Le chef d'œuvre du Compagnon

Une activité constructive de pavage sous forme historique

par Danielle Salles-Legac

avec la collaboration de Ruben Rodriguez et Philippe Langlois

Article pour le site de l'IREM 30 septembre 2017

Niveau : à partir de la classe de quatrième et pour les élèves professeurs.

Introduction : Cette activité fait suite aux travaux de l'équipe Géométrie et Relations Internationales de l'IREM de Normandie-Caen téléchargeable sur notre site : https://irem.unicaen.fr/ et, plus particulièrement :

https://irem.unicaen.fr/spip.php?article197 disponible aussi en espagnol.

Quelques rappels et présentation : Nous avons développé dans un texte qui sera publié prochainement in-extenso dans une brochure I.R.E.M. Normandie la notion de **: « Rosaces Célestes » qui est une extension d'un pavage de Roger Penrose présenté au sol d'une église de Minorque : Santa Maria de Mahon.**

Le chef d'œuvre du Compagnon tailleur de pierre

Une activité constructive de pavage sous forme historique

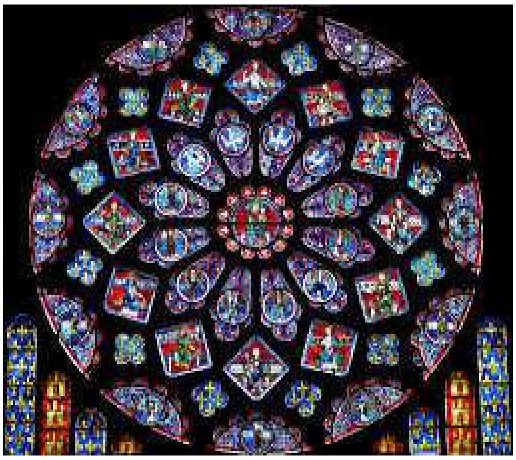
Matériel : feuilles de papier fort de format A3, rapporteur, compas, règle 20cm, ciseaux, crayons, si possible plan de travail en bois, logiciel GEOGEBRA.

Niveau : à partir de la classe de quatrième.

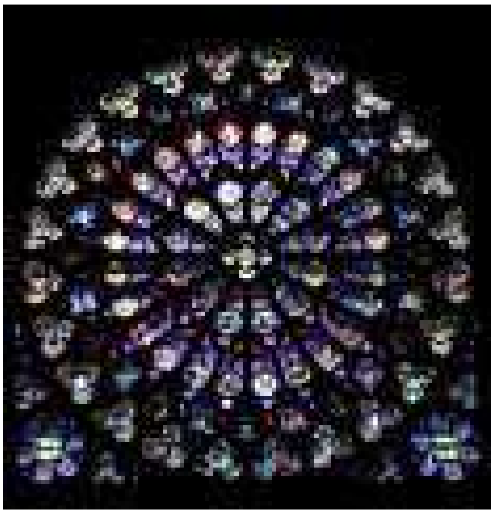
Ce préambule peut être lu à haute voix à la classe par le professeur ou un élève.

Un compagnon tailleur de pierre, chargé par les monuments historiques de refaire le sol d'une belle petite chapelle en rotonde eut envie de laisser, comme les bâtisseurs de cathédrales, sa marque dans l'histoire, ce serait, de plus, son chef d'œuvre de réception de Compagnon (*). Il décida donc de paver la rotonde d'une Rosace Céleste. Il fallait que ce travail soit réalisable bien sûr et il dut faire quelques calculs.

La chapelle avait un diamètre de 4m mesuré au décamètre souple des maçons. Voici comment il procéderait pour tracer la fameuse Rosace Céleste : il tracerait sur le sol en ciment de son atelier un cercle de diamètre 4m puis un polygone régulier comme savent tous faire les bâtisseurs de cathédrale pour leurs vitraux et leurs pavages de nefs c'était souvent des octogones, parfois des décagones… regardez comme c'est beau !



Cathédrale de Chartres



Cathédrale Notre Dame de Paris

Il reporterait sur le périmètre du cercle une longueur de 50cm pour calculer combien de pavés il devrait utiliser. En effet, il avait décidé qu'il utiliserait des pavés de 50 cm de côté car c'était commode pour le marbrier.

(*) **Documentation :**[***https://fr.wikipedia.org/wiki/Compagnons_du_Devoir***](https://fr.wikipedia.org/wiki/Compagnons_du_Devoir)

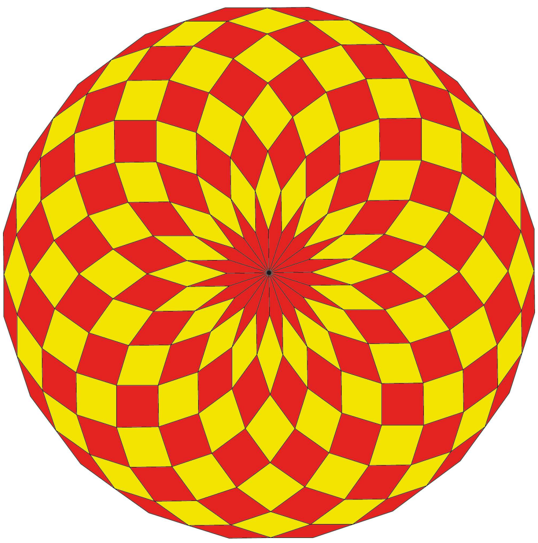
Quelques rappels et présentation par le professeur : Nous avons développé dans un texte qui sera publié prochainement in-extenso dans une brochure I.R.E.M. Normandie la notion de **: « Rosaces Célestes » qui est une extension d'un pavage de Roger Penrose présenté au sol d'une église de Minorque : Santa Maria de Mahon, récemment rénovée (*).**

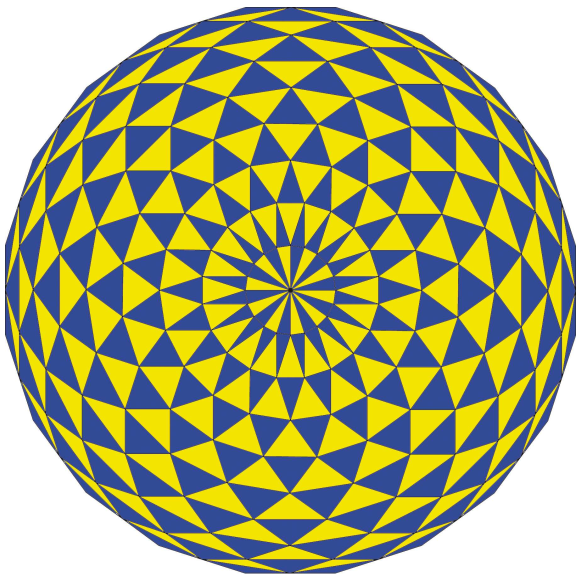
Comme vous pouvez le constater le motif du pavage situé en haut de la photo est constitué d'un pentagone étoilé blanc entouré de losanges rouge foncé.L'étoile centrale est un simple décor et ne fait pas partie géométriquement de la rosace.

Nous avons montré dans l'article cité plus haut que les triangles formant l'étoile et les losanges du tour sont des **triangles d'or**. Nous avons ensuite généralisé cette construction au cas d'une étoile à 7 branches et ensuite à des étoiles à un nombre quelconque de branches que nous avons appelées : « **Rosaces célestes ».**

Voici ci-dessous deux beaux exemples de Rosaces célestes obtenues par Philippe Langlois avec le logiciel GEOGEBRA.

(*) https://irem.unicaen.fr/spip.php?article197



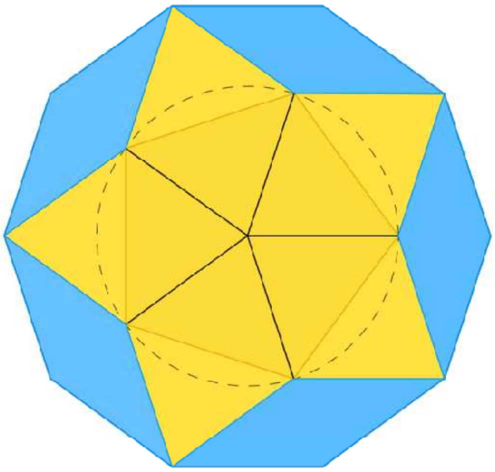


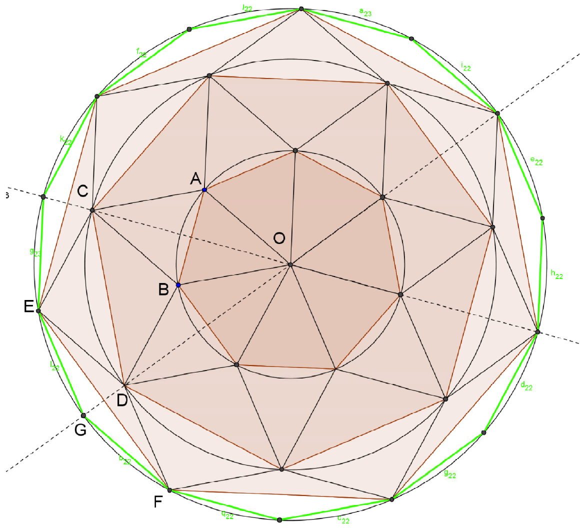
4 Le Chef d'œuvre du compagnon tailleur de pierre par D. Salles-Legac

Comme vous pouvez le constater sur la rosace bleue et jaune, Philippe a, tout d'abord, tracé un polygone a 24 côtés et colorié les triangles inscrits de sommet le centre du polygone alternativement en jaune et en bleu. Il a ensuite tracé les triangles symétriques à ceux-ci pour obtenir un polygone étoilé de rayon deux fois plus grand que celui du premier polygone. Il a colorié les triangles en Bleu.

I - Activité préparatoire pour tous avec GEOGEBRA

Nous vous demandons d'expliquer la construction en vous aidant des figures correspondant au cas du pentagone et au cas de l'heptagone.





Indications pour la construction de la rosace à 7 branches qui peut être exécutée par les élèves avec le logiciel GEOGEBRA « à la main ».

Tracer avec l'ordre **POINT** deux points A et B distants du côté de l'heptagone.

Cliquer sur **POLYGONE REGULIER,** sur les deux points A et B puis sur **7. L'heptagone convexe obtenu est en rose foncé.**

Rechercher le centre O du polygone en traçant avec l'ordre **MEDIATRICE,** deux médiatrices **en pointillés** de deux côtés de l'heptagone.

Tracer, à l'aide de l'ordre **SYMETRIE AXIALE** les **points C et D**symétriques du centre O du polygone par rapport à deux côtés contigus de l'heptagone.

Tracer à l'aide de la commande **POLYGONE REGULIER** un heptagone de côté [CD], **l'heptagone obtenu est rose moyen.**On termine en construisant par symétrie axiale comme plus haut, **le point G symétrique de D par rapport à (EF).**

Le processus s'arrête car le polygone à 14 côtés (vert) ainsi obtenu est convex

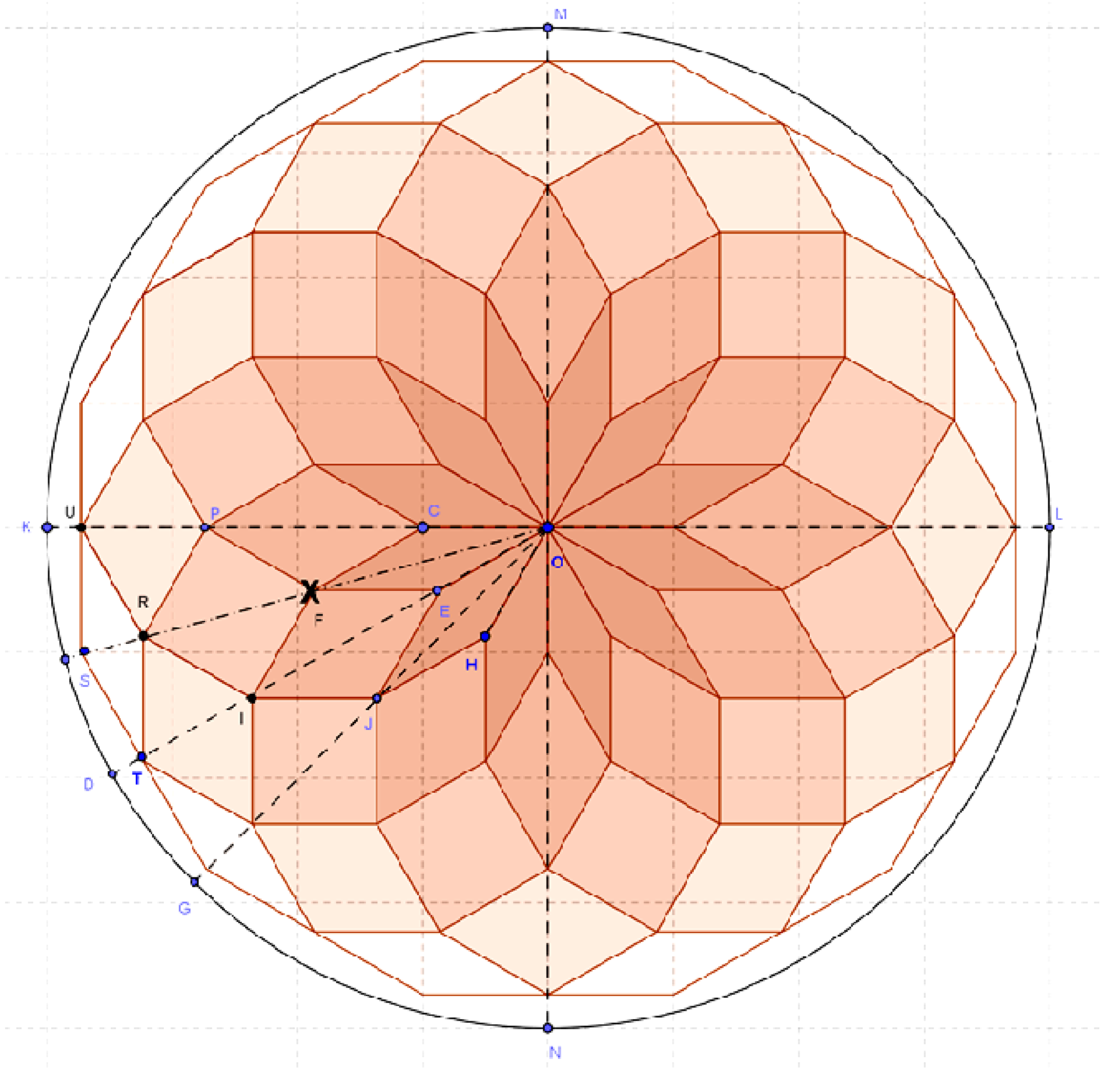
II - Activité à partir de la classe de quatrième (pages à distribuer aux élèves après lecture de l'histoire du compagnon).

Il s'agit de paver avec une rosace céleste une chapelle de 4 m de diamètre.

Le compagnon observe le sol de la chapelle et décide d'utiliser une méthode des anciens bâtisseurs : il utilise sa règle plate de 50cm et la reporte successivement sur le pourtour du sol de la chapelle qu'il a tracé à l'échelle 1 dans son atelier. Il constate qu'il peut reporter 24 fois sa règle et qu'il reste même un peu de place.Il pourra donc placer 12 pavés à la périphérie de la rosace comme vous pouvez l'observer ci-dessous.

Il décide donc de **paver la chapelle avec une rosace céleste à 12 côtés.**

Voici la rosace céleste réalisée à l'aide du logiciel GEOGEBRA, une unité de la grille représente 50cm, le cercle représente la paroi intérieure de diamètre 4m.



6 Le Chef d'œuvre du Compagnon par Danielle Salles-Legac

Activité pour les élèves à partir de la classe de quatrième

Les chiffres entre parenthèses renvoient aux questions en fin de texte.

Vous pouvez vous aider de la figure précédente.

1) Sur une feuille de papier fort de format A4, tracez un demi-cercle de diamètre 40cm (1).

2) Tracez deux diamètres orthogonaux [MN] et [KL], puis deux rayons [OK] et [OD] d'angle 30° avec le rapporteur.Reportez au compas sur les côtés de l'angle deux segments [OC] et [OE]d'origine O et de mesure 5cm.

Tracez au compas deuxarcs de cercle de centre C et E, de rayon 5cm qui se rencontrent en F (2).

3)Tracez le losange OCFE, son angle de sommet O mesure 30° par construction (3).

4) Tracez le losange OEJH symétrique du losange OCFE par rapport à (OD).

5) Tracez le rayon [OG] du cercle qui passe par J (4).

6) Tracez deux arcs de cercle de centre F et J, de rayon 5cm qui se rencontrent en I, nous obtenons losange EFIJ (5).

7) Tracez deux arcs de cercle de centre F, de rayon 5cm qui rencontrent [OK] en P, nous obtenons le losange FPRI. Tracez avec la même méthode le losange RUST (6).

8) Le quartier de disque KOG contient tous les types de pavés utiles pour paver le sol de la chapelle (7).

9)Le compagnon se demande s'il a bien calculé ses mesures et si la rosace va bien « rentrer » dans la chapelle (8).

10) Pour les plus grands : il nous faut prévoir la fourniture des pavés par le marbrier, complétez la figure au quart de cercle (9). Observez le triangle STO rectangle en T d'angle au sommet O de 15° (10).

Questions, écrivez et justifiez votre réponse sous la question.

1) Quelle est l'échelle de votre représentation du sol de la chapelle ?

2) Que représente la droite (OF) pour l'angle KOD ?

3) Quelle est la mesure de l'angle FEO ?

4) Que représente (OG) pour l'angle EOH ?

5) Pourquoi le point I se trouve-t-il sur [OD] ?

6) et 7) Combien y-a-t-il de types de pavés différents ?

8) Calculez le périmètre de la chapelle et celui du dodécagone. Puisqu'ils ont le même centre pouvez-vous en déduire que le pavage va « entrer » dans la chapelle ?

9) <u>Pour les plus grands</u> : Sachant que l'angle COE mesure 30° calculez les mesures des angles des pavés.

Combien faut-il prévoir de pavés différents en tout ?

10) En utilisant le sinus de l'angle de mesure 15° dans le triangle rectangle STO où T est le milieu de [SV]), calculez la mesure de [OS] demi diagonale du dodécagone. Le dodécagone « rentre-t-il » dans la chapelle ?

8 Le Chef d'œuvre du Compagnon par Danielle Salles-Legac

Suggestions de solutions pour le professeur.

1) Quelle est l'échelle de votre représentation du sol de la chapelle ?

40cm pour 4m soit 1/10$^{\text{ème}}$.

2) Que représente la droite (OF) pour l'angle KOD ?

Sa bissectrice comme diagonale du losange OCFE.

3) Quelle est la mesure de l'angle FEO ?

180 – 30 = 150° car la somme des angles d'un losange est 360°.

4) Que représente (OG) pour l'angle EOH ?Sa bissectrice.

5) Pourquoi le point I se trouve-t-il sur [OD] ?

(OD) est la bissectrice de l'angle FEJ.

6) et 7) Combien y-a-t-il de types de pavés différents ?

Nous observons 5 types de pavés.

8) Calculez le périmètre de la chapelle et celui du dodécagone. Puisqu'ils ont le même centre pouvez-vous en déduire que le pavage va « entrer » dans la chapelle ?Le périmètre de la chapelle est 4π soit 3,14 x 4 = 12,56 m au centième près.

Le périmètre du dodécagone est 12 m il est donc insérable dans la chapelle.

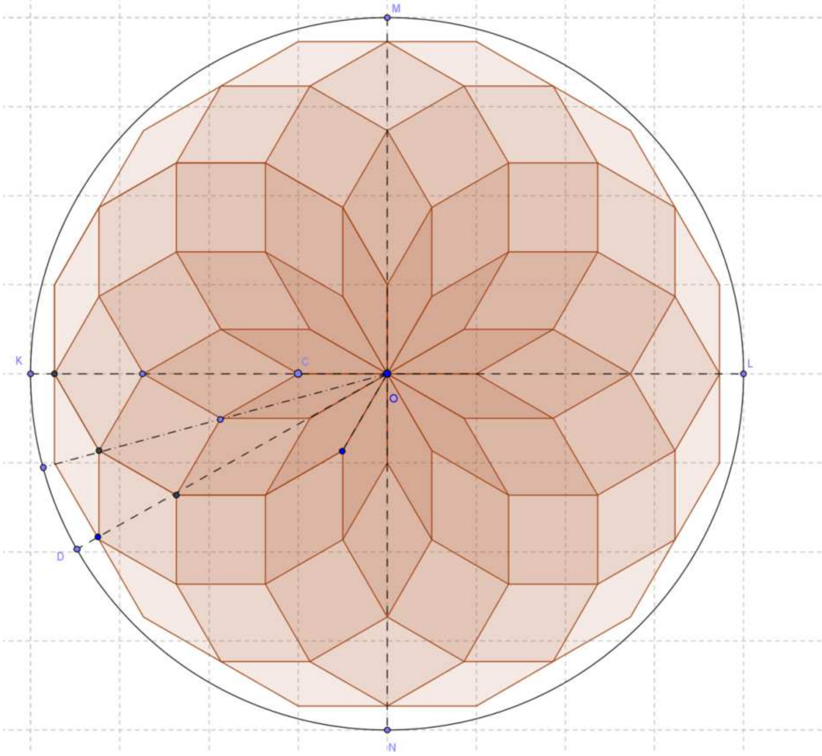
9 et 10) <u>Pour les plus grands</u> : Sachant que l'angle COE mesure 30° calculez les mesures des angles des pavés.

Combien faut-il prévoir de pavés différents en tout ?

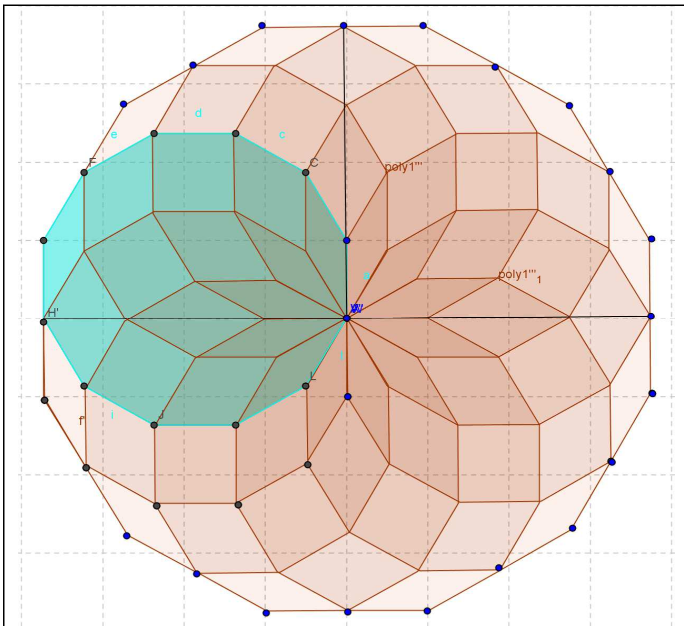
Il faut trois types de pavés différents : 24 pavés d'angles 30 et 150°, 24 pavés d'angles 60 et 120°, 12 pavés carrés, soit 60 pavés en tout.

En utilisant le sinus de l'angle de mesure 15° dans le triangle rectangle STO où T est le milieu de [SV]), calculez la mesure de [OS] demi diagonale du dodécagone. Le dodécagone « rentre-t-il » dans la chapelle ?

Sin 15 = 0,26 ; ST/SO = 0,26 ; SO = 50/0,26 = 192,30cm ; Oui.



Nous savons, d'après ls études de Philippe Langlois et les calculs de Danielle Salles, qu'il est possible d'engendrer les rosaces célestes d'ordre pair en utilisant un polygone de diamètre moitié de la rosace et en opérant sur celui-ci des rotations de centre un des sommets de ce polygone.
Voici une construction effectuée avec GEOGEBRA :



Observez attentivement la figure ci-contre et écrivez un algorithme de construction avec GEOGEBRA

10 Le Chef d'œuvre du Compagnon par Danielle Salles-Legac

Etude prolongée pour les élèves professeurs

Raisonnons sur les résultats obtenus.

a) Nous avons obtenu des pavés qui peuvent être utilisés deux fois, pourquoi ?

b) Pourrions-nous obtenir pour une autre dimension de la chapelle un type de pavés utilisable trois fois ?

c) Pouvons-nous utiliser les 3 sortes de pavés de la chapelle pour construire une rosace plus petite ?

d) L'un des pavés est un carré est-ce toujours possible ?

e) Si le compagnon achète ses pavés au mètre carré quelle dépense doit-il prévoir ? Quelle est l'aire de la surface restante à couvrir de ciment-pierre entre le dallage et le mur de la chapelle ?

Indications de solutions :

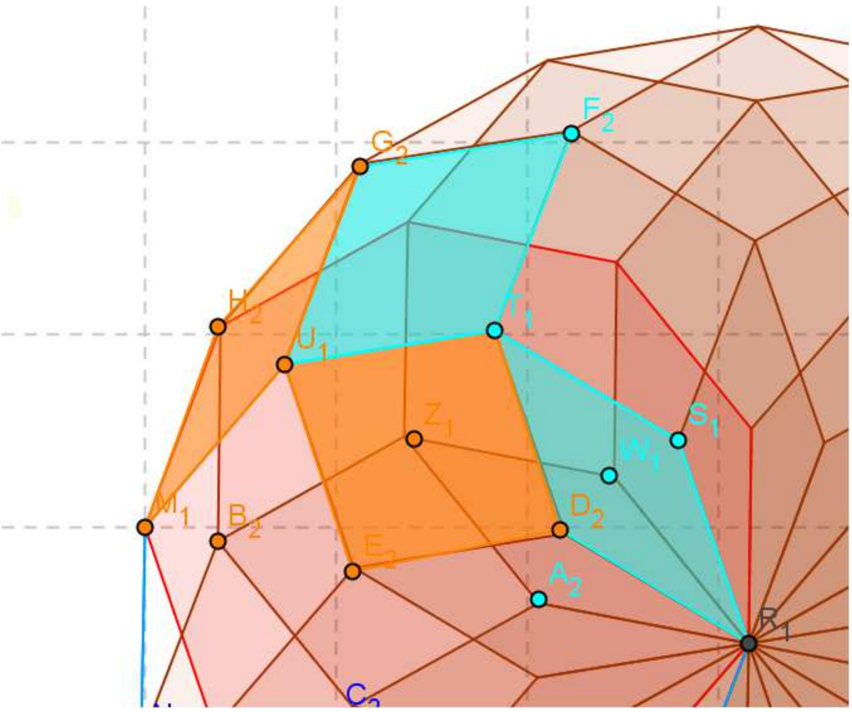
a) Nous pouvons remarquer que lorsque le nombre de côtés de la rosace est premier p, ce n'est pas le cas car tous les nombres inférieurs à p sont premiers avec p. Si le nombre de côtés de la rosace est impair mais non premier par exemple 9, les couples de mesures d'angles obtenus sont :

$(2\pi/9,\ 7\pi/9)$; $(4\pi/9,\ 5\pi/9)$; $(6\pi/9,\ 3\pi/9)$; $(8\pi/9,\ \pi/9)$; les couples sont tous différents car le premier terme du couple est toujours pair et le second est impair puisque son complémentaire à 9, donc si l'on inverse l'ordre du couple le couple obtenu n'appartient pas à la série des couples.

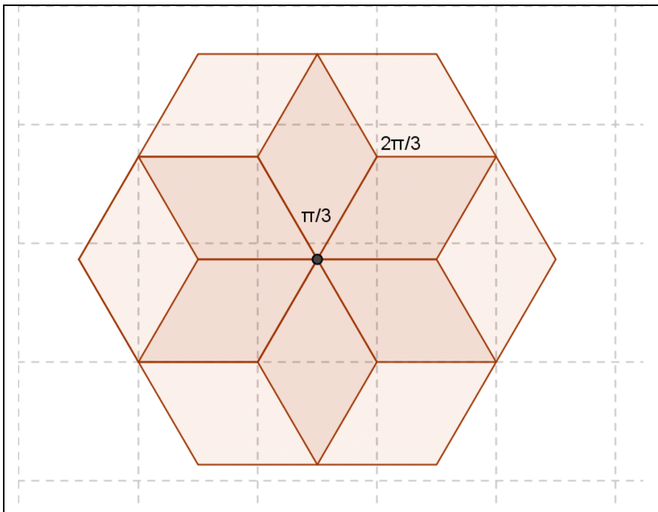
Donc si le tailleur de pierre veut utiliser deux fois un pavé il doit tracer une rosace avec un nombre pair de côtés.

b) Il est impossible d'utiliser trois fois le même pavé car chaque pavé est utilisé une fois dans un sens et la fois suivante après une rotation de $\pi/2$.

c) Si la rosace est plus petite, le nombre de pavés au centre est plus petit donc leur petit angle est plus grand ; donc le petit pavé d'angle 30° n'est pas utilisable.



Nous allons donc utiliser le pavé émeraude suivant d'angles   60° et 120°.

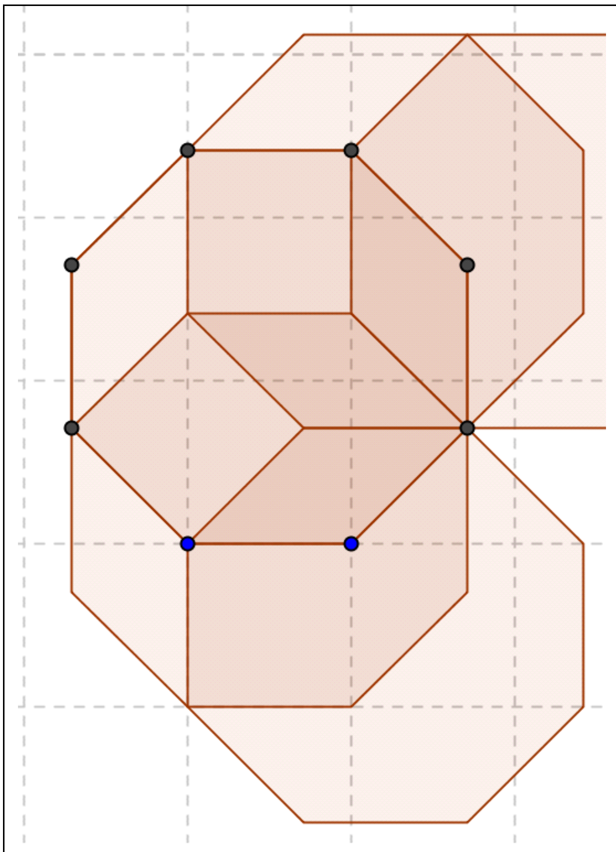


Nous obtenons un hexagone construit à partir de deux pavés identiques.
Ruben Rodriguez a étudié dans le chapitre IV de la brochure à paraître aux éditions de l'I.R.E.M de Normandie-Caen : « Les Rosaces Célestes » ces propriétés sous forme algébrique.
Remarquons qu'un pavé carré génère un carré deux fois plus grand.

d) Pour que le pavage contienne un carré il faut que l'un des couples d'angles relatifs à la rosace d'ordre 2n soit de la forme ($n\pi/2n$, $n\pi/2n$) par exemple :

($7\pi/14$, $7\pi/14$), il faut donc que la rosace ait un nombre pair de côtés.

Est-ce suffisant ? Non puisque l'exemple précédent de l'hexagone ne comporte pas de carré. Essayons l'octogone.



Nous observons que l'un des losanges ressemble à un carré. Les couples d'angles sont : $(2\pi/8, 6\pi/8)$; $(4\pi/8, 4\pi/8)$; $(2\pi/8, 6\pi/8)$; ce qui confirme notre observation.

D'une façon générale soit 2r un nombre pair, les couples d'angles sont : $(2\pi/2r, (2r-2)\pi/r)$;
$(4\pi/2r, (2r-4)\pi/r)$;
$(8\pi/2r, (2r-8)\pi/8)$; &
Pour obtenir : $(\pi/2, \pi/2)$ il faut qu'il existe p tel que l on ait le couple :
$(2p\pi/2r, (2r-2p)\pi/2r)$ avec :
$(2p\pi/2r) = (2r-2p)\pi/2r)$ soit
$2p = 2r-2p$ soit $2r = 4p$, il faut que le nombre de côtés de la rosace soit multiple de 4, ce qui n'était pas le cas dans l'hexagone, mais c'est le cas dans le dodécagone.

Donnons un contrexemple supplémentaire : le polygone à 18 côtés

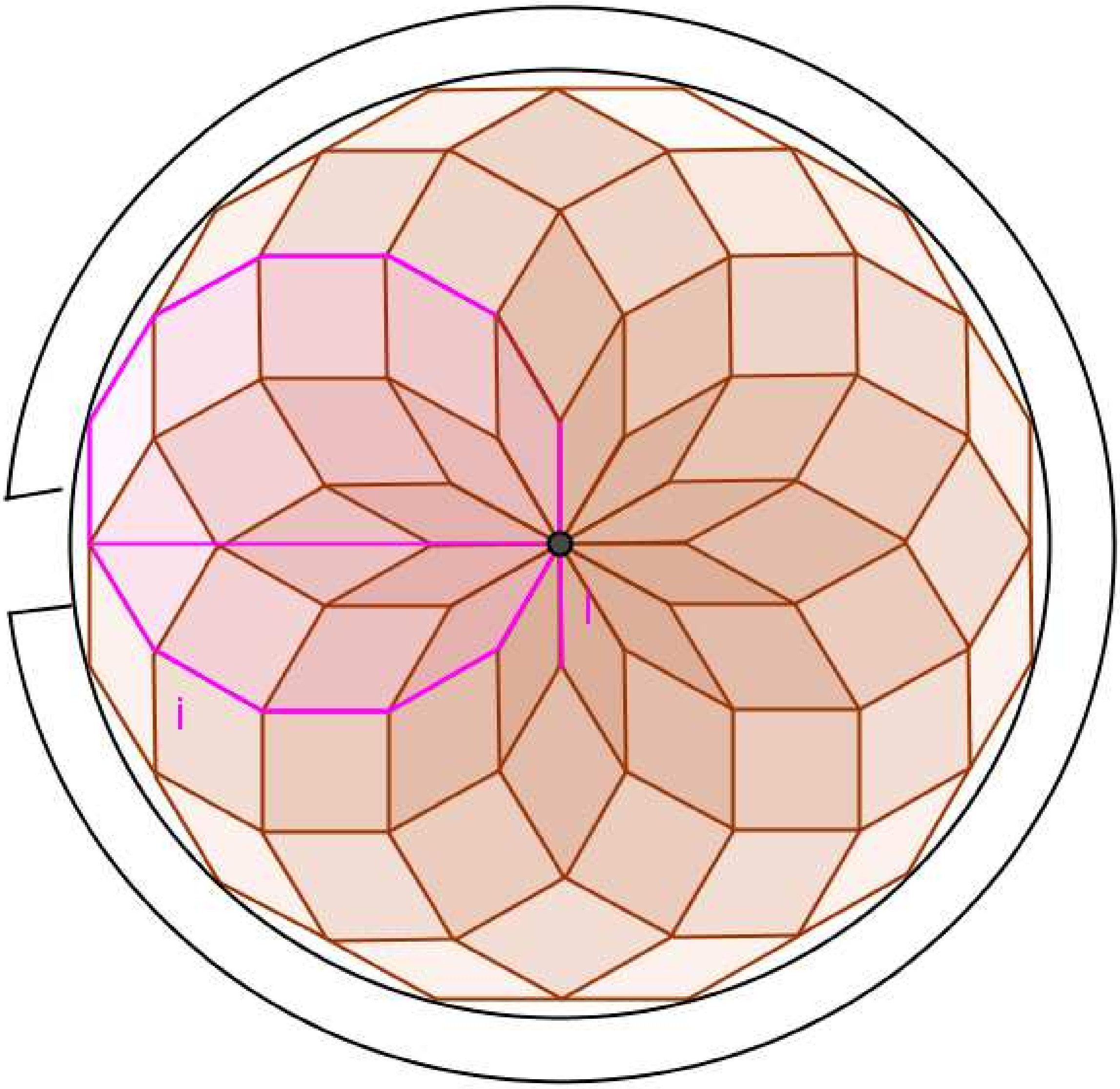
Les couples définissant les pavés sont :

$(2\pi/18, 16\pi/18)$; $(4\pi/18, 14\pi/18)$; $(6\pi/18, 12\pi/18)$; $(8\pi/18, 10\pi/18)$;

$(10\pi/18, 8\pi/18)$; $(12\pi/18, 6\pi/18)$; $(14\pi/18, 4\pi/18)$; $(16\pi/18, 2\pi/18)$.

Aucun ne contient $(\pi/2)$.

Voici le pavage et le mur de la Chapelle :



e) Si le compagnon achète ses pavés au mètre carré quelle dépense doit-il prévoir ? Quelle est l'aire de la surface restante à couvrir de ciment-pierre entre le dallage et le mur de la chapelle ?

Rappelons que :

Le tailleur de pierre a besoin de : 24 pavés d'angles 30° et 150° ; 24 pavés d'angles 60° et 120° ; 12 pavés carrés. Calculons l'aire de la surface du premier pavé d'angles 2 π /12 et 10 π /12. Nous arrondissons au centième.

L'aire de la surface du premier pavé est donc : 0,5 x 0,5 x (2 cos π /12) x (2 cos 10π /12) soit : (cos π /12) x (cos 5 π /12) = 0,5 x 0,97 x 0,26 = **0,13 m^2**.

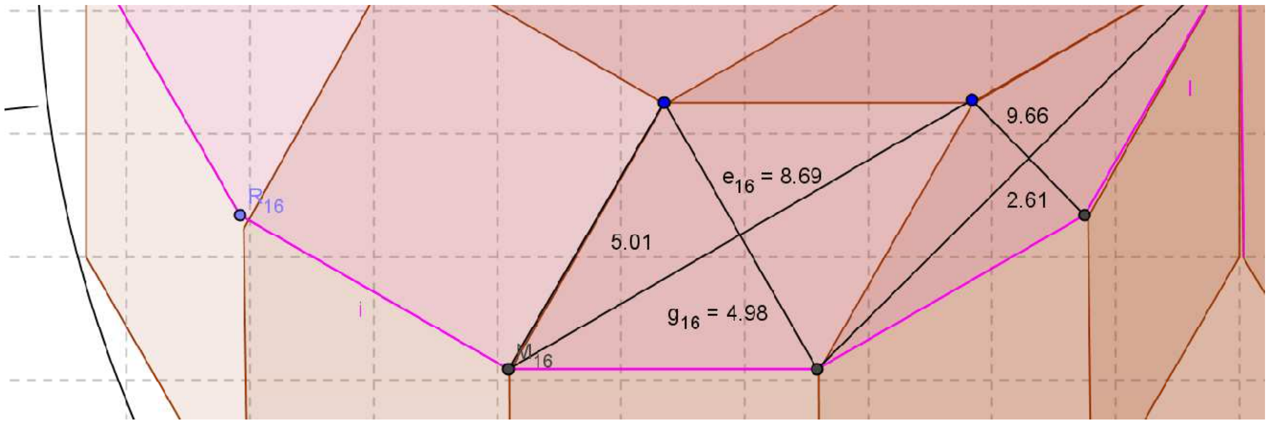
L'aire de la surface du second pavé est :

(cos 2π /12) x (cos 4π /12) x 0,5= 0,87 x 0,5 x 0,5 = **0,22 m^2.**

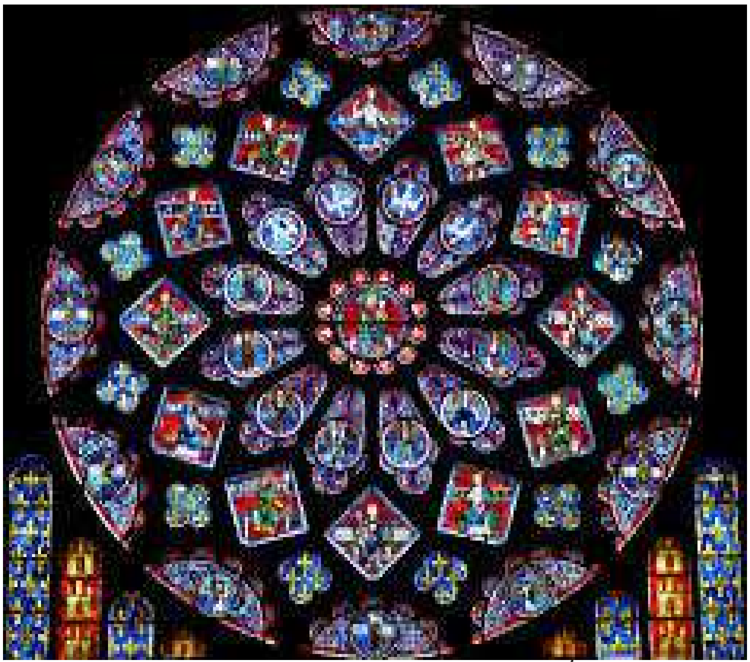
L'aire de la surface du carré est : 0,25 m^2.

L'aire de la surface totale du pavage est donc :

24 (0,13 + 0,22) + 12 x 0,25 = 11,4 m^2. Ces résultats ne permettent pas, à cause des arrondis, de calculer l'aire de la surface à cimenter. Voyez ci-dessous les valeurs délivrées par GEOGEBRA.

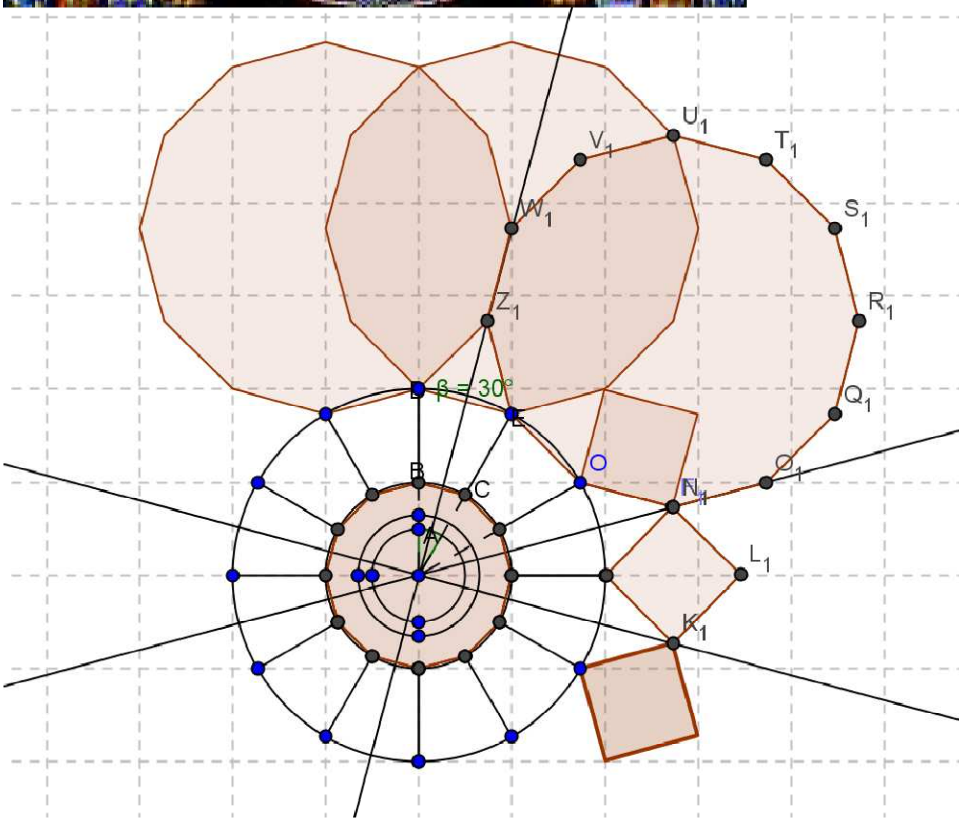


Annexe : étude de la rosace de la Cathédrale de Chartres



Observez cette photographie, reconnaissez-vous des formes géométriques ?
Tracez, le plus fidèlement possible, le vitrail à la règle et au compas, ou avec GEOGEBRA.
Ce vitrail est-il un « vrai pavage mathématique » ? (*)

Expliquez votre réponse



Voici un brouillon GEOGEBRA, vous pouvez l’observer pour écrire votre algorithme de construction.

(*) Un pavage mathématique est un recouvrement du plan par des polygones, réguliers ou non, tel qu’il n’ait aucun vide entre eux, ni recouvrement. Les vitraux, même en tenant compte des joints de pierre ou de ciment sont rarement des pavages au sens mathématique.

16 Le Chef d’œuvre du compagnon tailleur de pierre par D. Salles-Legac

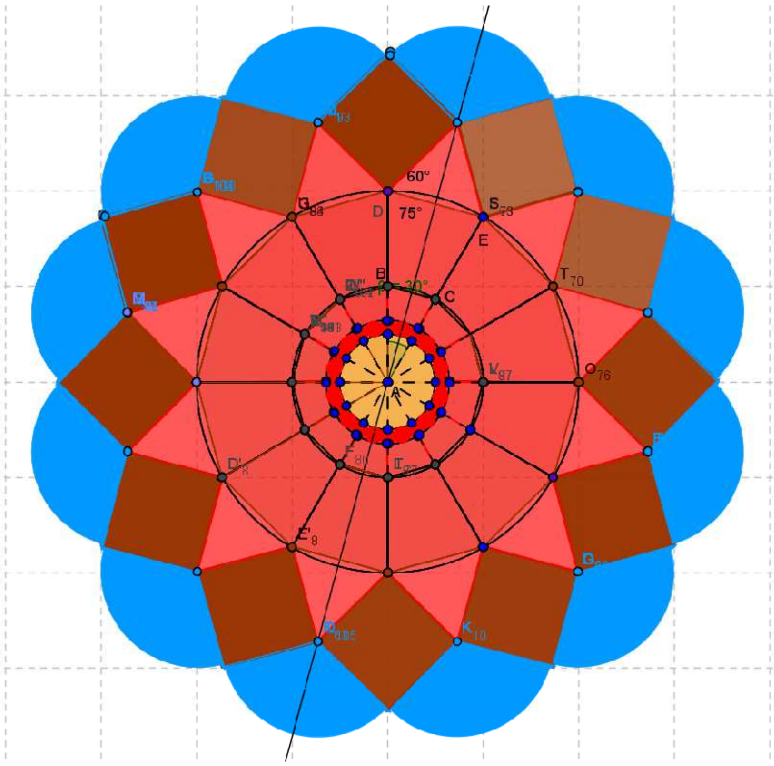
Observation du vitrail aux fins de construction avec GEOGEBRA

Nous remarquons que le motif central comporte un personnage que nous pourrons ajouter à notre goût ainsi qu’une bordure de petits ronds. Nous pouvons ignorer ces motifs pour obtenir des cerfs-volants ayant un sommet au centre A.

Les motifs entourant les cerfs-volants semblent être des carrés que nous tracerons.

Les motifs entourant les carrés ne semblent pas former avec ceux-ci un pavage au sens mathématique, en effet, ce sont des portions de cercles qui ne peuvent être jointifs avec des côtés de carrés nous ajouterons des triangles. Nous pourrons éventuellement ajouter des demi-cercles pour imiter le vitrail mais ceux-ci ne formeront pas non plus un « vrai » pavage sauf si nous complétons, comme le maçon pourrait le faire, un tour en pierre taillée ou en ciment.

Indications pour la construction du vitrail



Tracez un point A qui sera le centre de la rosace.

Tracez trois cercles concentriques de centre A pour figurer le petit motif central avec les personnages. Vous pouvez si vous le désirez tracer les petits ronds décoratifs en en traçant un premier puis les autres avec l’ordre « rotation » de GEOGEBRA.

Sur le troisième cercle, tracez avec l’ordre « angle de mesure donnée » un angle ayant un point B sur ce cercle, de sommet A et de mesure 30°. Les côtés de cet angle rencontrent le troisième cercle en B et C.

Avec l’ordre « polygone régulier », tracez un polygone régulier de côté BC à 12 côtés. Tracez un cercle de centre A de rayon double de celui du troisième cercle, les côtés de l’angle BAC rencontrent ce cercle en D et E.

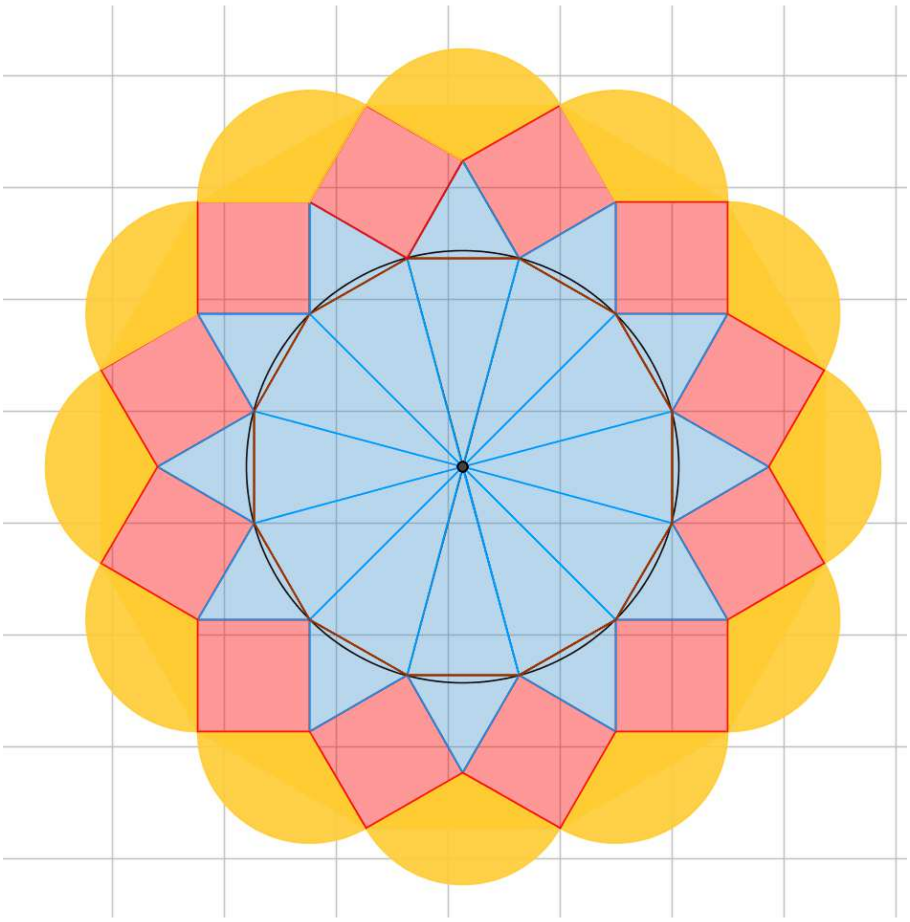
Pour construire les carrés qui sont les motifs suivant nous allons calculer les mesures de certains angles :

Les mesures des angles du triangle ADE sont, par construction : 30°, 75°, 75°.

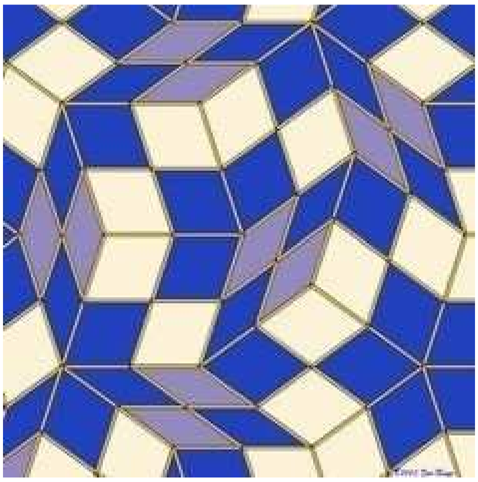
Nous souhaitons construire un carré de sommet D, de second sommet F situé sur la bissectrice de l'angle DAE pour des raisons de symétrie. Nous traçons donc la bissectrice de cet angle avec la fonction « bissectrice » : point E, sommet A, point D, L'angle FDE doit mesurer : (360 – 150 – 90)/2 = 60°.

Avec l'ordre « polygone régulier » tracez un carré de côté [FE], tracez les autres carrés par rotation de celui-ci de 30° autour de A.

Nous pouvons continuer à paver la rosace sans prendre modèle sur le vitrail car nous avons remarqué que le motif suivant ne pave pas le plan. Nous pouvons par exemple tracer un triangle et un arc de cercle jaune, nous vous donnons un exemple sur la figure finale.

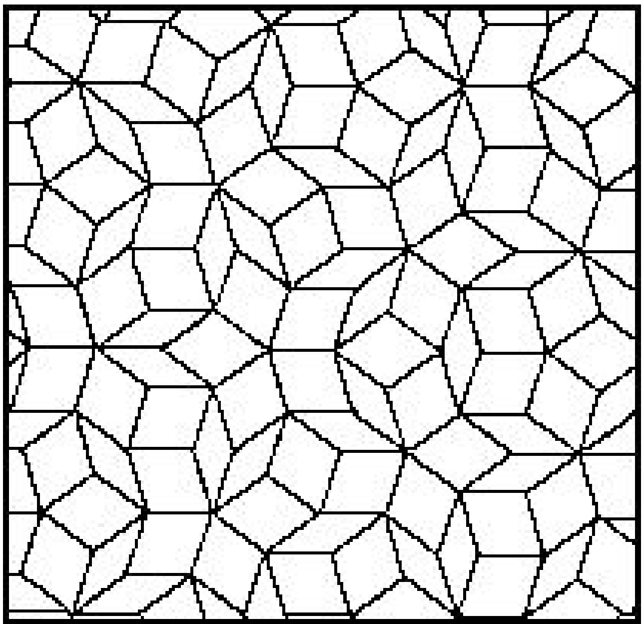


18 Le Chef d'œuvre du compagnon tailleur de pierre par D. Salles-Legac

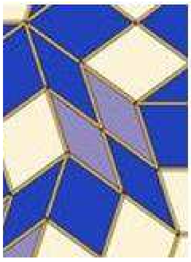


Nous vous proposons maintenant un beau motif inspiré de Roger Penrose présenté dans le site : https://fr.pinterest.com/pin/15129348718153072/

Vous semble-t-il que cette rosace soit construite avec le même type de pavés que ceux de l'église Santa Maria de Mahon ?

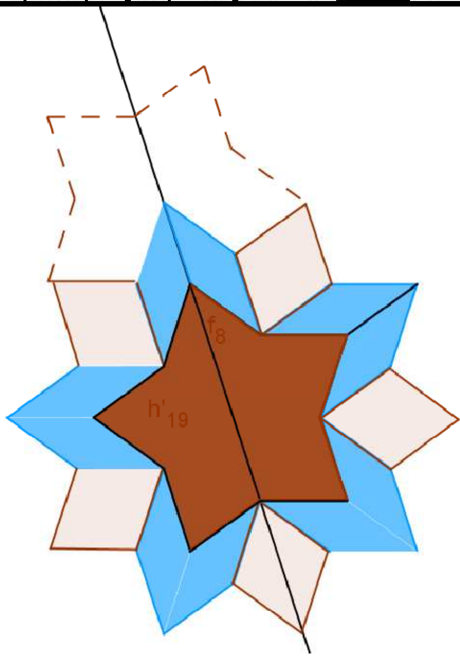


Réponse : à première vue et à l'observation de l'étoile située en bas à droite de la photo, les pavés bleus « presque carrés » sont les « pavés obtus » de l'église Santa Maria de Mahon.



Les pavés gris complètent des losanges comportant deux pavés bleus aigus et pas de pavé blanc.

Voici ci-contre une structure similaire.



Nous vous proposons de la reproduire, à l'aide de GEOGEBRA

Nous avons tracé la rosace centrale, à vous de la continuer avec de belles couleurs !

Bibliographie

El mundo :articulo de Elena Soto : Un singular pavimento matemático

http://www.elmundo.es/baleares/2015/03/03/54f5af2ee2704ed0548b45b4.html

Rodriguez Herrera Ruben et Salles-Legac Danielle: « Le nombre d'or, nouveautés mathématiques ludiques », édition 2015 de l'IREM de Normandie.

Rodriguez Herrera Ruben et Salles-Legac Danielle : « Activité autour des triangles d'or et des pavages de type 3 au sens de Roger PENROSE » téléchargeable gratuitement : **https://irem.unicaen.fr/spip.php?article197.**

Version espagnole : https://irem.unicaen.fr/spip.php?article196.

Brigitte Rozoy : Pavages ; Brochure numérisée téléchargeable, site de l'IREM de Normandie : http://www.math.unicaen.fr/irem/