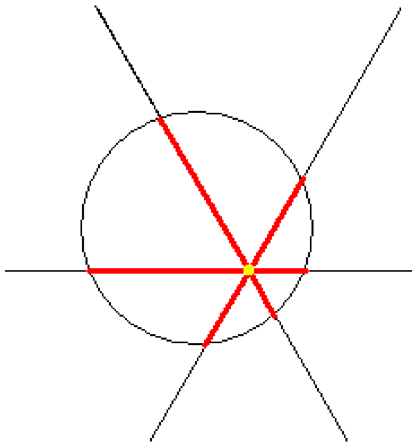
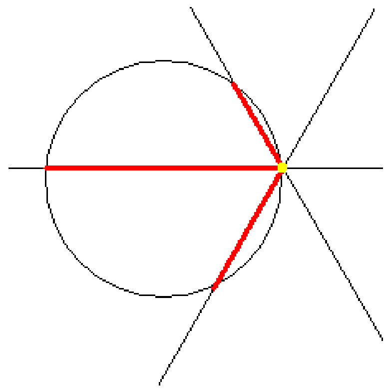
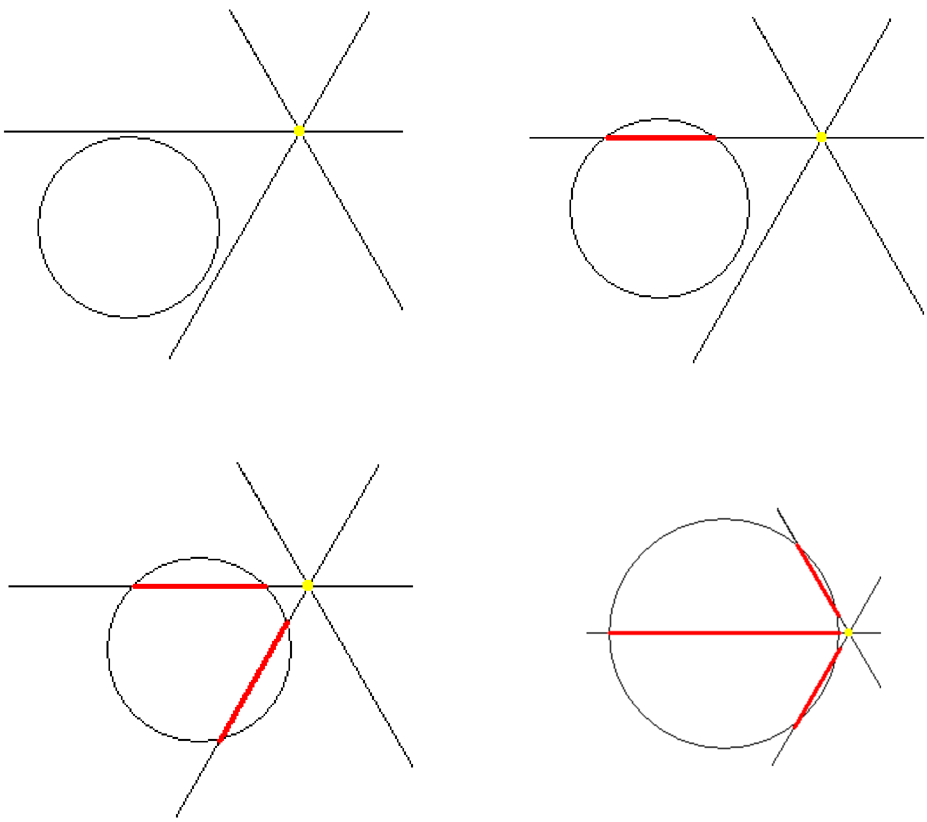
Jeu du franc carreau

Cas d'un sol pavé de carreaux équilatéraux.

A) Nombre de joints coupés par l'écu.

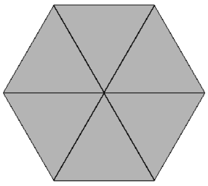
La discussion se fait à partir du centre de l'hexagone formé par 6 triangles équilatéraux.

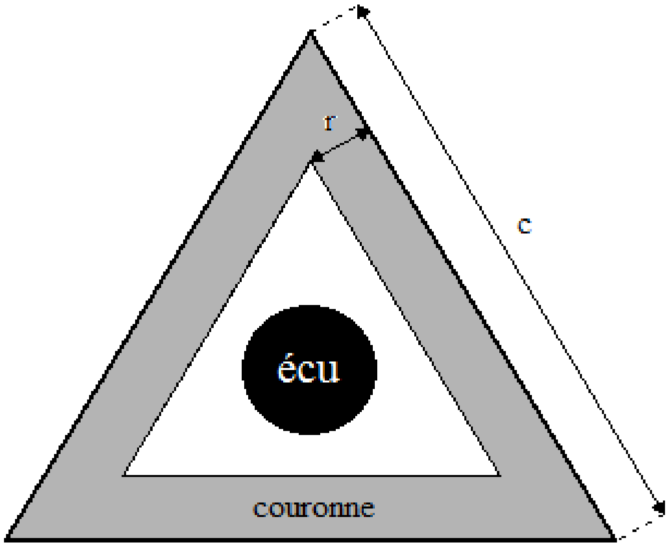
<table>
<tr><td><u>1^{er} cas</u> : le centre est intérieur à l'écu et l'écu coupe alors les 6 joints.</td><td><u>2^{ème} cas</u> : le centre est sur le bord de l'écu et l'écu coupe alors 3 joints.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>3^{ème} cas</u> : le centre est extérieur à l'écu et coupe alors 0; 1; 2 ou 3 joints.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

B) Joueur 1 et 2.

le joueur 1 parie que l'écu se trouvera à l'intérieur du carreau.
le joueur 2 parie que l'écu se trouvera sur au moins 1 joint c'est à dire l'événement contraire.

On note **c, r** et **d** respectivement le côté du carreau équilatéral, le rayon et le diamètre de l'écu.





Pour l'étude on inscrit dans le carreau un triangle qui lui est semblable et distant des côtés du carreau du rayon de l'écu. Dans ces conditions : «**le sort du premier joueur sera à celui du second, comme la superficie de la couronne circonscrite est à la superficie de la figure inscrite** »
Si on note $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ les aires respectives du carreau et du carreau semblable inscrit alors la probabilité que le premier joueur gagne son pari (resp. le second joueur) est :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{A}'}{\mathscr{A}} \quad (\text{resp.} \quad 1 - \mathbf{p} = \frac{\mathscr{A} - \mathscr{A}'}{\mathscr{A}} = \frac{\mathscr{A}_{\text{couronne}}}{\mathscr{A}} \;)$$

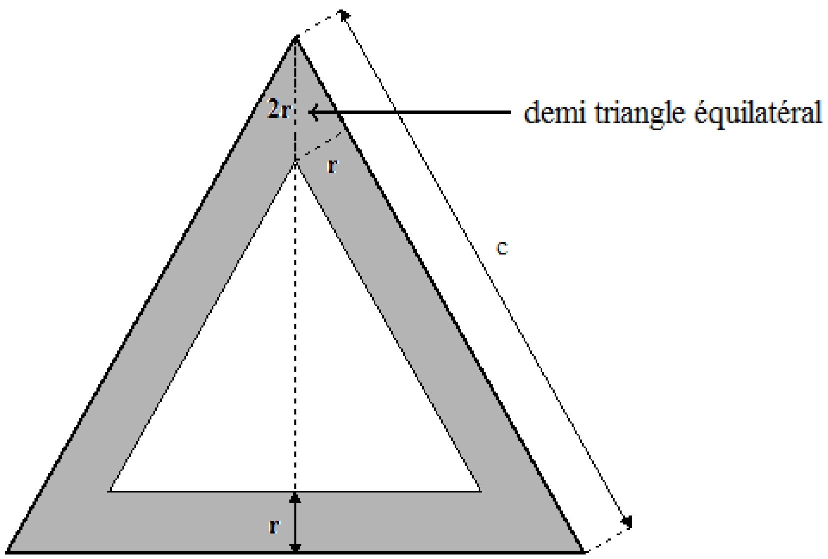
Le Comte de Buffon ne cherche pas à expliciter les probabilités des deux joueurs de gagner leur pari en fonction de **c** et **d** mais se cantonne à déterminer dans quel rapport doivent être **c** et **d** afin de **«rendre égal le sort de ces deux joueurs».**

Autrement dit il cherche le rapport $\frac{d}{c}$ tel que $\text{p} = \frac{\mathscr{A}'}{\mathscr{A}} = \frac{1}{2}$.

<u>Propriété</u> (*) : la hauteur h d'un triangle équilatéral de côté c vérifie $\frac{h}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De l'égalité $\frac{\mathscr{A}'}{\mathscr{A}} = \frac{1}{2}$ découle le rapport d'homothétie entre les 2 triangles : $\frac{h'}{h} = \frac{c'}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

où h , h' et c , c' sont respectivement les hauteurs et les côtés des deux triangles équilatéraux.

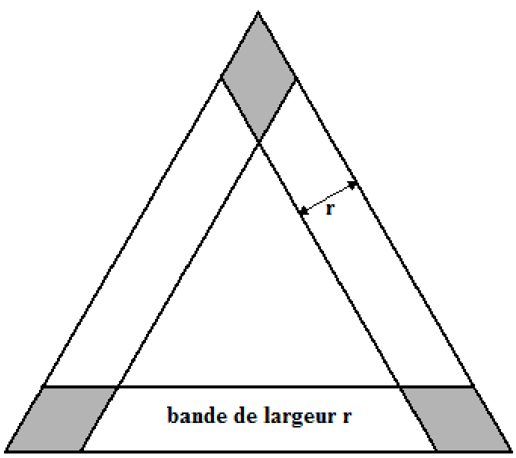


On en déduit que $\frac{h}{c}=\frac{h'}{c'}=\frac{h-h'}{c-c'}=\frac{3r}{c(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{3d}{2c(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}$ or d'après la propriété (*) $\frac{h}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

d'où $\frac{3d}{2c(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit finalement $\boxed{\frac{d}{c}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}$ ce qui équivaut à l'égalité trouvée par le Comte de Buffon $\boxed{\frac{d}{c}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3+3\sqrt{\frac{1}{2}}} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{d}=1:\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3+3\sqrt{\frac{1}{2}}}\approx 5{,}91}$

Cas des joueurs 1 et 3 :

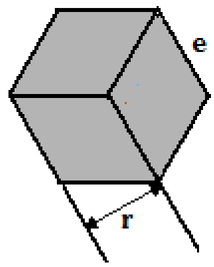
le joueur 1 parie que l'écu se trouvera sur 1 joint au plus,
le joueur 3 parie que l'écu se trouvera sur au moins 2 joints c'est à dire l'événement contraire.



Il est clair que si le centre de l'écu est dans une bande de largeur **r** alors il se retrouve à cheval sur deux carreaux et coupe alors le joint commun. Par conséquent si l'écu se trouve dans la zone définie par l'intersection de deux bandes alors ce dernier coupe au moins 2 joints.

Conclusion : la zone favorable au joueur 3 est la zone définie par les losanges gris (réunion de 2 triangles équilatéraux).

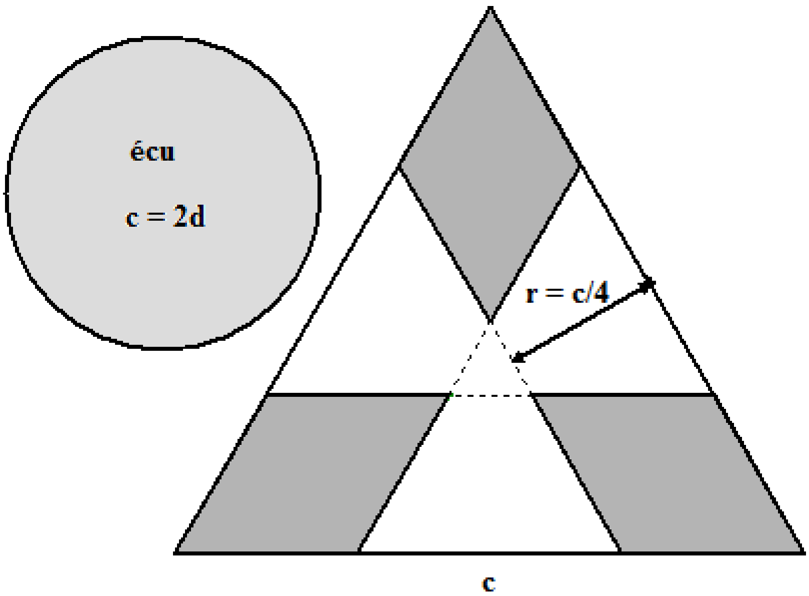
L'aire $\mathscr{A}'$ grisée est équivaut à celle d'un hexagone de rayon $e = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ (voir propriété (*))



On a $\mathscr{A}' = 6 \times \frac{2r}{\sqrt{3}} \times \frac{r}{2} = \frac{6r^2}{\sqrt{3}}$ et $\mathscr{A} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

On veut rendre égal le sort des joueurs 1 et 3 donc

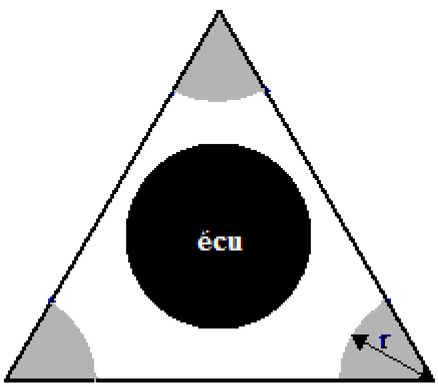
$$\frac{\mathscr{A}'}{\mathscr{A}} = \frac{1}{2} = \frac{6r^2}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{c^2\sqrt{3}} = \frac{8r^2}{c^2} \quad d'où \quad \frac{c^2}{r^2} = 16 \quad soit \quad \frac{c}{r} = 4 \quad et \quad \frac{c}{d} = 2$$



<u>**Cas des joueurs 1 et 4**</u> :

le joueur 1 parie que l'écu se trouvera sur 3 joints au plus,
le joueur 4 parie que l'écu se trouvera sur 6 joints c'est à dire l'événement contraire.
(notons que l'écu ne peut pas couper 4 ou 5 joints !).

Pour que le joueur 1 gagne il faut que le centre de l'écu soit à une distance supérieure ou égale à **r** de chaque sommet du pavé.



Le sort du joueur 1 sera égal à celui du joueur 4 si l'aire grisée vaut la moitié de l'aire du triangle équilatéral.

On a donc $\pi r^2 = c^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ soit $\dfrac{r^2}{c^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$ d'où $\dfrac{d^2}{c^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$ et $\dfrac{d}{c} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}}$

En remplaçant π par 22/7 ,l'approximation d'Archimède, on obtient pour $\dfrac{d}{c} = \sqrt{\dfrac{7\sqrt{3}}{22}}$

soit $\dfrac{c}{d} = 1 : \sqrt{\dfrac{7\sqrt{3}}{22}} \approx 1{,}347$ égalité vérifiée par la figure ci-dessous.