II. Résumé des Livres I et II.

a Résumé du Livre I.

Le premier livre des *Coniques* est introduit par une lettre à un certain Eudème, personnage inconnu par ailleurs. Il faut en fait la comprendre comme une préface, car après des propos amicaux, Apollonios y présente surtout les huit livres de son œuvre.

Les résultats nouveaux ne sont pas dans les deux premiers livres mais ils composent la plupart des théorèmes du troisième. C'est là l'opinion d'Apollonios mais demande à être nuancée. Au commencement du pemier livre, nous lisons que le cône se fonde sur une nouvelle définition. Il s'ensuit donc une exposition qui, eu égard à cette définition, est nouvelle. C'est pour nous, comme pour les premiers lecteurs d'Apollonios, la valeur principale des premiers livres. À nos yeux, il en est d'autres. La définition du cône, selon Apollonios, fait naître une seconde nappe à ce solide, impliquant par là même, toute une série de résultats en relation avec la toute nouvelle seconde branche des hyperboles.De notre point de vue, il y a donc des résultats nouveaux. Apollonios les voyait peut-être comme une généralisation à la seconde branche des résultats qui pouvaient être plus anciens. Il nous écrit, sans les préciser, que *des propriétés seront exposées d'une manière plus développée et plus générale que chez d'autres qui ont écrit sur la [même] matière*. Son choix de ne paxs les reconnaître comme nouveaux est alors compréhensible. Mais cet argument vaut-il aussi pour les hyperboles conjuguées ? Elles induisent des résultats que, sans aucun doute possible, nous devons à Apollonios et à lui seul et qui ne sont le développement d'aucun autre. Pourtant, à y regarder de près, il s'agit encore de généraliser à de nouvelles hyperboles, des résultats connus sur une seule branche. Notre jugement serait plus assuré si nous pouvions comparer l'œuvre d'Apollonios à celle de ses prédécesseurs. Nous verrions plus clairement qu'elle est la *manière plus développée et plus générale* de certaines propriétés. Hélas, bien peu de résultats relatifs à la science préapollonienne des coniques ont subsisté jusqu'à nous. Tout au plus quelques traces, tant l'œuvre d'Apollonios a rapidement et presque totalement éclipsé les acquis de ses prédécesseurs.

Les huit livres d'Apollonios font apparaître la première étude des coniques s'appuyant sur les cônes les plus généraux. Ils rassemblent aussi une somme de résultats qui ne seront pas égalés avant le XVII^{e} siècle, c'est-à-dire, pendant deux mille ans. Dès le premier livre, nous rencontrons des résultats profonds sur l'hyperbole complète, avec ses deux branches, sur les diamètres et les hyperboles conjuguées, nous découvrons tous les axes possibles de chaque conique et même le moyen permettant le passage de relations métriques d'un axe à l'autre. Nous voyons donc naître une idée qui, bien plus tard, trouvera sa place dans les changements de repère

Ce commentaire ne reprendra pas toutes les parties qui composent le premier livre mais se limitera à rappeler quelques différences essentielles entre le style d'Apollonios et le nôtre, à expliquer la formation de certaines des relations métriques tout en soulignant l'importance du cercle en arrière plan de cette étude, et enfin à traiter du cas des tangentes dans une géométrie qui ignorait tout des dérivées.

Sans entrer dans le détail des connaissances que le temps avait permis d'accumuler, la lettre-préface nous apprend que le contenu des quatre premiers livres, bien que considérable, n'était pas nouveau, et que leur originalité tenait surtout à une disposition différente des propositions et à une nouvelle définition du cône, plus générale que la définition antérieure. Apollonios, en effet, propose de définir la surface conique par le mouvement d'une droite s'appuyant sur la circonférence d'un cercle, qui en sera la base, et passant par un point fixe, qui sera le sommet du cône (fig. IIa 1). Nous reconnaissons là une définition toujours actuelle et nous la lui devons. Qu'en était-il alors de la définition antérieure ? Nous la connaissons grâce aux *Éléments* d'Euclide qui furent rédigés un siècle, environ, avant l'ouvrage d'Apollonios.

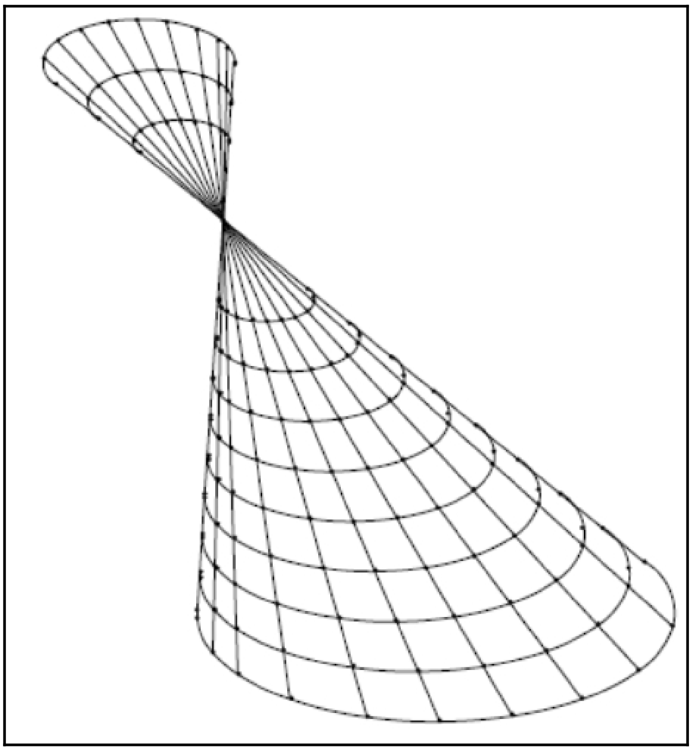

Fig. IIa 1
Cône apollonien

Le cône, lisons-nous, est engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour de l'un de ses côtés perpendiculaires, la surface conique étant décrite par l'hypoténuse et le cercle de base par le troisième côté (fig. IIa 2). Ajoutons que cette définition ne prenait pas en compte la possibilité d'une seconde nappe, que, dans les *Éléments*, son objectif était de permettre l'évaluation du volume conique, et que, dans nos collèges, c'est elle que l'on enseigne et dans le même but.

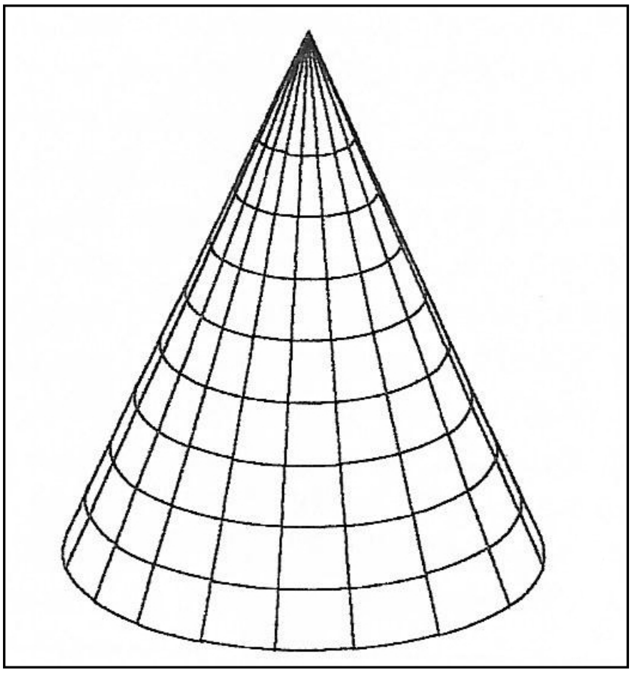

Fig. IIa 2
Cône euclidien

L'étude des courbes engendrées par des sections planes de cône, s'appuyait, avant Apolllonios, sur la définition d'un cône de révolution à une seule nappe. On sait aussi que les plans de coupe étaients particuliers, car toujours perpendiculaires à une génératrice et que les dénominations des différentes intersections, connues aujourd'hui sous les noms apolloniens de parabole, ellipse et d'hyperbole, provenaient d'une répartition des cônes de révolution en trois ensembles distincts. En vue de l'étude des coniques, seule la coupe d'un cône dont l'angle au sommet était droit, c'est-à-dire, dont l'angle compris entre deux génératrices diamétralement opposées était droit, proposait une parabole (fig. IIa 3). C'est bien pourquoi, avant Apollonios, elle portait le nom de section de cône rectangle. Quant à l'ellipse et l'hyperbole, la première provenait seulement des cônes dont l'angle au sommet était aigu et portait, de ce fait, le nom de section de cône acutangle (fig. IIa 4) et la seconde, seulement des cônes dont l'angle au sommet était obtus et portait donc le nom de section de cône obtusangle (fig. IIa 5).

Toutes ces distinctions prendront fin avec Apollonios : tout plan de l'espace pourra donner une section conique, quel que soit le cône. Désormais, le genre de la conique ne dépend plus du cône mais de la position du plan qui coupe le cône. Précisément, suivant que ce plan est parallèle à la génératrice diamétralement opposée à celle passant par le sommet de la section, ou la rencontre en deçà du sommet ou au delà, on obtient dans le même ordre, une parabole, une ellipse ou une hyperbole, cette dernière devenant une section à deux branches. Le procédé est toujours d'actualité et figure même dans des dictionnaires comme le Petit Larousse.

Dans la période qui précéde immédiatement la rédaction des *Coniques* par Apollonios, les sections sont toutes nommées « paraboles » et sont distinguées entre elles par les mentions « par excès », « par égalité » ou par « défaut » ; selon certains commentateurs, le mot parabole dériverait d'un verbe signifiant « appliquer exactement », le mot ellipse dériverait du verbe « souspasser », « être en manque » ou « faire défaut » et le mot hyperbole du verbe « surpasser ». Ces expressions font référence à certaines propriétés des trois courbes, obtenues par le procédé dit « d'application des aires ».

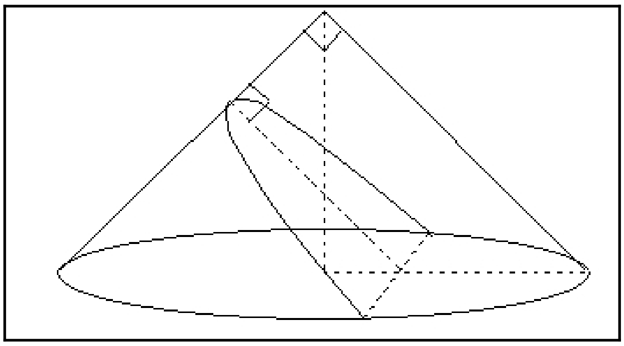

Fig. IIa 3
Section de cône rectangle

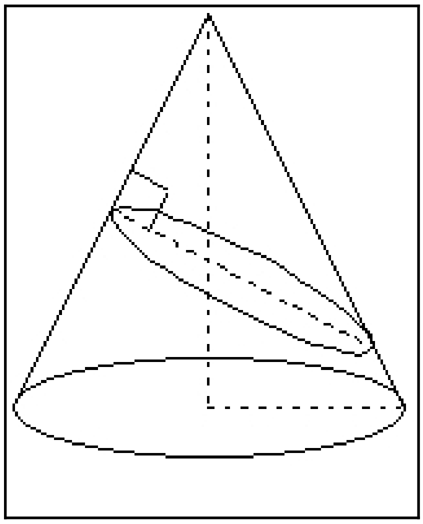

Fig. IIa 4
Section de cône acutangle

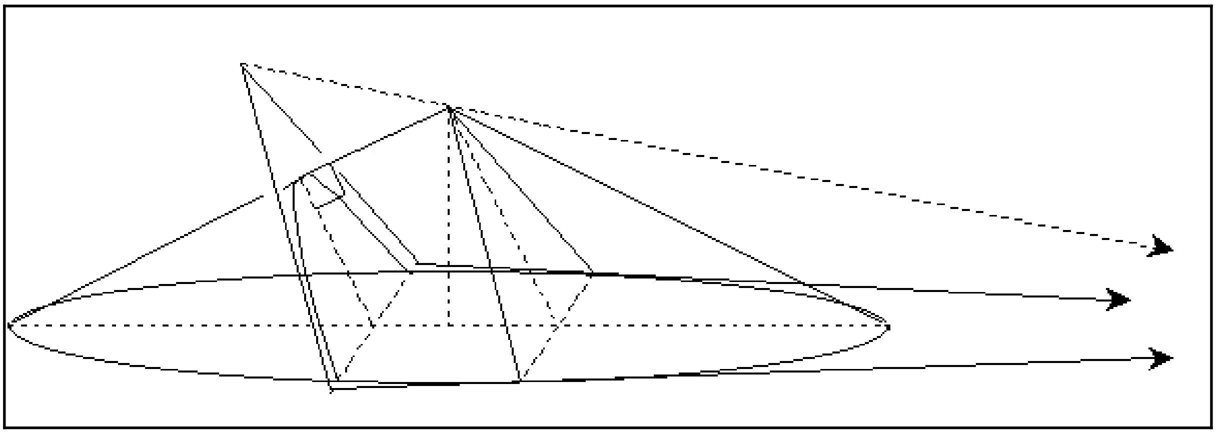

Fig. IIa 5
Section de cône obtusangle

Le premier livre des coniques commence comme un chapitre de géométrie dans l'espace. Les premières propositions nous présentent les sections coniques à partir de l'intersection du cône avec des plans. La troisième proposition montre que la section peut être un triangle, les deux suivantes, un cercle : la quatrième en considérant une section parallèle à la base du cône et la cinquième par une section, dite antiparallèle, qui ne se distingue de la précédente que dans les cônes obliques et que nous devons donc à Apollonios. La neuvième proposition établit que toutes les autres sections ne seront jamais des cercles et enfin les onzième, douzième et treizième montre que ces sections non circulaires, sont respectivement des paraboles, des ellipses ou des hyperboles. A partir de la quinzième proposition, la présence du cône n'étant plus nécessaire à la disposition des éléments du discours, il disparaît et l'étude des coniques se poursuit désormais dans le cadre mieux adapté de la géométrie plane.

La rédaction d'Apollonios respecte la structure et le style euclidien : énoncé de la propriété en termes généraux ; introduction à la démonstration au moyen d'une figure qui précise et nomme les éléments utiles au discours ; énonciation claire, dans le cadre défini par la figure, de la propriété à démontrer ; démonstration proprement dite et conclusion qui, comme chez Euclide, est souvent sous-entendue. Sa mathématique sous-entend souvent que le lecteur connaît les *Éléments* d'Euclide, en particulier le deuxième livre sur l'« algèbre » des grandeurs, le cinquième sur les rapports de grandeurs et le sixième sur les rapports de longueurs. Le lecteur, peu habitué aux mathématiques euclidiennes doit conserver à l'esprit que les grandeurs que nous comprenons comme des nombres, tant la notion de mesure nous est familière, n'en sont pas pour nos ancêtres. La substitution d'une mesure aux grandeurs suppose l'existence d'une mesure unité, commune à toutes les grandeurs de même nature. Or, on le savait bien, la diagonale d'un carré ne se compare pas en mesure avec son côté ; leur rapport n'est pas un nombre rationnel et donc il n'est pas un nombre pour nos ancêtres. Soyons humbles ! Ils ne deviendront rigoureusement des nombres que lors du XIX[e] siècle. C'est donc par un souci de rigueur que l'« algèbre » employée par Apollonios dans la conduite des calculs ajoute une démarche lente et complexe à l'usage peu commode d'une écriture ignorante des notations modernes. À nos yeux, des expressions tels « le rectangle de deux longueurs » est immédiatement traduite en produit de deux nombres et d'autres, tels les compositions de rapports en produits de fractions. Si donc, nous appliquons spontanément et avec raison des règles algébriques qui nous simplifient considérablement les calculs apolloniens, n'oublions pas cependant qu'elles sont anachroniques.

Apollonios utilise de manière récurrente quelques résultats du corpus euclidien, parmi lesquels, les cinquième et sixième propositions du livre II des *Éléments* et la vingt-troisième du livre VI. Ces trois propositions interviennent lors des manipulations algébriques sur les grandeurs, celle du livre VI lui procurant des règles algébriques pour simplifier des produits de rapports ou pour trouver des rapports équivalents.

Dans notre algèbre, il s'agit donc de l'égalité : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

En commençant par la cinquième, celles du livre II s'énoncent de manière moderne dans les termes suivants :

Tout point X d'un segment $[AB]$ forme avec les extrémités et le milieu M l'identité suivante :

$$AX.XB + MX^2 = AM^2 (= BM^2 = \frac{1}{4} AB^2) \text{ (fig. IIa 6)}$$

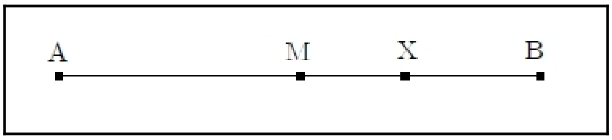

Fig. IIa 6

En notant la mesure du demi segment par a et la distance du point X au milieu M par b, on reconnaît l'identité bien connue $(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$.

Si le point X est à l'extérieur, la sixième proposition énonce que :

$$AX.XB + AM^2 = MX^2$$

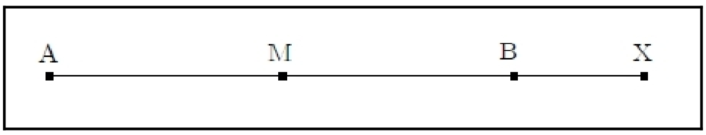

Fig. IIa 7

Avec les mêmes notations : $(a+b).(b-a) + a^2 = b^2$.

Il fonde aussi nombre de ses raisonnements sur deux propriétés implicitement admises, à savoir que le triangle déterminé par trois points sur un cercle dont deux sont les extrémités d'un diamètre est rectangle et que la hauteur issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle est moyenne géométrique des longueurs que cette hauteur découpe sur l'hypoténuse (fig. IIa 8).

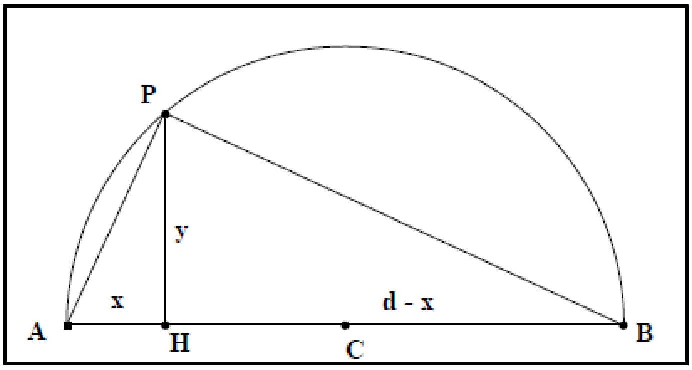

Fig. IIa 8

$$\boxed{PH^2 = AH.HB \text{ ou } y^2 = x(d-x)}$$

Ces propriétés se lisent respectivement à la trente et unième proposition du Livre III des *Éléments* et en corollaire de la huitième du livre VI. Apollonios les rassemble implicitement en une propriété métrique essentielle du cercle. Elle forme l'arrière-plan de son étude sur les coniques et paraît le guider jusque dans l'écriture finale de leurs propriétés métriques.

Les propriétés métriques essentielles des coniques sont le sujet de la onzième proposition pour la parabole, puis celui des deux suivantes pour respectivement l'hyperbole et l'ellipse. C'est aussi dans ces trois propositions que ces courbes reçoivent leur nom ; les anciennes dénominations étaient inadaptées au cône oblique et à la manière apollonienne d'obtenir les sections coniques. Le cercle ci-dessus présente la relation métrique qui correspond au cas du cercle. Mutatis mutandis, en imaginant que l'image précédente illustre aussi bien le cas des trois autres courbes, leurs propriétés métriques s'écrivent respectivement :

$$y = cd.x \qquad ; \qquad y^2 = cd.x + \frac{cd}{ct}.x^2 \qquad ; \qquad y^2 = cd.x - \frac{cd}{ct}.x^2.$$

Les différentes lettres traduisant les grandeurs suivantes :
x : distance du sommet au pied de l'ordonnée: notre abscisse.
y : la distance du point de la conique au pied de l'ordonnée: notre ordonnée.
cd : le côté droit : en souvenir du « *latus rectum* » des traducteurs de la renaissance.
ct : le côté transverse : en souvenir du « *latus transversum* ».

Leur démonstration ne nous satisfait pas complètement, même si la rigueur du l'exposé est indiscutable. Apollonios y fait apparaître le côté droit comme un magicien sortirait un lapin de son chapeau. Nous savons seulement qu'il s'agit d'une quatrième proportionnelle à trois autres grandeurs entièrement déterminées par la donnée du cône et de la section. C'est donc une longueur constante, celle que nous notons cd dans les formules. En outre, Apollonios n'utilise pas les mêmes notations entre ces trois propositions pour désigner les mêmes points. Les propriétés métriques des coniques nous apparaissent donc dans des écritures si différentes qu'il nous faut faire un réel effort pour en reconnaître les éléments communs. Ces deux raisons nous ont conduit à rédiger des démonstrations qui restituent une analyse de la question en apportant les éléments de compréhension absents du texte d'Apollonios. La figure IIa 9 expose les éléments de la démonstration.

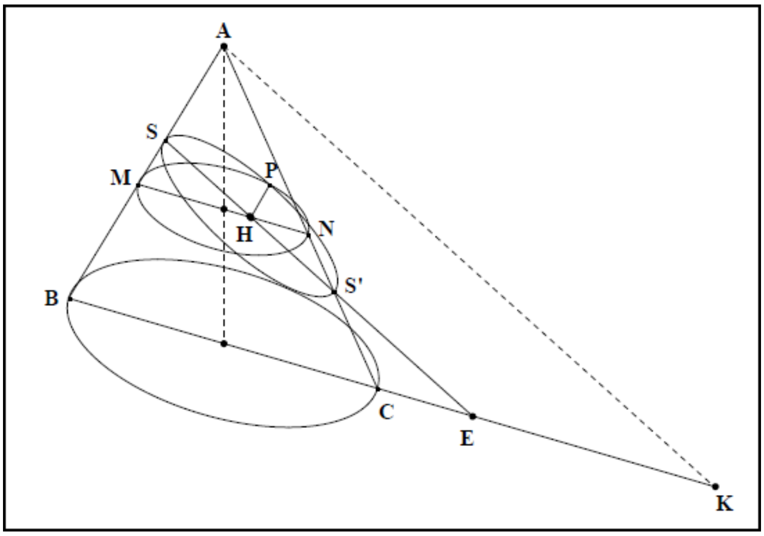

Fig. IIa 9

BAC est un triangle passant par l'axe du cône.

BC est un diamètre du cercle de base.

$SS'E$ est l'axe de la section conique ; S et S' sont ses sommets (le point S' n'existe pas pour la parabole).

AK est la parallèle à l'axe SS', passant par le sommet du cône, A (la droite AK est une donnée inutile pour la parabole).

P est un point de la section.

MNP est le cercle parallèle à la base et passant par P.

H est le pied de la perpendiculaire à (MN), abaissée du point P.

Le dessin comporte beaucoup d'éléments qui n'interviennent pas dans la démonstration. En le simplifiant au maximum, on obtient les schémas suivants pour les différentes sections coniques : fig. IIa 10 pour l'ellipse, fig. IIa 11 pour l'hyperbole, fig. IIa 12 pour la parabole. Dans ces figures, le point P est hors du plan de la figure.

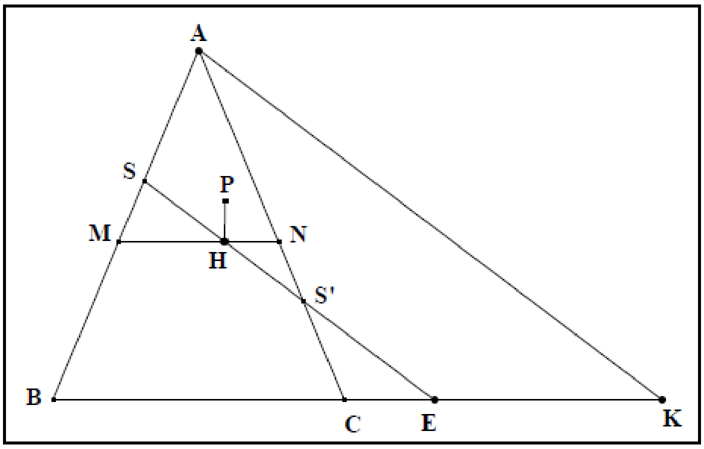

Fig. IIa 10

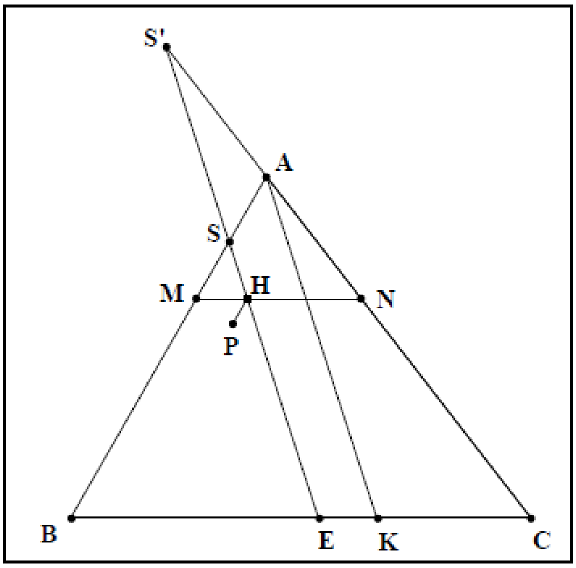

Fig. IIa 11

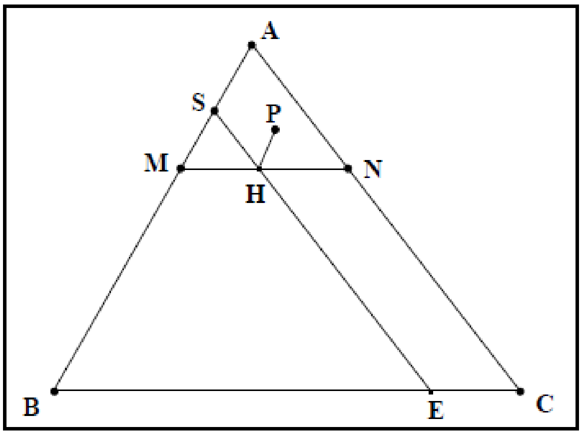

Fig. IIa 12

Dans les trois cas de figure, la démonstration s'appuie sur l'identité : $HP^2 = HM.HN$ (le cercle MPN ne sert pas à autre chose). Le but de la démonstration est de substituer aux grandeurs HM et HN une expression qui fasse intervenir SH et des grandeurs constantes par rapport au point variable P. Suivons Apollonios en examinant d'abord le cas de la parabole :

$(MN)//(BC)$, car le cercle MNP est parallèle à la base du cône. Et, $(SE)//(AC)$, car la section est une parabole.

En conséquence, $CNHE$ est un parallélogramme. Donc, $EC = HN$.

Grâce à la similitude des triangles SHM et BAC, $\dfrac{HM}{HS} = \dfrac{CB}{CA}$.

Grâce à la similitude des triangles BAC et BSE, $\dfrac{EC}{SA} = \dfrac{BC}{BA}$.

Substituons HN à EC dans le second rapport, $\dfrac{HN}{SA} = \dfrac{BC}{BA}$.

En conclusion, $HP^2 = HS.SA.\dfrac{BC^2}{AC.AB}$, écriture de la forme $y^2 = x$. constante, en posant $y = HP$ et $x = HS$. La constante $SA.\dfrac{BC^2}{AC.AB}$ s'appelle le *côté droit* que nous notons cd.

Dans le texte apollonien, le lecteur remarquera que le côté droit n'est pas défini par l'égalité $cd = SA.\dfrac{BC^2}{AC.AB}$ mais, *mutatis mutandis*, par la proportion $\dfrac{cd}{SA} = \dfrac{BC^2}{AC.AB}$ qui compare des grandeurs homogènes : d'un côté, des longueurs, de l'autre, des surfaces. Dans le cadre de la géométrie grecque, notre écriture est absurde, car elle sous entend un produit entre SA et $\dfrac{BC^2}{AC.AB}$. Or, pour un Grec, aucun de ces facteurs n'est un nombre : le premier est une longueur et le second un rapport qui, depuis la découverte des irrationnels, n'est plus interprétable comme un nombre de fois. Toute opération entre des êtres mathématiques de nature différente n'aurait donc aucun sens.

Les cas de l'hyperbole et de l'ellipse conduisent aux mêmes équations qui se déduisent des mêmes similitudes. En nous appuyant sur les schémas ci-dessus et sur la relation $HP^2 = HM.HN$, la démonstration se déroule de la manière suivante :

Grâce à la similitude des triangles SHM et AKB, $\frac{HM}{HS} = \frac{KB}{KA}$.

Grâce à la similitude des triangles NHS' et CKA, $\frac{HN}{HS'} = \frac{KC}{KA}$.

En substituant à HM et HN les expressions déduites de ces deux proportions, l'égalité $HP^2 = HM.HN$ devient $HP^2 = HS.HS'.\frac{KB.KC}{KA^2}$ (1)

Posons $ct = SS'$ et définissons le côté droit cd par la proportion : $\frac{cd}{ct} = \frac{KB.KC}{KA^2}$. cd existe comme quatrième proportionnelle à trois grandeurs connues.

Pour l'hyperbole, (1) s'écrit alors : $HP^2 = y^2 = x.(ct + x).\frac{cd}{ct} = x.cd + x^2.\frac{cd}{ct}$.

Pour l'ellipse : $HP^2 = y^2 = x.(ct - x).\frac{cd}{ct} = x.cd - x^2.\frac{cd}{ct}$.

Examinons maintenant la relation (1) du point de vue d'Apollonios en nous aidant du dessin ci-dessous (fig. IIa 13). Les lettres S, S', H et P représentent les mêmes points que sur le schéma en relation avec l'hyperbole ; T est défini comme la quatrième proportionnelle inconnue dans l'équation $\frac{HT}{HS'} = \frac{KB.KC}{KA^2}$. Nous constatons que $\frac{HT}{HS'} = \frac{S\Lambda}{SS'}$, où $S\Lambda$ est appelé le côté droit ; c'est une grandeur fixe, car définie par la proportion $\frac{S\Lambda}{SS'} = \frac{KB.KC}{KA^2}$ dans laquelle les trois autres grandeurs sont fixes par rapport à P. Remarquons que SS' note le côté transverse.

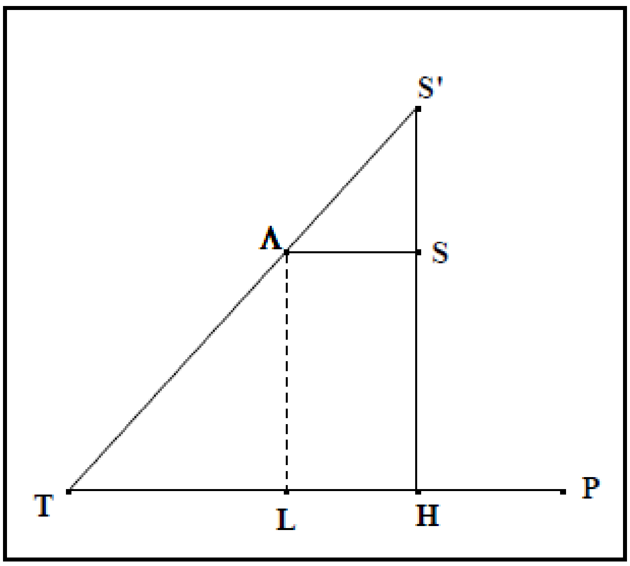

Fig. IIa 13

En raisonnant à la manière d'Apollonios, l'égalité (1) s'écrit sous la forme $\frac{HP^2}{HS.HS'} = \frac{S\Lambda}{SS'}$.

Or, $\frac{S\Lambda}{SS'} = \frac{LT}{L\Lambda} = \frac{LT}{HS}$ et $\frac{LT}{HS} = \frac{LT.HS'}{HS.HS'}$. Donc, $\frac{HP^2}{HS.HS'} = \frac{LT.HS'}{HS.HS'}$.

On en déduit l'égalité : $HP^2 = LT.HS'$, c'est-à-dire, $HP^2 = LT.HS + LT.SS'$.

Or, $\frac{S\Lambda}{SS'} = \frac{LT}{HS}$ équivaut à $S\Lambda.HS = LT.SS'$. En conséquence, $HP^2 = S\Lambda.HS + LT.HS$.

Autrement dit, le carré de l'ordonnée est égal au rectangle sous le côté droit et l'abscisse $(S\Lambda.HS)$ augmenté du rectangle $(LT.HS = LT.L\Lambda)$ semblable au rectangle sous le côté droit et le côté transverse $(S\Lambda.SS')$.

Sans reprendre le déroulement complet de l'explication précédente, examinons le cas de l'ellipse en nous aidant du dessin ci-dessous (fig. IIa 14).

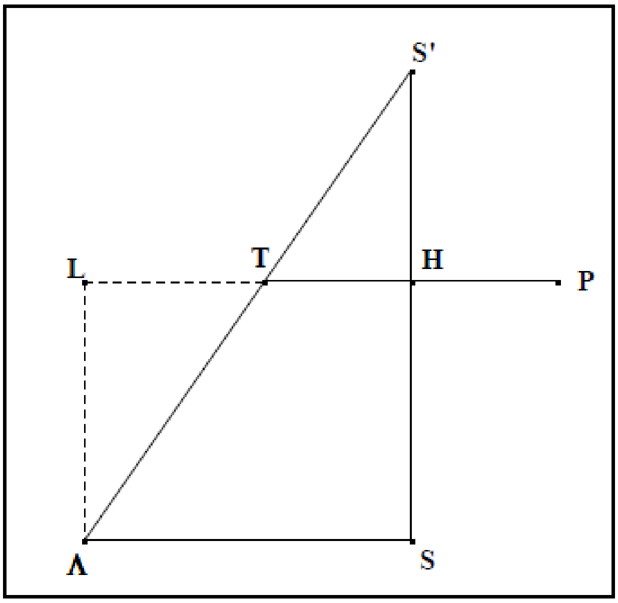

Fig. IIa 14

T et Λ sont à nouveau définis par $\frac{HT}{HS'} = \frac{KB.KC}{KA^2}$ et par $\frac{HT}{HS'} = \frac{S\Lambda}{SS'}$; $S\Lambda$ note toujours le côté droit et SS' le côté transverse. Les proportions $\frac{HP^2}{HS.HS'} = \frac{S\Lambda}{SS'}$ et $\frac{S\Lambda}{SS'} = \frac{LT}{L\Lambda} = \frac{LT}{HS}$ nous conduisent à nouveau à l'égalité $HP^2 = LT.HS'$, c'est-à-dire, $HP^2 = LT.SS' - LT.HS$. Comme $\frac{S\Lambda}{SS'} = \frac{LT}{HS}$ équivaut à $S\Lambda.HS = LT.SS'$, $HP^2 = S\Lambda.HS - LT.HS$.

Autrement dit, le carré de l'ordonnée est égal au rectangle sous le côté droit et l'abscisse $(S\Lambda.HS)$ diminué du rectangle $(LT.HS = LT.L\Lambda)$ semblable au rectangle sous le côté droit et le côté transverse $(S\Lambda.SS')$.

Dans l'œuvre d'Apollonios et jusqu'aux mathématiciens français du premier XVII[e] siècle, ces trois relations métriques ne seront pas considérées comme une caractéristique de chacune des coniques, pas plus que la relation $HP^2 = HM.HN$ pour le cercle. En outre, nous ne connaissons aucune démonstration de leur réciproque qui nous permettrait de penser que les mathématiciens de l'Antiquité ont envisagé de les penser comme des propriétés caractéristiques de leur courbe. Il fallait en effet accepter de considérer les courbes et leurs équations comme deux faces d'une même réalité. Ce point de vue, Descartes l'a rendu possible dans sa nouvelle géométrie en faisant passer ces relations du domaine des grandeurs à celui des nombres. Mais si Descartes avait rencontré un Apollonios, ce dernier lui aurait, sans aucun doute, fait remarquer que sa géométrie ne justifiait qu'un mode de calcul sur les longueurs, qu'elle se fondait sur des constructions bien connues dans l'Antiquité et qu'elle esquivait la question de l'irrationalité.

Les figures suivantes visualisent les relations d'Apollonios dans les trois coniques (fig.IIa 15 pour la parabole, fig. IIa 16 pour l'ellipse, fig. IIa 17 pour l'hyperbole). Dans ces figures, on a noté $y = HP$, $x = SH$, $cd = S\Lambda$ et $ct = SS'$. Le point T se trouve à l'intersection de $S\Lambda$ et de l'ordonnée HP.

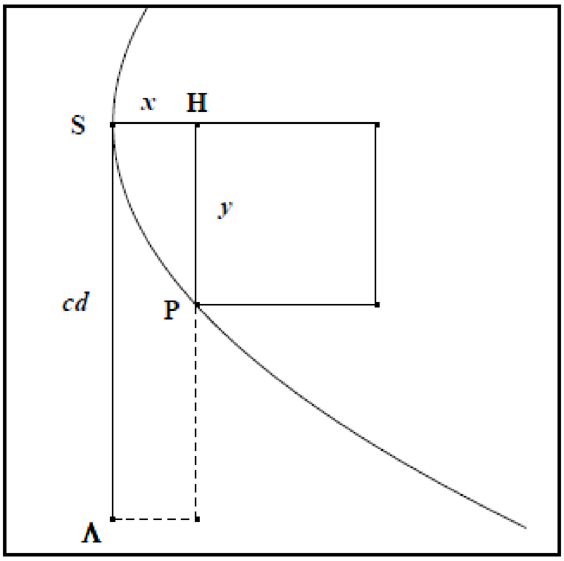

Fig. IIa 15

<u>Parabole</u> : le carré sur HP est égal au rectangle ΛH ou $y^2 = cd.x$.

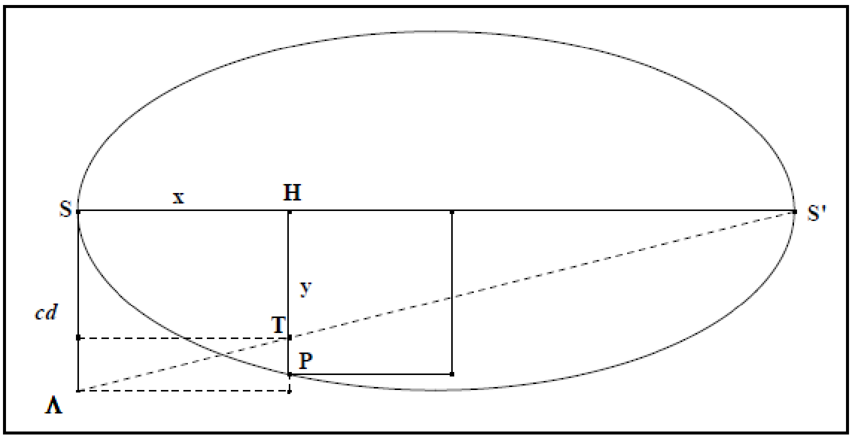

Fig. IIa 16

<u>Ellipse</u> : le carré sur HP est égal au rectangle ΛH diminué du rectangle ΛT

ou $y^2 = cd.x - \dfrac{cd}{ct}.x^2$.

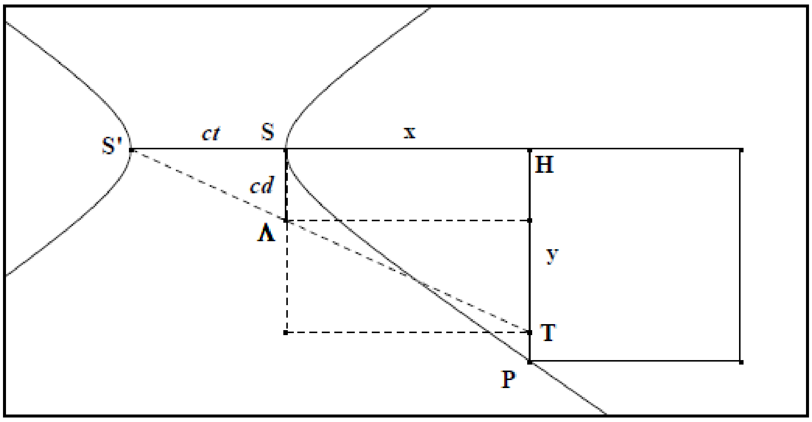

Fig. IIa 17

<u>Hyperbole</u> : le carré sur HP est égal au rectangle ΛH augmenté du rectangle ΛT ou $y^2 = cd.x + \dfrac{cd}{ct}.x^2$.

Dans le premier livre des coniques, on trouve d'autres relations métriques qui généralisent aux coniques celles déjà connues sur le cercle. La figure IIa 18 présente, dans le cercle, les éléments concernés : tangente TP, ordonnée HP, diamètre $SS' = ct$. Le côté droit, que nous notons cd, n'est pas représenté sur ce dessin. Dans le cas du cercle, $cd = ct$ et donc $\dfrac{cd}{ct} = 1$; les relations encadrées se simplifient alors en $HP^2 = HS.HS'$, égalité que nous avons rencontrée dans les calculs précédents, et en $HP^2 = HC.HT$. Les relations sous leur forme générale concernent les trois coniques à centre : cercle, ellipse et hyperbole. La première se lit à la vingt et unième proposition, la seconde, à la trente-septième.

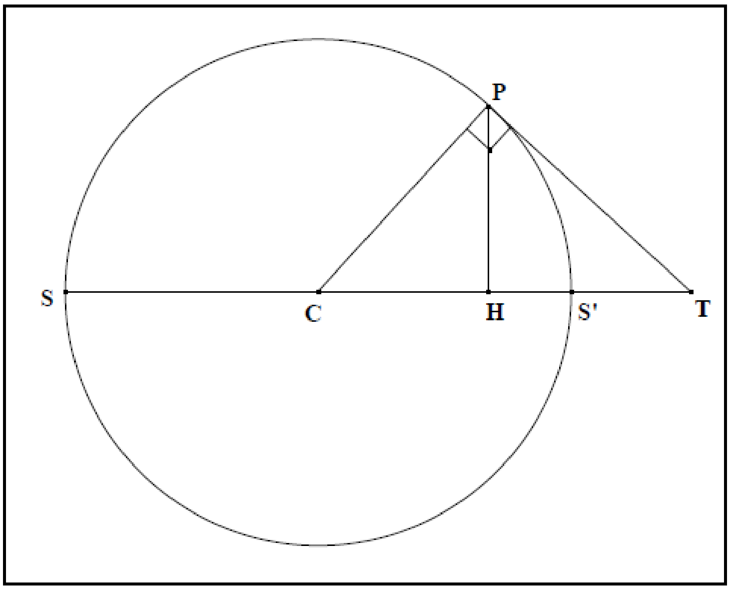

Fig. IIa 18

<u>Cercle</u> : $\dfrac{HP^2}{HS.HS'} = \dfrac{HP^2}{HC.HT} = \dfrac{cd}{ct}$

Apollonios traduit la première de ces relations sous une forme qui, en considérant un second point sur la conique, élimine le terme constant $\frac{cd}{ct}$. Notons-le P' et notons H' le pied de son ordonnée sur le diamètre. On obtient alors l'égalité $\frac{HP^2}{HP'^2} = \frac{HS.HS'}{H'S.H'S'}$ qui répond comme un écho à celle donnée à la vingtième proposition pour la parabole, à savoir $\frac{HP^2}{HP'^2} = \frac{HS}{HS'}$.

La seconde égalité $\frac{HP^2}{HC.HT} = \frac{cd}{ct}$ est donnée en même temps que cette autre, $\left(\frac{1}{2}SS'\right)^2 = CH.CP$, à la trente-septième proposition. Elles sont utilisées par Apollonios dans les propositions suivantes qui étudient les transformations subies par les relations fondamentales lors « d'un changement de repère ».

Apollonios utilise à la trente-quatrième proposition le fait que le conjugué harmonique du pied de l'ordonnée d'un point P par rapport aux sommets d'une conique à centre est le point d'intersection, avec le diamètre, de la tangente issue de P. Cette relation, que nous écrivons $\frac{TS}{TS'} = \frac{HS}{HS'}$, était connue au moins pour le cercle, puisque nous pouvons la lire dans les *Éléments* d'Euclide. La trente-cinquième proposition nous donne l'égalité correspondant au cas de la parabole, à savoir $TS = HS$: la sous tangente, c'est-à-dire, le segment déterminé, sur le diamètre, par l'ordonnée et la tangente d'un point sur la conique, est toujours coupée en deux par le sommet. La question des relations métriques est maintenant résolue pour l'essentiel. Il nous reste à examiner celle relative aux tangentes.

Nous ne savons pas quelle fut l'étendue de la notion de tangente avant Apollonios. La seule définition explicite que l'histoire nous ait transmis se lit au troisième livre des *Éléments* d'Euclide et concerne exclusivement le cercle. Dans ces définitions, « toucher » signifie « passer par un point » : « *Une droite est tangente à un cercle si elle touche le cercle mais, prolongée, ne le traverse pas* », « *sont tangents, les cercles qui se touchent sans se couper* ». Dans le premier livre des *Coniques*, au vu des démonstrations qui traitent du cas des tangentes, nous pourrions penser qu'Apollonios s'est appuyé sur la définition euclidienne en l'étendant aux coniques non circulaires. Il y démontre, en effet, comme le fait Euclide pour le cercle, que certaines droites touchant la courbe en un point et respectant des conditions qui nous assure de son existence, restent à l'extérieur de la courbe, et que, suivant toujours Euclide, cette droite est unique. Cette définition est suffisante pour considérer des tangentes à une conique mais celles des cercles tangents ne convient pas pour traiter, comme dans le quatrième livre, le cas de coniques tangentes entre elles, car deux coniques tangentes en un point se recoupent en général. Nous ne savons qui fut le premier à lever la difficulté mais la lecture du quatrième livre nous montre que les Grecs avaient compris le caractère local de la notion de tangente, car Apollonios y considère implicitement que deux coniques sont tangentes, lorsqu'elles partagent la même tangente au point de contact. L'absence d'une définition explicite corrigeant la définition euclidienne laisse à penser que la question fut résolue avant la rédaction des *Coniques*.

Nous avons dit plus haut comment Apollonios a traité les cas des droites tangentes à une conique. Cette question mérite quelques explications supplémentaires, car la démarche apollonienne diffère de la nôtre en ce sens qu'il nous semble parfois prendre le problème à l'envers. La cause réside dans la définition euclidienne qui ne permet pas d'assurer à priori l'existence d'une droite touchant une section, c'est-à-dire, passant par un point mais demeurant à l'extérieur de la section. La démarche moderne est tout autre, car nous faisons reposer l'existence d'une tangente sur la dérivabilité de la fonction qui représente la courbe étudiée. La différence entre ces deux points de vue est déjà claire pour la tangente au cercle. Nous savons, en effet, que la tangente en un point de la circonférence d'un cercle est perpendiculaire à la droite déterminée par le point de contact et le centre du cercle. De nos jours, une présentation possible de cette propriété suivrait de préférence la démarche suivante :

la circonférence d'un cercle est localement la représentation graphique d'une fonction dérivable	⇒	en un point de la circonférence, il existe toujours une tangente, unique par définition de la dérivée	⇒	la droite joignant le point de contact et le centre du cercle est perpendiculaire à la tangente

Euclide, contraint par sa propre définition, se sert de la propriété finale sur l'angle entre la tangente et le rayon pour assurer l'existence d'une droite touchant la circonférence en restant à l'extérieur du cercle. En un point de la circonférence :

il existe une droite perpendiculaire à celle joignant le point considéré au centre du cercle	⇒	cette perpendiculaire prolongée ne recoupe pas le cercle	⇒	cette perpendiculaire est une tangente et elle est unique

On va retrouver la même démarche chez Apollonios dans les propositions 33 à 37, dont nous avons déjà parlé dans le paragraphe sur les relations métriques : Apollonios démontre tout d'abord que la droite issue d'un point de la section et déterminée par la donnée d'un second point qui, sur le diamètre, vérifie certaines relations métriques est une tangente. Étant maintenant assuré de l'existence des tangentes, il peut les envisager comme des données. Il démontre donc, ensuite, en une réciproque que nous aurions considérée en premier, que la tangente donnée coupe le diamètre en un point qui satisfait aux relations métriques précédentes. La boucle est bouclée.

Avec la question des tangentes, se clôt ce bref commentaire dont l'ambition fut non pas de proposer un exposé détaillé des résultats du premier livre mais de discuter autour des éléments fondamentaux qui conduisent à l'ensemble de ses résultats. Cette raison impose l'abandon de deux sujets importants mais qui dérivent des relations métriques revues dans ce commentaire : celui sur les hyperboles conjuguées ou, à la fin du livre, celui sur les calculs qui conduisent au « changement de repère ».