La obra maestra del Compañero Cantero

Una actividad constructiva de pavimento bajo forma histórica

por Danielle Salles-Legac con la colaboración de Ruben Rodriguez ,

Philippe Langlois, Eric Trotoux y Silvia Sanchez D'Arrigo

Artículo para el sitio del IREM el 30 de septiembre de 2017

Nivel: a partir del colegio y para los alumnos profesores.

Introducción: esta actividad es la continuación de los trabajos del equipo Geometría y Relaciones Internacionales del IREM de Normandía-Caen cargable sobre nuestro sitio:

https: // irem.unicaen.fr / y, más particularmente:
Https: // irem.unicaen.fr / spip.php? Article197 disponible también en español.

Presentación del trabajo: desarrollamos en un texto que será publicado pronto en un folleto I.R.E.M. Normandía la noción de: " Rosetones Celestes " que es una extensión de un pavimento de Roger Penrose presentado en el suelo de una iglesia de la Menorca: Santa María de Mahón.

Una actividad constructiva de pavimento bajo forma histórica
Material: hojas de papel grueso de formato A3, transportador, compás, regla de 20cm, tijeras, lápices, si es posible una superficie de trabajo de madera y software GEOGEBRA.

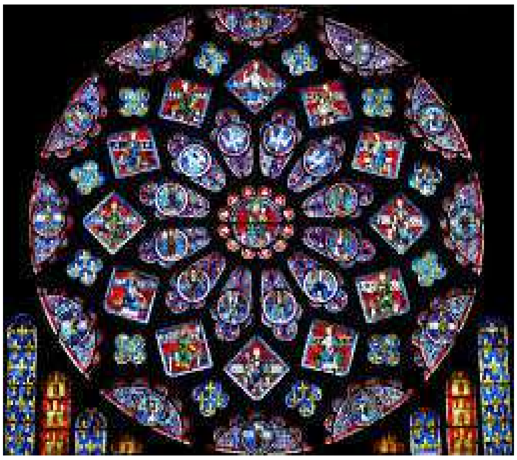
Nivel: a partir del secundario básico

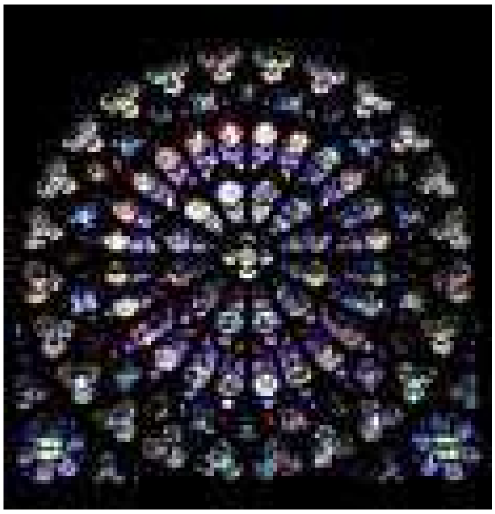
Este preámbulo puede ser leído en voz alta a la clase por el profesor o un alumno.
Presentamos aquí la noción de: " Rosetones Celestes " que es una extensión de un pavimento de Roger Penrose presentado en el piso de una iglesia de la Menorca: Santa María de Mahon.

La obra maestra del Compañero Cantero

Un compañero cantero, encargado por los monumentos históricos de rehacer el piso de una bella pequeña capilla en rotonda tuvo ganas de dejar, como los constructores de catedrales, su marca en la historia, esta sería, además, su obra maestra de recepción de Compañero (*). El decidió entonces pavimentar la rotonda con un Rosetón Celeste. Hacía falta que este trabajo fuese realizable y debió hacer algunos cálculos.

La capilla tenía un diámetro de 4m medido al decámetro flexible de los albañiles. He aquí cómo procedería para trazar el Rosetón Celeste: trazaría sobre el suelo en cemento de su taller un círculo de diámetro 4m luego un polígono regular (como saben ellos todos hacer los constructores de catedral para sus vidrieras y sus pavimentos) a menudo octógonos, a veces decágonos ¡mire como es bello!





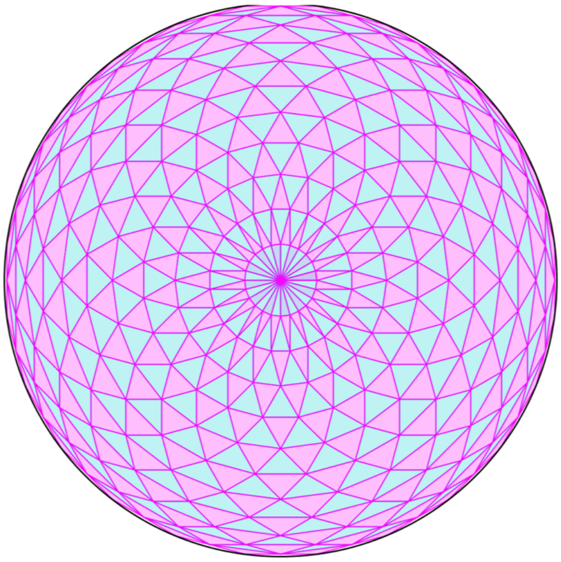
Trasladaría sobre el perímetro del círculo una longitud de 50cm para calcular cuántos adoquines debería utilizar. En efecto, había decidido que utilizaría adoquines de 50 cm de lado porque era cómodo para el marmolista.

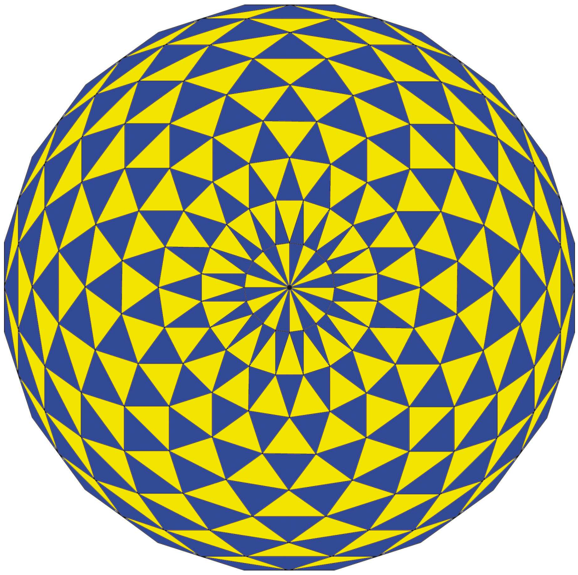
Presentación por el profesor

Desarrollamos en un texto que será publicado en extenso en un folleto I.R.E.M. Normandía la noción de: " Rosetones Celestes " que es una extensión de un pavimento de Roger Penrose presentado en el suelo de una iglesia de la Menorca: Santa María de Mahón, recientemente renovada (*).

Así como usted puede comprobarlo el motivo del pavimento situado en lo alto de la foto está constituido por un pentágono estrellado blanco rodeado de rombos rojo oscuro. La estrella central es un decorado simple y no forma parte geométricamente del rosetón.

 (*) https: // irem.unicaen.fr / spip.php? Article197	Mostramos en el artículo citado más arriba que los triángulos que forman la estrella y los rombos son unos triángulos de oro. Luego generalizamos esta construcción al caso de una estrella a 7 brazos y luego a estrellas a un número cualquiera de ramas que llamamos: " Rosetones celestes ". He aquí más abajo dos bellos ejemplos de Rosetones celestes obtenidos por Philippe Langlois y Eric Trotoux con software GEOGEBRA.

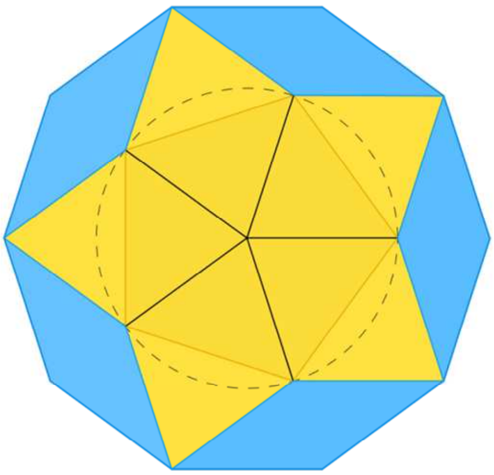


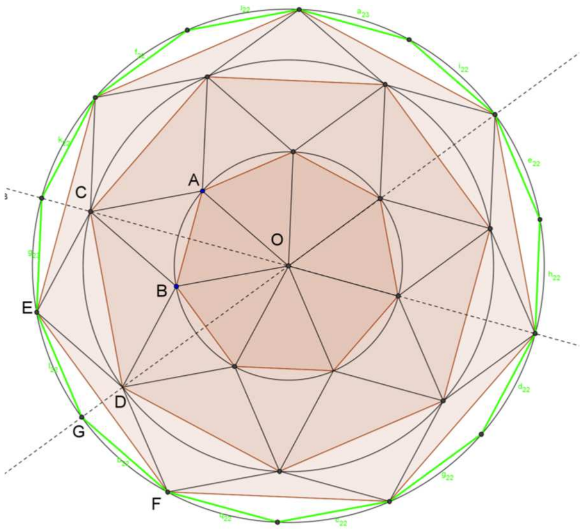


A la izquierda el trabajo de Eric Trotoux muestra un Rosetón Celeste a 24 lados. Así como usted puede comprobar sobre el rosetón azul y amarillo, Philippe Langlois trazó, en primer lugar, un polígono que tiene 20 lados y coloreado los triángulos inscritos de vértice el centro del polígono alternativamente en color amarillo y en azul. Luego trazó los triángulos simétricos a éstos para obtener un **polígono estrellado** de radio dos veces más grande que el del primer polígono. Coloreó los triángulos en Azul.

I - Actividad preparatoria para todos con GEOGEBRA

Le pedimos explicar la construcción ayudándole con figuras que corresponden al caso del pentágono y al caso del heptágono.





Indicaciones para la construcción del rosetón a 7 ramas que puede ser ejecutada por los alumnos con software GEOGEBRA "por la mano ".

Trazar con la orden PUNTO dos puntos A y B distantes del lado del heptágono.

Hacer un clic en POLÍGONO REGULAR, en ambos puntos A y B ; luego sobre 7. El heptágono convexo obtenido está en color rosa oscuro. Buscar el centro O del polígono trazando con la orden a MEDIATRIZ, dos mediatrices en punteados de dos lados del heptágono.

Trazar con la ayuda del encargo POLÍGONO REGULAR un heptágono de lado [CD], el heptágono obtenido es rosa medio. Acabamos construyendo por simetría axial como más arriba, el punto G simétrico de D con relación a (EF).

El proceso se termina porque el polígono de 14 lados (verde) tan obtenido es convexo.

II - Actividad a partir de la secundaria primera

(Páginas que hay que distribuirles a los alumnos después de la lectura de la historia del compañero).

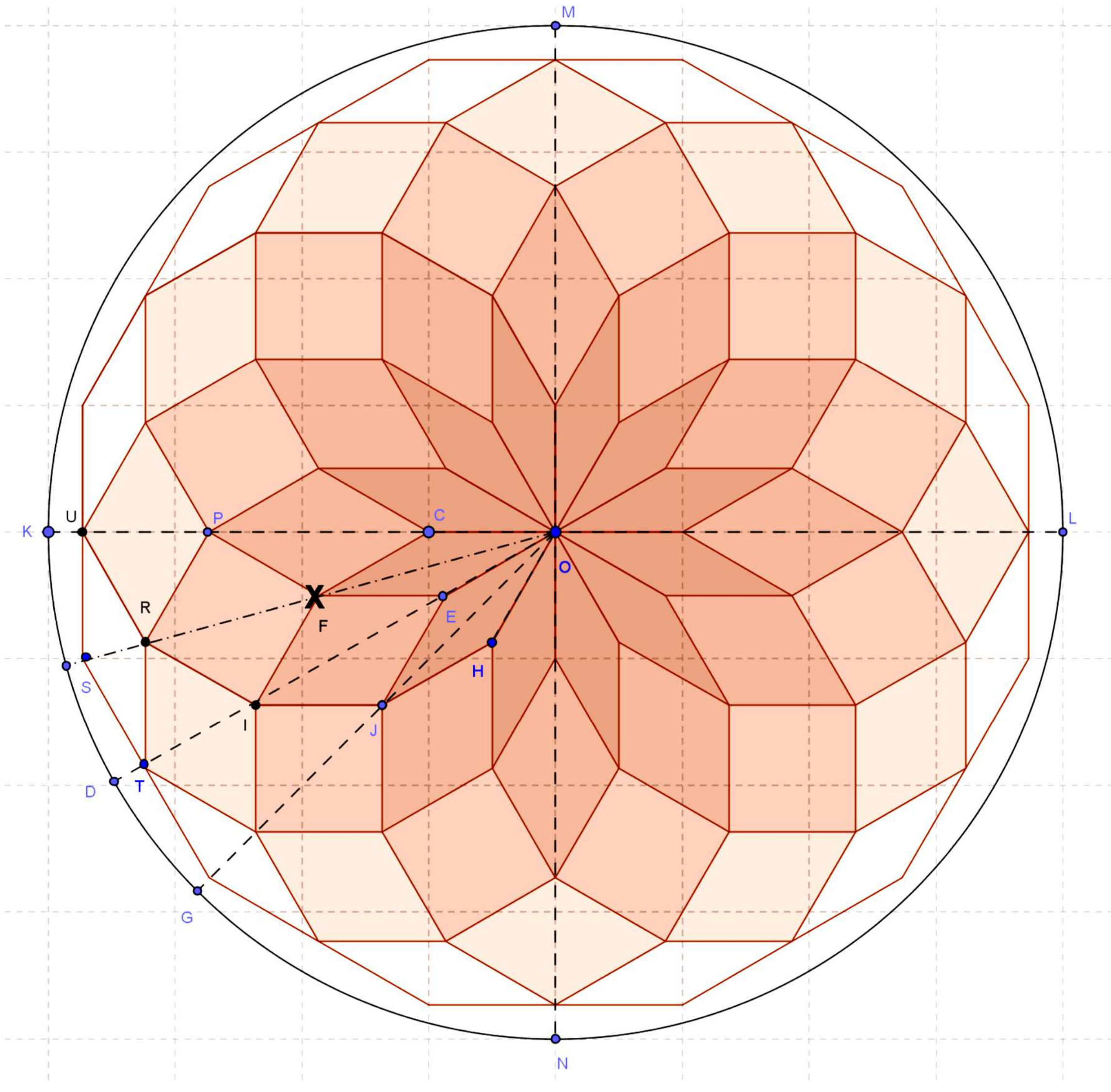
Se trata del solar con un rosetón celeste una capilla de 4 m de diámetro.

El compañero observa el suelo de la capilla y decide utilizar el método de los antiguos constructores: utiliza su regla de 50cm y lo traslada sucesivamente sobre el perímetro del suelo de la capilla que trazó a la escala 1 sobre el suelo de su taller. Comprueba que puede trasladar 24 veces su regla hasta que quede poco sitio.
y que hasta que quede poco sitio. Podrá pues colocar 12 adoquines en la periferia del rosetón (ver página siguiente).

Decide pues pavimentar la capilla con un rosetón celeste de 12 lados. He aquí el rosetón celeste realizado con la ayuda del software GEOGEBRA, una unidad representa 50cm, el círculo representa la pared interior de diámetro 4m.

El compañero observa el suelo de la capilla y decide utilizar un método de los antiguos constructores: utiliza su regla de 50cm y lo traslada sucesivamente sobre el perímetro del suelo de la capilla que trazó a la escala 1 en su taller. Comprueba que puede trasladar 24 veces su regla hasta que quede poco sitio.
. Podrá pues colocar 12 adoquines en la periferia del rosetón como usted puede observarlo más abajo.

Decide pues pavimentar la capilla con un **rosetón celeste a 12 lados**. He aquí el rosetón celeste realizado con la ayuda del software GEOGEBRA, una unidad de la figura representa 50cm, el círculo representa la pared interior de diámetro 4m.



Actividad para los alumnos a partir de la segundaria primera

Las cifras entre paréntesis reenvían las cuestiones al final de texto.

Usted puede valerse de la figura precedente.

1) Sobre una hoja de papel fuerte de formato A4, trace un semicírculo de diámetro 40cm (1).
2) Trace dos diámetros ortogonales [MN] y [KL], luego dos radios [OK.] y [OD] de ángulo 30 ° con transportador. Traslade al compás sobre los lados del ángulo dos segmentos [OC] y [OE] de origen O y de medida 5cm.
3) Trace al compás dos arcos de círculo de centro C y E, de radio 5cm que se encuentran sobre F (2).
4) Trace el rombo OCFE, su ángulo de vértice O mide 30 ° por construcción (3).
   Trace el rombo OEJH simétrico del rombo OCFE con relación a (OD).
5) Trace el radio [OG] del círculo que pasa por J (4).
6) Trace dos arcos de círculo de centro F y J, de radio 5cm que se encuentran sobre I, obtenemos rombo EFIJ (5).
7) Trace dos arcos de círculo de centro F, de radio 5cm que encuentran [OK] sobre P, obtenemos el rombo FPRI. Trace con mismo método el rombo RUST (6).
8) El cuarto de disco KOG contiene todos los tipos de adoquines útiles para solar el suelo de la capilla (7).
9) El compañero se pregunta si calculó bien sus medidas y si el rosetón puede "entrar" en la capilla (8).

10) **Para los más grandes:** debemos prever el abastecimiento de los adoquines por el marmolista, complete la figura al cuarto de círculo (9). Observe el triángulo STO rectángulo sobre T de ángulo en el vértice O de 15 ° (10).

Cuestiones, escriba y justifique su respuesta bajo la cuestión.

1) ¿Cuál es la escala de su representación del suelo de la capilla?

2) ¿ Qué representa el derecho (OF) para el ángulo KOD?

3) ¿Cuál es la medida del ángulo FEO?

4) ¿Qué representa (OG) para el ángulo EOH?

5) ¿Por qué I se encuentra el punto sobre [OD]?

6) y 7) ¿Cuántos tipos de adoquines diferentes hay?

8) Calcule el perímetro de la capilla y del dodecágono. ¿Ya que tienen el mismo centro usted puede deducir de eso que el pavimento va "a entrar" en la capilla?

9) **Para los más grandes**: sabiendo que el ángulo COE mida 30 ° calcule las medidas de los ángulos de los adoquines. ¿ Cuánto hay que prever de adoquines diferentes en todo?

10) Utilizando el seno del ángulo de medida 15 ° en el triángulo rectángulo STO donde T es la mitad de [SV], calcule la medida de [OS] semi diagonal del dodecágono. ¿El dodecágono “entra bien” en la capilla?

Sugerencias de soluciones para el profesor.

1) ¿ Cuál es la escala de su representación del suelo de la capilla? 40cm para 4m sea 1/10.

2) ¿ Que representa la recta (OF) para el ángulo KOD? Su bisectriz como diagonal del rombo OCFE.

3) ¿Cuál es la medida del ángulo FEO?

180 - 30 = 150 ° porque la suma de los ángulos de un rombo es 360 °.

4) ¿Que representa (OG) para el ángulo EOH? Su bisectriz.

5) ¿ Por qué se encuentra el punto I sobre [OD]?

(OD) es la bisectriz del ángulo FEJ.

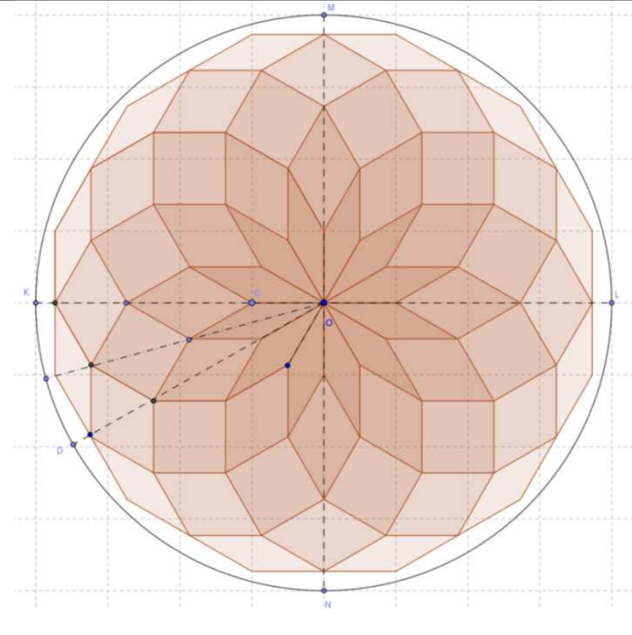
6) Y 7) ¿Cuánto hay tipos de adoquines diferentes? Observamos 5 tipos de adoquines.

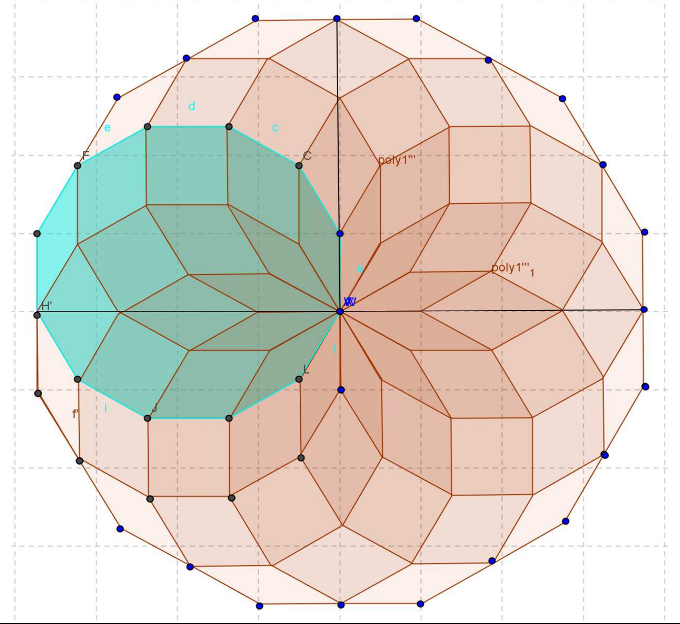
8) Calcule el perímetro de la capilla y el del dodecágono. ¿Ya que tienen el mismo centro usted puede deducir de eso que el pavimento va "a entrar" en la capilla?

¿El perímetro de la capilla es 4 x π sea 3,14 x 4 = 12,56 m.

Utilizando el seno del ángulo de medida 15 ° en el triángulo rectángulo STO donde T está en el medio de [SV]), calcule la medida de [SO] semi-diagonal del dodecágono. ¿El dodecágono " entra " en la capilla?

Sin 15 = 0,26; ST / SO = 0,26; SO = 50/0,26 = 192,30cm; la **respuesta es sí**.

	Sabemos, según los estudios de Philippe Langlois, Eric Trotoux y los cálculos de Danielle Salles, que es posible engendrar los rosetones celestes de orden par utilizando un polígono de diámetro la mitad del rosetón y operando sobre ésta rotaciones de centro una de los vértices de este polígono. He aquí una construcción efectuada con GEOGEBRA:



Observe la figura a la izquierda y escribe un algoritmo de construcción con GEOGEBRA/

Estudio prolongado para los alumnos profesores
Pensemos en los resultados obtenidos.

a) ¿Conseguimos adoquines quiénes pueden ser utilizados dos veces, por qué?
b) ¿Podríamos obtener para otra dimensión de la capilla un tipo utilizable de adoquines tres veces?
c) ¿Podemos utilizar los 3 tipos de adoquines de la capilla para construir un rosetón más pequeño?
d) ¿Uno de los adoquines es un cuadrado, esto siempre es posible?
e) ¿Si el compañero compra sus adoquines al metro cuadrado cual es el gasto que debe prever? ¿Cuál es el área de la superficie restante que hay que cubrir de cemento-piedra entre el pavimento y la pared de la capilla?

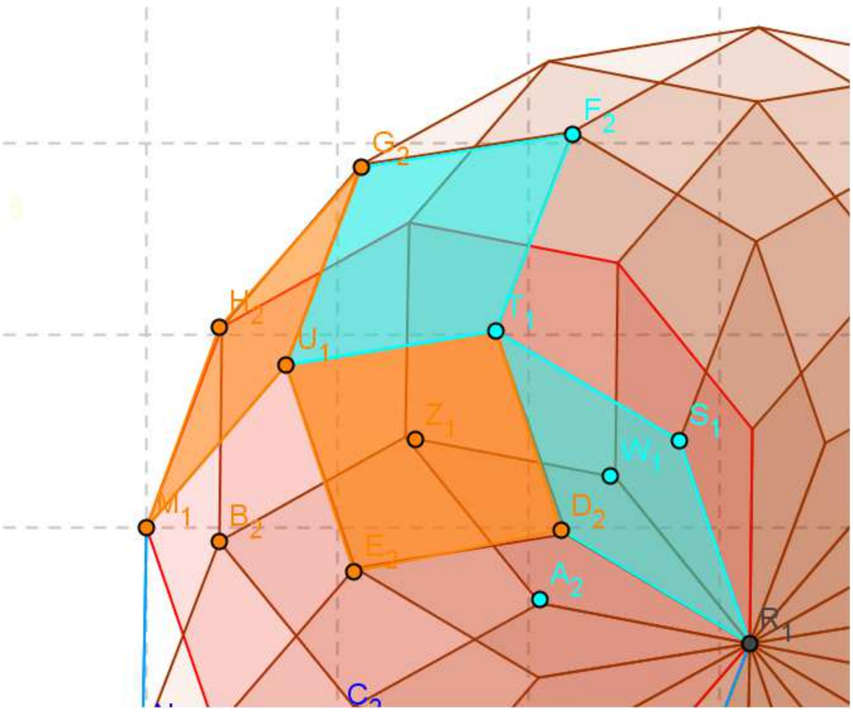
Indicaciones de soluciones:
a) Podemos observar que cuando el número de lados del rosetón es el primero p, no es el caso porque todos los números inferiores a p son primeros con p. Si el número de lados del rosetón es el impar pero no primero por ejemplo 9, los pares de medidas de ángulos obtenidos son:

$$(2\pi/9,\ 7\pi/9)\ ;\ (4\pi/9,\ 5\pi/9)\ ;\ (6\pi/9,\ 3\pi/9\ )\ ;\ (8\pi/9,\ \pi/9)\ ;$$

Las pares son todos diferentes porque el primer término del par siempre es par y el segundo es impar ya que son complementarios a 9, pues si se invierte la orden del par obtenido no pertenece a la serie de las pares.

Pues si el cantero quiere utilizar dos veces un pavimento debe trazar un rosetón con un número par de lados.

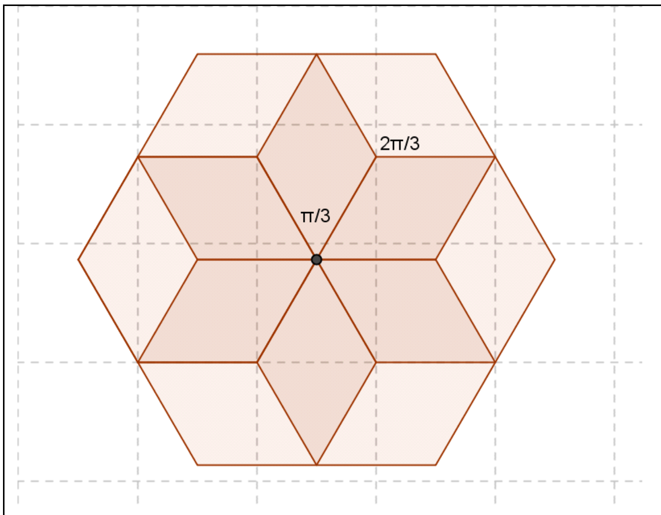
b) Es imposible utilizar tres veces el mismo pavimento porque cada pavimento es utilizado una vez en una dirección y la vez siguiente después de una rotación de π/2.
c) Si el rosetón es más pequeño, el número de adoquines en el centro es más pequeño pues su pequeño ángulo es más grande; pues el pequeño pavimento de ángulo 30 ° no es utilizable.



Vayamos pues a utilizar el pavimento esmeralda de ángulos 60 ° y 120 °.

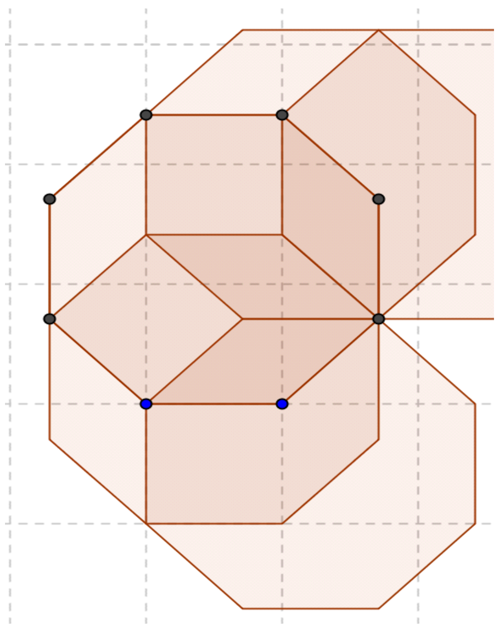
d) Para que el pavimento contenga un cuadrado es necesario que uno de los pares de ángulos relativos al rosetón de orden 2n sea la forma:

(nπ/2n, nπ/2n) . Por ejemplo:(7π/14, 7π/14), Es necesario pues que el rosetón tuviese un número par de lados.
¿Esto es suficiente? No ya que el ejemplo precedente del hexágono no contiene cuadrado.



Obtenemos un hexágono construido a partir de dos adoquines idénticos. Ruben Rodriguez estudió en el capítulo IV del folleto que aparecerá en las ediciones del I.R.E.M de Normandía-Caen: " los Rosetones Celestes " estas propiedades bajo forma algébrica y analítica.
Observemos que un pavimento cuadrado genera un cuadrado dos veces más grande.

Tratemos ahora el octógono



Observamos que uno de los rombos que parece un cuadrado. Los pares de ángulos son: (2π/8, 6π /8);
(4π/8, 4π /8); (2π/8, 6π /8); lo que confirme nuestras observaciones.
Más generalmente sea 2r un número par.
Los pares de ángulos son:
(2π/2r, (2r-2)π /r) (4π/2r, (2r-4)π /r);
(8π/2r, (2r-8)π /8);
Para obtener: (π/2, π/2) debe existir p tal que tenemos el par:
(2pπ/2r, (2r-2p)π /2r) con:
(2pπ/2r) = (2r-2p)π /2r) sea:
2p = 2r-2p sea : 2r = 4p,
Hay que el número de lados del rosetón sea múltiple de 4, el que no era el caso para el hexágono, pero es el caso para el dodecágono.

Aquí un contraejemplo el rosetón a 18 lados:

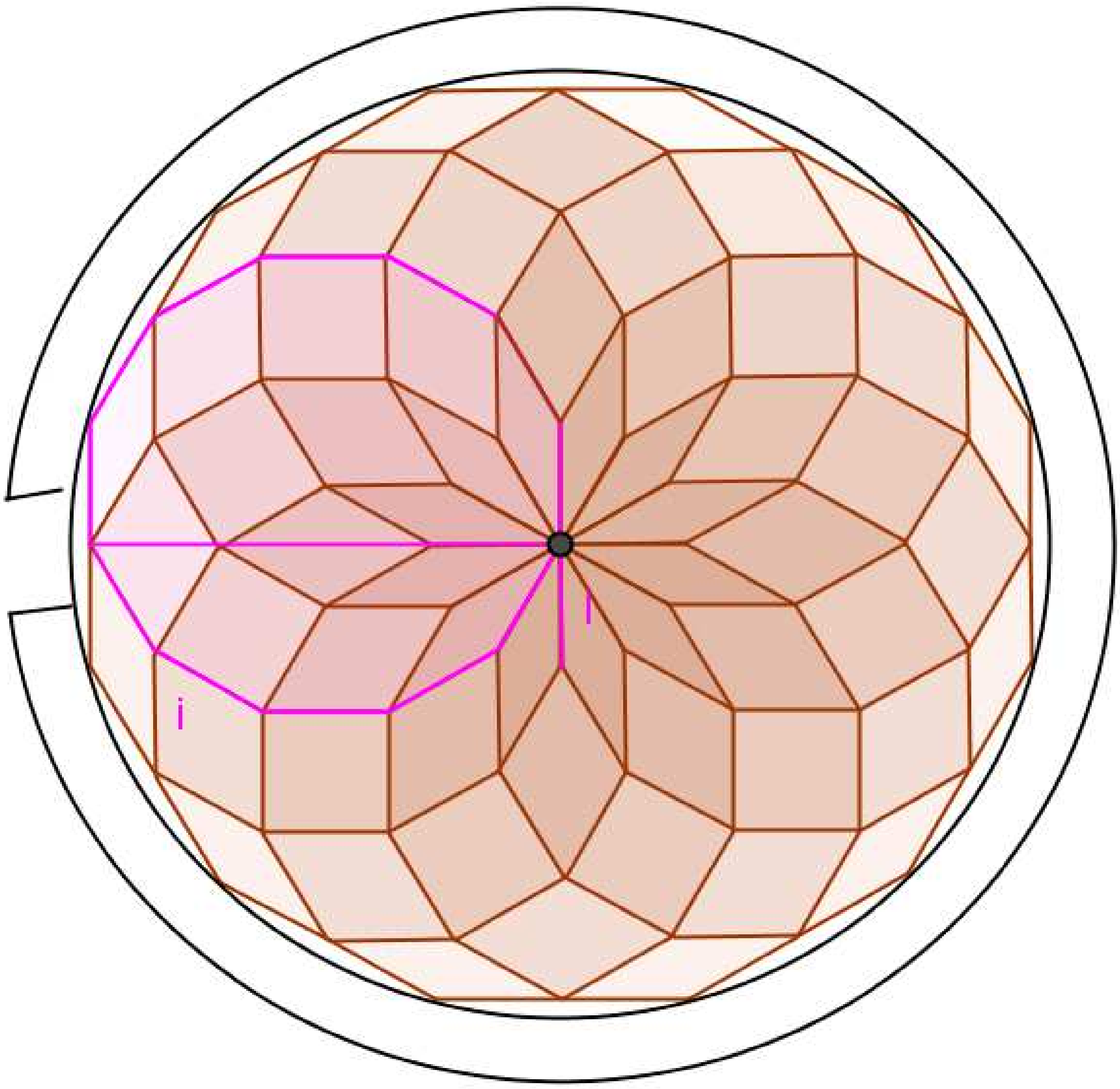
Los pares visualizando los pavimentos son:

(2π/18, 16π /18); (4π/18, 14π /18); (6π/18, 12π /18); (8π/18, 10π /18);

(10π/18, 8π /18); (12π/18, 6π /18); (14π/18, 4π /18); (16π/18, 2π /18).

Ninguno contiene (π/2).

Aquí el pavimento de la capilla:



e) ¿Si el compañero compra sus adoquines al metro cuadrado cual gasto debe prever? ¿Cuál es el área de la superficie restante que hay que cubrir de cemento-piedra entre el enlosado y la pared de la capilla?

Recordemos que:

El cantero necesita de: 24 adoquines de ángulos 30 ° y 150 °; 24 adoquines de ángulos 60 ° y 120 °; 12 adoquines cuadrados. ¿Calculemos el área de la superficie del primer pavimento de ángulos **2 π /12 y 10 π /12**.
Redondeamos al centésimo.

El área de la superficie del primer pavimento es entonces:

0,5 x 0,5 x (2 cos π /12) x (2 cos 10π /12) sea: (cos π /12) x (cos 5 π /12) = 0,5 x 0,97 x 0,26 = **0,13m^2**.

El área de la superficie del segundo pavimento es:

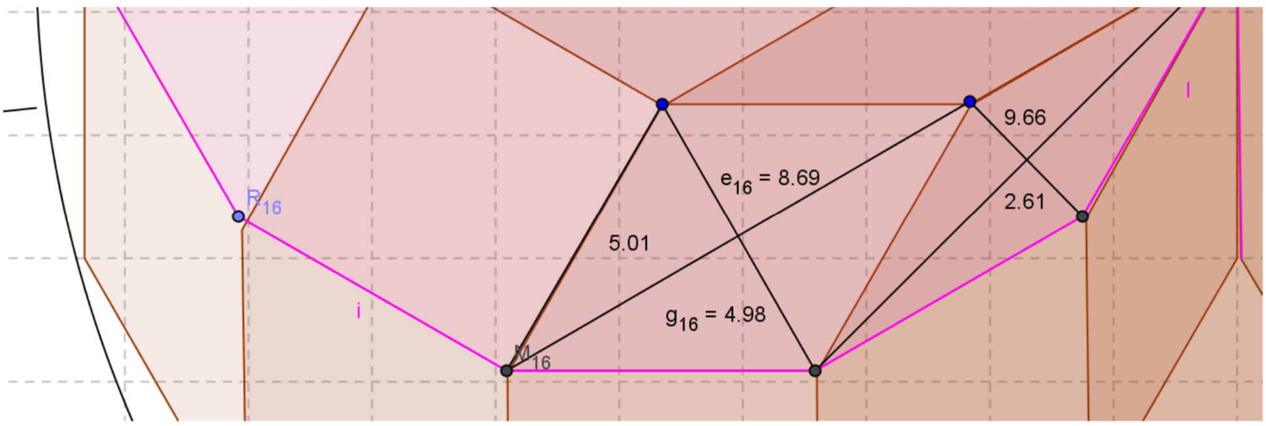
(cos 2π /12) x (cos 4π /12) x 0,5= 0,87 x 0,5 x 0,5 = **0,22 m^2.**

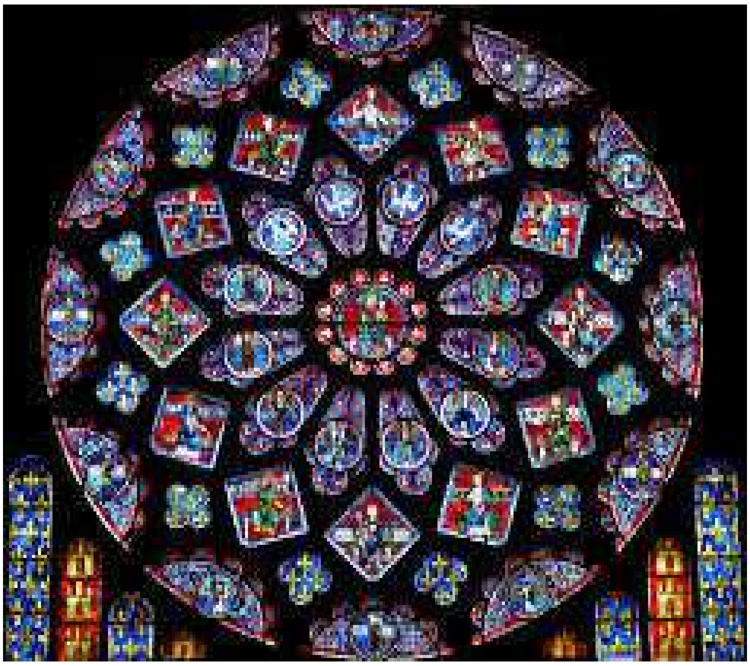
El área de la superficie del cuadrado es: 0,25 m^2.

El área de la superficie total del pavimento es entonces:

24 (0,13 + 0,22) + 12 x 0,25 = 11,4 m^2.

Estos resultados no permiten, a causa de las aproximaciones, de calcular el área de la superficie que hay que cementar. Vea más abajo los valores librados por GEOGEBRA.



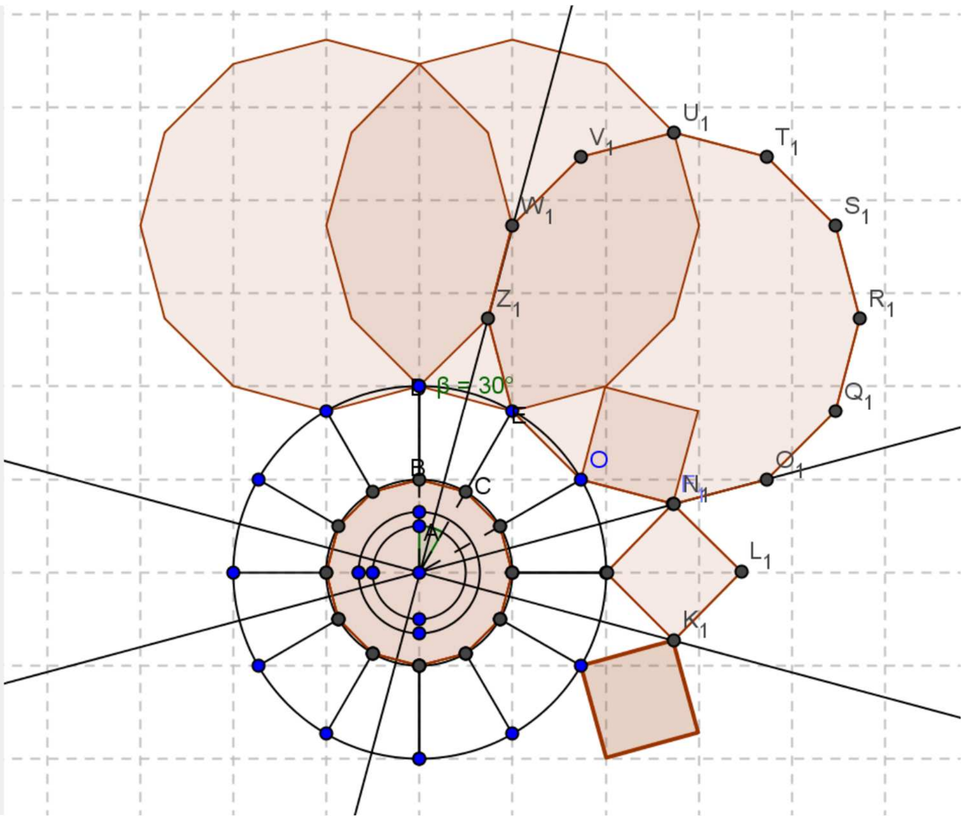


Anexo: estudio del rosetón de la Catedral de Chartres

¿Observe esta fotografía, reconoce formas geométricas?
Trace, lo más escrupulosamente posible, el vitral a la regla y al compás, o con GEOGEBRA.
¿ Este vitral es un "verdadero pavimento matemático"? (*)

Explique su respuesta

He aquí un borrador GEOGEBRA, usted puede observarlo para escribir su algoritmo de construcción.

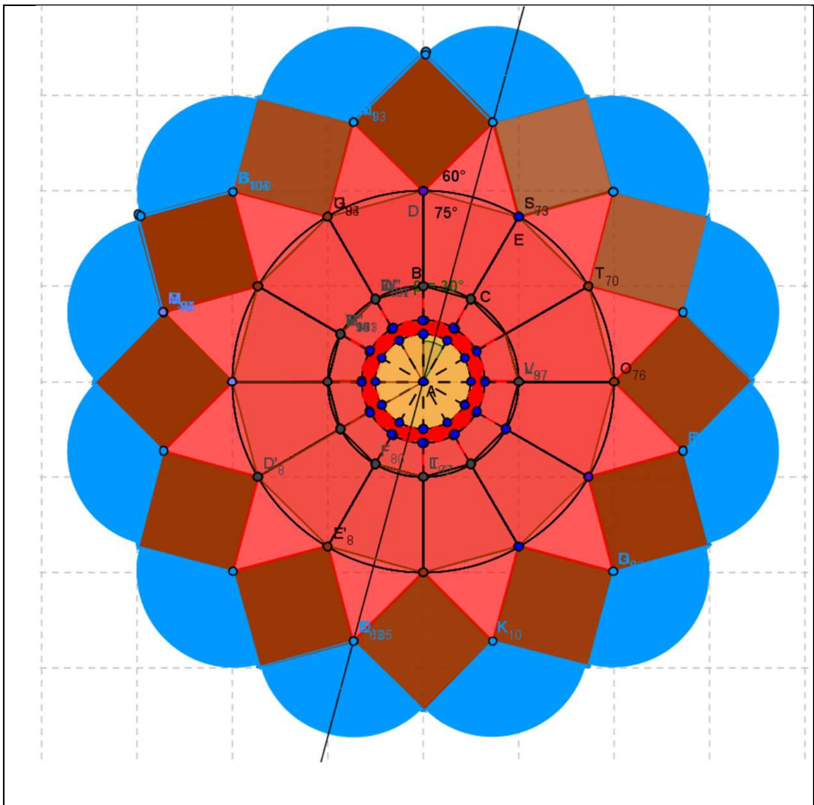


(*) un pavimento matemático es un recubrimiento del plano por polígonos, regulares o no, tal para que no tuviese ningún vacío ni entre ellos, ni recubrimiento. Las vidrieras, hasta teniendo en cuenta juntas de piedra o de cemento son raramente los pavimentos con sentido matemático.

Observación del vitral a los fines de construcción con GEOGEBRA
Observamos que el motivo central contiene un personaje al que podremos añadir a nuestro gusto así como un ribete de pequeños círculos.

Podemos ignorar estos motivos para conseguir cometas que tienen un vértice en el centro A.

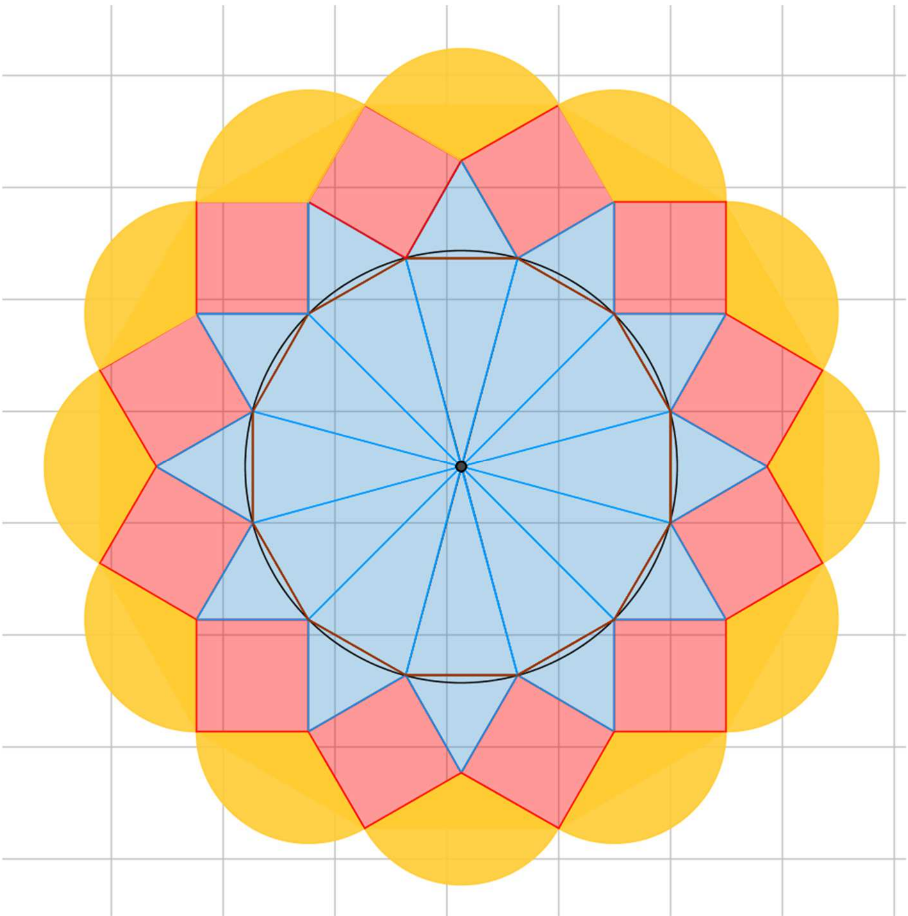
Los motivos que rodean los cometas parecen ser unos cuadrados que trazamos. Los motivos que rodean los cuadrados no parecen formar con éstos un pavimento con sentido matemático, en efecto, son porciones de círculos que no pueden ser unidas con lados de cuadrados, entonces añadiremos triángulos. Podremos eventualmente añadir para imitar el vitral, pero éstos no formarán tampoco un "verdadero" pavimento excepto si completamos, como el albañil podría hacerlo, un circulo de piedra tallada o en cemento.

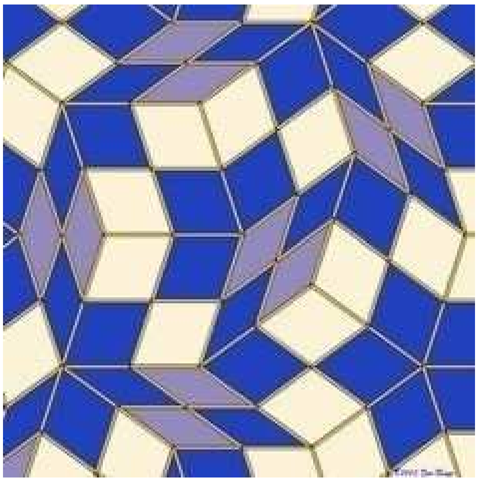


Indicaciones para la construcción del vitral
Trace un punto A que será el centro del rosetón. Trace tres círculos concéntricos de centro A para figurar el pequeño motivo central con los personajes. Usted puede si lo desea trazar los pequeños círculos decorativos trazando el primero luego otros con la orden "rotación" de GEOGEBRA.

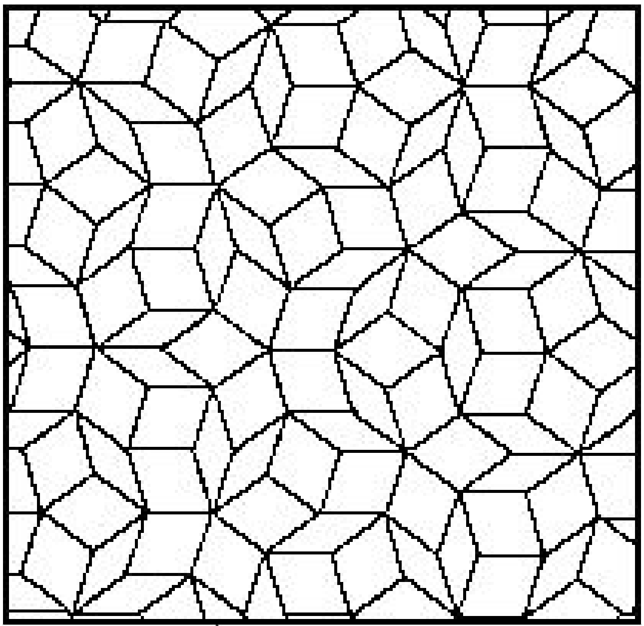
Sobre el tercer círculo, trace con la orden " ángulo de medida dada " un ángulo que tiene un punto B sobre este círculo, de vértice A y de medida 30 °. Los lados de este ángulo encuentran el tercer círculo sobre B y C.
Con la orden " polígono regular ", trace un polígono regular de lado BC a 12 lados. Trace un círculo de centro A de rayo doble del tercer círculo, los lados del angulo BAC encuentran este círculo sobre D y E.

Para construir los cuadrados que son los motivos según nosotros vayamos a calcular las medidas de ciertos ángulos:
Las medidas de los ángulos del triángulo ADE es, por construcción: 30 °, 75 °, 75 °.
Deseamos construir un cuadrado de vértices D, de segundo vértice F situado sobre la bisectriz del ángulo DAE por razones de simetría. Trazamos pues la bisectriz de este ángulo con la función "bisectriz": punzado E, cumbre A, punzado D, El ángulo FDE debe medir: (360 - 150 - 90) 2 = 60 °.
Con la orden " polígono regular " trace un cuadrado de lado [FE], trace otros cuadrados por rotación de éste de 30 ° alrededor de A.
Podemos continuar solando el rosetón sin tomar firmonamente modelo sobre el vitral porque observamos que el motivo siguiente no pavimenta el plano. Podemos por ejemplo trazar un triángulo amarillo, damos un ejemplo sobre la figura final.

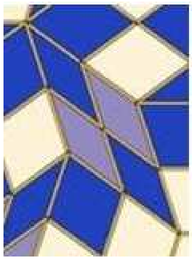




Le proponemos ahora un bello motivo inspirado de Roger Penrose presentado en el sitio:
https: // fr.pinterest.com / pino / 15129348718153072/
¿Le parece que este rosetón sea construido con el mismo tipo de adoquines que los de la iglesia Santa María de Mahon?



Respuesta: a primera vista y a la observación de la estrella situada abajo a la derecha de la foto, los adoquines "casi cuadrados" son los " adoquines obtusos " de la iglesia Santa María de Mahon.

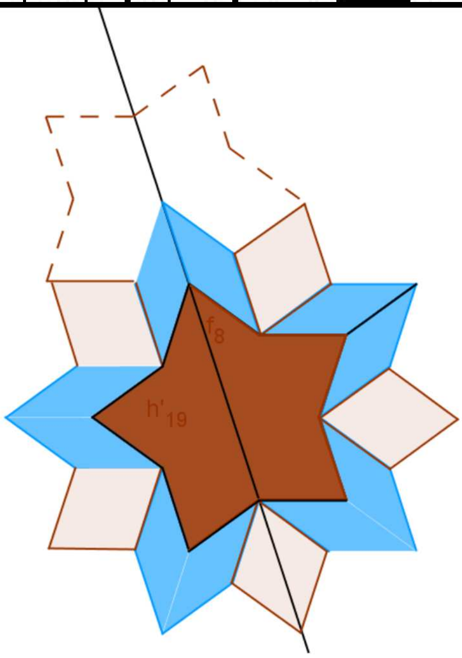


Los adoquines grises completan los rombos que contienen dos adoquines agudos y ningún pavimento blanco.

He aquí al lado una estructura similar.

Le proponemos reproducirla, con la ayuda de GEOGEBRA.

¡ Le trazamos el rosetón central, puede continuarla con bellos colores!



Bibliografía

El mundo: artículo de Elena Soto : Un singular pavimento matemático

http://www.elmundo.es/baleares/2015/03/03/54f5af2ee2704ed0548b45b4.html

Rodriguez Herrera Ruben et Salles-Legac Danielle: « Le nombre d'or, nouveautés mathématiques ludiques », édition 2015 de l'IREM de Normandie.

Rodriguez Herrera Ruben et Salles-Legac Danielle : « Activité autour des triangles d'or et des pavages de type 3 au sens de Roger PENROSE » téléchargeable gratuitement : **https://irem.unicaen.fr/spip.php?article197.**

Version espagnole : https://irem.unicaen.fr/spip.php?article196.

Brigitte Rozoy : Pavages ; Brochure numérisée téléchargeable, site de l'IREM de Normandie : http://www.math.unicaen.fr/irem/