

[Tapez un texte]

# Étude géométrique et arithmétique de la « Rosace Céleste » (Une extension d'un pavage de R. Penrose).

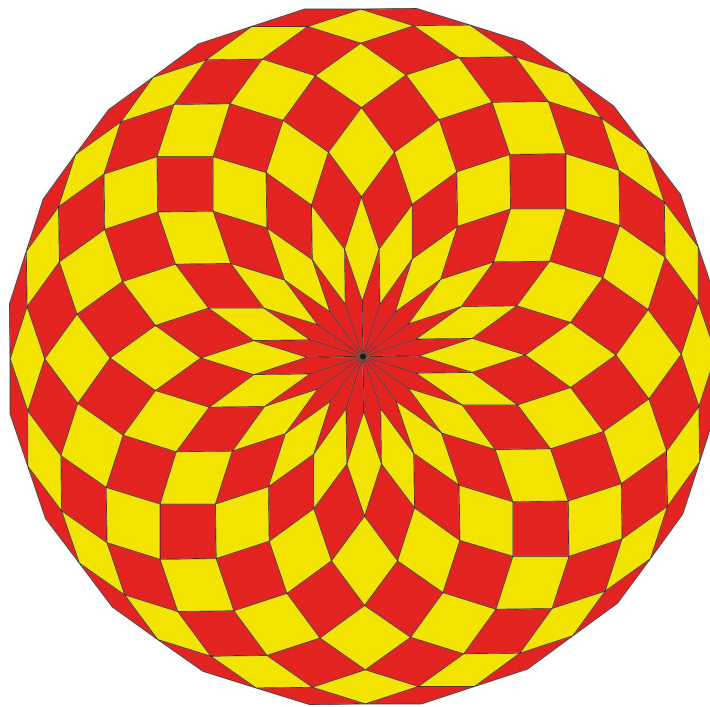
Ruben Rodriguez Herrera,

**IREM de CAEN – NORMANDIE année 2018**  
en hommage à notre regretté collègue et ami Eric Trotoux

## Introduction

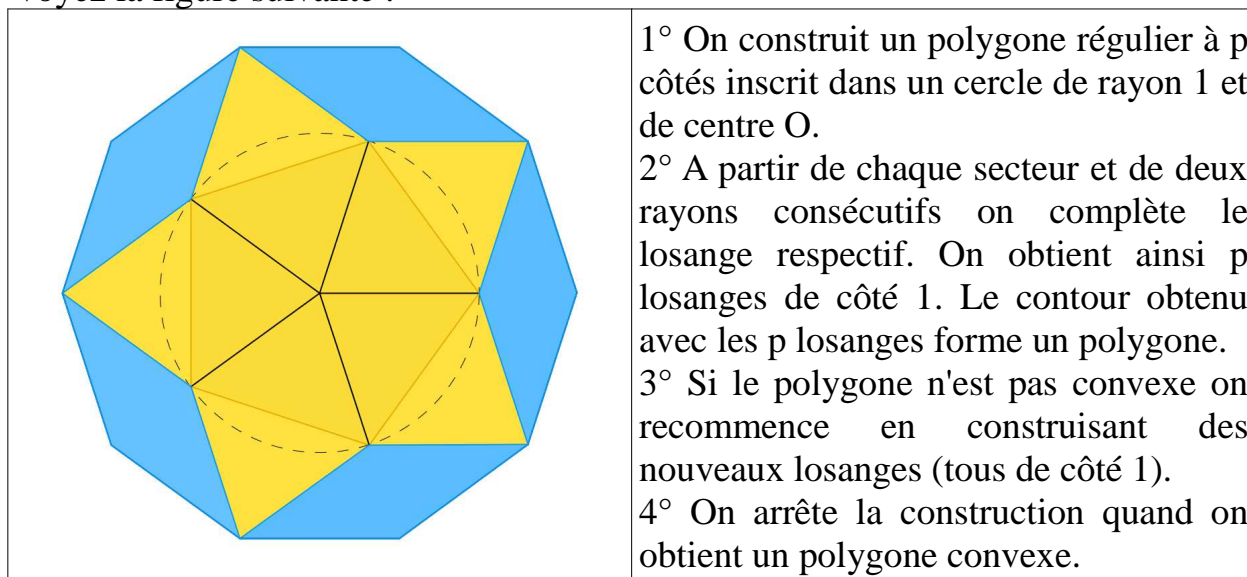
L'Univers géométrique de figures des « pavages de Penrose de type 3 » et l'Univers des suites arithmétiques et géométriques sont mis en avant dans cette étude de la « Rosace céleste » .

*A la suite de notre présentation des rosaces célestes (voyez la bibliographie et le site IREM Caen), notre collègue Jean-Pierre Le Goff nous avait suggéré d'étudier une propriété intéressante des rosaces célestes ; « Lorsque l'on augmente le nombre  $p$  des côtés des rosaces leurs diamètres tendent vers une limite finie ». Cette propriété éventuelle nous a intrigués et Ruben Rodriguez l'a étudiée et étendue à une étude détaillée pour les élèves professeurs et les étudiants de deuxième année post-bac scientifiques selon les propriétés du nombre  $p$  :  $p$  premier ou pas,  $p$  pair ou impair et  $p$  multiple de 4 ou non... Nous allons étudier ces différents cas qui peuvent être présentés dans le cadre d'une étude des convergences ou divergences des séries numériques. D. Salles*



Rosace à 10 côtés par Eric Trotoux  
logiciel GEOGEBRA

Pour la construction géométrique d'une « Rosace Céleste »  
voyez la figure suivante :



**L'ensemble de la figure construite est nommée « Rosace Céleste ».**

Par exemple si  $p = 5$ , voyez la « Rosace céleste » obtenue plus haut.

**Remarque : le polygone convexe qui clôture la construction est régulier.**

### 1 Définition d'une suite numérique ( $R_p$ )

#### Données initiales

Au début nous avons un nombre premier  $p$  qui détermine le polygone régulier initial à  $p$  côtés, supposé inscrit dans un cercle de rayon 1 et on note  $R_p$  la mesure du rayon du cercle circonscrit au polygone régulier qui clôture la construction du pavage de Penrose dit de type 3.

On doit tout d'abord observer l'alignement des sommets  $R'$ ,  $R''$  avec le centre  $O$  du polygone régulier initial.

On observera ensuite les diagonales  $\{OR'\}$ ,  $\{OR''\}$  et  $\{OR'''\}$  afin de calculer  $OR'''$  ce qui nous permettra de calculer  $R_p$

#### 1-2 Calculs

a) Dans l'exemple où  $p = 11$  on peut montrer l'alignement des points  $O, R', R''$  par le calcul de la mesure en radians de l'angle  $OR'R''$ . L'angle  $OR'R''$  a pour mesure :

$$\frac{\pi}{11} + 7 \frac{\pi}{11} + 3 \frac{\pi}{11} = 11 \frac{\pi}{11} = \pi$$

Ceci prouve que les points  $O, R', R''$  sont alignés.

On montre que les points  $R', R'', R'''$  sont aussi alignés car l'angle  $R'R''R'''$  est plat, il a pour mesure :

$$3 \frac{\pi}{11} + 3 \frac{\pi}{11} + 5 \frac{\pi}{11} = 11 \frac{\pi}{11} = \pi.$$

Le pavage dans le cas où  $p = 11$  nous permet de calculer  $R_{11}$ .

Nous observons que la suite des angles des sommets  $R', R''$  et  $R'''$  est  $2 \frac{\pi}{11}, 6 \frac{\pi}{11}, 8 \frac{\pi}{11}$ .

On a supposé pour simplifier les calculs que **le rayon du cercle circonscrit initial vaut 1**. Alors pour obtenir le rayon  $R_{11}$  on calcule la somme :

$$2\cos\pi/11 + 2\cos3\pi/11 + 2\cos 5\pi/11 = R_{11}$$

**On obtient :  $R_{11} = 2(\cos \pi /11 + \cos3\pi /11 + \cos 5 \pi /11)$ .**

Cet exemple permet d'écrire une première tentative de formule générale donnant le rayon  $R_p$  du cercle circonscrit au polygone régulier qui clôture la construction.

$$R_p = \sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n+1)\pi/p)) \quad (\text{avec } M(p) = E((p-2)/4), \text{ (où E signifie « partie entière » du nombre entre parenthèses } ((p-2)/4)).$$

**Nous allons observer d'autres cas, selon le nombre p entier.**

**b) Dans l'exemple où p = 6 :**

La somme  $\sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n+1)\pi/p))$  vaut

$$\sum_{n=0}^{M(6)} 2(\cos((2n+1)\pi/6)) \text{ et comme}$$

$M(6) = E((6-2)/4) = 1$ , on a la somme :

$$\sum_{n=0}^1 2(\cos((2n+1)\pi/6)) = 2(\cos(\pi/6) + \cos(3\pi/6)) = 2\cos(\pi/6) = 2(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} .$$

Mais dans ce cas, le polygone convexe est un hexagone régulier et le rayon du cercle circonscrit vaut 2.

Dans ce cas la somme  $\sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n+1)\pi/p))$  nous donne le rayon du cercle

inscrit dans la polygone convexe du pavage.

On peut observer que dans la suite des angles  $(2n+1)\pi/p$  pour  $p = 6$  il est

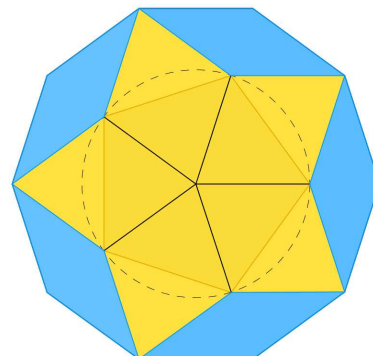
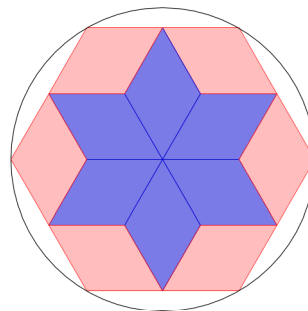
possible d'obtenir un entier n tel que  $(2n+1)\pi/6 = \pi/2$  ; ceci donne  $n = 1$

Nous observons que dans ce cas la somme

qui donne le rayon est :  $\sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n)\pi/p))$  .

**c) Dans le cas où p = 5, la somme est :**

$$\sum_{n=0}^{M(5)} 2(\cos((2n+1)\pi/5)) = 2(\cos(\pi/5))$$



car  $M(5) = E((5-2)/4) = 0$  et elle donne exactement le rayon  $R_5$  du cercle circonscrit au décagone convexe.

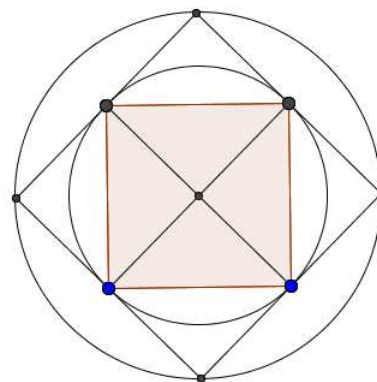
**Remarque**  $p = 5$  n'est pas congru à 2 modulo 4.

**d) Cas où  $p = 4$**  ; dans ce cas la somme est :

$$\sum_{n=0}^{M(4)} 2(\cos((2n+1)\pi/4)) = 2(\cos(\pi/4))$$

car  $M(4) = E((4-2)/4) = 0$  et elle donne exactement le rayon du cercle circonscrit au carré qui correspond au polygone convexe de la « Rosace Céleste ».

**Remarque**  $p = 4$  n'est pas congru à 2 modulo 4.



**e) Cas où  $p = 3$**  ; dans ce cas la somme est :

$$\sum_{n=0}^{M(3)} 2(\cos((2n+1)\pi/3)) = 2(\cos(\pi/3))$$

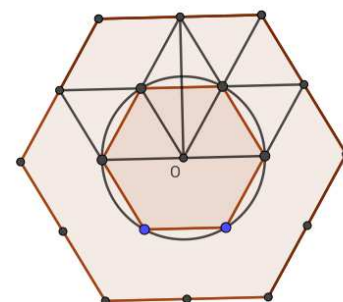
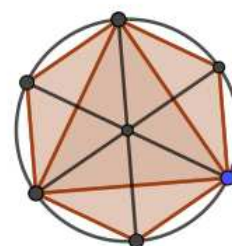
car  $M(3) = E((3-2)/4) = 0$  et elle donne exactement le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone qui correspond au polygone convexe de la « Rosace Céleste » (un hexagone régulier inscrit dans le même cercle que celui du triangle équilatéral du départ).

Remarque  $p = 3$  n'est pas congru à 2 modulo 4.

Nous avons deux suites possibles pour calculer le rayon  $R_p$

Par exemple lorsque  $p = 6$

l'angle au centre de chaque secteur vaut  $2\pi/6$



Tous les losanges construits dans la « Rosace céleste » ont pour mesure de leurs côtés 1.

Ils sont donc déterminés par les angles de celle-ci.

Nous avons deux types de suites de losanges : celle qui part d'un losange ou l'un de ses sommets est le centre  $O$  du cercle initial, et celle qui part d'un losange ayant un seul sommet sur le cercle initial.

En utilisant les cosinus pour calculer le rayon  $R_p$  puis en additionnant les longueurs de la suite des diagonales alignées, nous avons deux formules possibles selon les valeurs de  $p$ .

Nous observons alors qu'il y a **deux formules possibles pour calculer le rayon  $R_p$**  :

$$R_p = \sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n)\pi/p)) \quad \text{ou} \quad R_p = \sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n+1)\pi/p)) ;$$

avec  $M(p) = E((p-2)/4)$ , (où E signifie « partie entière » du nombre  $(p-2)/4$ )

Le choix d'une ou autre formule dépend de la possibilité d'avoir d'une part :

$$(2n+1)\pi/p = \pi/2 \quad \text{c'est à dire} \quad (2n+1)/p = 1/2 \quad \text{ou bien} \quad n = (p-2)/4$$

C'est à dire **p-2 congru à 0 modulo 4** et dans ce cas c'est :

$$R_p = \sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n)\pi/p)) \quad \text{qui donne le rayon } R_p$$

ou bien p-2 non congru à 0 modulo 4 et dans ce cas c'est :

$$R_p = \sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n+1)\pi/p)) \quad \text{qui donne le rayon } R_p.$$

**1-3** Nous allons observer par la suite le comportement de divergence ou convergence de la suite  $(R_p)$  dans le cas où c'est l'expression :

$$R_p = \sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n+1)\pi/p)) \quad \text{qui donne le rayon } R_p.$$

**Remarque :** dans le cas où c'est  $R_p = \sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n)\pi/p))$  qui donne le rayon on

aura le même comportement vis à vis de la convergence ou de la divergence.

Dans le cas où l'angle de mesure  $(2n+1)\pi/p$  vaut exactement  $\pi/2$  et le polygone convexe qui achève la Rosace Céleste possède p côtés (par exemple pour  $p = 6$ ) La condition est : p congru à 2 modulo 4 ; c'est bien le cas où  $p = 6$ .

L'autre suite d'angles des losanges successifs qui est :

$2\pi/p, 4\pi/p, 6\pi/p, 8\pi/p, \dots, (2n)\pi/p$  a pour condition nécessaire pour que  $(2n)\pi/p = \pi/2$  l'égalité  $(2n)\pi/p = \pi/2$ , ce qui équivaut à  $p = 4n$ .

C'est à dire **p congru à 0 modulo 4**

Dans ce cas le polygone régulier qui achève la construction possède p côtés.

Par exemple pour  $p = 4$ .

**Remarque 1 :** la parité de p détermine le nombre des côtés du polygone qui achève la construction. En effet si p est congru à 2 ou 0 modulo 4 le polygone possède p cotés. Si p est impair alors le polygone possède 2p côtés.

**Remarque 2 :** dans tous les cas le périmètre du polygone vaut **2p**.

**1-4- La somme  $S_p$  des termes en  $2\cos((2n+1)\pi/p)$  s'arrête en  $\cos(2N+1)\pi/p$  avec  $N = E((p-2)/4)$  et commence en  $n = 0$  ; C'est à dire la somme finie :**

$$2((\cos\pi/p) + (\cos 3\pi/p) + (\cos 5\pi/p) + \dots + \cos(2(E((p-2)/4) + 1)\pi/p).$$

**Cette somme finie est notée  $S_p$ .**

**Remarque :** on peut voir que, dans la suite arithmétique :

$\pi/p ; 3\pi/p ; 5\pi/p ; \dots ; (2E((p-2)/4) + 1)\pi/p$ ), il y a  $E((p-2)/4) + 1$  termes.

**1-5 Étude de la suite ( $S_p$ ) en calculant la limite en  $p = +\infty$**

C'est à dire par exemple la limite en  $p = +\infty$  de la somme de ;

$n = 0$  à  $n = (E((p-2)/4) + 1)$  de la suite ( $u_n$ ) de terme général :

$$u_n = 2\cos((2n+1)\pi/p).$$

**Question : convergence ou divergence de la suite ( $S_p$ ) ?**

**Pour étudier la convergence on regarde l'exponentielle complexe :**

$$e^{i(2n+1)\pi/p} = \cos((2n+1)\pi/p) + i\sin((2n+1)\pi/p).$$

Pour alléger l'écriture on note  $M_p$  le nombre naturel  $E((p-2)/4)$ .

L'utilisation de l'exponentielle complexe est fréquente pour calculer des sommes en cosinus et en sinus.

Nous voyons que la somme de  $n = 0$  à  $n = M_p = (E((p-2)/4))$  de  $e^{i(2n+1)\pi/p}$  est la somme des premiers termes de  $n = 0$  jusqu'à  $n = M_p$  d'une suite géométrique de premier terme :  $e^{i\pi/p}$  et de raison  $e^{2i\pi/p}$ .

**Les éléments  $\cos((2n+1)\pi/p)$  constituent la suite des parties réelles de la suite complexe.**

Dans cette somme finie de  $\cos((2n+1)\pi/p) + i\sin((2n+1)\pi/p)$  de  $n = 0$  à  $n = M_p$  on peut associer les termes réels d'une part et les termes imaginaires d'autre part. La partie réelle de la somme sera la somme finie cherchée.

Par la formule de somme d'une suite géométrique nous obtenons :

La somme de  $n = 0$  à  $n = N$  de  $e^{i(2n+1)\pi/p}$  est égale à :

$$e^{i\pi/p} (e^{2i\pi/p})^{M_p+1} - 1 / (e^{2i\pi/p} - 1).$$

Après quelques calculs et simplifications et en identifiant les parties réelles (et en multipliant par le coefficient 2), on obtient la somme ;

$S_p$  de  $n = 0$  à  $M_p = E((p-2)/4)$  de  $2\cos((2n+1)\pi/p)$  qui est égale à :

$$S_p = 2(\sin \pi/p)\sin(2(M_p+1)\pi/p) / (1 - \cos(2\pi/p)).$$

A l'aide de la trigonométrie élémentaire on peut obtenir une expression plus simple :  $S_p = \sin(2(M_p+1)\pi/p) / \sin(\pi/p)$ .

Lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$  on utilise les équivalents.

**Remarque :**  $M_p$  est calculé à partir d'une partie entière  $E(p-2)/4$  :

$M_p = E(p-2)/4$  et on cherche un équivalent en  $+\infty$ , rappelons qu'un équivalent de  $E(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  est  $x$  lui-même.

En effet  $\lim(E(x)/x) = 1$  (On peut encadrer  $x-1 \leq E(x) < x$ , puis passer aux limites en  $+\infty$  de  $(x-1)/x$ ,  $E(x)/x$  et  $x/x$  et ensuite appliquer le théorème d'encadrement de limites. C'est une bonne occasion en classe d'utiliser ce théorème.

Par équivalents en  $+\infty$  :  $E(p-2)/4 \sim (p-2)/4 \sim p/4$  et  $M_p+1 \sim p/4+2 \sim p/4$  ;  
 $\sin(2(M_p+1)\pi/p) \sim \sin(2p\pi/4p) \sim \sin(\pi/2) \sim 1$  ;  $\sin\pi/p \sim \pi/p$ . Alors la somme :  $S_p = \frac{\sin(2(M_p+1)\pi/p)}{\sin(\pi/p)}$  est équivalente à  $1/(\pi/p) = p/\pi$ .

On conclut que  $\lim S_p = \lim(p/\pi) = +\infty$ .

Donc le rayon  $R_p$  de la rosace diverge vers  $+\infty$  lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ .

Alors  $S_p$  diverge vers  $+\infty$  et ceci contredit notre première intuition guidée seulement par la perception visuelle dans de cas où  $p = 5$  ;  $p = 11$  et  $p = 17$ .

C'est donc une occasion de confirmer que les calculs mathématiques permettent de « voir » plus clairement les comportements « à l'infini », ici du rayon  $R_p$ .

On voit par les calculs que **le rapport  $p/S_p$  a pour limite  $\pi$** .

## 2- Vérifications dans différents univers de calcul pour différentes valeurs de $p$

Il est toujours important dans une recherche de changer d'univers pour vérifier ou pour retrouver des résultats avec des techniques différentes.

### 2-1 Dans l'univers de la calculatrice

**On peut vérifier par exemple le cas où  $p = 40$**

On calcule :  $M_p = E((40-2)/4) = E(9,5) = 9$  ;  $\sin 2(N+1)\pi/p = \sin 20\pi/40 = 1$   
 $\sin(\pi/p) = 0,078459095$ .

$2(\sin\pi/p)(\sin 2(M_p+1)\pi/p) = 0,156918191$ . Puis  $(1-\cos(2\pi/p)) = 0,012311659$ .

Finalement :  $S_p = \frac{2(\sin\pi/p)(\sin 2(M_p+1)\pi/p)}{(1-\cos(2\pi/p))} = 12,74549482$ .

**$p/S_p = 3,138$  (à 0,001 près).**

On peut vérifier ensuite pour d'autres valeurs de  $p$  ;

On peut aussi vérifier la formule trouvée pour  $S_p$  par le calcul direct :

$S_p = \frac{2(\sin\pi/p)(\sin 2(M_p+1)\pi/p)}{(1-\cos(2\pi/p))}$ .

**Par exemple pour  $p=10$**

$M_p = E((p-2)/4) = 2$

$\sin 2(M_p+1)\pi/p = \sin 6\pi/10 = 0,951056516$

$\sin(\pi/p) = 0,309016994$  ;  $2(\sin((M_p+1)\pi/p)) = 0,587785251$ .

Puis  $(1-\cos(2\pi/p)) = 0,190983005$ . Finalement :

**$S_p = \frac{2(\sin\pi/p)(\sin 2(M_p+1)\pi/p)}{(1-\cos(2\pi/p))} = 3,0776835$  (à 0,0000001 près).**

**Par le calcul direct :**

$2\cos\pi/10 + 2\cos3\pi/10 = 1,902113033 + 1,175570505 = 3,0776835$  (à 0,0000001 près).

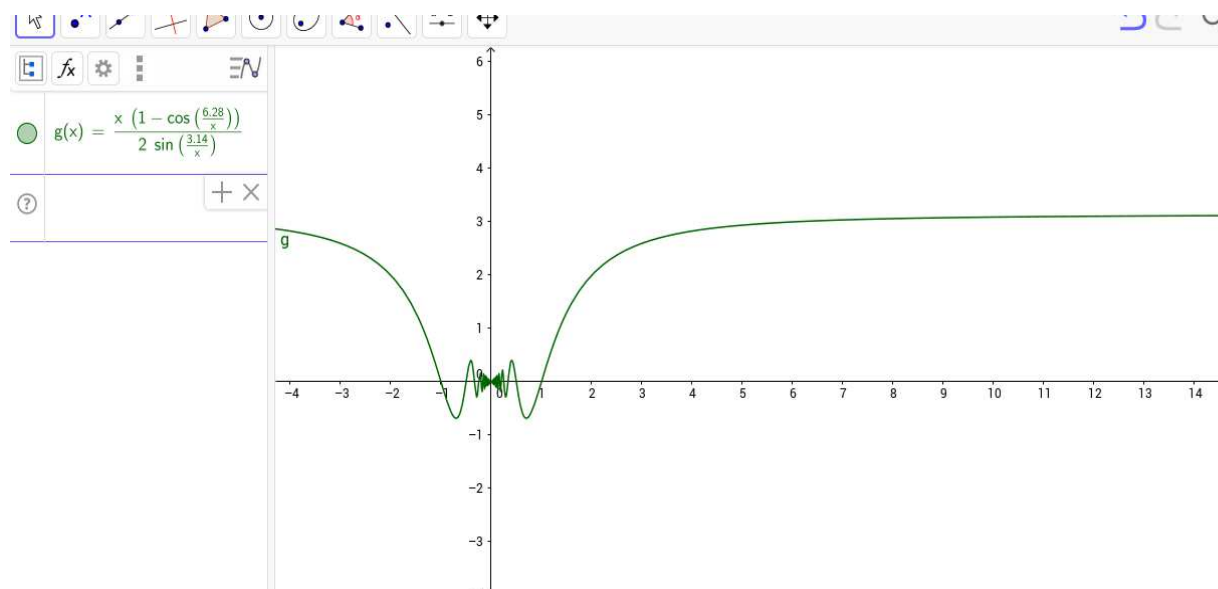
On pourra vérifier ensuite pour d'autres valeurs de  $p$ .

**2-2 Vérifications dans l'univers des fonctions et du logiciel GEOGEBRA**

Nous pouvons proposer aux élèves d'observer et de calculer à l'aide des fonctions pour approcher  $S_p$ .

Par exemple : On peut approcher  $p/S_p$  par  $g(p) = p(1-\cos(2\pi/p))/2(\sin\pi/p)$  et utiliser la fonction  $g$  définie sur  $[0 +\infty]$  par  $g(x) = x(1-\cos(2\pi/x))/2(\sin(\pi/x))$  pour tracer un graphique avec GEOGEBRA.

Les élèves obtiennent une première image tracée sur  $\mathbb{R}$  tout entier.



Puis ils vont s'intéresser à des valeurs « grandes » de  $x$ , donc ils vont appliquer un changement d'échelle (ils voient donc avec quelle échelle on doit travailler pour percevoir l'asymptote d'équation  $y = 3,14$ ).

**Les vérifications par changement d'univers (ici celui de GEOGEBRA), sont très souhaitables pédagogiquement.**

**2-3 Vérifications dans l'univers d'un TABLEUR (ici celui d'OpenOffice)**

Vérification par TABLEUR des calculs précédents à l'aide de la formule :

$$S_p = 2(\sin\pi/p)(\sin 2(M_p+1)\pi/p)/(1-\cos(2\pi/p)).$$

On observe sur les colonnes du TABLEUR que la suite  $(S_p)$  est bien croissante et que, par contre, la suite  $(p/S_p)$  n'est ni croissante ni décroissante mais elle converge bien vers  $\pi$ .



	A	B	C	D	E
1	3	0,25	0	1,000919378	2,99724439
2	4	0,5	0	1,414776538	2,82730162
3	5	0,75	0	1,618408362	3,0894551
4	6	1	1	1,733908842	3,46038952
5	7	1,25	1	2,248507794	3,11317577
6	8	1,5	1	2,614381692	3,05999694
7	9	1,75	1	2,880425639	3,1245382
8	10	2	2	3,080147554	3,24659771
9	11	2,25	2	3,51550812	3,12899291
10	12	2,5	2	3,865616839	3,10429111
11	13	2,75	2	4,149806242	3,13267638
12	14	3	3	4,384379829	3,19315400
13	15	3,25	3	4,786202284	3,13400878
14	16	3,5	3	5,128395676	3,11988407
15	17	3,75	3	5,421314896	3,13577062
16	18	4	4	5,675012146	3,17179937
17	19	4,25	4	6,058244474	3,13622206
18	20	4,5	4	6,395666834	3,12711723
19	21	4,75	4	6,693730912	3,13726384
20	22	5	5	6,959523053	3,16113616
21	23	5,25	5	7,330929032	3,13739225
22	24	5,5	5	7,665158852	3,13105057
23	25	5,75	5	7,966617706	3,138094
24	26	6	6	8,240752883	3,15505153
25	27	6,25	6	8,603969815	3,13808632
26	28	6,5	6	8,935912554	3,1334236
27	29	6,75	6	9,23978015	3,13860281
28	30	7	7	9,52001904	3,15125420
29	31	7,25	7	9,877228701	3,13853216
30	32	7,5	7	10,20745212	3,13496449
31	33	7,75	7	10,51311789	3,138935
32	34	8	8	10,79801655	3,14872642
33	35	8,25	8	11,15063082	3,13883587
34	36	8,5	8	11,47951446	3,13602113

Les élèves observent par exemple que pour  $p = 10$  nous avons obtenu par tableur  $S_{10} = 3,080$  à 0,001 près alors que par le calcul à la calculatrice pour  $p = 10$  le résultat était  $S_{10} = 3,077$  à 0,001 près. On peut expliquer ceci par le fait que pour le TABLEUR nous avons pris 3,14 comme approximation de  $\pi$  et par la calculatrice nous avons pris 3,141592654. En allant un peu plus loin avec le tableur on est plus proche de  $\pi$ .

**Remarque :** Les élèves peuvent éventuellement s'intéresser à ce dernier tableau de données et observer la colonne des valeurs approchant  $\pi$  et constater l'alternance de deux valeurs qui commencent par 3,13 et deux valeurs par 3,14.

Ils peuvent être ainsi motivés à trouver une explication à ce constat.

Par exemple pour  $p = 826$ ,  $p = 827$ ,  $p = 828$ ,  $p = 829$  la partie entière :

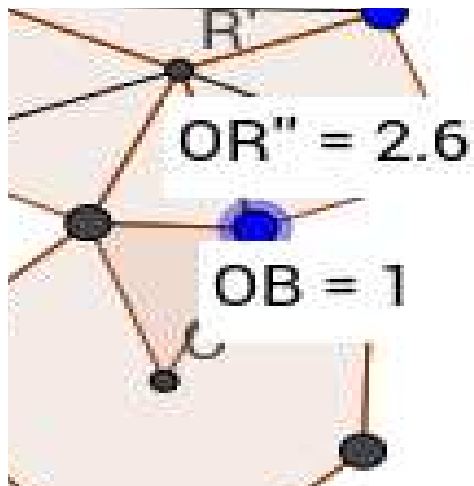
$M_p = E((p-2)/4)$  est constante et vaut 206. On observe que cette constance se produit pour quatre termes consécutifs.

On voit que la suite des valeurs  $p-2$  est 824 ; 825 ; 826 ; 827 et que 824 est un multiple de 4 c'est à dire que  $E((p-2)/4)$  augmente d'une unité quand  $p-2$  passe d'un multiple de 4 au prochain multiple de 4. La somme  $S_p$  augmente moins vite que le nombre  $p$ , qui à chaque étape augmente d'une unité.

## 2-4 Vérification par la fonction distance dans GEOGEBRA

On peut inciter les élèves à construire dans l'univers de GEOGEBRA, pour une valeur de  $p$  (par exemple  $p = 8$ ) le pavage associé avec le premier rayon du cercle circonscrit au polygone régulier  $R = 1$  (ici c'est un octogone régulier).

Ensuite à l'aide de la fonction distance on évalue  $R_p$  (par exemple  $R_8$ ).



Il n'est pas nécessaire, pour vérifier les calculs, de faire la figure complète.

Il suffit de calculer  $M_p = E((p-2)/4)$ .

Ici c'est  $E((8-2)/4) = 1$  alors en  $N+1$  étapes on obtient le rayon  $R_p$ . Ici c'est en 2 étapes.

On obtient par simple mesure de distance dans GEOGEBRA :  $R_8 = 2,61$ .

On compare par exemple au résultat du TABLEUR ci-dessous.

Voici la figure de GEOGEBRA

	A	B	C	D	E
1	3	0,25	0	1,000919378	2,99724439
2	4	0,5	0	1,414776538	2,82730162
3	5	0,75	0	1,618408362	3,0894551
4	6	1	1	1,733908842	3,46038952
5	7	1,25	1	2,248507794	3,11317577
6	8	1,5	1	2,614381692	3,05999694

On voit sur le tableau des résultats que pour  $p = 8$  le rayon  $R_8$  vaut 2,614381692. Donc à 0,01 près la mesure de  $R_8$  délivrée par GEOGEBRA et celle de  $R_8$  calculée dans le TABLEUR sont égales.

### 3 Raisonnement exclusivement géométrique pour l'étude du rayon $R_p$

Nous avons vu lors de la construction de la « Rosace Céleste » que le polygone qui achève la construction est un polygone régulier ayant  $p$  ou  $2p$  côtés et pour périmètre  $2p$ . Le rayon de son cercle circonscrit vaut  $R_p$ .

Si on applique la formule qui donne le périmètre d'un polygone régulier en fonction de son rayon on écrit ici :

Périmètre =  $2p(R_p)(\sin(\pi/p))$ . C'est à dire :  $2p = 2p(R_p)(\sin(\pi/p))$ .

Donc  $1 = (R_p)(\sin(\pi/p))$  et la limite de  $(R_p)(\sin(\pi/p))$  qui est égale à la limite de  $(R_p)(\pi)/p$  vaut 1. On arrive très vite à la conclusion que la limite de  $p/R_p$  vaut  $\pi$ .

Ceci confirme un fait intuitif que plus  $p$  est « grand » plus le polygone régulier qui achève la construction de la « Rosace Céleste » possède un périmètre qui « se rapproche de plus en plus » de la circonférence de son cercle circonscrit.

**C'est à dire que  $2p$  se rapproche de  $2\pi R_p$  quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .**

Ceci est valable dans tous le cas, y compris quand on utilise l'autre formule du rayon :

$R_p = \sum_{n=0}^{M(p)} 2(\cos((2n)\pi/p))$  . Donc on confirme que la limite de  $p/R_p$  vaut  $\pi$ .

## Conclusion

Cette étude de la divergence du rayon de la « Rosace Céleste » nous a permis de répondre à la question sur le comportement quand  $p$  tend vers  $+\infty$  de la suite  $(R_p)$  des rayons du cercle circonscrit au polygone régulier qui clôture la construction. Nous avons proposé d'aborder la question dans différents univers mathématiques. Ceci est souhaitable pour renforcer la compréhension de la question et aussi pour renforcer les compétences sur les connaissances de chaque univers mathématique.

Ruben Rodriguez Herrera, Équipe de géométrie  
IREM de Caen Basse-Normandie année 2018

## Bibliographie

EVEILLEAU Thérèse :

***Pavages de Penrose : construction du cerf-volant et de la fléchette***

[http://therese.eveilleau.pagesperso-range.fr/pages/truc\\_mat/textes/penrose.htm](http://therese.eveilleau.pagesperso-range.fr/pages/truc_mat/textes/penrose.htm)

RODRIGUEZ HERRERA Ruben et SALLES-LEGAC Danielle

***Nombreux articles d'activités géométriques*** pour les élèves professeurs, l'école primaire, le collège et le lycée en français et en espagnol en ligne sur le site

<http://www.math.unicaen.fr/irem/> de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie, Caen.

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe  
Géométrie de l'IREM de Normandie.

***Le nombre d'or, nouveautés mathématiques ludiques***, édition 2015 de  
l'IREM de Normandie.

RODRIGUEZ HERRERA Ruben et SALLES-LEGAC Danielle

***Une curiosité architecturale et mathématique d'un pavage de Penrose***

téléchargement gratuit : <https://irem.unicaen.fr/IMG/pdf/miroir16.pdf>

RODRIGUEZ HERRERA Ruben et SALLES-LEGAC Danielle

***Le chef d'œuvre du Compagnon avec la contribution de notre regretté collègue et ami Eric Trotoux disparu en Avril 2018 d'un accident de la route***

téléchargement gratuit :

<https://irem.unicaen.fr/spip.php?article203>

ROZOY Brigitte et son équipe IREM ***De MC ESCHER aux dessins à motifs répétitifs***, brochure numérisée téléchargeable sur le site web de l'IREM de

Normandie : <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

La version détaillée de cet aperçu se trouve à l'url :

<http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article197>

***Pavages de Penrose – apmep*** Équipe académique Mathématiques – Bordeaux.

[https://www.a1 sur 4 pmp.fr/IMG/pdf/I\\_sequence\\_pavage\\_penrose.pdf](https://www.a1sur4pmp.fr/IMG/pdf/I_sequence_pavage_penrose.pdf)