Pavages de Roger Penrose
Eglise Santa Maria de Mahon
Ile de Minorque

Un bel exemple de « Pavage en vrac »
À partir des triangles d'or

Séminaire de rentrée de l'I.R.E.M
De Basse-Normandie
Ile de Tatihou septembre 2016

par Danielle Salles-Legac
Équipe géométrie et relations internationales

Activité autour des triangles d'or

et des pavages de type 3 au sens de Roger PENROSE

Par Danielle Salles-Legac

Introduction : Nous nous sommes intéressés, dans notre ouvrage « Nombre d'or » à différents motifs particulièrement élégants, obtenus avec les rectangles et les triangles d'or. A ce propos Ruben Rodriguez nous a signalé l'existence d'un pavage « grandeur nature » d'une église de Minorque dans les Baléares.

Ce pavage est présenté dans des articles scolaires sur les pavages (Blog de Thérèse Eveilleau par exemple (*)) comme « Pavage de type 3 » sans étude particulière bien qu'à notre avis, il soit fort intéressant comme vous aller le constater.

Il nous a intrigués car son motif principal : une rosace à 5 branches parsemée de façon aléatoire dans le pavage de la nef principale. Ce motif nous semblait, « à l'œil » un pentagone étoilé inscriptible dans un cercle.

Une photo, (celle de la quatrième de couverture) nous détrompa, comme nous allons le voir ensemble…

Tout d'abord : qu'est-ce qu'un pavage régulier ?

Un seul polygone régulier est reproduit et pave le plan sans recouvrement ni vide, par exemple l'hexagone.

Un pavage semi-régulier ?

Plusieurs polygones forment un motif reproduit sur le plan, par exemple un carré et un triangle isocèle de base le côté du carré.

Un pavage irrégulier est constitué de polygones irréguliers par exemples les pentagones découverts par Casey Mann, de l'université Washington Bothell,

Un pavage non-régulier ou non-périodique peut être constitué de polygones réguliers mais ne pas comporter de motifs répétitifs comme le pavage de type 3 de Roger Penrose. Ainsi, comme vous pouvez le constater sur la 4$^{\text{ième}}$ de couverture de ce texte, il existe un motif reproduit plusieurs fois mais encadré par des motifs que nous qualifions de « en vrac ».

(*) Voyez aussi la brochure de Brigitte Rozoy sur le site de l'IREM de B.N :

http://www.math.unicaen.fr/irem/ et le blog de Patrice Debart.

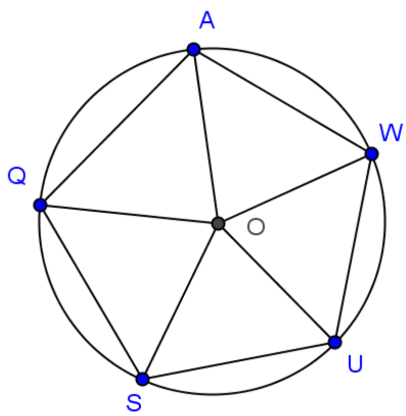
Activité pour le collège et la seconde

Mots clés : pentagone, triangles d'or, pavage "en vrac", pavage de type 3, Roger Penrose.

Matériel : règle, rapporteur, compas, papier fort, éventuellement logiciel GEOGEBRA.

Questions (indications de solutions en fin d'article)

1) **Nous souhaitons tracer un pentagone régulier convexe à l'intérieur d'un cercle donné comme sur la figure ci-dessous :**



Quelle est la mesure de l'angle au centre QOA?

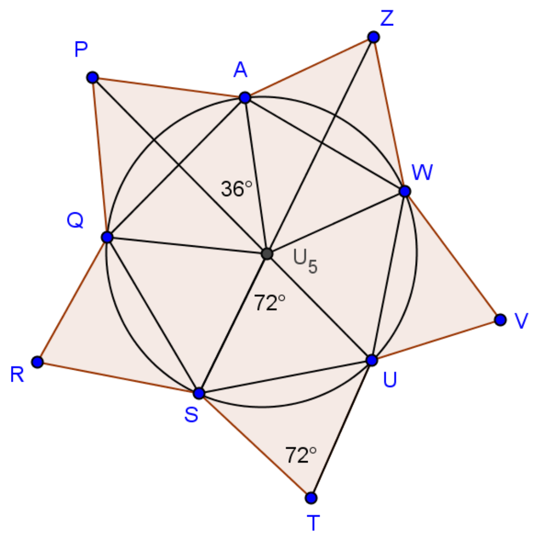
Tracer le cercle et le pentagone sur une feuille de papier fort.

2) Tracer, pour chaque triangle de sommet O, le triangle symétrique par rapport aux côtés du pentagone pour obtenir un pentagone étoilé comme sur la figure de la page suivante.

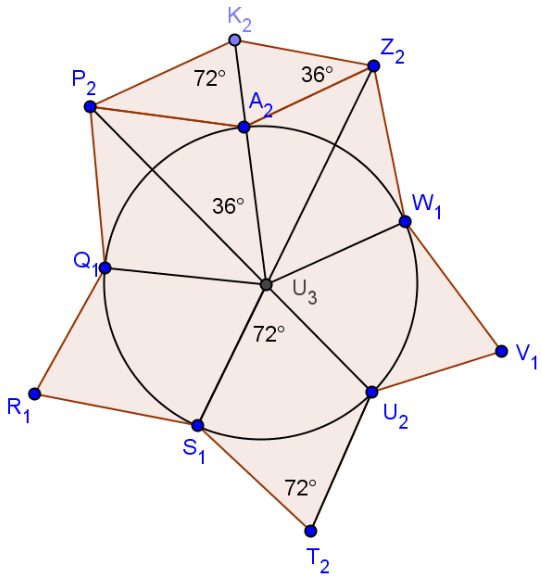
Quelle est la nature du quadrilatère PAU_5Q?

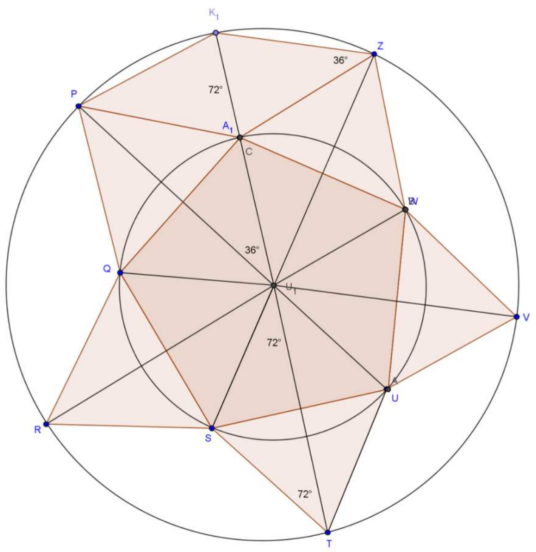
Le pentagone ainsi construit est-il régulier ?

Définition des triangles d'or
Les deux triangles d'or sont construits de la façon suivante :
Le triangle d'or aigu : a son angle au sommet de mesure 36°, c'est un triangle isocèle.
Quelle est la mesure de ses deux autres angles ?
Quelles sont les mesures des angles du triangle SAU ?
Le triangle d'or obtus : a son angle au sommet de mesure 108°, c'est un triangle isocèle.
Quelles sont les mesures des angles du triangle PAU_5?



Traçons maintenant le **pentagone convexe PZVTR** et complétons les losanges de côtés: PAZ ; ZWV ; VUT ; TSR ; RQP ; voyez par exemple sur la figure suivante **le losange $P_2K_2Z_2A_2$.**





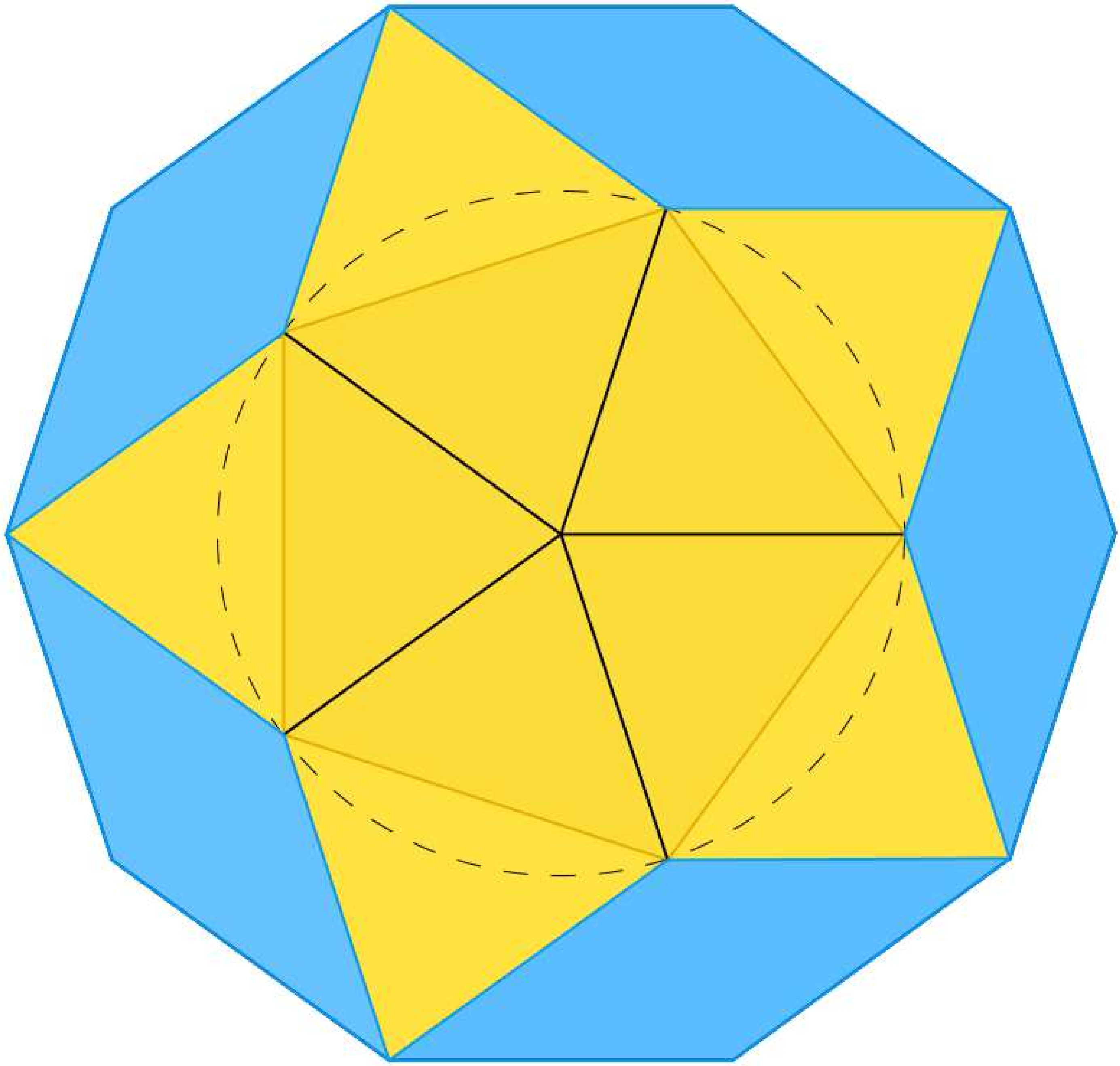
Nous traçons maintenant le cercle circonscrit au pentagone étoilé, expliquez pourquoi le **point K_1 est sur ce cercle**.

Complétez le décagone convexe et découpez les deux types de losanges :

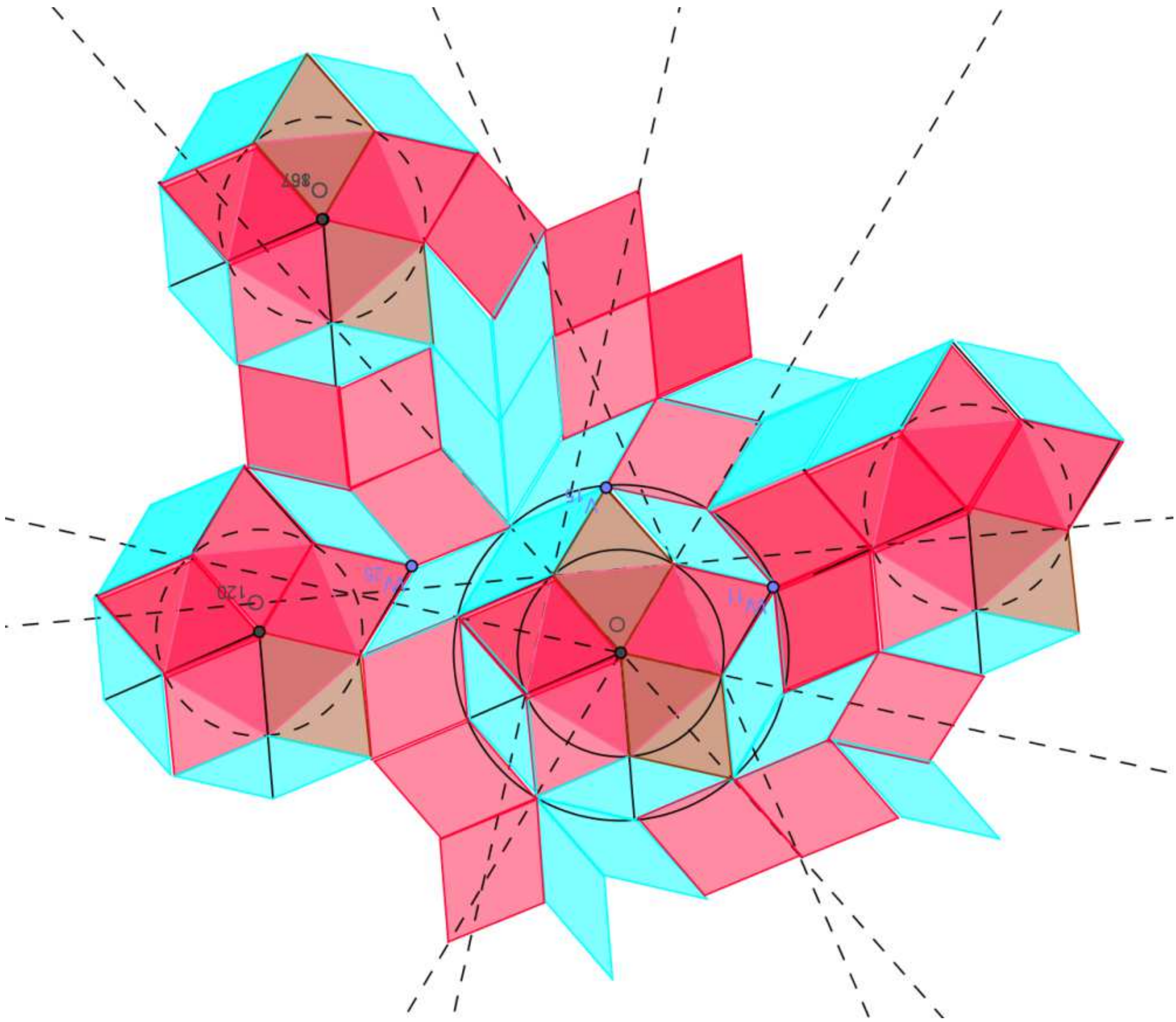
Les losanges du même type que le losange PQU_1A_1 ;

Les losanges du même type que le losange PA_1ZK_1.

La page suivante doit être imprimée sur du papier fort ou du carton pour pouvoir être découpée.
Construisez vous-même un pavage « en vrac » comme celui du pavage de Roger Penrose en l'église Santa María de Mahón dans les Iles Baléares (Documentez-vous personnellement).



Pages suivantes nous avons construit un pavage “en vrac” utilisant la technique des maçons de l’église des Iles Baléares, en utilisant parfois la symétrie axiale pour retrouver de belles rosaces.



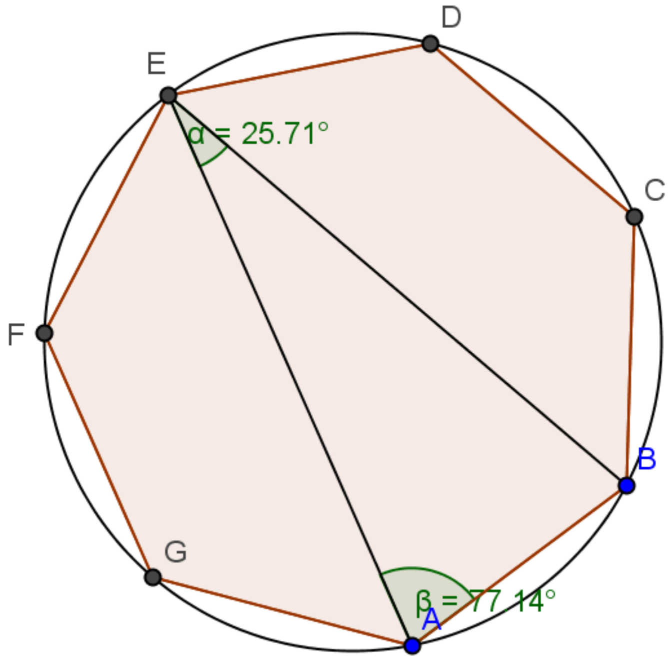
Pour les plus grands

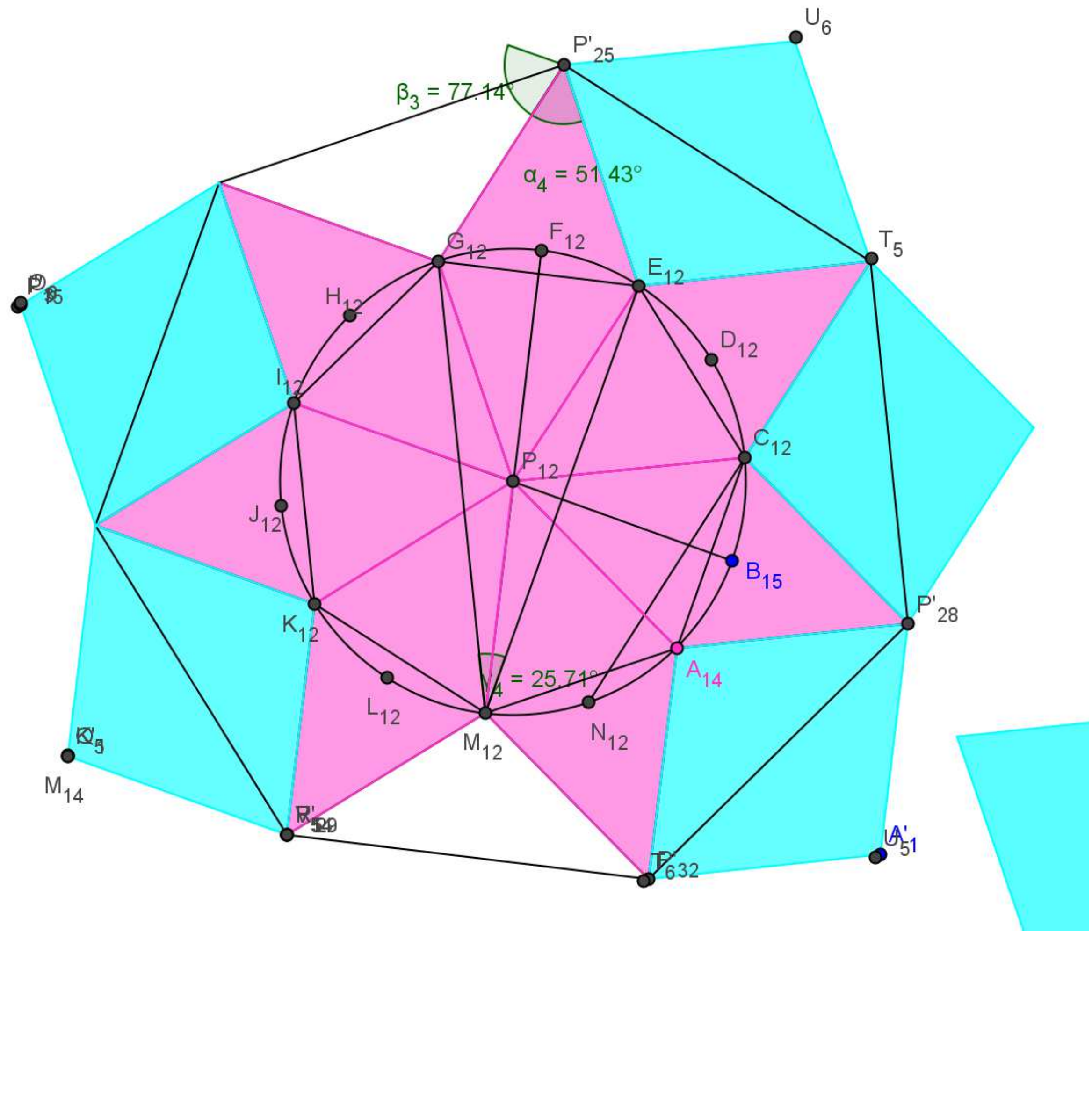
Nous nous intéressons maintenant à une généralisation du pavage de Penrose à partir de l'heptagone régulier.

Nous avons remarqué que Penrose utilisait constamment le fait que les angles des losanges construits à partir des triangles d'or étaient de mesure un multiples de 36°soit : 36° , 72° et 108°.

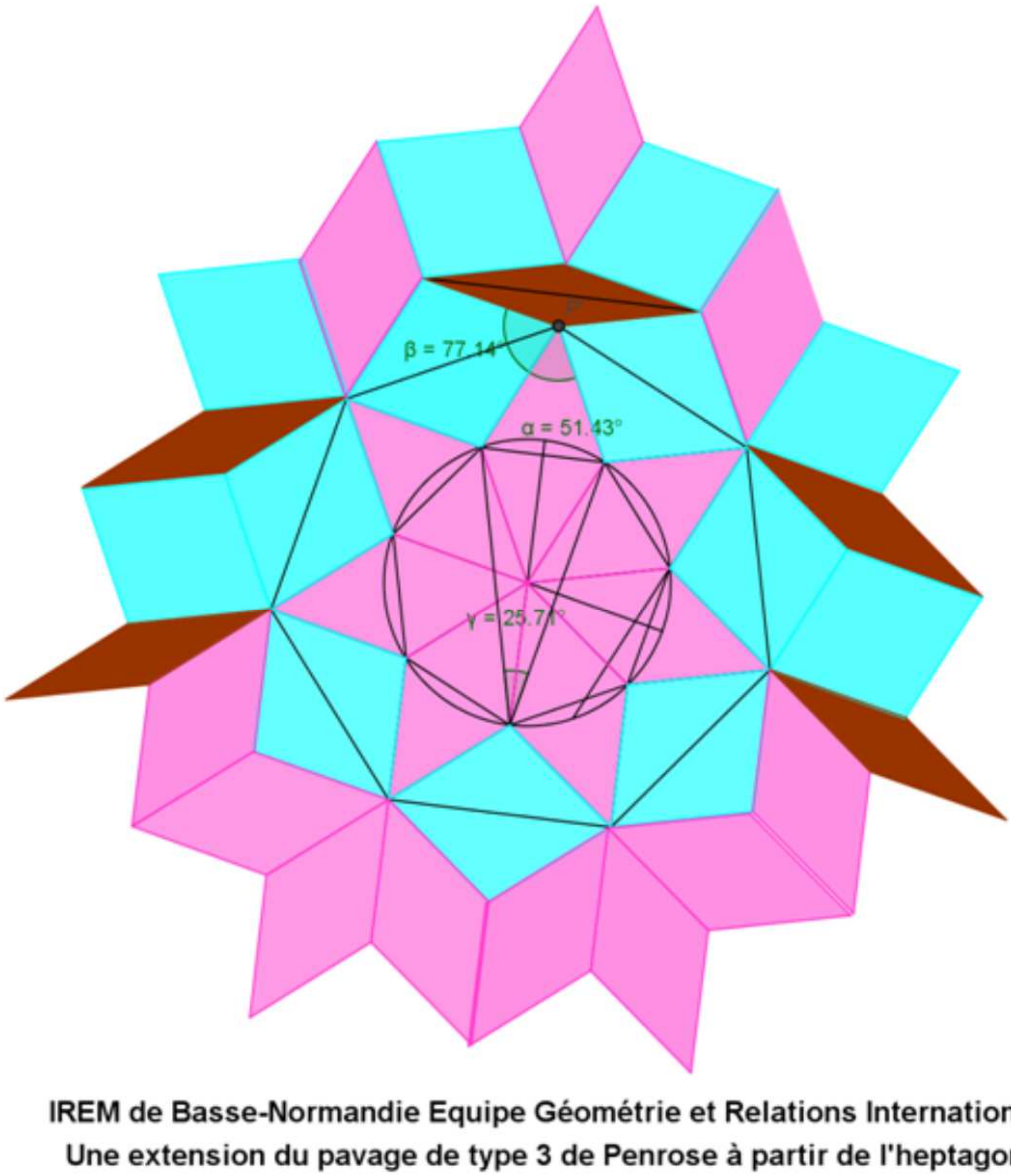
Nous nous sommes demandé si, en effectuant la même construction que celle de Penrose, avec un heptagone, nous obtiendrions aussi un joli pavage de type 3.

Voyez page suivante un brouillon de notre travail sur GEOGEBRA.


D
E
α = 25.71°
C
F
B
G
β = 77.14°
A


U6
P'25
β3 = 77.14°
α4 = 51.43°
T5
G12
F12
E12
H12
D12
I12
C12
P12
J12
B15
P'28
K12
A14
L12
M12
N12
M14

Ci-dessous nous avons construit un pavage plus important.
Que remarquez-vous sur le nombre de losanges nécessaires ?



IREM de Basse-Normandie Equipe Géométrie et Relations Internationales
Une extension du pavage de type 3 de Penrose à partir de l'heptagone
par Danielle Salles-Legac

Pensez-vous que l'on puisse construire ainsi des pavages avec des polygones étoilés ayant de plus en plus de côtés ? Que va-t-il se passer ?

Lors de la présentation de ce texte aux journées de rentrée de l'IREM, cette question a suscité l'intérêt de nos collègues aussi nous continuons notre recherche dans ce sens.
Développons notre réflexion présentée dans les indications de solutions.

Cas des polygones réguliers à un nombre p premier de côtés

Nous voyons que lorsque p=5 il faut 2 losanges pour paver le plan : c'est le cas du pavage de type 3 de Penrose. Lorsque p=7 il en faut 3. Nous avons attribué ces nombres au fait que les angles des losanges sont successivement :

Lorsque p=5 : $\pi/5$; $2\pi/5$; $3\pi/5$; $4\pi/5$, ceux-ci définissent seulement deux losanges car la somme des angles d'un losange est 2π. Ainsi seuls conviennent les couples : $\pi/5$ et $4\pi/5$; $2\pi/5$ et $3\pi/5$.

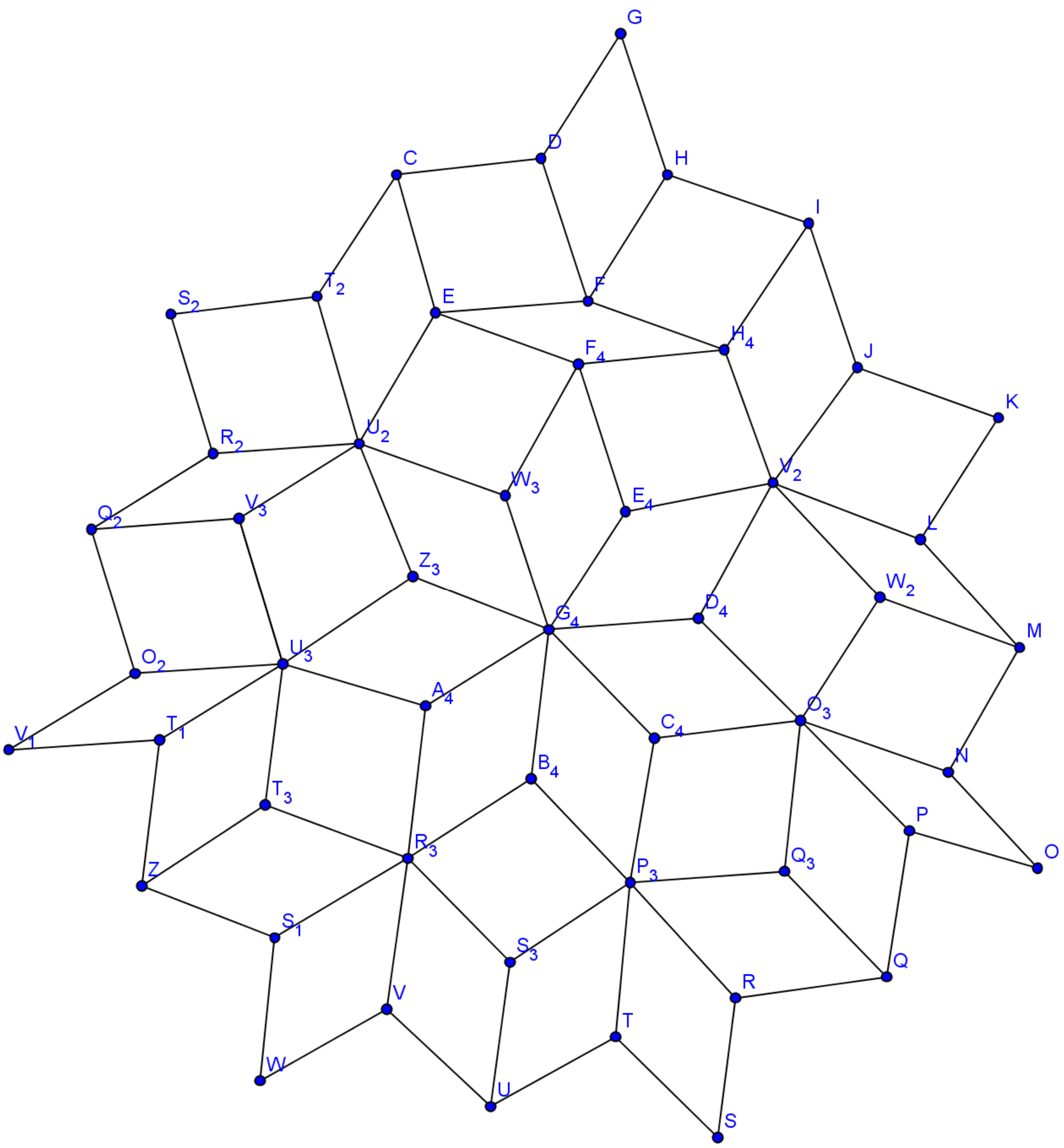
Lorsque p=7 : $\pi/7$; $2\pi/7$; $3\pi/7$; $4\pi/7$, $5\pi/7$; $6\pi/7$. Ces angles définissent 3 losanges grâce aux couples :
$\pi/7$ et $6\pi/7$; $2\pi/7$ et $5\pi/7$; $3\pi/7$; $4\pi/7$.

Essayons de généraliser ce résultat : p étant premier tous les entiers qui lui sont inférieurs sont premiers avec lui. Il y en a p-1. Ce nombre est pair car p est impair (sauf 2). Les losanges utilisés dans les pavages de ce type utilisent chacun une paire de mesure d'angles, leur somme est égale à π, il y a (p-1)/2 paires puisque elles ne sont pas ordonnées.

Il y a donc, pour tout p premier, (p-1)/2 losanges possibles pour paver le plan de cette façon.

Ainsi, si p=11, nous obtiendrons un « pavage en vrac » composé de 5 losanges différents.

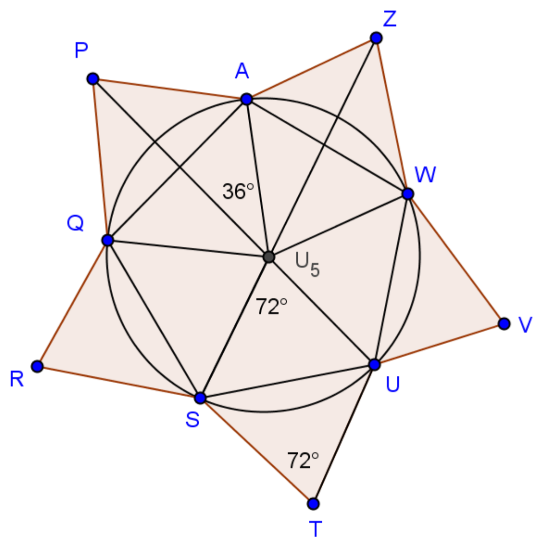
Page suivante nous vous proposons le même pavage sans couleur afin que vous puissiez exercer vos talents ! Vous pouvez en particulier essayer de faire apparaître des figures en trois dimensions…

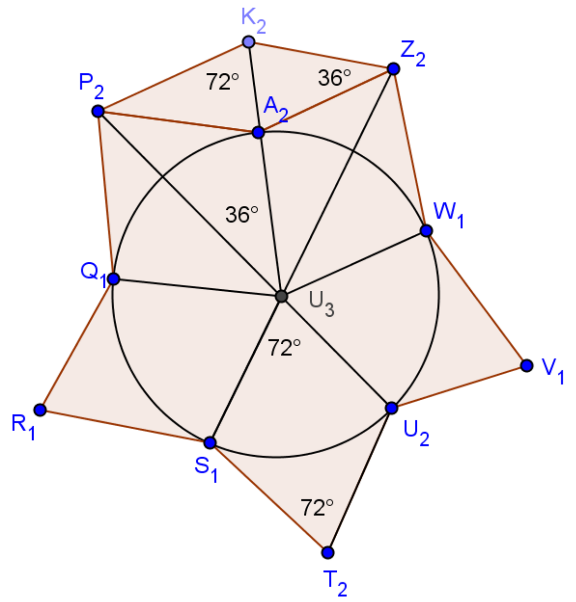


Indications de solutions : le pentagone convexe étant régulier, il a 5 angles au centre égaux donc de mesure 360/5 = 72°. Les triangles construits symétriquement aux triangles centraux forment avec ceux-ci des losanges égaux donc inscriptibles dans un même cercle de centre U_5 et de rayon le grand axe des losanges égaux à U_5P.

Les axes principaux sont les bissectrices des angles au centre du premier pentagone convexe la mesure des angles des triangles égaux au triangle PAU_5 est donc :

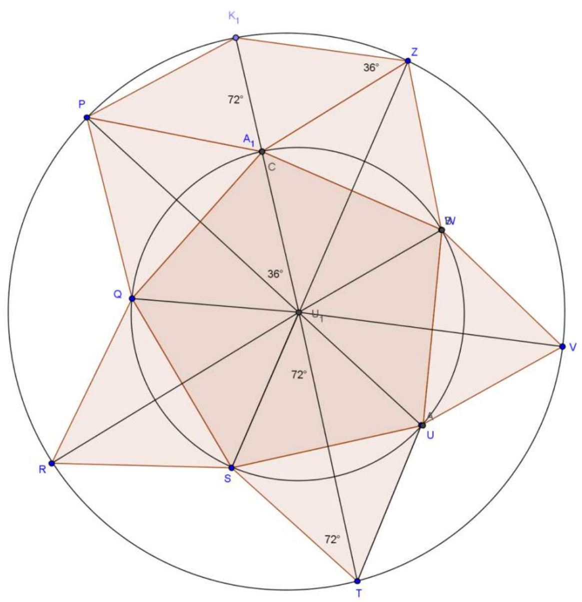
72/2 = 36°, c'est la mesure des angles à la base du triangle d'or obtus.





On complète les losanges de type $P_2A_2Z_2K_2$. Les losanges de type $P_2A_2U_3Q_1$ sont tous égaux et ont un sommet commun : U_3 et deux côtés communs, leurs sommets extérieurs sont donc tous situés sur un même cercle que nous traçons.

Pourquoi les petits losanges de type $P_2A_2Z_2K_2$ ont-ils leur sommet extérieur K_2 sur ce cercle ? Remarquons tout d'abord que les points : U_1,A_1, K_1 sont alignés par construction car les segments [U_1A_1], [A_1K_1] sont tous deux orthogonaux à [PZ]. L'angle PK_1Z est égal à l'angle PA_1Z. Le triangle PA_1U_1 est obtus et d'or, son angle au sommet est : 180 – 2x36 = 108°. L'angle PA_1Z a donc pour mesure :
360 – 2x108 = 144°. L'angle PK_1U_1, égal à l'angle PA_1K_1 mesure donc : 144/2= 72°. L'angle U_1P K_1 a donc pour mesure 180-36-72 = 72° et le triangle U_1P K_1 est isocèle, [K_1U_1] est égal à [PU_1], rayon du cercle : le point K_1 est sur ce cercle.

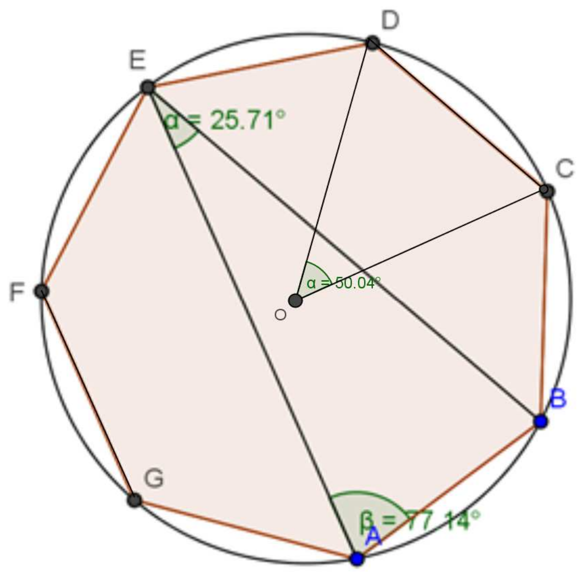


A propos de l'heptagone…

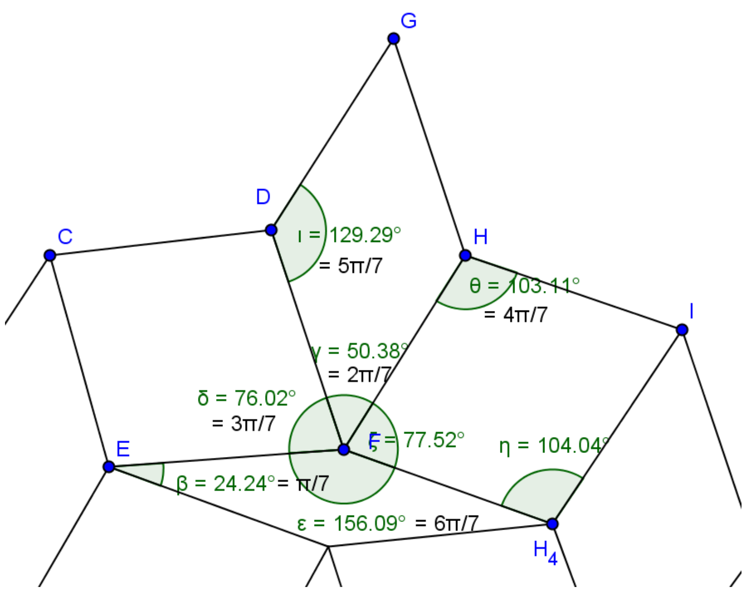
Le nombre 7 m'ayant toujours fascinée (je ne suis pas la première !) je me suis demandée si ce nombre serait d'aussi bonne composition que 5.

L'heptagone régulier convexe possède, en effet, une propriété amusante qui ressemble à celle du pentagone : le triangle d'or aigu a ses angles à la base de mesure double de celle de son angle au sommet ; l'heptagone, lui, possède un triangle formé de deux rayons de son cercle circonscrit et d'un de ses côtés dont les mesures de l'angles au sommet est (évidemment) : 2π/7 **soit 51,43°**. Ses angles à la base mesurent (180- 51,43)/2 = 64,28°au centième de degré près.

Nous pouvons espérer pouvoir complèter ce triangle « magique » de même que le triangle ODC aigu de sommet le centre du cercle :



Nous vous avons construit un pavage avec des losanges construits à partir de l'heptagone, mais nous avons remarqué qu'il nous fallait un losange supplémentaire, d'angle aigu de mesure 25,71° afin de « combler » quelques trous ! Voici maintenant le détail des mesures délivrées par GEOGEBRA. Nous remarquons que, du fait de notre dessin « à la main », les mesures délivrées ne sont pas rigoureuses, aussi nous indiquons ci-dessous les mesures au centième de degré : π/7 = 25,70° ; 2π/7= 51,40° ; 3 π/7 = 76,10° ; 4 π/7 = 102,80° ; 5 π/7 = 128,50° ; 6 π/7 = 154,20°.



Nous remarquons que les paires d'angles qui nous ont été utiles sont toutes les décompositions de 7 en somme de deux entiers inférieurs…

Membres de l'équipe géométrie et relations internationales : Aurélien Detey, Eric Lehman, Ruben Rodriguez, Danielle Salles, Michel Soufflet.

Bibliographie

EL MUNDO : Publication en ligne en espagnol : "*Un singular pavimento matemático*".
http://www.elmundo.es/baleares/2015/03/03/54f5af2ee2704ed0548b45b4.html

MEHL Serge en ligne sur le site Chronomath :
http://serge.mehl.free.fr/chrono/Penrose.html

RODRIGUEZ-HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle, LE GOFF Jean Pierre, NITAJ Abderrahmane , SOUFFLET Michel *« Le nombre d'or, nouveautés mathématiques ludiques »*.Éditions de l'IREM de Normandie-Caen 2015.

RODRIGUEZ-HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle "*Jugar y aprender con el número de oro" Traduction de l'ouvrage précédent en espagnol en ligne :* http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/CA/ICA16006/ICA16006.pdf

ROZOY Brigitte, DEBART Françoise *« De MC. ESCHER aux dessins à motifs répétitifs »* Éditions de l'IREM de Normandie-Caen 1982, téléchargeable :
http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/CA/ICA82002/ICA82002.pdf