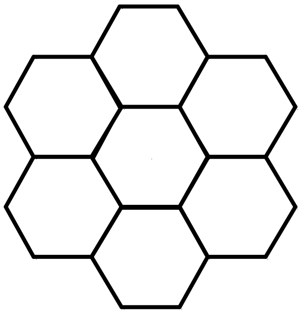
Si le carreau est hexagonal

L'avantage de ce cas est qu'il n'existe qu'un pavage à carreaux hexagonaux, à savoir



Préliminaire : Aire d'un hexagone de côté *c*.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté *c* est $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$; l'aire d'un triangle équilatéral de côté *c* est donc $a = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$.

L'aire d'un hexagone de côté *c* est donc :

$$\mathcal{A} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$
$$= 6\frac{h^2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,h^2$$

Cas n°1

Le joueur 1 parie sur « franc-carreau », le joueur 2 parie sur le contraire, à savoir « la pièce rencontre 1 joint au moins ».

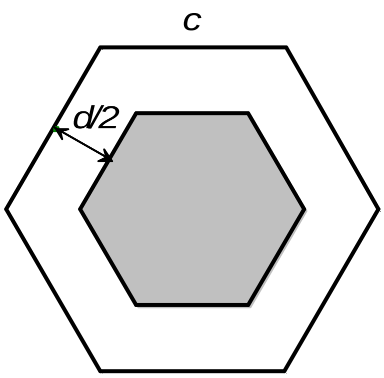


Figure 1.

Pour que l'écu tombe à franc-carreau, son centre doit tomber dans l'hexagone central (en grisé dans la figure ci-contre), obtenu par homothétie du carreau hexagonal à partir du centre de ce carreau et dans un rapport tel que l'écart entre deux côtés correspondants des hexagones soit égal au rayon de l'écu, soit *d*/2.

Le rapport du "sort" du joueur 1 au "sort" du joueur 2 égal au rapport de l'aire de l'hexagone central à celle de la couronne hexagonale de largeur *d*/2.

La hauteur des triangles équilatéraux constituant le carreau (appelée aussi *apothème* de l'hexagone) étant $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, l'apothème de l'hexagone central est :

$$h' = h - \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c - \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,c - d\right)$$

L'aire de l'hexagone central est donc : $\mathcal{A}_1 = 6\dfrac{h'^2}{\sqrt{3}} = 6\dfrac{\left(\sqrt{3}\,c-d\right)^2}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\,c-d\right)^2$.

L'aire de la couronne hexagonale $\mathcal{A}_2$ est donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= \mathcal{A} - \mathcal{A}_1\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\,c-d\right)^2\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[3c^2 - \left(\sqrt{3}\,c-d\right)^2\right]\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\,c-\sqrt{3}\,c+d\right)\left(\sqrt{3}\,c+\sqrt{3}\,c-d\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}d\left(2\sqrt{3}\,c-d\right)
\end{aligned}$$

Le rapport des “sorts” est donc :

$$\frac{sort1}{sort2} = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\,c-d\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}d\left(2\sqrt{3}\,c-d\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}\,c-d\right)^2}{d\left(2\sqrt{3}\,c-d\right)}$$

L'égalité des “sorts” se produit donc si $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, ce qui équivaut à $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}$

soit

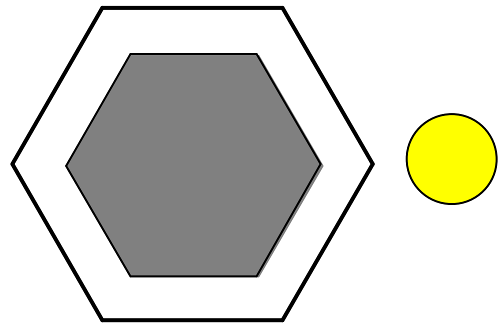
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\,c-d\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\,c-d\right)^2 = \frac{3}{2}c^2\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\,c-d-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}c\right).\left(\sqrt{3}\,c-d+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}c\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)c = d \text{ ou } \left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)c = d\\
&\Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \text{ ou } \frac{c}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\\
&\Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ ou } \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\\
&\Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \text{ ou } \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\\
&\Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2+\sqrt{2}\right) \text{ ou } \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$ est inférieur à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, donc seule la solution $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(2+\sqrt{2}\right)$, supérieure à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, est acceptable.

Donc

$$\frac{c}{d}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{Donc } \boldsymbol{\frac{c}{d}=\frac{1}{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}\approx 1{,}97}$$



Hexagone et écu vérifiant $\frac{c}{d}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2+\sqrt{2}\right)$

Cas n°2

Le joueur 1 parie sur « la pièce rencontre 1 joint au plus », le joueur 3 parie sur le contraire, à savoir « la pièce rencontre 2 joints au moins ».

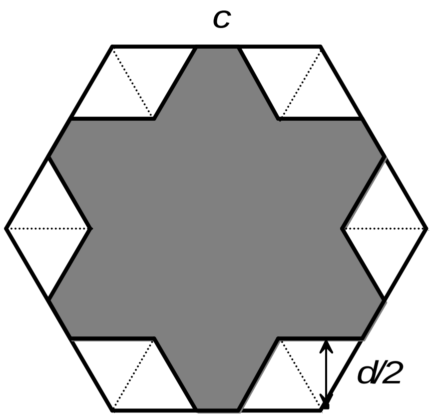


Figure 2.

Dans la figure 1, les côtés de l'hexagone intérieur sont prolongés jusqu'aux côtés de l'hexagone extérieur. Ces prolongements délimitent à chacun des six angles du carreau un losange formé de deux triangles équilatéraux de hauteur *d*/2 (Figure 2).

Le joueur 3 gagne si le centre de l'écu tombe dans un de ces losanges, alors que le joueur 1 gagne si le centre de l'écu tombe dans la partie restante du carreau (zone grise).

L'aire de l'ensemble des six losanges est $\mathcal{A}_3=12\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\,d^2$

Le rapport des "sorts" est donc :

$$\frac{sort1}{sort3} = \frac{\mathcal{A} - \mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2 - \sqrt{3}\,d^2}{\sqrt{3}\,d^2} = \frac{\frac{3}{2}c^2 - d^2}{d^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{c}{d}\right)^2 - 1.$$

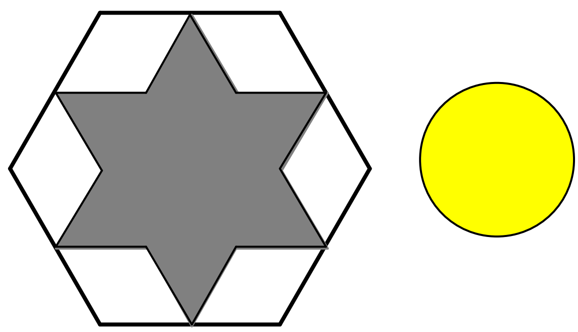
L'égalité des "sorts" est obtenue si et seulement si

$$\frac{3}{2}\left(\frac{c}{d}\right)^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{c}{d}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Donc $\boldsymbol{\frac{c}{d} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 1{,}15}$.



Hexagone et écu vérifiant $\frac{c}{d} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Cas n°3

Le joueur 1 parie sur « la pièce rencontre 2 joints au plus », le joueur 4 parie sur le contraire, à savoir « la pièce rencontre 3 joints ».

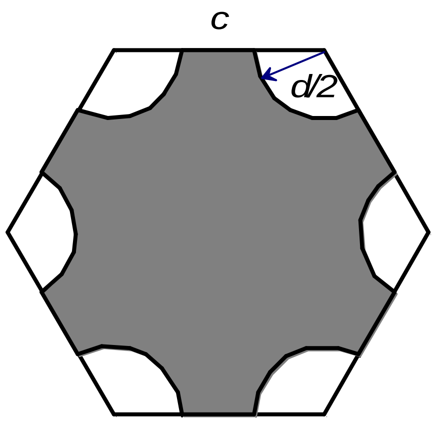


Figure 3.

Le joueur 4 gagne si le centre de l'écu tombe dans un des six secteurs circulaires centrés en un sommet de l'hexagone et de même rayon que l'écu. Le joueur 1 gagne si le centre de l'écu tombe dans la partie restante du carreau (zone grise).

L'aire de l'ensemble des six secteurs est $\mathcal{A}_4 = 6\frac{1}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}d^2$

Le rapport des "sorts" est donc :

$$\frac{sort1}{sort3} = \frac{\mathcal{A}-\mathcal{A}_4}{\mathcal{A}_4} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2 - \frac{\pi}{2}d^2}{\frac{\pi}{2}d^2} = \frac{3\sqrt{3}\,c^2 - \pi d^2}{\pi d^2} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{c}{d}\right)^2 - 1.$$

L'égalité des "sorts" est obtenue si et seulement si

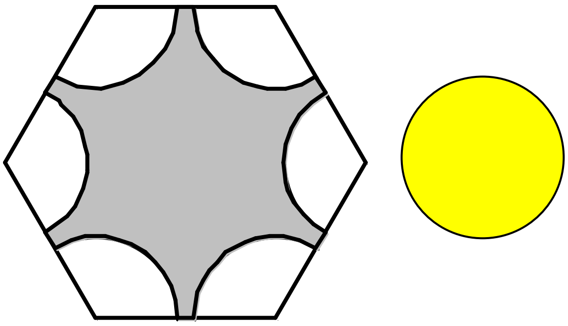
$$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{c}{d}\right)^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{c}{d}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{d} = \sqrt{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

En prenant $\frac{22}{7}$ pour approximation de π, la condition devient

$$\boldsymbol{\frac{c}{d} \approx \sqrt{\frac{2.22}{3.7\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{44}{21\sqrt{3}}} \approx 1{,}0996}$$



Hexagone et écu vérifiant $\frac{c}{d} = \sqrt{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

Didier BESSOT
8 mai 2011