droites [Ox) et [Pz) étant parallèles, les angles $x\hat{O}O'$ et $O\hat{O}'P$ sont de même mesure (= α). (c)
Regroupons les résultats (a), (b), (c) :

$x\hat{O}O' = x\hat{O}y = O'\hat{O}P' = P'\hat{O}Q'$.

En regroupant les égalités en gras nous pouvons dire que l'angle $x\hat{O}Q'$ a une **mesure triple** de celle de l'angle $x\hat{O}O'$ ou que **l'angle $x\hat{O}Q'$ est trisecté par les demi-droites [OO') et [OP').**

Nous complétons cette étude par l'exercice facile suivant.

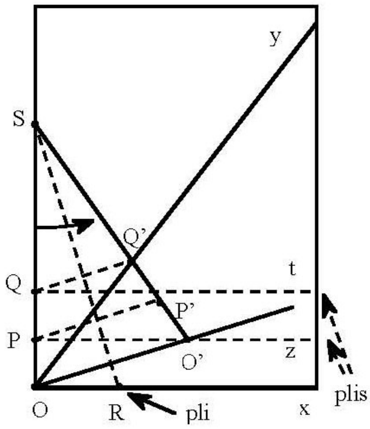


Exercice (nous conservons les hypothèses de l'étude préliminaire)

Appelons 3α la mesure de l'angle $\widehat{xOQ'}$, on demande de calculer la mesure de l'angle $\widehat{OSO'}$ en fonction de α.

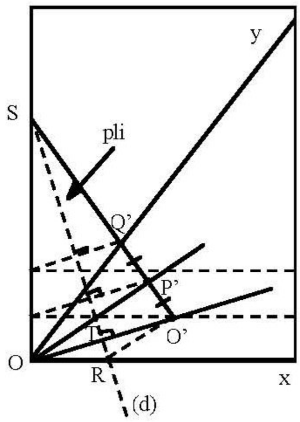
Nous demandons aux étudiants d'observer la figure précédente et d'y noter le maximum de mesures d'angles, nous laissons au lecteur le soin de justifier ces résultats.

Sachant que les symétries axiales sont obtenues facilement par pliage, les résultats précédents peuvent suggérer l'**activité de découverte suivante destinée aux élèves de seconde.**



Méthode : Soient [Ox) et [Oy) deux demi-droites définissant l'angle à trisecter, tracées sur une feuille. (Ox étant confondu avec le bord inférieur de la feuille).
Traçons , par pliage de la feuille sur elle-même, parallèlement à [Ox), deux droites [Qt) et [Pz) telles que P soit le milieu de [OQ]. Plions le bord gauche de la feuille de telle sorte que le point Q vienne sur la demi-droite Oy en Q', et que le point O vienne sur la demi-droite [Pz) en O'. Nous appelons le pli [SR]. Déplions la feuille.

Nous voici dans la situation typique d'un **objet physique dont nous voulons étudier les propriétés**.
Nous allons construire une figure cotée, (c'est-à-dire dont les points caractéristiques sont repérés par des lettres et les éléments de mêmes mesures indiqués par les mêmes signes conventionnels), dont nous allons chercher successivement les propriétés afin justifier, par un raisonnement mathématique, la trisection de l'angle $x\hat{O}y$ par les demi-droites [OO') et [OP').



Une fois la feuille dépliée, nous avons un pli, que nous matérialisons par une droite (d) et les points O' et Q' que nous avons obtenons par pliage et glissement de la feuille sur elle-même, Q' est un point de [Oy) et O' est un point de la droite parallèle à Ox, d'origine P.

Q' est donc, par construction, le symétrique de Q dans la symétrie d'axe (d) ; O' est le symétrique de O par la symétrie d'axe (d).

Appelons P' l'image P par cette symétrie. Les segments [QQ'], [PP'], [OO'] sont orthogonaux à (d), ils sont donc . Les points O, P, Q étant équidistants par construction, il en est de même des points O', P' et Q'.

Les triangles SQQ', SPP', SOO' sont isocèles, alors, nous disons que :

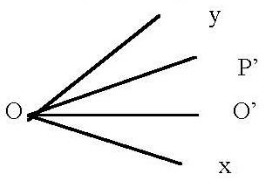
Les demi-droites [OO') et [OP') trisectent l'angle $\widehat{xOy}$.

Preuve : le quadrilatère OPP'O' est un trapèze isocèle, ses diagonales se rencontrent en T, situé sur l'axe de symétrie (d).

Le quadrilatère ORO'T est un losange, car ses diagonales sont orthogonales [OO') est donc bissectrice de l'angle $\widehat{ROT}$.

Le segment [OP'] est orthogonal au segment [P'O'], P' est le milieu de [O'Q'].

Le triangle OO'Q' est donc isocèle et [OP') est la bissectrice de l'angle : $\widehat{O'OQ'}$.



Les demi-droites [OO') et [OP') trisectent l'angle : $\widehat{xOy}$.

... /...

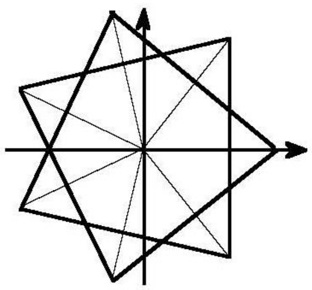
VII - 2.1 : Construire un heptagone en utilisant le mètre articulé des charpentiers (pour la classe de seconde et la préparation au C.A.P.E.S.)

La construction de l'heptagone est liée à un problème qui a beaucoup intéressé les mathématiciens : la résolution des équations du troisième degré. Les Arabes se sont intéressés à ces problèmes et ont inventé des méthodes élégantes de simplification de la rédaction des solutions des équations en particulier pour résoudre des problèmes d'héritage. Le mathématicien ***Al-Khwarizmi*** *a tellement laissé son empreinte que nous employons maintenant le mot "algorithme" dérivé de son nom et le mot "algèbre" dérivé de l'arabe* ***"al-jabr"*** *proposé par ce grand mathématicien pour désigner une méthode de simplification des équations.*

Il faudra attendre le seizième siècle pour que ***Scipion del Ferro*** *(de Bologne) et* ***Tartaglia*** *(de Brescia), qui inspireront* ***Cardan*** *et* ***Bombelli,*** *résolvent le problème de la résolution des équations du troisième degré.*

Nous reprenons le mètre articulé que nous avons utilisé au paragraphe VI et demandons aux élèves s'ils peuvent construire un **heptagone étoilé** avec ce matériel. Lorsqu'ils ont construit **un heptagone**, nous leur demandons comment ils peuvent s'assurer que celui-ci est **régulier**.

C'est l'occasion de rappeler la propriété importante : si un polygone est régulier alors tous ses sommets appartiennent au même cercle. Nous leur demandons aussi si cette condition est suffisante, elle est suffisante dans le cas de la construction avec le mètre articulé puisque tous les côtés de l'heptagone ont même longueur : 20 cm.



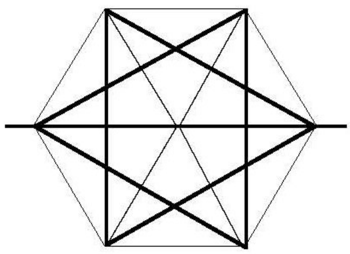
L' heptagone étoilé se prête bien à une construction avec le mètre articulé, comme le montre la figure.

Pour les étudiants préparant le C.A.P.E.S. il est intéressant de signaler que cette construction est liée à la représentation des racines septièmes de l'unité dans le plan complexe.

Le groupe des racines septièmes de l'unité est monogène c'est-à-dire qu'il admet un générateur. Celui-ci n'est pas unique puisque, sept étant premier, le groupe des racines septièmes de l'unité est engendré par un quelconque de ses élèments (sauf 1).

Cette activité est l'occasion de faire un peu de trigonométrie en demandant aux élèves de calculer la longueur du côté de l'heptagone étoilé et celle de l'heptagone convexe, nous allons traiter cette activité dans le paragraphe suivant.

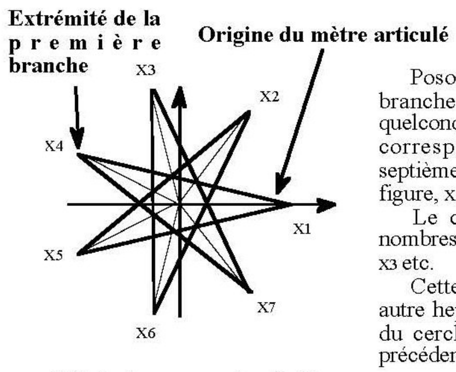
On peut relier aussi cette activité au problème qui a été assez exploité il y a quelques années : caractériser des figures que l'on peut dessiner sans lever le crayon et sans repasser sur un trait déjà tracé : ces figures, en mathématiques sont dites "connexes" : le pentagone étoilé est un ensemble connexe, contrairement, par exemple à l'hexagone :



L'hexagone étoilé ne se trace pas "sans lever le crayon" car il est formé de deux parties disjointes (les deux triangles équilatéraux tracés, l'un en trait normal et l'autre en trait gras).

Pour les élèves professeurs on pourra rappeler que le groupe des racines sixièmes de l'unité admet un sous-groupe propre d'ordre trois et un sous-groupe propre d'ordre deux.

Le fait que l'une quelconque (sauf la racine triviale : 1) des racines septièmes de l'unité dans le corps des nombres complexes engendre le groupe de ces racines peut-être matérialisé de la façon suivante :



Posons l'extrémité de la première branche du mètre articulé sur l'un quelconque de ses sommets. Ce sommet correspond à l'une des racines septièmes de l'unité, par exemple, sur la figure, x_4.

Le carré de x_4 dans le corps des nombres complexes est x_7, son cube est x_3 etc.

Cette construction nous donne un autre heptagone étoilé dont le diamètre du cercle circonscrit est différent du précédent.

Étudions d'autres possibilités de construction de l'heptagone avec le mètre articulé.

Dans la figure 1 page suivante, le groupe des racines septièmes de l'unité est engendré par x3, nous demandons alors aux élèves d'observer de combien de façons on peut construire des heptagones avec le mètre articulé.

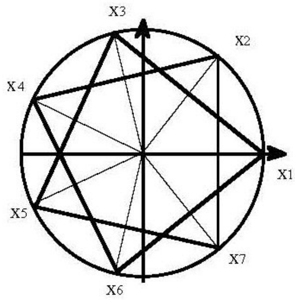


figure 1

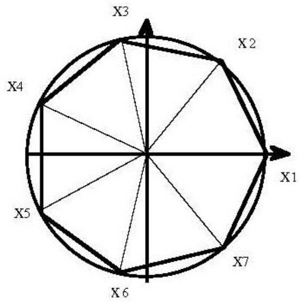


figure 2

Si l'on construit l'heptagone à partir de l'élément x2 comme dans la figure 2, alors nous obtenons l'heptagone convexe (l'échelle n'est pas la même).

Si nous faisons de même avec les autres éléments nous constatons que nous retrouvons les mêmes heptagones que les trois précédents.

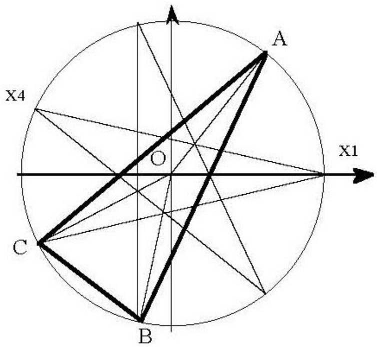
On peut donc construire deux heptagones étoilés et un heptagone convexe avec le mètre articulé.

Nous avons vu que le pentagone régulier est constructible à la règle et au transporteur, il est donc intéressant de regarder si l'heptagone l'est aussi.

VII - 2.2 : Calculer les longueurs des côtés de l'heptagone convexe de grande diagonale de longueur 20 cm (pour la classe de seconde et la préparation au C.A.P.E.S.)

Comme pour l'activité précédente, il sera préférable de se munir de mètres articulés, en bois ou en métal.

Nous avons vu qu'il existe deux heptagones étoilés constructibles avec le mètre articulé, nous allons observer le premier (engendré par x4) et calculer la longueur du côté de l'heptagone convexe correspondant.

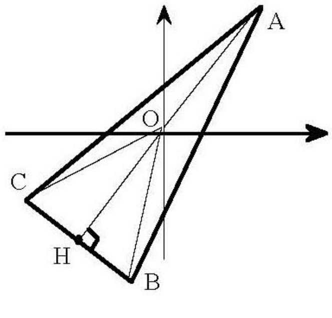


Nous allons réfléchir sur le premier heptagone étoilé que nous avons construit et, en particulier sur le triangle ABC.

Les côtés [AB] et [AC] sont formés de deux branches du mètre articulé, leur longueur est donc 20 cm. Nous cherchons quelle est la mesure du côté [CB] de l'heptagone convexe.

Nous demandons aux élèves de réfléchir sur la mesure des angles du triangle ABC et de les noter sur la figure.

Nous leur suggérons alors de décalquer le triangle ABC et de le reporter sur une autre feuille afin de réfléchir plus facilement.



Puisque nous avons construit un heptagone, la mesure de l'angle au centre de son cercle circonscrit $\widehat{COB}$ est $2\pi/7$, en radians, la mesure de l'angle au sommet $\widehat{CAB}$: est $\pi/7$ (ou 180/7 en degrés).

Prolongeons le segment [AO] du côté de O, il rencontre [CB] en H, milieu de [CB] et extrémité de la hauteur relative à A car le triangle ABC est isocèle.

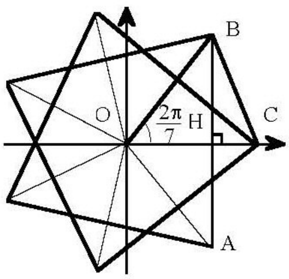
Dans le triangle rectangle AHB , l'hypoténuse [AB] est de longueur 20 cm, l'angle $\widehat{HAB}$ a pour mesure, en radians, $\pi/14$ (ou 180/14 en degrés) donc :

HB/20 = sin (π/14) = 0,22 (au centième de centimètre près).

On a donc : CB = 2 HB = 8,8 (en cm).

Le côté de l'heptagone convexe de diagonale de longueur 20 cm a donc pour longueur 8,8 cm, son périmètre est : 8,8 $\times$ 7 = 61,6 (en cm).

Observons maintenant le second heptagone étoilé de petite diagonale de longueur 20 cm.



Nous pouvons, par exemple, calculer la mesure du côté [BC] du triangle OBC. Comme précédement, la mesure de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ est $2\pi/7$ (en radians), la branche [AB] du mètre articulé mesure 20 cm. Le segment [OC] est orthogonal à [AB] qu'il rencontre en H, milieu de [AB]. La mesure de [HB] est donc 10 (en cm), le triangle OBC est isocèle, l'angle $\widehat{HCB}$ a pour mesure :
1/2(180 -360/7) = 64,3 (en degrés, au dixième près) ou :
1/2(π -2π/7) = 5π /14 (en radians).

Dans le triangle BHC, nous avons donc, si nous exprimons la mesure des angles en degrés :

$\sin(64,3) = \dfrac{HB}{BC} = \dfrac{10}{BC} = 0,90$ au centième près.

Ou, si nous exprimons la mesure des angles en radians :

$\sin(\dfrac{5\pi}{14}) = \dfrac{HB}{BC} = \dfrac{10}{BC} = 0,90$ au centième près.

On obtient BC = 11,1 au dixième de cm près. **Le périmètre de l'heptagone convexe ainsi construit est donc 77,7 cm au dixième de centimètre près.**

Il peut être utile, afin de fixer ces études en mémoire, de faire construire aux élèves, avec le mètre articulé, l'heptagone étoilé "le plus régulier possible" et de vérifier que la distance entre ses sommets est de l'ordre de 11,1 cm.

VII - 2.3 : Étudier la constructibilité de l'heptagone à la règle et au transporteur (pour la préparation au C.A.P.E.S.)

Pour le problème de la constructibilité des polygones réguliers à la règle et au compas on pourra consulter de nouveau Carrega (voir la bibliographie).

Utilisons de nouveau la formule d'addition des tangentes du paragraphe VII - 1.8 : il s'agit de savoir, tout d'abord, si l'on peut construire tan $\frac{\pi}{7}$ à la règle et au compas.

On a, d' une part : $\tan 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

et, d' autre part : $\tan 5a = \dfrac{5 \tan a - 10 \tan^3 a + \tan^5 a}{1 - 10 \tan^2 a + 5 \tan^4 a}$.

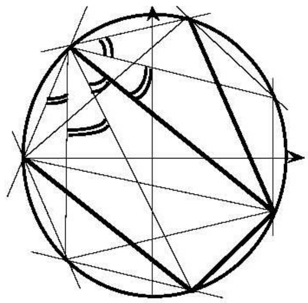
$$\text{Donc } \tan 7a = \frac{\tan 2a + \tan 5a}{1 - \tan 2a \tan 5a} = \frac{\dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} + \dfrac{5 \tan a - 10 \tan^3 a + \tan^5 a}{1 - 10 \tan^2 a + 5 \tan^4 a}}{1 - \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \times \dfrac{5 \tan a - 10 \tan^3 a + \tan^5 a}{1 - 10 \tan^2 a + 5 \tan^4 a}} =$$

$$\tan 7a = \frac{7 \tan a - 35 \tan^3 a + 21 \tan^5 a - \tan^7 a}{1 - 21 \tan^2 a + 35 \tan^4 a - 7 \tan^6 a}.$$

…/…

VII - 2.4 : Construire un heptagone par pliage d'une bande de papier (pour la classe de seconde)

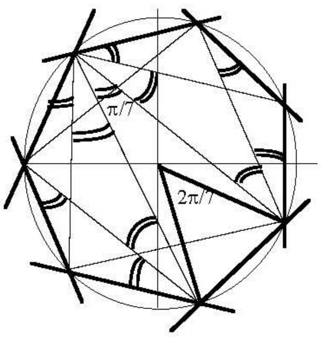
Nous avons vu qu'il est possible de construire un pentagone par pliage, en faisant un noeud simple avec une bande de papier, nous souhaitons maintenant observer si l'on peut, de la même manière, construire un heptagone.



Nous proposons tout d'abord aux élèves de construire un heptagone régulier inscrit dans un cercle en utilisant le rapporteur.

Si nous observons la figure, nous voyons que, puisque l'heptagone est régulier, tous les angles indiqués par un double arc sont égaux car ils sous-tendent des segments égaux dans le même cercle.

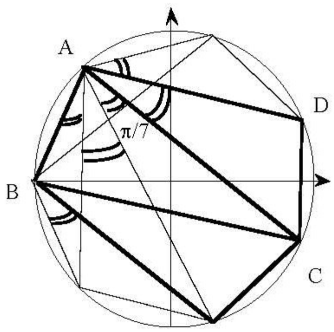
Reprenons le raisonnement habituel sur les polygones réguliers :



Puisque l'heptagone est régulier, l'angle au centre correspondant à l'un des angles égaux a pour mesure $2\pi/7$ (en radians) ou :
$360/7 = 51,43$ (en degrés) au centième de degré près.

Les angles égaux repérés par un arc double ont donc pour mesure $\pi/7$ (en radians) ou 25,71 (en degrés).

Nous demandons alors aux élèves d'essayer de plier une bande de papier de telle sorte que nous obtenions, par exemple un pli [AB] et un trapèze ABCD.



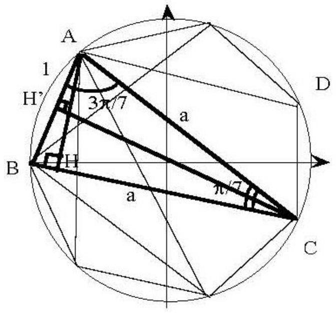
Si nous raisonnons comme pour le pentagone, nous voyons que, puisque nous avons fait un pli le long de [AB], l'angle $\widehat{BAD}$ a pour mesure $4\pi/7$ et l'angle $\widehat{BAC}$ a pour mesure $3\pi/7$ en radians. La somme de ces deux angles est π.

On peut donc "déplier" le côté [AB] et, plus généralement, l'heptagone est réalisable par pliage.

Ce pliage n'est pas facile à réaliser contrairement à celui du pentagone aussi, nous allons raisonner sur les mesures des différents segments qui entrent en jeu dans cette construction.

Nous remarquons que, pour une largeur de bande donnée, si nous connaissons la longueur du segment [AC], nous pourrons plier la bande autour de A de telle sorte que C vienne sur le bord opposé.

Ceci est l'occasion de réinvestir nos connaissances en trigonométrie. Nous sommes maintenant dans une **géométrie du pliage avec glissement** dont nous savons qu'elle est une source très intéressante de manipulation et de raisonnement.



Nous allons observer le triangle ABC. Pour simplifier les calculs nous allons supposer que la mesure du segment [AB] est 2 (en cm).

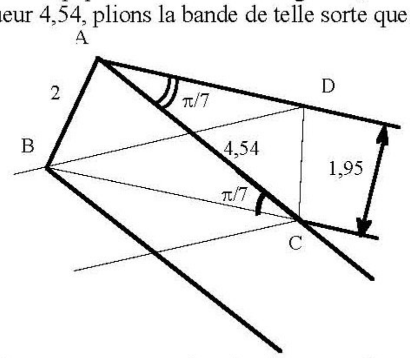
Le triangle ABC est isocèle d'angle de sommet de mesure $\pi/7$ en radians et d'angles à la base de mesures égales à $3\pi/7$. Soit [CH'] sa hauteur issue de C, alors : AH' = 1. Les côtés [AC] et [BC] ont donc pour longueur a telle que :
$1/a = \cos 3\pi/7$ soit 0,22 (au centième près).

Nous avons donc a = 1/0,22 = 4,54.

De plus, la hauteur [AH], relative au sommet A, de mesure h est telle que :
$h/2 = \sin 3\pi/7$ donc h = 1,95, c'est la hauteur en centimètres de la bande .

Nous pouvons donc maintenant construire notre heptagone de côté de longueur 2.

Découpons une bande de papier assez fort de largeur 1,95 cm, traçons, sur le bord supérieur de la bande, un segment [AC] de longueur 4,54, plions la bande de telle sorte que le point C vienne sur le bord inférieur de la bande.

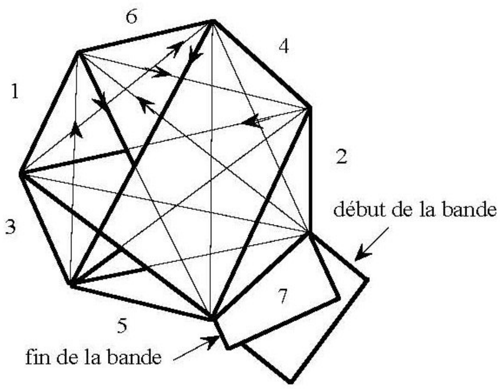


Alors il peut être utile, pour la suite de la construction de vérifier que la mesure du pli [AB] est bien 2.

Maintenant, rabattons la bande autour de C de telle sorte que son bord supérieur passe par B (dessin en trait maigre). Nous obtenons ainsi un nouveau sommet de l'heptagone : D ; on vérifiera là encore avec profit que :
CD = 2.

Nous indiquons ci-dessous une suggestion de pliage avec les numéros successifs et le sens des pliages.

Nous invitons le professeur à faire effectuer complètement le pliage par les élèves, celui-ci offre un objet tout à fait satisfaisant, à condition de soigner son travail.



RÉSUMÉ DE LA TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE

BAVEREL Danièle. *Instruments scientifiques à travers l'histoire*. Ellipses, APMEP éditeurs 2004

BORCEUX Francis. *Invitation à la géométrie*. CIACO éditeur 1986

BOULE François. *Questions sur la géométrie et son enseignement.* Nathan Editeur 2001

BOURSIN Didier et LAROSE Valérie. *Pliages et mathématiques.* ACL les éditions du Kangourou 2000

CALAIS Josette. *Extensions de corps Théorie de Galois.* Ellipses éditeur 2006

CARREGA Jean Claude. *Théorie des corps, la règle et le compas.* Hermann éditeur 1981

DE LOURDES Maria, ESTEVEZ Bravo, MARTINEZ Jorge Luis del sol, VALDES ARTEAGA Eloy. *El dibujo geométrico en la resolución de problemas*. Revisita electrónica de didáctica de las matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro, Cuba. En ligne : www.uaq.mx/matematicas/redm

Groupe évaluation Inspection Académique des Yvelines. *Evaluation diagnostique à l'entrée en 6 ème.* En ligne :
www.ac-versailles.fr/ia78/intra_ien/doc/eval6/**Analyse_Eva_6eme_2006_MATH**.pdf

LEHMAN Eric. *Mathématiques pour l'étudiant de première année Tomes 1 et 2.* Collection DIA Université, Belin 1984

LESAGE Vincent. *Les différentes moyennes par la trigonométrie ou les triangles semblables.* En ligne :
http:/www4.ac-lille.fr/~math/classes/themes/moyennes/moy2.htm

MALLIAVIN Marie Paule. *Algèbre commutative.* Masson éditeur 1984

MEHL Serge. *Trapèzes et moyenne harmonique.* En ligne :
http://seger.mehl.free.fr/anx/trapez_harmo.html

RIBENBOIM Paulo. *L'arithmétique des corps.* Hermann éditeur 1972

RODRIGUEZ HERRERA Ruben. *La géométrie sans cercle dans la formation de la pensée géométrique.* En ligne : www.math.unicaen.fr/irem/internat/documents.htm

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle. *Du dessin perçu à la figure construite.* Ellipses éditeur 2005

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle. *Practicar la geometría : de la acciones directamente experimentables a sus formalizaciones matemáticas.* Editions de l'IREM de Basse-Normandie 2008

VINCENT Robert. *Géométrie du nombre d'or.* Chalagam éditeur 2004

WELLS David. *Dictionnaire Penguin des curiosités géométriques.* Eyrolles éditeur 1997

Repères IREM

La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques

Sommaire du numéro 71, avril 2008

****

Pour consulter le site Web de la revue *Repères IREM* et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http://www.univ-irem.fr/ puis cliquez sur *REPERES* (dans bandeau supérieur horizontal), ensuite sur *CONSULTER*. (Les nombres en rouge indiquent qu'au moins un article de ce numéro a été mis intégralement en ligne ; les nombres en vert indiquent que tous les articles de ce numéro sont intégralement en ligne)

Pour soumettre des articles au comité de rédaction de *Repères IREM*, contacter : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Pour vous abonner à *Repères IREM* ou acheter séparément des numéros, contacter :
***TOPIQUES Éditions*, 71, rue de Queuleu, 57000 METZ, France**
Téléphone & télécopie : 09 71 29 86 58, adresse électronique : topiqueseditions@wanadoo.fr

Prix d'un abonnement (4 numéros par an) : Métropole : Établissements, 40 euros ; Particuliers, 32 euros
DOM-TOM ou Etranger (par avion) : Etablissements, 51 euros ; Particuliers, 43 euros
Prix au numéro : 11 euros + frais d'expédition si envoi par avion

****

Nous espérons vous avoir intéressé, la brochure " Nouvelles pratiques de la géométrie " est en vente par correspondance à l'IREM de Basse-Normandie à Caen.
Voici un bon de commande :

Bon de commande à retourner à :
I.R.E.M. de Basse-Normandie Sciences 3 Campus 2
14032 Caen cedex Université

M, Mme ……………………………………………………………………………………
Adresse……………………….……………………………………………………………….

Quantité………..
Prix à payer : Nombre d'exemplaires …… x 12 euros + frais de port :
5 euros + 2 euros par livre supplémentaire soit : …………………………..…………..
Date : ………………………….….. Signature : ……………………………………..….
Chèque libellé à l'ordre de A.P.I.C.E.S.