

# LE MIROIR DES MATHS

UNIVERSITÉ DE CAEN  
BASSE - NORMANDIE



**IREM DE BASSE-NORMANDIE**  
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186  
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex  
Tél. : **02 31 56 74 02** - Fax. : **02 31 56 74 90**  
Adresse électronique : [irem@math.unicaen.fr](mailto:irem@math.unicaen.fr)  
Site web - <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

## IREM DE BASSE-NORMANDIE

**NUMÉRO SIX : Décembre 2010**

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500



# LE MIROIR DES MATHS

## Sommaire

– Éditorial par Pierre Ageron.	3
– Autour des systèmes articulés - Episode I : Les symétriseurs, par Ruben Rodriguez et l'Équipe Géométrie.	5
– Problème d'aire autour d'un triangle équilatéral, par Éric Trotoux.	13
– Dix-sept chameaux et huit galettes, par Pierre Ageron	20
– Nouveau livre : <i>Mieux consommer grâce aux mathématiques</i>	27
– La revue <i>Repères</i> des IREM.	28

## Éditorial.

Le *Miroir des maths* revient après une absence un peu longue : en cette année 2010 qui s'achève, l'IREM de Basse-Normandie a mobilisé une grande partie de son énergie pour l'organisation du XVIII<sup>e</sup> colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, les 28 et 29 mai derniers à Caen. De l'avis général, ce colloque, qui a réuni une centaine de chercheurs et enseignants de mathématiques appartenant à des institutions très variées (collèges, lycées, lycées professionnels, universités, CNRS), a été une belle réussite. Ses actes, rassemblant vingt-cinq contributions sur le thème *Circulation, transmission, héritage*, devraient paraître dans un délai relativement court sous une présentation très soignée. Un autre colloque inter-IREM s'est tenu à Caen les 17 et 18 juin 2010 : le XVII<sup>e</sup> colloque de la CORFEM, consacré à la formation des enseignants à la démarche d'investigation ainsi qu'à l'algorithmique en classe de Seconde.

Notre séminaire de rentrée, occasion conviviale idéale de mise en commun du travail des différents groupes, s'est déroulé les 24 et 25 septembre 2010 au

centre la Porte des îles (Saint-Pair-sur-Mer, Manche). Les animateurs présents (plus de trente) ont notamment eu l'occasion de visionner d'hilarantes vidéos mathématiques en anglais, de tracer d'étranges courbes lemniscatoïdes au moyen de systèmes articulés ou d'évaluer arithmétiquement l'intérêt économique que représente l'acquisition d'une machine à pain.

Je vous invite à visiter notre tout nouveau site, dont l'adresse n'a pas changé : [www.math.unicaen.fr/irem](http://www.math.unicaen.fr/irem).

Vous y trouverez notamment les cinq premiers numéros du *Miroir*, notre rapport d'activités, la liste des stages que nous proposons et le catalogue de nos publications. C'est aussi sur ce site, et au plus tard le 25 mars 2011, que doit s'effectuer l'inscription d'une classe (Troisième ou Seconde) pour la VIII<sup>e</sup> édition de notre *Rallye dynamique et virtuel* : le rallye, désormais conçu en collaboration avec l'IREM de Rennes, aura lieu le 15 avril 2010 de 14h à 16h.

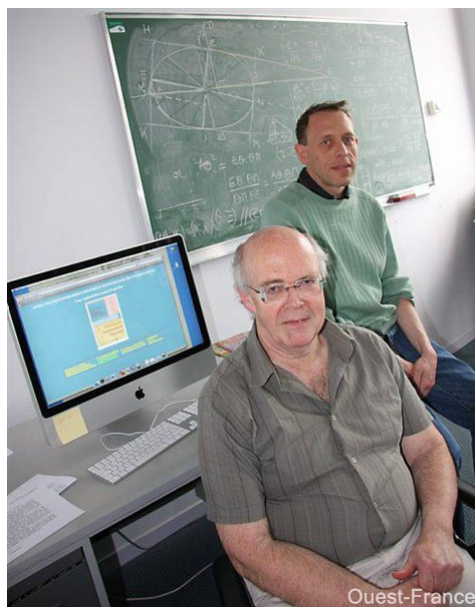
Je présente à tous nos animateurs, tous nos amis et tous nos lecteurs des vœux d'excellente année 2011.

Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie  
30 décembre 2010

### la presse et l'Irem de Basse-Normandie !

**Les maths, ça passe mieux avec du concret** – Ouest-France Caen vendredi 28 mai 2010

Derrière les chiffres, il y a du réel et des questions. Début de réponse au colloque sur l'histoire des mathématiques.



Quatre questions à...

Pierre Ageron, maître de conférences et directeur de l'Institut de recherche en enseignement des mathématiques (Irem) et Jean-Pierre Le Goff, ancien enseignant à l'IUFM.

**L'Institut de recherche en enseignement des mathématiques (Irem) est surtout constitué de profs de collège, ly-**

**cée, parfois du primaire. Que viennent-ils y chercher ?**

Ils se forment en travaillant sur d'autres façons de faire cours. Il y a des groupes de travail sur la pédagogie, sur l'utilisation de l'informatique, sur les concours proposés aux classes mais aussi sur l'histoire des mathématiques qui n'est pas présente dans les programmes.

**Ils essaient de montrer que derrière les chiffres et les formules, il y a des hommes, du concret ?**

Jadis, les histoires de robinet, c'était du faux concret. Il est important d'expliquer aux élèves que les mathématiques ne sont pas seules dans leur coin mais sont sollicitées par de nombreux domaines, l'un des plus connus étant l'architecture. Plutôt que d'appliquer froidement en classe le théorème de Thalès, on peut aller sur le terrain de sports, faire des mesures et voir que la géométrie, c'est d'abord de l'espace avant d'être un plan.

**La Normandie a-t-elle produit des mathématiciens ?**

Au XVII<sup>e</sup> siècle, Salomon de Caus qu'on pense originaire de Dieppe, a imaginé un gonomètre, une sorte de compas gradué pour mesurer les angles. Une intervention lui sera consacrée.

**Le grand public peut-il être intéressé par ce colloque ?**

L'histoire des sciences plaît beaucoup dans les universités interâges. Plusieurs conférences sont abordables : les Éléments de géométrie du père André, un Caennais du XVIII<sup>e</sup> siècle ou les sciences arabes à Caen au XVII<sup>e</sup> siècle.

Propos recueillis par Sébastien BRÊTEAU.

## Voici un cours de maths à graver dans la pierre Ouest France – mercredi 12 mai 2010



En quittant leur salle de classe pour la crypte de l'Abbaye aux Dames de Caen, les lycéens ont pris conscience que « les maths ne sont pas une science coupée du réel, mais une aide à comprendre finement l'univers. »

Vos souvenirs des maths sont cauchemardesques ? Bienvenue au club. C'est-à-dire sous l'Abbaye aux Dames de Caen, où onze lycéens planchent sur une voûte ancestrale. Géométrie dans l'espace, calculs savants en trois dimensions : des enfants du XXIe siècle décortiquent l'oeuvre d'un maçon anonyme du XIe. Les maths, finalement, sont une science du vivant... Drôle d'endroit pour poser la colle du jour. Un truc de fou qui soulève la poussière du temps. Et qui remue ce goût d'huile de foie de morue qui vous gagnait à tenter de décrypter l'aride tableau noir de vos jeunes années. La voilà, l'énigme :

$z = f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ . En langue des maths, ça s'appelle une fonction et, la plupart du temps, ça fonctionne.

Pour les onze lycéens de Ire de l'Institut Lemonnier, le problème posé est (presque) un jeu d'enfant. C'est le lieu du cours et l'objet du délit qui surprennent. Ce matin, ils ont quitté leur lycée, ordinateur portable dans le sac à dos, fleur au fusil, sourire aux lèvres. Odile Jenvrin, leur prof, les a entraînés dans l'Abbaye aux Dames. Pour quatre d'entre eux, c'est une vraie découverte que cette église du XIe siècle dédiée à Mathilde, l'épouse de Guillaume Le Conquérant.

Au bout du choeur, une porte latérale ouvre sur onze marches creusées par les siècles. Les voilà dans la crypte, presque sous la terre, à flanc de colline, au milieu « d'une forêt de piliers » dont leur parle Pierre Ageron, guide conférencier et prof de maths à l'université de Caen, homme de lettres et de chiffres : « Ce que vous avez au-dessus de vos têtes, à 3,2 m, c'est une arête de voûte. Elle correspond à la fonction que vous a donnée Odile. »

Les onze jeunes gens disposent donc d'une fonction mathématique et d'une courbe d'architecture. D'un morceau de théorie et d'un bout de réel : « Ils doivent observer, dessiner leur fonction, relever la courbe de la voûte et voir si tout cela colle ou pas », s'amuse Odile Jenvrin, qui a découvert cette

crypte « parmi 10 000 autres idées ». Dont une majeure, innovante : « Quitter la salle de classe, la feuille sur la table, et se frotter à la culture, à la vie. » Soudain, votre longue aversion aux maths en prend un coup.

Car ils se vautrent par terre, nos lycéens. Ils lèvent le nez, rigolent sérieusement. Ils étalent des feuilles de papier entre les piliers romans, sortent des télémètres laser, allument les ordinateurs, se juchent sur des escabeaux, notent scrupuleusement leurs relevés de terrain.

« Adapter le modèle au réel »

Étrange scène nimbée de cette lumière blonde que dégage la pierre friable de Caen. Soudaines et tendres pensées aussi à ces maçons du Moyen Âge dont on admire l'oeuvre, « qui n'avaient pas de calculettes et un seul souci : il fallait que ça tienne ». Vous êtes dans la fraîcheur de cette salle de jadis, aux premières loges d'une conversation savante entre deux mondes distants de mille ans.

Passant d'un groupe à l'autre, Jean-Pierre Le Goff, philosophe des maths et conférencier de l'Université populaire de Michel Onfray, boit du petit-lait : « Les maths ne sont pas une science coupée du réel, mais une aide à comprendre finement l'univers. Ce qu'ils apprennent aujourd'hui ? Que les maths sans la main, ce n'est rien. Qu'au XIe siècle, on faisait déjà de la géométrie dans l'espace, mais sans ordinateur. » Oui, ils faisaient des maths sans le savoir, nos ancêtres, comme Monsieur Jourdain faisait de la prose.

Au fil de ce travail pratique, nos potaches tiquent : « Madame Jenvrin, vous n'auriez pas mis une boulette quelque part ? » Bien vu, jeune homme ! Il y a une boulette. L'erreur est juste. La courbe de leur fonction mathématique n'épouse pas parfaitement la courbe de la voûte. Et pour cause : « Entre le tracé de la théorie et celui de l'arête de pierre, il y a une marge. Ce plafond a été maçonné de manière pifométrique. » Assez durablement pour tenir debout. Assez solidement pour s'incliner avec respect : « Vous avez tout compris. On peut toujours changer les données d'une fonction, pas le plafond d'une crypte du XIe siècle. L'honneur du matheux, c'est d'adapter le modèle au réel et pas le contraire. » Ah si, par exemple, tous les banquiers du monde pouvaient se le répéter cent fois...

Quentin, en tout cas, est ravi de sa découverte : « Je m'étonne moi-même. » Et le groupe apprend de la bouche d'Odile Jenvrin que ces voûtes sur lesquelles ils ont planché ne sont que l'intersection de deux cylindres dessinant une ellipse, c'est-à-dire un cercle un peu écrasé. C'est important, l'ellipse, dans la vie d'aujourd'hui : « C'est le chemin qui mène aux images en 3 D. » Un ange passe : « Oui, au-dessus de vous, au XIe siècle, des anonymes ont montré la route qui arrive à vos jeux vidéos. » Ils en restent comme deux ronds de flan. On se croirait dans une scène de « L'ellipse des poètes disparus ».

François SIMON Photo : Jean-Yves DESFOUX

## Autour des systèmes articulés I : les symétriseurs

Utiliser des objets géométriques inhabituels pour  
Observer, comprendre, reproduire, formaliser et démontrer.  
Le cas de la symétrie orthogonale, de la trisection, des trois-barres.  
Activités présentées par l'équipe « Géométrie » Evelyne Adam, Anne-Marie Bock,  
Danielle Salles, Olivier Longuet, Ruben Rodriguez

### Introduction

Vous trouverez dans ce « Miroir des maths n° 6 » et dans les deux qui suivront trois ensembles d'activités dans l'univers de la géométrie, qui s'adressent à des niveaux scolaires différents, ceci afin de vous faire toucher du doigt **l'intérêt, de l'enseignement primaire à l'université, de la manipulation des instruments conçus pour résoudre des problèmes mathématiques**, dans l'acquisition des connaissances géométriques et l'apprentissage du raisonnement.

Ainsi, nous vous présenterons successivement :

- Une activité autour de la notion de symétrie orthogonale ;
- Une activité autour de la trisection des angles ;
- Une activité autour des systèmes à « trois barres » plus généralement appelés « bielles ».

Pour chaque activité, nous vous détaillerons la construction des objets géométriques, leur utilisation, la justification mathématique de cette dernière ainsi qu'un commentaire didactique mettant en évidence l'intérêt de ce type d'activités qui pourront être utilement complétées par une simulation sur ordinateur par un logiciel de géométrie dynamique.

Nous nous intéressons ici aux interactions entre l'univers de la « **Géométrie articulée** » et celui des « **Figures sur une feuille blanche et instruments géométriques classiques** ». Ces interactions permettent d'effectuer des aller et retour entre le monde physique d'instruments géométriques peu courants et le monde des figures tracées avec les instruments traditionnels : règle, équerre, compas.

Les élèves, au cours des manipulations de ces instruments géométriques, s'approprient progressivement leur structure et leur fonctionnement. Ils résolvent alors les problèmes de constructions proposés, les formalisent par le dessin de figures codées avec les instruments usuels et les justifient par les démonstrations.

### I – Symétrie orthogonale par losange ou cerf-volant

Activités pour les élèves du collège présentées par Ruben Rodriguez

#### Objectif

Résoudre des constructions de figures symétriques à l'aide de systèmes articulés simples afin de mettre en évidence des propriétés du losange, du cerf-volant, du deltoïde et de la symétrie orthogonale.

#### Matériel par groupe de deux ou trois élèves :

- Quatre barrettes en plastique perforé identiques<sup>1</sup> ou en carton fort ou rhodoïd adhésif souple (pour réaliser des abat jour en magasin de loisir et création), notons que le rhodoïd sera doublé car il est très souple, il présente l'avantage pour les manipulations d'être transparent,
- vis ou rivets, attaches parisiennes,
- crayons à grosse mine, crayons feutres à tête conique,
- colle repositionnable.

#### Matériel pour le professeur :

- Perforatrice de bureau,
- feuilles de carton fort (« carton bois 250 g » ou « carton plume », ces objets sont disponibles en magasins d'activités de loisir).

Ces feuilles sont destinées à être découpées en format A3 ou légèrement plus petit suivant une fente parallèle au grand côté de la feuille et située à peu près au milieu du petit côté. Cette fente doit être découpée au cutter, de préférence par le professeur pour des raisons de sécurité, soigneusement, car elle servira de glissière. Elle s'arrête avant le bord de la feuille de carton afin d'en préserver la solidité.

### Séquence n° 1

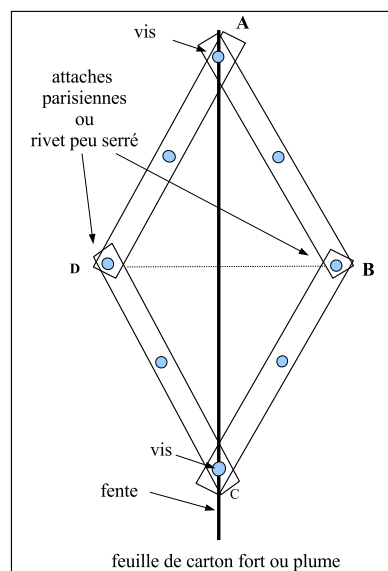
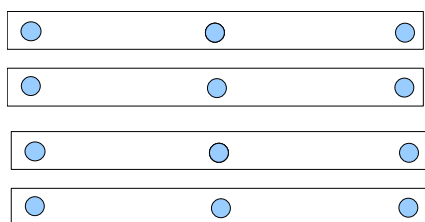
Une feuille de carton est distribuée à chaque groupe de deux ou trois élèves.

Nous faisons construire aux élèves un losange constitué de quatre barres de plastique perforées<sup>1</sup> à la même distance à leurs extrémités (ou carton ou rhodoïd perforé avec une perforatrice de bureau).

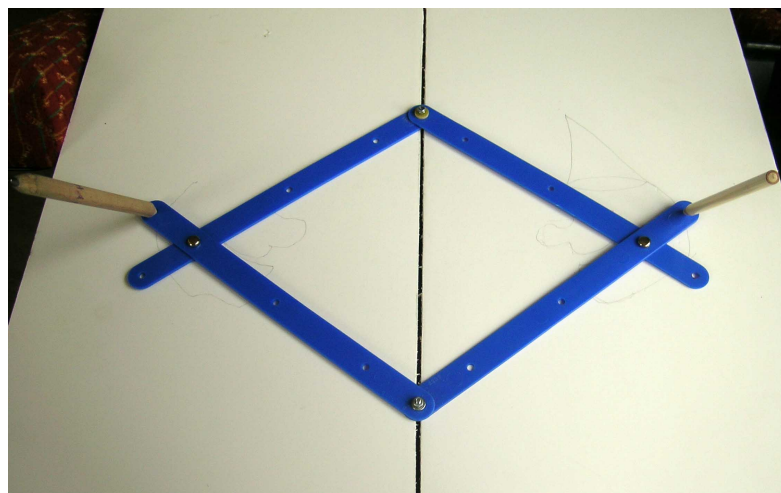
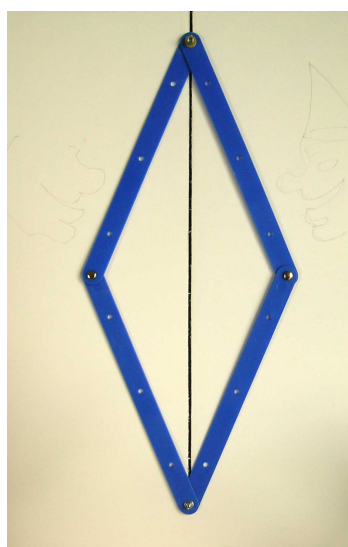
<sup>1</sup> Par exemple les « géorègles » de Celda spécialiste en matériel pédagogique, en ligne : [www.celda.fr](http://www.celda.fr)

Deux des sommets opposés sont reliés par des vis et écrous, les deux autres sommets sont reliés pour l'instant par deux attaches parisiennes.

Les deux sommets du losange constitués par les vis et écrous sont positionnés dans la fente découpée dans la feuille de carton. Les attaches parisiennes pourront être ôtées facilement et remplacées par des pointes de gros crayons mine ou grosse pointe sèche (genre aiguille à tricoter). Nous nommons **l'ensemble du losange et de la feuille découpée un « symétriseur »**.



Le « symétriseur » comporte un losange dont deux sommets opposés sont matérialisés par deux vis qui peuvent glisser dans la fente du carton. Les deux autres sommets sont matérialisés par deux attaches parisiennes ou rivets peu serrés, ils recevront ensuite des crayons mines.



**Figure n°3 : symétriseur en losange vu de face**      **Figure n°4 : variante du symétriseur vue en perspective**

(La figure n°4 présente une variante du symétriseur qui sera étudiée en fin d'activité pour les plus grands à partir de la classe de quatrième.)

Nous demandons aux élèves de tracer sur le carton, **d'un seul côté de la fente**, au crayon mine, à main levée ou avec des instruments (compas et/ou règle), une figure géométrique ou artistique assez simple de leur choix. Ils peuvent tracer un triangle, un cercle, une feuille d'arbre, un chat etc.

Nous leur demandons de remplacer une des attaches parisiennes par une extrémité de gros crayon (afin de remplir le trou de la barrette et ainsi éviter « d'avoir du jeu ») et l'autre par une grosse pointe sèche ou un crayon mine qui suivra le contour du modèle. Ensuite, en se mettant à deux élèves par symétriseur, de tracer, grâce à ce dernier, un dessin « symétrique » du premier. Nous disons « **dessin** » car les premiers essais sont difficiles, **il faut apprendre à utiliser le symétriseur** et il faut plusieurs essais pour obtenir une figure soignée que l'on puisse qualifier de « symétrique » de la première.

**Chaque élève doit manipuler le symétriseur dans au moins un cas de figure.**

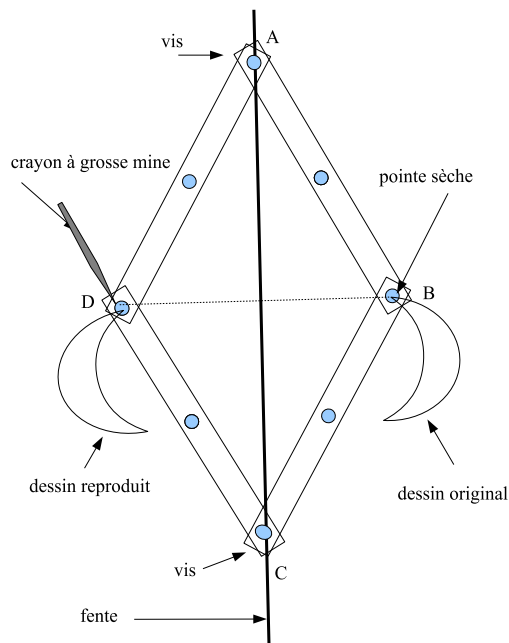


**Remarque :** la difficulté principale de ce travail est l'absence de transparence des barrettes, on peut contourner cette difficulté de la façon suivante :

On place les extrémités des barrettes à droite de la figure ensemble sur un point du dessin d'origine (point B sur la figure n°5) en faisant glisser les vis (points A et C) dans la fente, alors un des élèves maintient ces extrémités jointes.

Le deuxième élève amène les deux trous des deux autres barrettes l'un sur l'autre et obtient ainsi l'image D du premier point.

Figure n°5



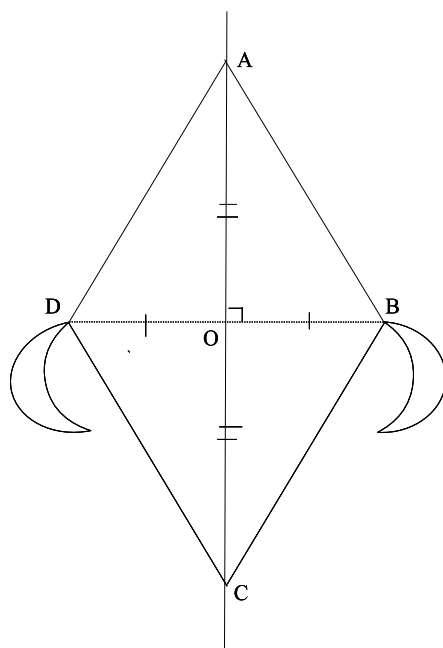
Quand le professeur et les élèves sont satisfaits de leur figure, nous leur demandons de repasser soigneusement les deux dessins au crayon bille ou de couleur (feutre à bout conique) puis d'observer deux points particuliers B et D qui se correspondent par le symétriseur (figure n°5).

feuille de carton fort ou plume

Les élèves observent que **lorsque deux points se correspondent, ils forment les extrémités d'une des deux diagonales du losange** et que c'est la seconde diagonale qui glisse dans la fente.

Nous leur demandons alors de représenter sous la forme d'une **figure codée** à l'échelle de 1/4 environ le symétriseur sous la forme d'un losange formé de segments de droites ainsi que les diagonales de ce losange, puis leur dessin et son image.

Figure n°5bis



Nous leur demandons alors d'écrire une définition la plus précise possible de la transformation effectuée par le système articulé que l'on appelle la symétrie orthogonale, voici un exemple :

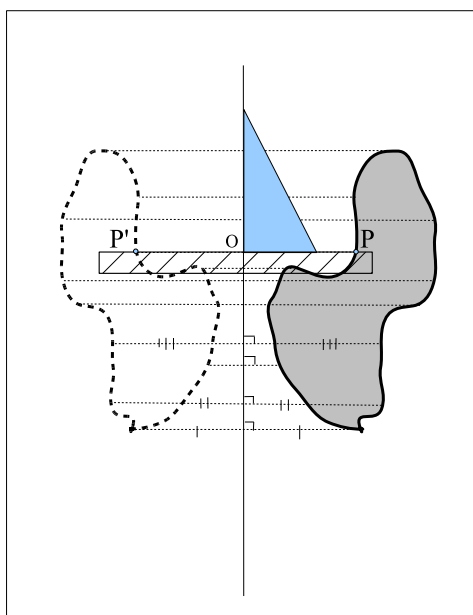
**La symétrie orthogonale par rapport à un axe donné (AC) est la transformation qui associe à un point B donné, un point D tel que l'axe donné (AC) soit la médiatrice du segment [DB].**

## Séquence n°2

Nous proposons aux élèves une figure **non nécessairement régulière** tracée d'un côté d'une droite sur une feuille et leur demandons de tracer la figure symétrique de la première par rapport à la droite, à la règle et à l'équerre.

Le dessin peut-être fait sur une feuille distribuée par le professeur et fixée le long de la fente par une colle repositionnable, de même qu'une feuille vierge peut-être fixée de l'autre côté de la fente et destinée à recevoir le dessin de l'élève.

Figure n°6



Ce travail est destiné à leur faire utiliser la propriété du symétriseur construit à partir d'un losange : **les diagonales du losange sont orthogonales et se coupent en leurs milieux.**

Nous indiquons un exemple de construction de l'image  $P'$  d'un point  $P$  à la règle et à l'équerre.

Nous leur demandons alors de décrire la construction d'un point particulier  $P'$  image de  $P$  sous la forme d'une narration de recherche dont nous donnons un exemple ci-dessous.

**Exemple de narration de recherche** (qui consiste, pour l'élève, à expliquer le cheminement de son travail de construction)

Pour construire à la règle et à l'équerre l'image  $P'$  d'un point  $P$  d'une figure donnée, nous faisons glisser le grand côté de l'équerre le long de la fente en maintenant la règle le long du petit côté de celle-ci, jusqu'à ce que la règle passe par le point  $P$ . Nous mesurons alors la distance  $PO$  de  $P$  à la fente avec la règle graduée et reportons cette longueur sur la règle de l'autre côté de la fente. (On peut aussi s'aider d'un compas.)

Les élèves s'aperçoivent bien vite que ce travail est compliqué et long si on l'exécute « point par point », aussi il est très utile de disposer soit d'outils géométriques comme notre symétriseur, soit de logiciels de géométrie.

## Séquence n°3

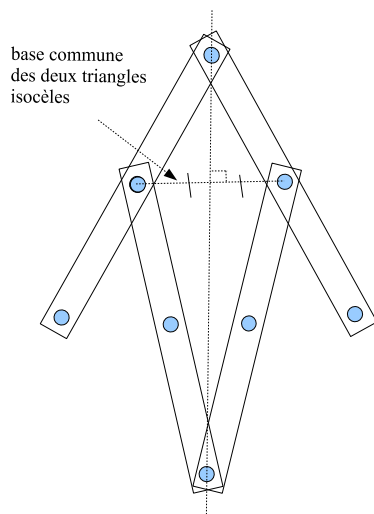
Nous demandons aux élèves de transformer leur « symétriseur losange » en « **symétriseur cerf-volant** ».

C'est l'occasion d'introduire cette notion nouvelle en classe de sixième et d'en observer les propriétés géométriques. Donnons-en la définition la plus élégante sinon la plus facile :

**Un cerf-volant est un quadrilatère dont l'une des diagonales est la médiatrice de l'autre et leur point d'intersection est à l'intérieur du quadrilatère.**



Figure n°7



Pour aider les élèves nous leur proposons de raccourcir de façon identique deux branches successives du symétriseur en utilisant les trous intermédiaires puis nous leur annonçons qu'ils ont construit un cerf-volant et leur demandons d'énoncer une autre définition de celui-ci par exemple :

**Un cerf-volant est constitué par deux triangles isocèles ayant leurs bases de même mesure et confondues.**

Puisque les deux triangles sont isocèles les bissectrices de leurs angles au sommet sont médiatrices de leur base commune, elles sont donc confondues.

Nous demandons ensuite aux élèves de reprendre le carton, de montrer le symétriseur en cerf-volant et de symétriser une nouvelle figure grâce à celui-ci.

Ensuite nous leur demandons d'écrire sur leur cahier la justification du fait que le cerf-volant permet bien de construire la figure symétrique orthogonale d'une figure donnée.

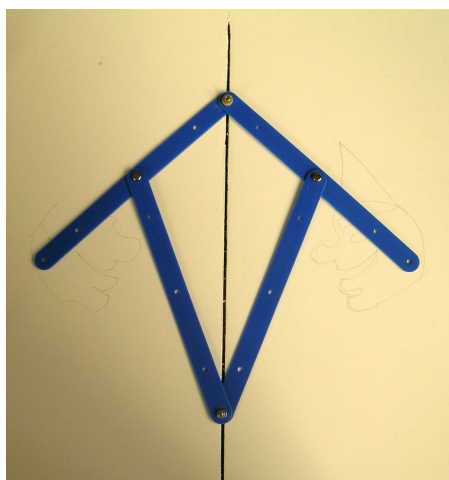


Figure n°8

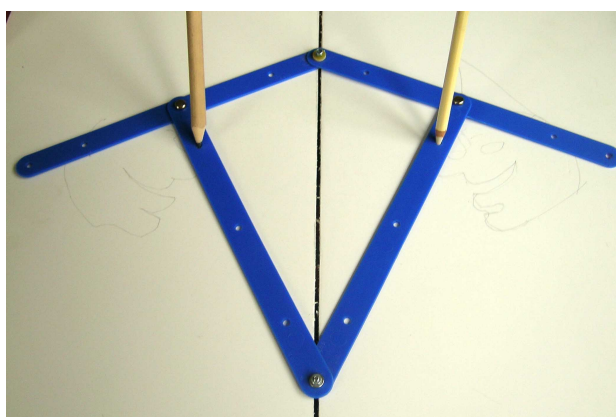


Figure n°9

Dans le montage de la figure n°9 nous avons repris l'artifice de la variante du premier symétriseur (figure n°4) que nous développons plus loin pour les plus grands en utilisant, pour insérer la pointe sèche et le crayon, deux trous symétriques par rapport à la fente mais non confondus avec les sommets du cerf-volant.

#### Séquence n°4 – Construction d'un deltoïde à partir d'un cerf-volant

Nous introduisons ensuite de la même façon la notion de **deltoïde qui peut être considéré comme un cerf-volant concave** (figure n°10).

Il est facile de construire un deltoïde à partir du cerf-volant précédent, avec les barres articulées. En effet, il suffit de retourner le petit triangle isocèle de telle sorte qu'il se trouve à l'intérieur du grand sans changer la mesure de ses deux côtés égaux (figure n°11).

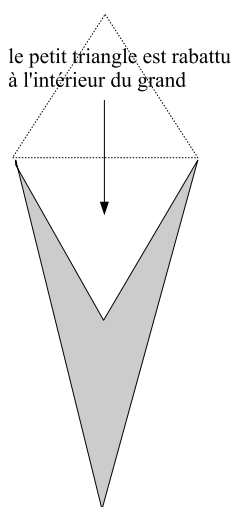


Figure n°10 - un deltoïde  
(en gris)

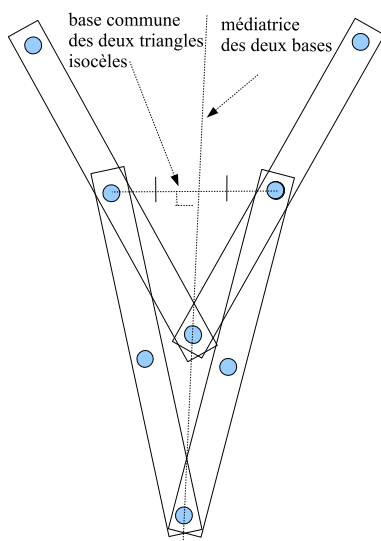


Figure n°11 - le symétriseur deltoïde

Nous demandons aussi aux élèves de noter soigneusement sur leur cahier une définition du deltoïde par exemple :

**Un deltoïde est un quadrilatère constitué de deux triangles isocèles ayant leur base commune et situés dans le même demi-plan par rapport à cette base.**

Ou bien, de façon proche de la définition du cerf-volant :

**Un deltoïde est un quadrilatère tel que l'une de ses diagonales est médiatrice de l'autre. Leur point d'intersection est situé à l'extérieur du deltoïde.**

On pourra, à cette occasion, introduire les notions de **quadrilatère convexe et quadrilatère concave** :

- Un cerf-volant est un quadrilatère convexe
- Un deltoïde est un quadrilatère concave.

Pour terminer cette activité autour des systèmes articulés symétriseurs, il sera indispensable de demander aux élèves d'écrire sur leur cahier les **propriétés de la symétrie orthogonale** :

- **équidistance** par rapport à l'axe du point d'origine et du point image,
- **orthogonalité** de l'axe et du segment joignant le point origine au point image.

**Variante du premier symétriseur pour les plus grands (à partir de la classe de quatrième)**

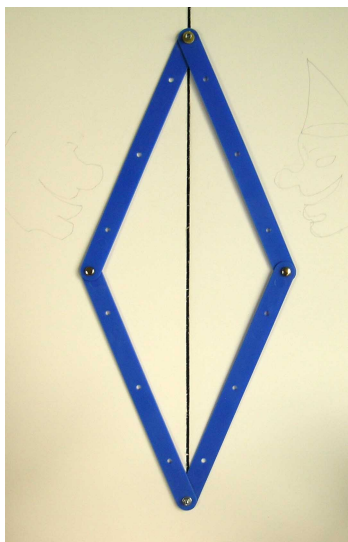


Figure n°12

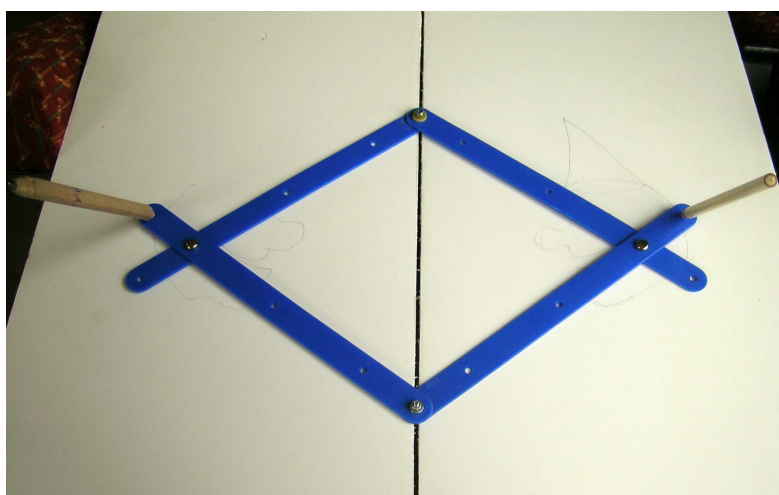


Figure n°13

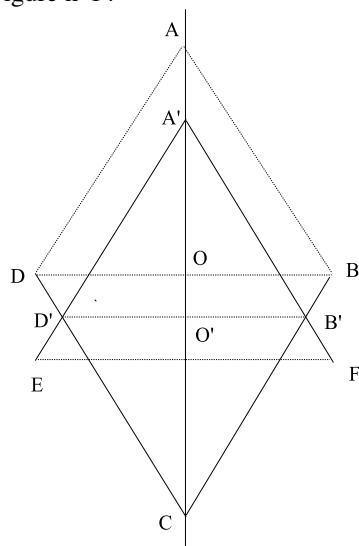
La figure n°12 représente une photo du premier symétriseur.

La manipulation de celui-ci montre une difficulté : il est difficile de placer le crayon et la pointe sèche sur les sommets du losange extérieurs à la fente : un crayon n'est pas fait pour servir d'axe de rotation. Il serait peut-être plus commode de poser deux rivets creux et de placer la pointe sèche et le crayon à l'intérieur du tube formé par les rivets.

En fait nous **proposons une autre solution** aux élèves présentée par la figure n°13 : les vis ou rivets ne sont pas placés en bout de barrette mais sur le trou précédent, le système articulé est toujours un losange mais la pointe sèche et le crayon sont placés au bout des barrettes.

Nous demandons alors aux élèves d'effectuer le même travail que précédemment et de dire si nous avons de nouveau un symétriseur. S'ils répondent oui, nous leur demandons de justifier leur conjecture, c'est l'occasion de faire un **travail de raisonnement géométrique sur un objet physique**.

Figure n°14



Le premier symétriseur est représenté par le losange ABCD, la diagonale [AC] est donc portée par la médiatrice de la diagonale [DB]. La nouvelle position des barrettes définit le losange A'B'CD'. Nous avons posé la pointe sèche en F et le crayon en E sur les barrettes qui portent [A'D'] et [A'B']. Les distances DD' et BB' sont égales, par construction des barrettes. Dans le triangle isocèle BCD les segments [D'B'] et [DB] sont donc parallèles et [CA] est médiatrice de [D'B']. De même dans le triangle isocèle EA'F les segments [D'B'] et [EF] sont parallèles. Le segment [CA] qui est porté par la médiatrice de [DB] est aussi porté par la médiatrice de [D'B'] et [EF]. Les points E et F sont donc symétriques par rapport à l'axe (AC).

Nous pouvons donc dire que les points E et F, quelles que soient les positions des points A et C sur la fente, sont équidistants de [AC] et que [EF] et [AC] sont orthogonaux. Donc E et F se correspondent par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

**Notre nouveau système articulé est donc un symétriseur.**

### Commentaire sur la réalisation des symétriseurs

Nous avons présenté cette activité sur la symétrie orthogonale en premier car elle s'insère naturellement dans le programme des classes du collège. Cela étant, elle est un peu délicate à réaliser, à cause du système de glissière, avec le matériel pédagogique usuel. Le lecteur trouvera dans l'article suivant traitant des trisecteurs, une autre solution de glissière : les petits rails pour rideaux trouvés facilement dans les magasins de brico-

lage. Cette solution sera aussi réalisée par le professeur, l'outil sera plus solide et la glissière fonctionnera mieux que celle de la fente dans le carton.

Malgré cette difficulté, nous pensons qu'il est plus pédagogique de faire **réaliser l'ensemble symétriseur (feuille avec fente et losange articulé) à chaque groupe de deux ou trois élèves** car ces manipulations leur sont très profitables, elles développent :

- le soin d'une réalisation technique un peu délicate
- la patience nécessaire à la réalisation et à l'utilisation de l'outil
- les concessions au cours d'un travail en équipe
- la reconnaissance de certains dons d'élèves peu doués pour l'abstraction mathématique mais adroits
- la nécessité du tracé d'une figure codée réaliste et du raisonnement sur celle-ci
- le plaisir de réaliser un travail difficile mais gratifiant et de conserver le produit de ce travail qui pourra ensuite être exposé en classe et montré à l'entourage de l'élève.

### Point de vue didactique

L'utilisation de ce type d'activités repose sur notre **conviction de l'importance de la mise en correspondance de deux ou plusieurs univers physiques et/ou intellectuels** afin de favoriser l'acquisition des notions, concepts et propriétés, géométriques (voir par exemple nos articles en ligne : bibliographie (3)).

Des **conditions nécessaires et suffisantes** pour une réalisation correcte de la construction apparaissent lors

des manipulations des barrettes articulées et des barrettes libres. Les tiges sont les représentations physiques de la notion de « ligne droite ». Une « boîte à camembert » est la représentation du cercle géométrique (voir article du prochain Miroir : les « trisecteurs »).

Une fente rectiligne découpée dans un carton permettant de faire glisser une vis représente aussi une ligne droite. La vis représente alors un point mobile sur la

droite, on accède alors à la notion de **lieu géométrique**.

Il apparaît alors aux élèves combien il est nécessaire, premièrement **de soigner la réalisation de l'outil** (surtout dans le cas, très intéressant, où ils réalisent eux-mêmes celui-ci), deuxièmement de le manipuler avec le **maximum de précision**, troisièmement de représenter avec soin mais en évitant les tracés inutiles le fonctionnement de l'outil par une **figure géométrique codée**.

Nous appelons ces techniques d'aller et retour entre l'observation, la manipulation et le raisonnement des actions « **directement expérimentables** ».

Cette prise de contact avec des objets géométriques non parfaits mais perfectibles permet en outre d'introduire de façon naturelle les notions « **d'erreur** » et « **d'approximation** ».

À propos de ces réalisations et manipulations d'outils mathématiques nous citerons Émile Borel qui, dès 1904 soulignait la nécessité de créer dans les écoles des « Laboratoires de Mathématiques » où les élèves disposeraient de matériel : carton, ficelle, tiges, axes file-

tés, ciseaux etc. leur permettant de construire des objets ayant des propriétés mathématiques, nous ajouterons maintenant par exemple des outils modernes comme les niveaux à laser et, évidemment, les ordinateurs.

Nous affirmons donc avec vigueur que la **mise en correspondance** de l'univers des systèmes articulés et, plus généralement des instruments géométriques, avec l'univers des figures construites avec les outils traditionnels de la géométrie : règle, équerre et compas est **indispensable à l'installation dans l'univers mental de l'élève des propriétés géométriques** étudiées au collège et au lycée ; cet univers mental sera, par la suite un excellent terreau pour l'acquisition de notions plus difficiles, par exemple le raisonnement dans des espaces de dimensions supérieures.

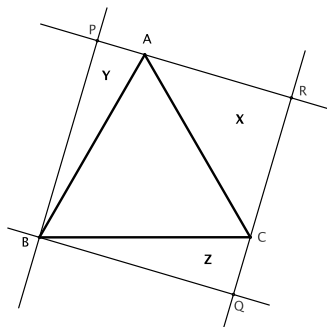
Dans notre article suivant du Miroir des Mathématiques, nous vous présenterons des **trisecteurs**, c'est-à-dire des systèmes permettant de tracer avec un mécanisme articulé les trisectrices d'un angle donné de mesure inconnue.

### Bibliographie

- (1) RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle *Du dessin perçu à la figure construite*. Ellipses éditeur 2005
- (2) RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle *Practicar la geometría : de las acciones directamente experimentables a sus formalizaciones matemáticas (en español)*. IREM de Basse-Normandie éditeur 2008
- (3) RODRIGUEZ HERRERA Ruben *La géométrie sans le cercle dans la formation de la pensée géométrique et Segments, droites, demi-droites : Exemple de Psychomorphisme contrarié*  
En ligne : [www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article23](http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article23)
- (4) SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben *Nouvelles pratiques de la géométrie*. IREM de Basse-Normandie éditeur 2008
- (5) SALLES-LEGAC Danielle, l'équipe géométrie de l'IREM de Basse-Normandie et l'IREM de Ica Pérou *Histoires de cerf-volants et autres quadrilatères, Historias de cometas y otros cuadrilateros (bilingue franco-espagnol)* IREM de Basse-Normandie éditeur 2009.

## Un problème d'aire autour d'un triangle équilatéral.

Énoncé :  $ABC$  est un triangle équilatéral inscrit dans un rectangle dont  $B$  est un sommet et fait apparaître trois triangles rectangles en chacun des trois sommets du rectangle, distincts de  $B$ . Montrer que les aires  $Y$  et  $Z$  des triangles rectangles de sommet  $B$  ont une somme égale à l'aire  $X$  du troisième triangle d'hypoténuse  $AC$ , c.-à-d.  $X = Y + Z$



### L'étude de ce problème peut retenir notre attention à plusieurs titres :

- Au collège et au lycée, pour la fabrication d'un puzzle, pour les raisonnements, les constructions géométriques élémentaires et l'emploi non artificiel d'isométries du plan.
- En didactique, par une réflexion sur différentes méthodes et leurs fondements théoriques
- Comme terrain d'action pour l'usage des logiciels de géométrie dynamique, ici mis en oeuvre dans la réalisation des figures illustrant l'article
- Sur le plan historique, par l'ouverture à des problèmes d'équidécoupage, qui jalonnent l'histoire des mathématiques depuis l'antiquité.

Cet exercice a été récemment proposé dans le journal<sup>2</sup> de la Régionale APMEP de Basse-Normandie, puis aussi repris dans le bulletin vert national de l'association. C'est par ce premier biais que je m'y suis intéressé en proposant des solutions géométriques. Les voies analytiques ou trigonométriques conduisent à des solutions simples et brèves mais sont moins accessibles au niveau des connaissances d'un collégien.

Par la suite, j'ai aussi recherché via l'internet des références sur ce résultat qui est répertorié sur l'encyclopédie *MathWorld* d'Éric Wiesstein<sup>3</sup> : elle renvoie à un ouvrage américain "*Mathematical Gems III*" de Ross Honsberger. J'y ai trouvé cette solution présentée dans un contexte plaisant, dont je vais pour commencer vous présenter une traduction<sup>4</sup>.

### Mme Dijkstra<sup>5</sup>

Au cours de mes échanges épistolaires avec le professeur Edsger Dijkstra<sup>6</sup> je lui adressai un article de géométrie dans lequel le problème suivant était présenté sans solution, comme un simple exercice : On circonscrit un rectangle  $PBQR$  autour d'un triangle équilatéral  $ABC$ , dans une direction arbitraire. Dans le cas général, chaque côté du triangle  $ABC$  crée un triangle rectangle inclus dans le rectangle. Prouver que les aires des deux plus petits triangles ont toujours une somme égale à l'aire du plus grand ( $X = Y + Z$ ).

M. le Professeur Dijkstra savait que sa mère adorait la géométrie et pensa qu'elle pouvait s'amuser avec ce problème. Donc, il le lui adressa (Mme Dijkstra-Kluyver, Zutphen, The Netherlands<sup>7</sup>) et, en retour de courrier, il récupéra la solution suivante.

Puisque  $AB = AC$  ( $ABC$  équilatéral), pivotons le triangle  $PAB$  autour de  $A$  jusqu'à ce que  $AB$  coïncide avec  $AC$ . De même pour le triangle  $QCB$  que nous pivotons autour de  $C$  jusqu'à ce que  $BC$

<sup>2</sup> Voir <http://www.apmep.asso.fr/Les-Maths-I-Omega-numero-9-fevrier>

<sup>3</sup> Voir <http://mathworld.wolfram.com/EquilateralTriangle.html>

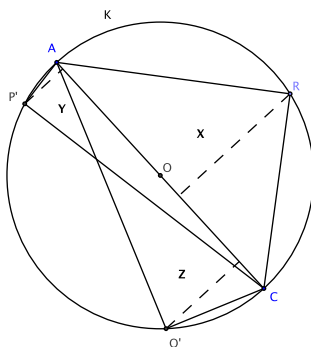
<sup>4</sup> Honsberger, R. *Mathematical Gems III*. Washington, DC : Math. Assoc. Amer. , Chap. 2 Gleanings from geometry, pp. 19-21, Dolciani Mathematical expositions n°9 M.A.A. 1985

<sup>5</sup> mathématicienne néerlandaise (1900-1994)

<sup>6</sup> Edsger Wybe Dijkstra, né à Rotterdam le 11 mai 1930, et mort à Nuenen le 6 août 2002 était un mathématicien et informaticien néerlandais du XXe siècle. Après des études de physique théorique, il s'engage dès 1955 dans le domaine de l'informatique alors naissante, dont il est l'un des pionniers les plus éclairés. Parmi ses contributions se trouve un algorithme de calcul du plus court chemin dans les graphes, connu sous le nom d' algorithme de Dijkstra. Il reçut le prestigieux prix ACM Turing Award en 1972

<sup>7</sup> Son fils, Edsger Wybe Dijkstra écrivit au sujet de son influence mathématique maternelle " ... she had a great agility in manipulating formulae and a wonderful gift for finding very elegant solutions..."

coïncide avec  $AC$ . Désignons par  $P'$  et  $Q'$  les points associés à  $P$  et  $Q$  dans ces rotations. Puisque  $X, Y$ , et  $Z$  ont maintenant une base commune  $AC$ , la somme des aires  $Y + Z$  donnera  $X$  si et seulement si la somme des hauteurs relatives à  $AC$  issues de  $P'$  et  $Q'$  est égale à la hauteur issue de  $R$ .

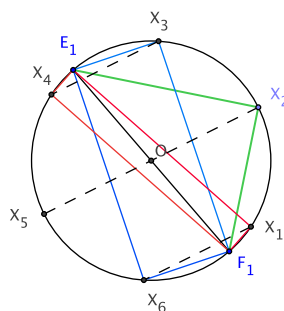
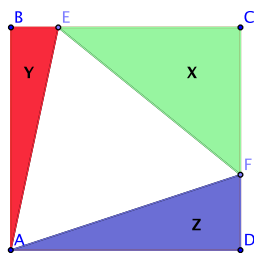


Comme  $AC$  est intercepté par des côtés d'angles droits en  $P', Q',$  et  $R'$  le cercle  $K$  de diamètre  $AC$  contient chacun de ces points. Maintenant dans la figure initiale, l'angle  $\widehat{RAP}$  mesure  $180^\circ$ . Cependant, il a été diminué de  $60^\circ$  par la rotation de centre  $A$  ( $\widehat{BAC} = 60^\circ$  dans un triangle équilatéral). Donc dans la figure finale,  $\widehat{P'AR} = 120^\circ$  et cela signifie que l'arc  $P'AR$  est le tiers de la circonférence de  $K$ . De même l'arc  $Q'CR$  est aussi égal au tiers de la circonférence, laissant au plus petit arc d'extrémités  $P'Q'$  le tiers final. La conclusion tirée de ces arguments est que  $P'Q'R$  forment un triangle équilatéral inscrit dans  $K$ . Dès lors, Mme Dijkstra propose de suspendre des masses égales en chaque point  $P', Q',$  et  $R$ . Puisque  $P'Q'R$  est équilatéral, le centre de gravité de ce système de masses coïncidera avec le centre  $O$  du cercle  $K$ . Ainsi, si l'on devait soutenir le point  $O$ , on y tiendrait la masse totale du système. Une lame de couteau placée sous  $AC$ , donc supportant le point "critique"  $O$  garderait le système en équilibre. Par conséquent, il n'y aurait aucune tendance pour le cercle ainsi chargé à pencher d'un côté ou de l'autre de l'arête  $AC$ . C'est pourquoi les moments par rapport à  $AC$  calculés pour les masses placées en  $P'$  et  $Q'$  doivent être exactement contrebalancés par le moment calculé pour la masse placée en  $R$  et la relation entre les hauteurs en découle immédiatement.

Quelle merveilleuse solution ! (D'autant plus remarquable, compte tenu du fait que Mme Dijkstra est une octogénaire.)

J'ai retrouvé cet exercice posé sur deux autres sites du web ([www.diophante.fr](http://www.diophante.fr) et [centraledes-maths.uregina.ca](http://centraledes-maths.uregina.ca) selon lequel ce problème provient du journal hollandais *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, problème 1580 – solution géométrique due à D. Kruyswijk<sup>8</sup> –). Comme celle-ci, la solution géométrique proposée par Paul Voyer (site *diophante*) reprend l'approche précédente dans sa première partie et établit en-

suite la relation entre les hauteurs des triangles introduites par Mme Dijkstra, selon une démarche géométrique introduisant un hexagone régulier dont les côtés sont proportionnels à la somme des "petites hauteurs" et à la grande avec des coefficients *ad hoc* (voir figure ci-dessous). Tout ceci sans référence à "la statique du solide".

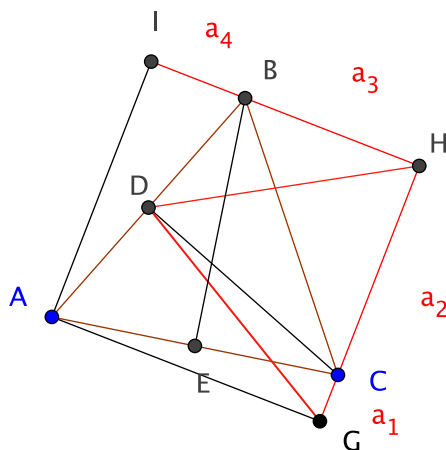


<sup>8</sup> *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 55, 1967–1968, page 125.



J'en viens maintenant aux autres preuves que j'ai déjà présentées sur le site web de l'APMEP. Dans la suite de l'article, j'adopte des notations différentes de celles du livre de Honsberger : Un triangle équilatéral  $ABC$  est inscrit dans le rectangle  $AIHG$ . Alors, la somme des aires des triangles  $AIB$  et  $AGC$  est égale à l'aire du triangle  $BCH$ .

### Preuve n°1 par le théorème de Pythagore



$[CD]$  est la hauteur de  $ABC$  issue de  $C$ . Posons  $AB = BC = CA = a$  et  $CD = h$  ( $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ). Le quadrilatère  $AGCD$  est inscriptible (angles droits en  $D$  et  $G$ ) dans le cercle de diamètre  $AC$ . On en déduit vu l'orientation, que  $\widehat{DGC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{3}$ . De même avec  $DBHC$  on a  $\widehat{DHC} = \widehat{DBC} = \frac{\pi}{3}$ . Donc le triangle  $DHG$  est aussi équilatéral. Signalons au passage que cela donne une condition nécessaire et suffisante d'existence

de  $ABC$  pour un rectangle  $(L \times l)$  donné –  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{L}{l} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$  – et fournit un procédé de construction de  $ABC$ .

En notant  $h_1$  la hauteur du triangle  $DHG$ , nous déduisons par le théorème de Pythagore que

$$h_1^2 = (a_1 + a_2)^2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = h^2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2} - a_1\right)^2 \text{ d'où il résulte par la deuxième égalité que}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2 = h^2 \tag{1}$$

De même,

$$a_3^2 + a_4^2 + a_3a_4 = h^2 \tag{2}$$

Enfin,  $BCH$  étant rectangle en  $H$ , toujours par le théorème de Pythagore,

$$a_2^2 + a_3^2 = a^2 = \frac{4}{3}h^2 \tag{3}$$

Dès lors (1) et (3) entraînent  $a_2^2 + 4a_1^2 + 4a_1a_2 = 3a_3^2$ , soit

$$(a_2 + 2a_1)^2 = 3a_3^2 \tag{4}$$

De même, (2) et (3) entraînent

$$(a_3 + 2a_4)^2 = 3a_2^2 \tag{5}$$

Par produit de (4) et (5) on obtient  $9(a_2a_3)^2 = [(a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_4)]^2$  et puisque tous les  $a_i$  sont positifs, l'égalité se simplifie en

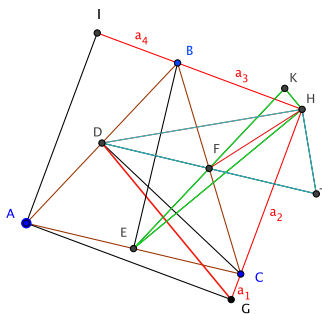
$$3(a_2a_3) = (a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_4) \tag{6}$$

(6) équivaut à  $3(a_2a_3) = a_2a_3 + 2a_4a_2 + 2a_3a_1 + 4a_1a_4$  ou encore à  $a_2a_3 = a_4a_2 + a_3a_1 + 2a_1a_4$  qui s'écrit aussi

$$a_2a_3 = a_4(a_2 + a_1) + a_1(a_4 + a_3)$$

Enfin, en multipliant les deux membres par  $\frac{1}{2}$   $\text{aire}BHC = \text{aire}AIB + \text{aire}AGC$  C.Q.F.D.

## Preuves géométriques à base d'isométries planes

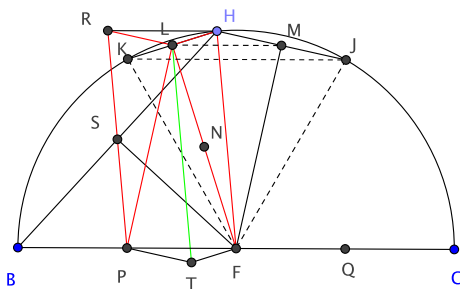


**Preuve n°2 par rotations** –  $[CD]$  est la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $C$ . On introduit les milieux  $F$  et  $E$  de  $[BC]$  et  $[AC]$ . Le quadrilatère  $AGCD$  est inscriptible (Angles droits en  $D$  et  $G$ ) dans le cercle de diamètre  $AC$ . On en déduit vu l'orientation, que  $\widehat{DGC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{3}$ . De même avec  $DBHC$ , on a  $\widehat{DHC} = \widehat{DBC} = \frac{\pi}{3}$ . Donc, le triangle  $DHG$  est équilatéral de même orientation que  $ABC$ . Dans la rotation de centre  $D$  et d'angle  $(\vec{BA}, \vec{BC})$   $G$  a pour image  $H$ ,  $A$  a pour image  $E$  et  $E$  a pour image  $F$ . Notons  $K$  et  $J$  les symétriques de  $E$  et  $D$  par rapport à  $F$ . Nous pouvons alors conclure que  $C$  a pour image  $K$  dans la rotation de centre  $D$  précédente. Finalement cette rotation transforme le triangle  $AGC$  en  $EHK$ . Un raisonnement analogue peut être fait avec la rotation de centre  $E$  et d'angle  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  qui transforme  $AIB$  en  $DHJ$ .  $F$  est le milieu des hypoténuses des triangles rectangles

$DHJ$  et  $EHK$ . Les points  $K, J, H$  sont situés sur le cercle de diamètre  $[BC]$  et les triangles isocèles  $FHJ$  et  $FHK$  ont une aire égale à la moitié de celles des triangles rectangles  $DHJ$  et  $EHK$ . La somme des distances du point  $H$  aux segments  $[FK]$  et  $[FJ]$  est égale à la distance de  $H$  à  $[BC]$  d'après une propriété classique du triangle équilatéral (Pour tout point situé sur un côté, la somme des distances de ce point aux deux autres côtés est égale à la hauteur du triangle – ici le triangle, non tracé sur la figure, est constitué par  $(FK)$ ,  $(FJ)$  et la droite passant par  $H$  et parallèle à  $(BC)$ ). De cela, nous concluons que la somme des aires des triangles isocèles  $FHJ$  et  $FHK$  est égale à celle du triangle  $FHB$  puisque ils ont tous une même « base » égale à  $\frac{1}{2}BC$ . Comme le triangle  $FHB$  a une aire égale à la moitié de  $CHB$  ( $F$  milieu de  $[BC]$ ), nous pouvons conclure en multipliant par deux que :

$$\boxed{\text{aire}BHC = \text{aire}AIB + \text{aire}AGC \quad \text{C.Q.F.D.}}$$

**Preuve n°3 par découpages** – Cette égalité d'aire s'établit aussi par un découpage des triangles  $FHK$  et  $FHJ$ , reconstituant  $BFH$ . En effet  $AGC$  et  $AIB$  ont des aires doubles des triangles  $FHK$  et  $FHJ$ .



Nous avons extrait une partie de la première figure pour la compléter en introduisant l'arc du demi-cercle de diamètre  $[BC]$  contenant  $H$ , les milieux  $M, L, S$  des cordes  $[HJ]$ ,  $[HK]$  et  $[BH]$  ainsi que  $P$  et  $N$  ceux de  $[BF]$  et  $[LF]$ . On construit alors le symétrique  $T$  de  $H$  par rapport à  $N$  et le symétrique  $R$  de  $P$  par rapport à  $S$ . Par construction de  $K$  et  $J$  (voir la première partie)  $BFJK$  est un parallélogramme ainsi que  $RHPB$  et  $RHFP$ . Comme  $[LM]$  est le segment des milieux du

triangle  $HKJ$  nous en déduisons que  $\vec{LM} = \vec{PF}$ . Le triangle  $RLP$  est donc le translaté du triangle  $HMF$  par le vecteur  $\vec{FP}$ .  $LHFT$  et  $RLTP$  sont aussi par construction des parallélogrammes et constitués chacun de la réunion de deux triangles symétriques isométriques à  $FHL$  et  $FHM$  dont les aires valent le quart de celles de  $AGC$  et  $AIB$ . Puisque le triangle  $RLH$  est le translaté du triangle  $PTF$  par le vecteur  $\vec{FH}$ , la

réunion de  $LHFT$  et  $RLTP$  a même aire que le parallélogramme  $RHFP$  dont l'aire correspond à celle de  $BFH$  ( $RHS$  symétrique de  $PBS$ ). La figure fournit un moyen de découper deux quarts de  $AGC$  et de  $AIB$

pour reconstituer  $BSF$  et  $FSH$ . Réciproquement, on peut partir de  $BSF$  et  $FSH$  pour reconstituer  $AGC$  et  $AIB$ .

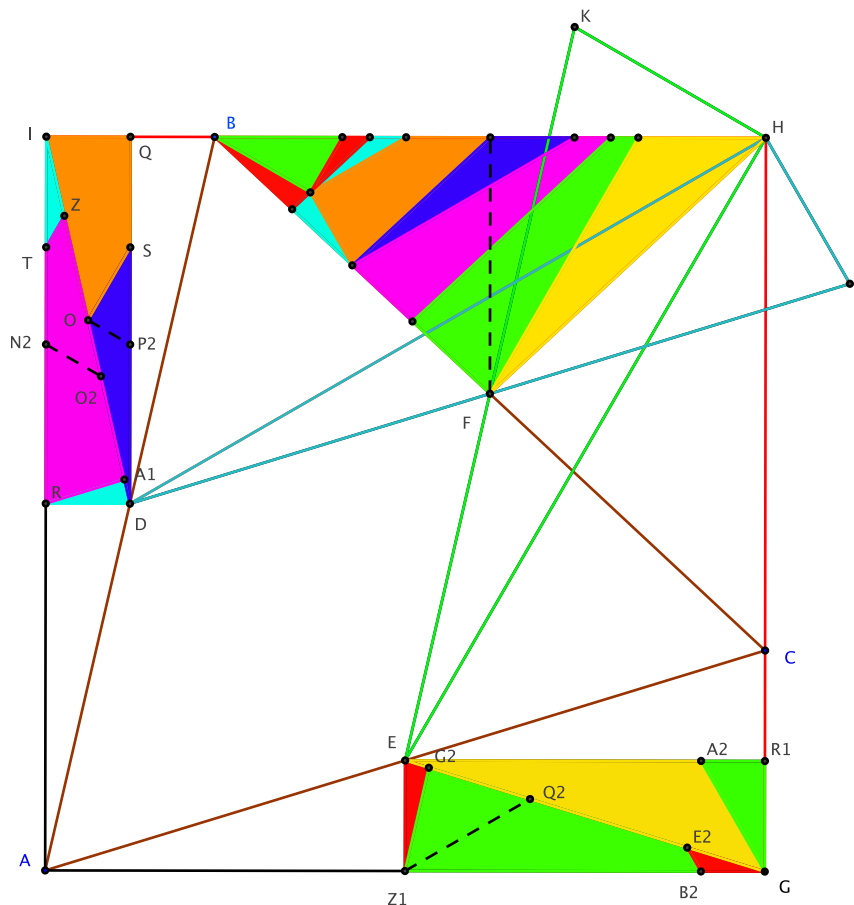
Réalisation du puzzle (découpage des triangles  $AGC$  et  $AIB$  pour reconstituer  $BCH$ ).

On se limite d'abord aux "demi-triangles" constitués par les rectangles inscrits ayant pour diagonales les médianes issues de  $G$  et  $I$ . On achève ensuite à l'aide de symétries axiales orthogonales par rapport aux côtés de ces rectangles non "portés" par ces deux triangles rectangles.

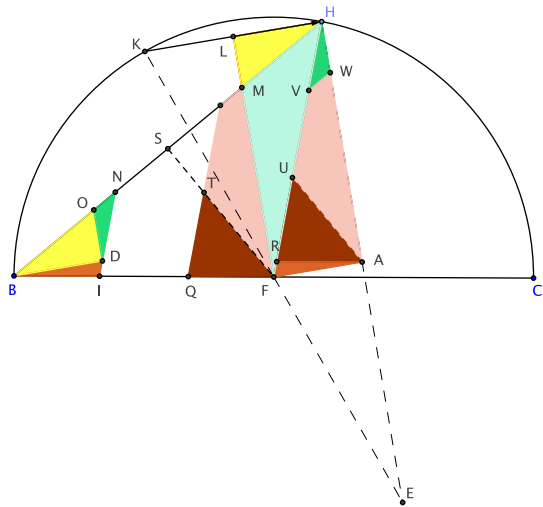
**Triangle AGC** Voir figure ci-dessous.  $R_1$  étant le milieu de  $[GC]$ , on construit  $A_2 = [FG] \cap [ER_1]$  puis  $B_2$  tel que  $\overrightarrow{B_2G} = \overrightarrow{A_2R_1}$ . En notant  $\alpha$  le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme  $A_2GB_2\alpha$ , on construit  $E_2 = [EG] \cap [B_2\alpha]$ . De même,  $Z_1$  étant le milieu de  $[AG]$ , en notant  $\beta$  le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme  $FEZ_1\beta$ , on construit  $G_2 = [EG] \cap [Z_1\beta]$ . Pour le segment  $[Z_1Q_2]$  en pointillé, on considère la droite  $\Delta$  contenant  $Z_1$  et orthogonale à  $[FG]$ , et on construit  $Q_2 = [EG] \cap \Delta$ . Nous avons obtenu cinq parties dont un quadrilatère sécable selon le pointillé (six morceaux).

**Triangle AIB**  $O$  est le milieu de  $[ID]$ ,  $Q$  est le milieu de  $[IB]$ . La droite passant par  $O$  et perpendiculaire à  $[IF]$  recoupe  $[QD]$  en  $S$ .  $T$  est le quatrième sommet du rectangle  $IQST$ . La droite passant par  $T$  et perpendiculaire à  $[IF]$  recoupe  $[QD]$  en  $Z$ . Enfin en notant  $\gamma$  le quatrième sommet (non représenté sur la figure) du parallélogramme  $RDF\gamma$ , on construit  $A_1 = [ID] \cap [R\gamma]$ . Les segments pointillés s'obtiennent, comme pour  $S, T, Z$  en partant de  $O$  mais en menant des sécantes à  $[IR]$  et  $[QD]$  parallèles à  $[IF]$ . Nous avons obtenu cinq parties dont un quadrilatère et un triangle sécables selon le pointillé (sept morceaux).

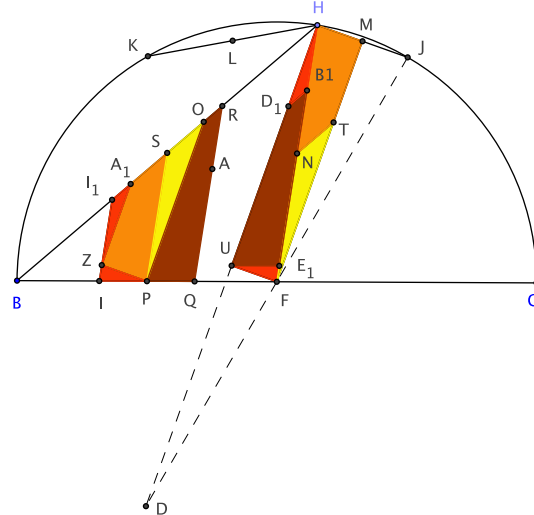
Nous pouvons alors reconstituer  $BFH$  avec les dix parties (treize morceaux pour utiliser ensuite les symétries axiales).



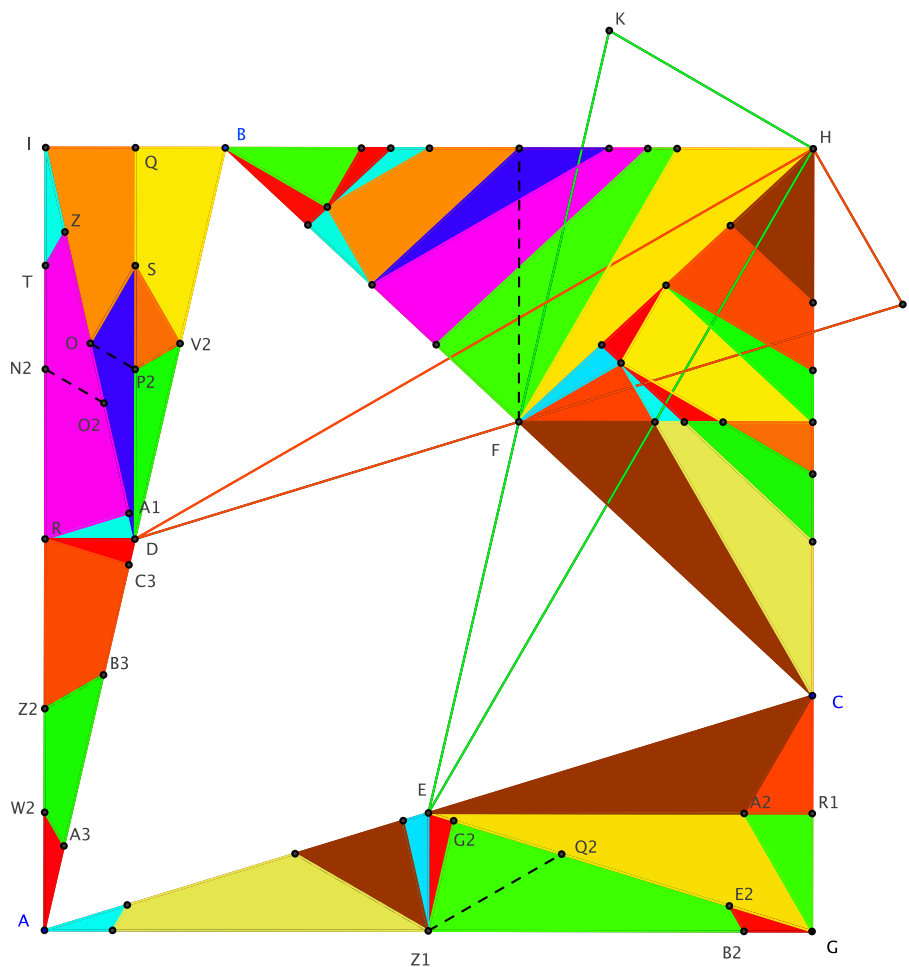
Rectangle FLHA découpé dans BFH



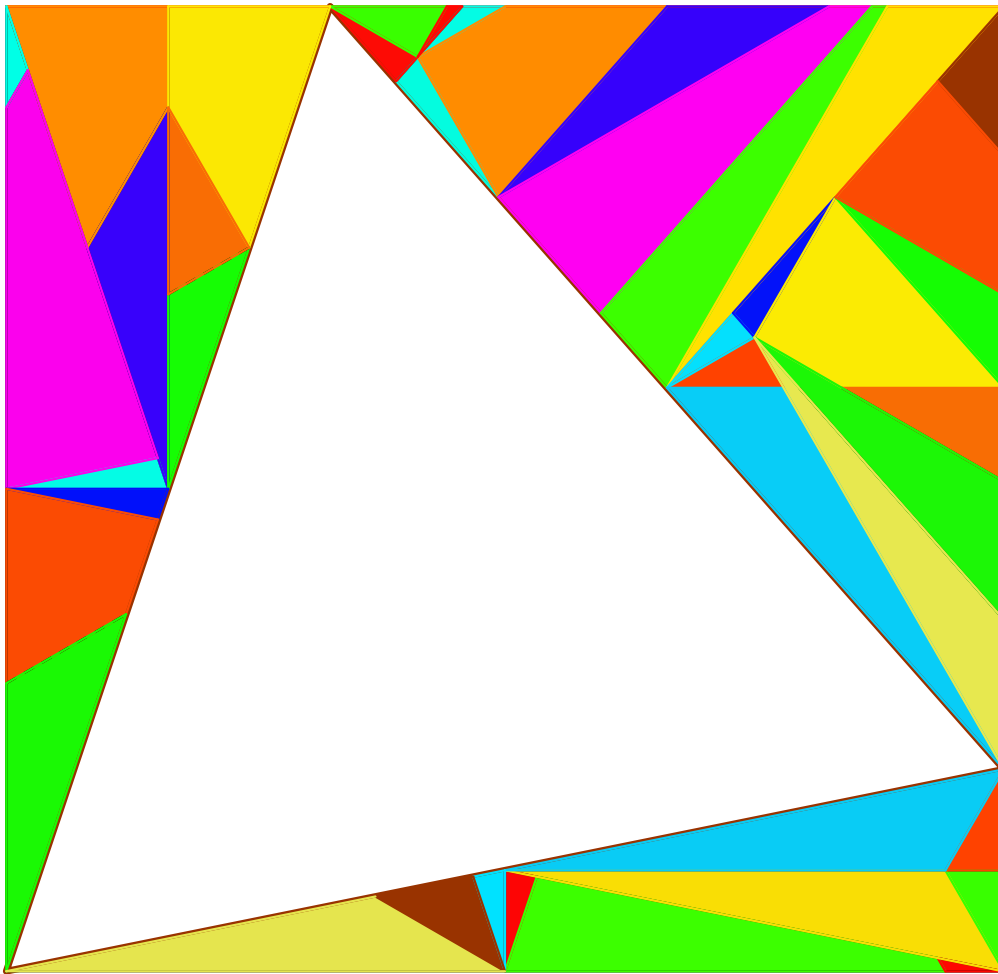
Rectangle FUHM découpé dans BFH



Achèvement du pavage de  $BHC$  en utilisant les symétries axiales orthogonales  
 (On obtient ainsi 23 morceaux dont certains recombinaibles. Finalement 20 morceaux suffisent !)



## L'équidécomposition



Puzzle sur une trilogie à dualité latérale - ÉRIC TROTOUX

## Bibliographie et Sites web consultés

<http://www.apmep.asso.fr/Les-Maths-l-Omega-numero-9-fevrier> – On peut y télécharger le fichier de géométrie dynamique qui permet d'obtenir le puzzle pour une configuration quelconque du triangle dans le rectangle.

MathWorld d'Éric Wiesstein (<http://mathworld.wolfram.com/EquilateralTriangle.html>)

<http://www.diophante.fr/D1.Triangles-et-cercles/D139.-Le-triangle-equilateral-sous-tous-les-angles.html>

<http://centraledesmaths.uregina.ca/mp/previous2000/jan01sol.html> – Référence à *Nieuw Tijdschrift voor Wetkunde*

**Friedelmeyer Jean-Pierre**, *l'Ouvert*. Num. 117. p. 15-30. *Equidécomposabilité des polygones plans*. IREM de Strasbourg, 2008

**Honsberger Ross**, *Mathematical Gems III*. Washington, DC : Math. Assoc. Amer., pp. 19-21, 1985



Pierre Ageron

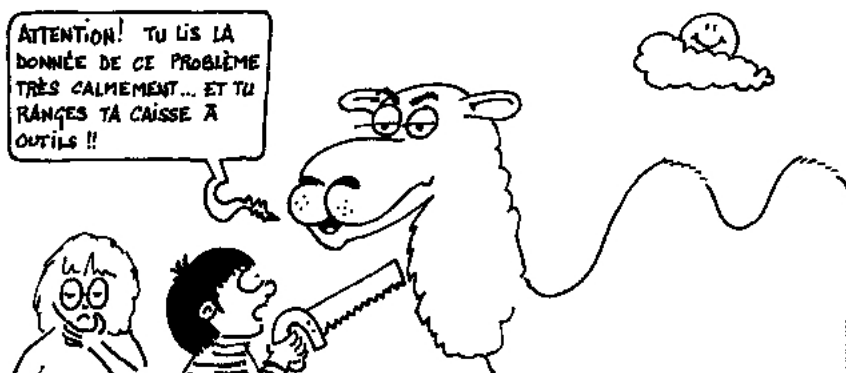
**Dix-sept chameaux et huit galettes.**Circulation et mouvance  
de deux problèmes arithmétiques de la tradition arabe.

collection Mancel (Musée des Beaux-Arts de Caen), ms. 257, f. 63v – cliché de l'auteur



### 1) Le problème des dix-sept chameaux.

Un père mourut en laissant dix-sept chameaux à ses trois fils. Son testament prévoyait que l'aîné hériterait de la moitié des chameaux, le cadet du tiers et le benjamin du neuvième. Le partage semblait impossible, on consulta un sage. Celui-ci ajouta un chameau lui appartenant aux dix-sept formant l'héritage. Le partage fut alors facile : neuf chameaux pour l'aîné, six pour le cadet et deux pour le benjamin. Comme ceci ne faisait au total que dix-sept, le sage put reprendre possession de son chameau...



tiré de *Mathématique septième année*, Département de l'instruction publique du canton de Neuchâtel, 1989, p. 50.

Cet apparent paradoxe arithmétique est aujourd'hui un grand classique des manuels de collège français ; on le trouve même dans un livre de préparation au CAPES de mathématiques<sup>9</sup>. Il s'agit en fait d'un problème de proportionnalité, qu'on pourrait résoudre (mais on y perdrait beaucoup !) sans faire intervenir le chameau du sage, en disant simplement que les nombres de chameaux revenant aux trois frères doivent être respectivement à  $\frac{1}{2}$ , à  $\frac{1}{3}$  et à  $\frac{1}{9}$  ce que 17 est à la somme  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ . La surprenante inutilité *a posteriori* du dix-huitième chameau s'explique justement par le fait que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} < 1$  et plus précisément que (2, 3, 9, 18) est solution de l'équation :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{n} = 1 \quad (*)$$

ce qui montre l'existence d'un lien entre le problème des chameaux et la question des décompositions en fractions égyptiennes (de numérateur 1). Toute solution  $(a, b, c, n) \in \mathbb{N}^4$  de l'équation (\*) telle que  $1 \leq a < b < c \leq n$  et  $a, b, c$  divisent  $n$  fournit d'ailleurs une variante à  $n - 1$  chameaux du problème. On peut montrer, ce que je laisse comme divertissement au lec-

teur, qu'il en existe exactement sept. (*Indication* : encadrer  $a$ , puis  $b$ ...) Des variantes d'un autre type ont été considérées par Henri Bareil dans un de ses derniers articles<sup>10</sup> ; je sou mets celle-ci au lecteur : comment le sage peut-il partager soixante-cinq chameaux en une moitié à l'aîné, un tiers au cadet, un quart au benjamin ?

Il semble n'exister ni analyse didactique, ni étude historique du problème des dix-sept chameaux : l'une et l'autre seraient pourtant largement justifiées par sa notoriété. Du point de vue historique se pose notamment la question : est-ce une fantaisie récente ou un authentique problème traditionnel arabe ? Il m'a suffi de taper en arabe *sab'ata 'ashra jamalan* ou *sab'ata 'ashra ba'iran* (dix-sept chameaux) dans un moteur de recherche sur Internet pour réaliser que c'est la deuxième réponse qui vaut et que le sujet est immense ! J'ai alors commencé un travail exhaustif de recherche et confrontation des sources. Bien qu'il soit loin d'être fini, j'ai pensé utile de présenter dès maintenant aux lecteurs du *Miroir des maths* quelques indications sur l'origine et la circulation de ce problème. Deux grandes routes semblent à distinguer : l'une va du Moyen-Orient à la Grande-Bretagne, l'autre de l'Afrique du nord à la France.

#### a) Les dix-sept chameaux, du Moyen-Orient à la Grande-Bretagne.

C'est au sein d'une très ancienne tradition musulmane qu'est contée l'anecdote des dix-sept chameaux. Le rôle du sage y est généralement tenu par 'Alî bin Abî Tâlib. On sait peut-être que 'Alî, mort en 661, fut à la

fois le cousin, le gendre et le quatrième successeur (*khalifa*) du prophète de l'Islam, et qu'il est particulièrement vénéré chez les musulmans chiites. Au fil des siècles s'est constituée une riche littérature sur les paroles et

<sup>9</sup>Dany-Jack Mercier, *L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques* (Paris, 2006) p. 88 et 446.

<sup>10</sup>Henri Bareil, « Des chameaux sans conflits ni confits », *Bulletin de l'APMEP* 472 (2007) p. 648-656.

les vertus attribuées à ‘Alî, dans laquelle furent entre autres mises en avant ses dispositions pour les mathématiques<sup>11</sup>. Ces ouvrages lui attribuent la résolution de divers problèmes d’arithmétique juridique, dont les plus célèbres sont le problème du *minbar* (la chaire), le problème des dinars, le problème des huit galettes<sup>12</sup>, le problème de la femme qui accouche après six mois, le problème de l’antre du lion et le problème des dix-sept chameaux<sup>13</sup>. J’espère faire un jour une étude détaillée des sources arabes anciennes du problème des dix-sept chameaux ; les sources arabes contemporaines que j’ai pu consulter se réfèrent soit à Muhammad Mahdî al-Nirâqî (Iranien, 1716-1795)<sup>14</sup>, soit à Sharaf al-dîn Ismâ‘îl Ibn al-Muqri’ (Yéménite, 1353-1433)<sup>15</sup> – mais l’existence de sources plus anciennes encore ne fait guère de doute. Point commun entre ces deux auteurs : s’ils parlent bien de trois hommes en litige au sujet de dix-sept chameaux, il ne précisent aucunement que ces hommes sont des frères, ni que les chameaux constituent un héritage – peut-être parce que la validité d’un testament aussi bizarre serait fort douteuse en droit islamique. La seule différence notable entre les deux versions réside dans l’expression mathématique de la condition essentielle du partage : l’une dit qu’il ne doit pas y avoir de reste, ou de chameau non attribué, l’autre qu’il ne doit pas y avoir de fraction, impliquant le sacrifice d’un chameau. Je connais cependant une troisième version arabe, apparemment une expansion des précédentes<sup>16</sup>, qui précise qu’il s’agit de partager un héritage entre trois frères selon les dispositions du testament de leur père et est riche encore d’autres détails comme : « Il [‘Alî] appela son serviteur Qundur [lire probablement Qanbar] et lui dit : “Tu vas ajouter notre chameau roux à ces chameaux !” »

Quand l’Europe s’est-elle approprié le problème des dix-sept chameaux ? Il me semble que ce n’est pas avant la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, et que c’est en Grande-Bretagne qu’il pénétra d’abord, en provenance du Moyen-Orient. Les Britanniques étaient alors très

présents dans cette région du monde pour leurs intérêts économiques ; un missionnaire de l’Église d’Angleterre s’y trouvait aussi : le Révérend Fletcher, arrivé à Mossoul en 1842. Dans ses souvenirs publiés en 1850, il fit connaître notre anecdote à ses compatriotes, sous une forme atypique mettant en jeu des chevaux au lieu de chameaux et remplaçant ‘Alî par un anonyme cadi (*qâdî*, juge musulman). Les trois frères, ravis du jugement, s’exclament : « Mashallah ! [Que la volonté de Dieu soit faite !] Ô cadi, ta sagesse égale celle de notre Seigneur, Suleiman Ibn Daoud [le roi Salomon] »<sup>17</sup>. Par la suite, divers journaux britanniques voués à l’instruction populaire publièrent d’autres versions, avec chameaux, dont plusieurs présentent des particularités intéressantes. Dans l’une d’elles<sup>18</sup>, présentée comme persane, le sage est désigné comme « mollah » (maître savant, forme persane typique des pays chiites) et traite les trois frères qui se querellent d’« hommes de Belial » (nom d’un démon biblique). Dans une deuxième<sup>19</sup>, il est nommé « Mohammed Ali », puis simplement « Ali », ce qui me semble être un vestige de la version chiite de l’histoire. Dans une troisième<sup>20</sup>, il est à nouveau un cadi anonyme, mais dont le chameau favori, accordé aux frères pour faciliter le partage, porte un nom plutôt surprenant : ce chameau s’appelle Fatima ! Dans l’histoire de l’Islam, Fâtima est la fille préférée de Muhammad et l’épouse de ‘Alî. Tout se passe donc ici comme si ‘Alî avait poussé la générosité jusqu’à prêter sa propre femme, sous la forme d’un très beau chameau<sup>21</sup>, avant bien sûr de la reprendre. En effet, aucun des trois fils ne retrouve Fatima parmi les chameaux qui lui reviennent, ce qui les fait naïvement conclure : « Sans doute El Shaitan [Satan] l’a transformé en un chameau d’aspect moins noble ».

De Grande-Bretagne, les dix-sept chameaux atteignirent vite l’Amérique du nord ; je laisse aujourd’hui cette route de côté<sup>22</sup> pour aller les retrouver en Afrique.

<sup>11</sup> Selon al-Yafrashî (XIII<sup>e</sup> siècle), ‘Alî aurait appris l’algèbre en cinq jours, bien avant qu’al-Khwarizmî n’en mît les éléments par écrit. Voir : Ahmed Djebbar, *L’algèbre arabe* (Paris, 2005) p. 41-42.

<sup>12</sup> Ce problème fait l’objet de la deuxième partie de cet article.

<sup>13</sup> Ahmad Muhammad Jawâd Muhsin, *‘ilm al-hisâb ‘ind al-imâm ‘Alî ‘alayhi al-salâm* (La science du calcul chez l’imâm ‘Alî) (1967) article en arabe en ligne sur plusieurs sites.

<sup>14</sup> Ahmad Amîn, *al-takâmul fî al-islâm* (1963) vol. 4, p. 159, citant : *mushkilât al-‘ulûm* (Les problèmes des sciences) de al-Nirâqî.

<sup>15</sup> Husayn ‘Alî al-Shafâ‘î, *al-haqq al-mubîn fî qadâ’ amîr al-mu‘minîn ‘Alî bin Abî Tâlib* (La vérité éclatante sur la justice du Commandeur des croyants ‘Alî bin Abî Tâlib) (1962) p. 115, citant : *sharh badî‘at Ibn al-Muqri’*.

<sup>16</sup> Zahid Badr al-dîn, *tarâ‘if wa nawâdir fî l-mâdî wa l-hâdir* (Facéties et bons mots du passé et du présent) (1992) p. 79. Cité d’après la traduction de Jean-Jacques Schmidt dans : *Le livre de l’humour arabe* (Paris, 2005) p. 26.

<sup>17</sup> James Phillips Fletcher, *Narrative of a Two Years’ Residence at Nineveh, and Travels in Mesopotamian, Assyria and Syria* (Londres, 1850) vol. 2, p. 15-17

<sup>18</sup> *The Leisure hour* (Londres, 1869) p. 319

<sup>19</sup> *Chambers’s Journal of Popular Literature, Science and Arts* 40 (Londres, 1872) p. 450.

<sup>20</sup> « Some puzzles », *Knowledge* 9 (Londres, 1886) p. 305

<sup>21</sup> L’orientaliste Louis Massignon a signalé qu’un des sens anciens du mot Fâtima est « jeune chamelle sevrée ».

<sup>22</sup> Je signale quand même l’anecdote dans l’édition américaine du livre de Fletcher (Philadelphie, 1850) p. 206, et dans la rubrique « Amusement for winter evenings », *The New Dominion Monthly* (Montréal, déc. 1869) p. 46.

b) *Les dix-sept chameaux, de l'Afrique du nord à la France.*

L'anecdote des dix-sept chameaux est certainement arrivée anciennement au Maghreb. Je ne connais pas pour l'instant de sources écrites, mais j'ai trouvé des attestations de sa circulation orale datant de l'époque coloniale. Dans ces pays sunnites, la glorification des mérites de 'Alî est visiblement passée au second plan et sa personne a été remplacée par un personnage anonyme, le plus souvent un cadî (juge) ou un derviche (homme religieux vivant pauvrement), qui prête ou qui emprunte un dix-huitième chameau. Le militaire français Paul Wachi l'inséra dans ses *Souvenirs* d'Algérie à la suite d'un tableau du fonctionnement de la justice en tant que « curieux exemple de jugement de cadî »<sup>23</sup>. En 1895, un certain Louvet la présenta aux lecteurs du *Figaro* comme un conte « narré par un magistrat musulman du Sud algérien ». Dans sa version, les trois frères avaient, pour la première fois, des noms : Hassein (sic), Mohamed et Mustapha ; quant au sage, c'était un derviche sur le chemin de retour de la Mecque. Du point de vue mathématique, Louvet fit, de manière peu exacte, le lien entre la méthode du derviche et la « règle de fausse supposition » et conjectura à tort que d'autres nombres que 17 et 18 ne conviendraient pas<sup>24</sup>. On dispose aussi du témoignage de l'écrivain marocain Driss Chraïbi, à qui son père raconta le problème à la fin des années 1930 dans une version avec dix-sept chevaux et un ermite, puis demanda malicieusement de le soumettre à son professeur de mathématiques, ce qui ne manqua pas de déstabiliser l'enseignant français<sup>25</sup>.

J'ai enfin repéré une version, avec dix-sept chameaux et un cadî, collectée en 1947 en Mauritanie par

Paul Dubié, administrateur des colonies<sup>26</sup>.

C'est donc semble-t-il indépendamment de la Grande-Bretagne et par des récits venus d'Algérie que le problème des dix-sept chameaux pénétra en France. Hormis le livre de Paul Wachi et l'article du *Figaro* déjà signalés, l'anecdote apparut entre 1889 et 1900 chez divers spécialistes des divertissements mathématiques : Alphonse Rebière<sup>27</sup>, Édouard Lucas<sup>28</sup>, Charles Bergmans<sup>29</sup>, Étienne Ducret<sup>30</sup>, Émile Fourrey<sup>31</sup>. Dans la première édition du livre de Rebière (1889), l'anecdote était mutilée de ce qui lui donne son sel : le prêt du chameau supplémentaire. Les choses furent heureusement rétablies dans la deuxième édition (1893) ! À l'image des versions maghrébines, les versions françaises considèrent en général les hommes comme trois frères et remplacent l'imâm 'Alî par un cadî. Ducret se singularise cependant en parlant de trois personnes et d'un voisin. Le père est « un Arabe » pour Rebière, Lucas et Fourrey, mais « un Turc » pour Bergmans. Ce dernier auteur est par ailleurs celui qui indique le plus clairement qu'il ne s'agit de rien d'autre dans ce problème que de proportionnalité. Chez Lucas on lit que le problème « provient des traités d'arithmétique des mathématiciens arabes », ce dont je n'ai trouvé aucune confirmation.

Au total, la multiplicité des versions montre que le transfert de cette énigme mathématique-juridique du monde arabe à l'Europe ne doit pas être considéré comme un fait unique et datable, mais comme un faisceau dense d'événements largement indépendants dans la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle.

c) *Au XX<sup>e</sup> siècle : les dix-sept chameaux dans tous leurs états.*

Le problème des dix-sept chameaux connu au XX<sup>e</sup> siècle une fortune extraordinaire dans tout le monde occidental, non démentie en ce début de XXI<sup>e</sup> siècle. L'aspect magique de la solution, l'exotisme du contexte, les nombreuses lectures possibles de l'anecdote lui valurent d'être insérée dans d'innombrables livres, articles, sites ou blogs, de créations mathématiques bien sûr, mais aussi (et même davantage) de philosophie, de psychologie, de sociologie, de psychanalyse, d'économie, de science politique ou de droit. Dans le domaine littéraire,

elle apparut notamment dans les *Kalendargeschichten* (Histoires de Monsieur K.) de Bertolt Brecht (1948) et dans *O Homem que calculava* (L'homme qui calculait) de Júlio César de Mello e Souza, alias Malba Tahan (1949). Le psychanalyste Jacques Lacan joua un rôle séminal dans sa transmission : le philosophe Jean-Pierre Dupuy la tenait de lui, le sociologue allemand Niklas Luhmann la tenait de Dupuy, le juriste belge François Ost la tenait de Luhmann, le psychanalyste argentin Mauricio Tarrab de sa collègue Marie-José Duffau qui

<sup>23</sup> Paul Alphonse Amable Wachi (Kiva), *En Algérie. Souvenirs* (Paris, 1894) p. 106 (chapitre daté de 1882).

<sup>24</sup> Louvet, « Problème des chameaux. Conte arabe », *Le Figaro*, supplément littéraire, 21 et 28 septembre 1895.

<sup>25</sup> Driss Chraïbi, *Vu, lu, entendu* (Paris, 1998) p. 59-61.

<sup>26</sup> Paul Dubié, « 'Lergat' : devinettes, problèmes (Mauritanie) », *Notes Africaines* 33 (Dakar, 1947) p. 15

<sup>27</sup> Alphonse Rebière, *Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités* (Paris, 1889) p. 239 ; (2<sup>e</sup> édition, Paris, 1893) p. 482

<sup>28</sup> Édouard Lucas, « Les appareils de calcul et les jeux de combinaisons » *Revue scientifique (Revue rose)* 45 (1890) p. 8-9

<sup>29</sup> Charles Bergmans, *Traité d'arithmétique élémentaire* (Paris, 1890) p. 151

<sup>30</sup> Étienne Ducret, *Les passe-temps intellectuels : créations mathématiques, géométriques, physiques, chimiques, mécaniques, musicales, artistiques et littéraires...* (Paris, 1892) p. 51.

<sup>31</sup> Émile Fourrey, *Récréations arithmétiques* (Paris, 1899) problème 208, p. 159.

la tenait de Lacan, etc. Tous ces auteurs l'ont abondamment commentée<sup>32</sup>.

J'ai constitué, principalement à partir de l'Internet, un corpus provisoire d'une cinquantaine de versions contemporaines du conte en langues européenne. Certaines sont très contemporaines, d'autres suggèrent l'existence de sources antérieures qui m'auraient échappé. La variation observée est ample et instructive. Le personnage du sage ne s'appelle dans aucun cas 'Alî, mais parfois Hicham, Ibrahim, Mokhtar... Il peut être non seulement, comme dans les versions du XIX<sup>e</sup> siècle, un juge, un sheikh du voisinage ou un pauvre bédouin, mais encore le moukhtar (maire) du village, une vieille femme, l'oncle des trois frères, le plus jeune des trois, ... Pour *L'épreuve d'exposé au CAPES*, ouvrage déjà évoqué, c'est « un vieux caïd » (chef d'agglomération, à moins d'une confusion entre les mots *caïd* et *caïd*). Dans un ouvrage pédagogique suisse<sup>33</sup>, ce n'est autre que Nasr al-dîn, personnage récurrent des histoires burlesques dans le monde turc et ottoman depuis le XV<sup>e</sup> siècle. Le chameau qu'il prête peut être d'une grande beauté ou au contraire borgne et puant. Les trois frères ont souvent des noms, très variables, puisés dans une gamme de noms musulmans classiques. Quant à leur père défunt, totalement absent des sources médiévales, simple père arabe anonyme dans les versions du XIX<sup>e</sup> siècle, il se nomme au XX<sup>e</sup> Abdallah, Ismael, Omar, Ahmed ou... Ali, et est tour à tour, un vieil Arabe du temps des Mille et une nuits, un fakir (c'est-à-dire un pauvre) ou un grand vizir (premier ministre), un marchand de chameaux ou un émir du Moyen-Orient, un chef d'une tribu touareg de l'Aïr (Niger) ou un honorable caravanier de Boukhara (Ouzbékistan) !

Certaines des variantes numériques qu'autorise le problème sont aussi en circulation : la version à onze chameaux – celle que racontait Lacan –, plus rarement celle à vingt-trois chameaux, et aussi celle à trente-cinq chameaux, que l'on trouve dans *L'homme qui calculait*, fortement déviante en ce sens qu'elle ne redistribue que trente-quatre chameaux et permet ainsi au juge de se rémunérer. Il existe encore des versions transplantées dans

d'autres lieux ou d'autres cultures, par exemple dans une communauté juive des Balkans, dans un ranch du Texas ou à la cour d'un maharadja : il ne s'agit plus alors de chameaux, mais de chevaux, de vaches ou... d'éléphants.

Qu'en est-il sur l'Internet arabophone ? Le problème des dix-sept chameaux y est très fortement présent, mais bien différemment de ce qu'on observe en Europe. Il circule essentiellement sur des blogs et forums de discussion, rayonnant pour la plupart à partir de l'Irak ou de Bahrein, les deux pays arabes à majorité chiite. Ce n'est jamais en tant que paradoxe, énigme ou récréation mathématique qu'il est présenté, moins encore en tant qu'apologue ou métaphore pour les sciences humaines, mais en tant que récit authentique, attesté par la tradition, destiné à susciter l'admiration pour l'intelligence et la sagacité de l'imâm 'Alî, qui a trouvé la solution du délicat problème juridique qui lui était soumis. Certaines visions plus critiques apparaissent cependant sur certains forums de discussion, notamment maghrébins.

Pour finir, je trouverais intéressant de s'interroger sur le signifie le succès du problème des dix-sept chameaux auprès des enseignants français de mathématiques. De quoi est-il signe ? Il me semble que si le problème est posé sans mise en perspective, son bénéfice pédagogique est mince, et risque même d'être négatif si l'élève n'en retient que le côté surnaturel de l'intervention du dix-huitième chameau, en l'absence de tout apport de méthode. Mais si on se donne la peine de l'insérer à la fois dans un contexte mathématique enrichi (proportionnalité, fractions égyptiennes) et dans un contexte culturel authentique (arithmétique juridique musulmane), si l'on dépasse à la fois l'aspect magique de la solution et l'orientalisme de pacotille de l'habillage, si l'on fait sentir la vraie nature mathématique du problème et le vrai contexte de sa formation et de sa circulation, alors il peut représenter une occasion inattendue (et, à mon sens, bienvenue) d'irruption de la mathématique et de la culture arabo-musulmanes dans le cours de mathématiques du collège.

<sup>32</sup>Jean-Pierre Dupuy, « L'autonomie et la complexité sociale », in : *Science et pratique de la complexité* (Paris, 1984) p. 303 ; Niklas Luhmann, « La restitution du douzième chameau : du sens d'une analyse sociologique du droit », *Droit et société* 47 (2001) p.15 et seq. (traduction d'un texte inédit de 1988 suivi de plusieurs articles d'autres auteurs sur le thème du douzième chameau) ; François Ost, « Le douzième chameau, ou l'économie de la justice », in : *Liber amicorum Guy Horsmans* (Bruxelles, 2004) p. 843-867 (douze analyses de l'anecdote) ; Mauricio Tarrab « Dans le cartel on peut obtenir un chameau », *La Cause freudienne / Nouvelle revue de psychanalyse* 51 (2002) p. 138-142 (traduction d'un texte espagnol de 1998).

<sup>33</sup>Gérard Charrière, *Algèbre mode d'emploi* (Lausanne, 1995).

## 2) Le problème des huit galettes.

Deux hommes allaient manger ensemble cinq galettes de pain que possédait l'un et trois galettes que possédait l'autre quand un voyageur demanda à partager leur repas. Ils acceptèrent et mangèrent avec lui les huit galettes, tous mangeant autant. En dédommagement, le voyageur leur laissa huit dirhams. Celui qui avait cinq galettes estima qu'il lui en revenait cinq, et trois à son compagnon. Mais celui-ci pensait qu'il devait revenir quatre dirhams à chacun. Ils portèrent l'affaire devant un juge, qui incita celui qui avait trois galettes à accepter la proposition de l'autre. Devant son refus, le juge lui signifia qu'en vertu du droit, il n'aurait qu'un seul dirham : son compagnon empêcherait les sept autres.

Comme le problème des dix-sept chameaux que je viens d'étudier, ce problème des huit galettes présente l'intérêt de faire mettre en œuvre un raisonnement de proportionnalité dans un contexte inusuel. Il est apparemment moins répandu en France, peut-être parce qu'un peu moins séduisant ; il reste néanmoins assez frappant et sa valeur didactique me semble supérieure. Le raisonnement du juge est qu'il est juste de dédommager les deux hommes proportionnellement, non pas au nombre des galettes qu'ils possédaient, mais au nombre de celles qu'ils possédaient et n'ont pas mangé :  $5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$  pour l'un et  $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$  pour l'autre. Pour dissimuler les fractions, on peut supposer d'abord toutes les galettes coupées en trois et raisonner sur les vingt-quatre parts obtenues.

Le problème des huit galettes, comme celui des dix-sept chameaux, fait partie des cas juridiques délicats dont la tradition musulmane, notamment chiïte, attribue avec foi la résolution à 'Alî, le gendre du prophète Muhammad. Sa « mouvance textuelle » dans le monde arabo-musulman a déjà fait l'objet d'une belle étude, savante et prudente, à laquelle je renvoie le lecteur intéressé : celle de l'islamologue Frédéric Bauden, menée à partir de vingt-cinq sources, tant chiïtes que sunnites, écrites entre 900 et 1900<sup>34</sup>. Vingt-quatre de ces vingt-cinq sources mentionnent 'Alî. Mais la dernière, en fait l'une des plus anciennes, offre une version de l'anecdote qui diffère de toutes les autres sur plusieurs points : sa localisation « au bord d'un fleuve », le personnage du juge (qui n'est pas 'Alî, mais un anonyme « juge appartenant aux maîtres de la loi »), le nombre de galettes (non pas huit, mais cinq, réparties en trois et deux) et l'explication du jugement, ici absente, le lecteur étant enjoint de s'y coller : « Réfléchis-y, mon frère... » Cette version atypique se trouve dans la quarante-sixième épître des *Ikhwân al-safâ'* (Frères de la pureté), nom d'une société secrète philosophique ismaélienne active à Bassorah (Irak) dans la seconde

moitié du X<sup>e</sup> siècle. Bauden conclut qu'il y eut passage (sans qu'on puisse dire dans quel sens) d'une forme narrative à une autre : l'énigme de type mathématique et initiatique d'une part, le récit hagiographique à portée juridique d'autre part.

J'ai cherché les occurrences occidentales de l'anecdote des galettes antérieures au XX<sup>e</sup> siècle et n'en ai jusqu'à présent trouvé que cinq : une médiévale et quatre contemporaines. C'est un corpus trop limité pour pouvoir esquisser des routes de circulation, mais il donne une idée de la complexité du sujet.

La première version occidentale que j'ai trouvée est dans le *Liber abaci* de Leonardo Fibonacci Pisano (début du XIII<sup>e</sup> siècle)<sup>35</sup>. À l'origine, deux hommes partagent cinq pains avec un soldat qui leur laisse cinq besants (monnaie d'or byzantine). Aucun juge n'intervient, car Fibonacci demande à son lecteur de résoudre lui-même le conflit. Le nombre de pains et, accessoirement, la présence de l'eau, rapprochent cette version de la seule version arabe à cinq galettes : celle des Frères de la pureté. On sait – l'intéressé le raconte lui-même dans l'introduction du *Liber abaci* – que Fibonacci a été en contact avec le monde arabe : initié aux mathématiques au Maghreb central pendant son adolescence, il a ensuite voyagé dans plusieurs pays d'Orient : il n'est pas impossible qu'il ait rencontré quelque savant musulman lecteur des Frères de la pureté – pourquoi pas par exemple le grand mystique Muhî al-dîn Ibn al-'Arabî, son contemporain ?

La deuxième version que j'ai trouvée est anglaise et date de 1812<sup>36</sup>. L'anecdote a été transférée dans l'exotique et mystérieuse Espagne, et compliquée à plaisir pour être prétexte à une mise en équations. Sous un arbre, deux muletiers espagnols partagent cinq galettes et... une bouteille de vin avec un étranger qui leur laisse 6 shillings et 5½ pence ! Je le traduis intégralement pour le lecteur qui trouvera sûrement agrément à le résoudre :

Deux muletiers espagnols, A et B, étaient assis sous un arbre pour dîner ; en examinant leurs provisions, ils trouvèrent qu'ils avaient cinq petites galettes de pain, dont trois étaient la propriété de A, et une bouteille de vin qui était à B. Un étranger venant à passer dans ce moment, ils l'invitèrent à

<sup>34</sup>Frédéric Bauden, « Comment diviser huit en trois parts égales ? de l'anecdote au récit à énigme dans la tradition arabe », in : *Le répertoire narratif arabe médiéval : transmission et ouverture* (Liège, 2008) p. 87-105.

<sup>35</sup>Fibonacci's *Liber abaci*, trad. anglaise de Laurence Sigler (New York, 2002) p. 403 : *De duobus hominibus habentibus panes*

<sup>36</sup>Miles Bland, *Algebraical problems, producing simple and quadratic equations* (Cambridge, 1812), p. 321. Ce livre a été réédité de nombreuses fois, beaucoup commenté, traduit en français et allemand.

partager leur repas, qui était juste suffisant pour trois personnes. L'étranger satisfait de cet accueil leur donna en les quittant toute la monnaie espagnole qu'il avait sur lui, qui se montait à 6 shillings et  $5\frac{1}{2}$  pence, à partager équitablement entre eux [note : un shilling = douze pence]. Avec autant de shillings qu'une galette coûte de pence, et quatre pence de plus, on pourrait acheter à la ville voisine six de ces galettes et quatre bouteilles du même vin. Quand l'argent fut divisé, B reçut 1 shilling et  $10\frac{1}{2}$  pence de plus que A. Quel était le prix de chaque galette et celui d'une bouteille de vin ? Réponse : une galette coûte 7 pence et une bouteille de vin  $11\frac{1}{2}$  pence.<sup>37</sup>

Le *Liber Abaci* de Fibonacci, resté manuscrit jusqu'en 1854, n'a probablement pas inspiré cette version : il faut sans doute postuler des versions européennes intermédiaires, avec ou sans bouteille de vin. La troisième version que j'ai repérée, celle d'un professeur de mathématiques français nommé Labosne, date de 1874<sup>38</sup>. Deux Arabes partagent huit plats de même valeur avec un troisième Arabe qui leur laisse huit deniers ; c'est encore au lecteur d'arbitrer leur différend. On voit que l'ordinaire est à nouveau amélioré, puisqu'il ne s'agit plus de simples galettes de pain, mais de plats variés : un vrai *mezze* pour deux personnes comme dans les restaurants libanais, mais sans vin ! Plus sérieusement, le mot *denier* rend peut-être ici le mot *dinar*, qui a la même origine latine. Dans l'Islam ancien, le dinar est la monnaie d'or et le dirham la monnaie d'argent.

La quatrième version, française aussi, est celle d'Émile Fourrey publiée en 1899<sup>39</sup>. Deux Arabes partagent huit pains avec un voyageur qui leur laisse huit pièces d'or ; leur différend est arbitré par un *cadî*, c'est-à-dire un juge musulman.

La cinquième version se trouve dans un manuel américain de conversation allemande publié en 1900<sup>40</sup> ! Auprès d'une source (*An einer Quelle*), deux voyageurs en Arabie partagent huit pains avec un étranger qui leur laisse huit pièces d'or (*Goldstücke*) ; leur différend est arbitré par un juge (*Richter*).

Ces trois dernières versions sont assez proches, mais ne peuvent dériver l'une de l'autre, puisque chacune contient un élément (la source, le *cadî*) absent des précédentes et présent dans les sources anciennes. Je suis tenté de rapporter les versions françaises à des sources orales venues de l'Algérie coloniale, indépendamment de la tradition européenne médiévale qui passe par Fibonacci. C'est aussi, on l'a vu, par l'Algérie que le problème des dix-sept chameaux a été connu en France à fin du XIX<sup>e</sup> siècle, et le fait qu'il précède immédiatement le problème des huit galettes dans les *Récréations* de Fourrey pourrait être l'indice d'une origine commune. Nul doute, quoi qu'il en soit, que cette petite histoire de galettes a embarqué bien plus d'une fois vers le monde occidental !

<sup>37</sup>La réponse numérique donnée par Bland a plusieurs fois été crue fausse. Le traducteur francophone Henri Faucherres (Lausanne, 1847) alla jusqu'à modifier les données du problème afin de la retrouver ! Son erreur, facile à reconstituer, était de répartir la somme laissée par l'étranger proportionnellement aux provisions des muletiers.

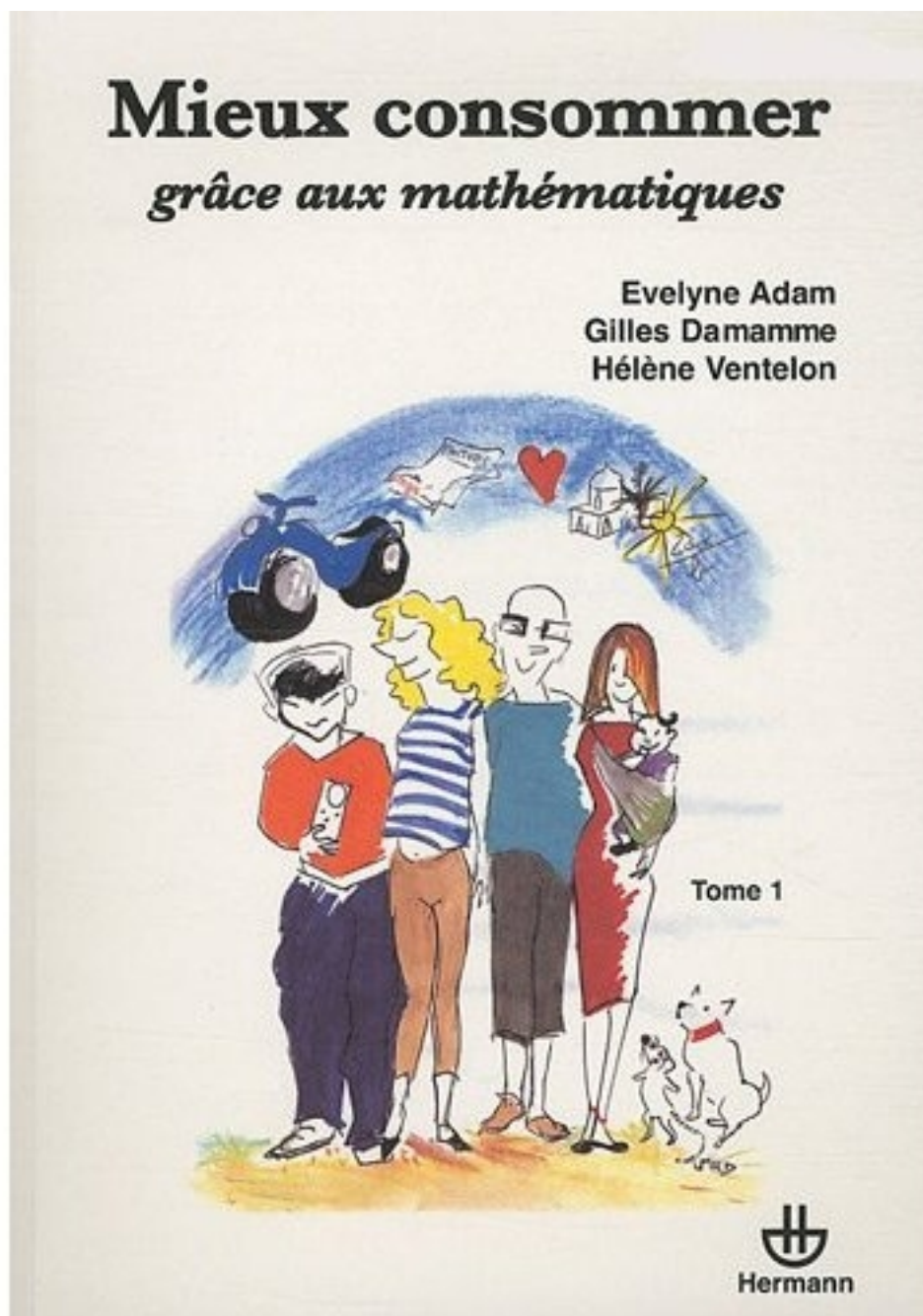
<sup>38</sup>Claude Gaspard Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisants et délectables*, troisième édition revue et complétée par A. Labosne (Paris, 1874) p. 181. Les deux premières éditions (1612, 1624), ne contenaient pas notre problème, qui se trouve en tête du « supplément » de Labosne en 1874.

<sup>39</sup>Émile Fourrey, *Récréations arithmétiques* (Paris, 1899) problème 209, p. 160

<sup>40</sup>Bert John Vos, *Materials for German Conversation : With Notes and Vocabulary* (New York, 1900) p. 88-89.



Vient de paraître !



IREM de Basse-Normandie

**Mieux consommer grâce aux mathématiques.** Tome 1  
Évelyne Adam, Gilles Damamme et Hélène Ventelon  
ISBN : 9782705680114 – Editions HERMANN – prix 19.50 euros

À l'heure où la consommation influence de plus en plus l'économie, il est urgent de donner quelques points de repères face aux sollicitations auxquelles chacun est soumis.

Ce premier tome propose, à partir de situations issues de la vie quotidienne, des exercices qui invitent le lecteur à se servir des outils mathématiques pour consommer de manière plus intelligente. Destinés aux élèves de collège et lycée professionnel, ces exercices, tous corrigés, pourront être abordés dans leur grande majorité par tous les publics, et rendre chacun plus autonome et responsable face à notre société de consommation.

**AUTEURS :** Evelyne Adam enseigne en collège, Hélène Ventelon en lycée d'enseignement général et technique, et Gilles Damamme à l'université. Ils font tous trois partie de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement Mathématique (IREM) de Basse-Normandie, de l'université de Caen.

## **Repères IREM** *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

### **Sommaire du numéro 81 Octobre 2010**

- **Composer des environnements pour résoudre des problèmes de géométrie**  
Isabelle Puig, Irem de Grenoble
- **Apprendre des notions mathématiques, géographiques et algorithmiques...**  
Bernard Le Feuvre et Xavier Meyrier, Irem de Rennes, Jean-Baptiste Lagrange, Didirem
- **Affecter ou ne pas affecter**  
Guillaume Connan, Irem de Nantes
- **Accompagnement en mathématiques de professeurs des écoles débutants nommés en ZEP**  
Denis Butlen, Iufm des Pays de Loire, Monique Charles-Pezard, Iufm de Créteil, Pascale Masselot, Iufm de Versailles
- **Difficultés en mathématiques et psychologie : peut-on compter sur une base « dys » ?**  
Louis-Adrien Eynard, Université Paris-Nanterre, Léonard Vannetzel Université Paris-Descartes, Claire Meljac, CH Sainte Anne Paris

### **Sommaire du numéro 82 Janvier 2011**

- **Évaluation de compétences du socle dans le cadre d'un travail Mathématiques-Français**  
Vincent Paillet, Irem d'Orléans Tours
- **Des durées en sixième**  
Walter Mesnier, Irem de Poitiers
- **Quelle algorithmique pour le lycée ?**  
Jean-Pierre Ferrier, Irem de Lorraine
- **Un enseignement scientifique co-disciplinaire pour traiter la question de la modélisation**  
Michèle Prieur, Inrp
- **Au pied des buttes de Coesmes**  
Jean-Pierre Escofier, Irem de Rennes

---

*Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par <http://www.univ-irem.fr/> puis cliquez sur REPERES (dans bandeau gauche vertical), ensuite sur CONSULTATION. (Les nombres en rouge indiquent qu'au moins un article de ce numéro a été mis intégralement en ligne ; les nombres en vert indiquent que tous les articles de ce numéro sont intégralement en ligne)*

*Pour soumettre des articles au comité de rédaction de Repères IREM, contacter : [yves.ducel@univ-fcomte.fr](mailto:yves.ducel@univ-fcomte.fr)*

*Pour vous abonner à Repères IREM ou acheter séparément des numéros, contacter :*

*TOPIQUES Éditions, 22, rue Charles-Martel, 54000 NANCY, France*

*Téléphone & télécopie : 03 83 27 06 99 , adresse électronique : [topiqueseditions@dbmail.com](mailto:topiqueseditions@dbmail.com)*

*Prix d'un abonnement (4 numéros par an) : Métropole : Établissements, 46 euros ; Particuliers, 35 euros*

*DOM-TOM ou Étranger (par avion) : Établissements, 55 euros ; Particuliers, 44 euros*

---

*Prix au numéro : 13 euros + frais d'expédition si envoi par avion.*

