Définition et propriétés succinctes des Pentagones Célestes

Par Jean-Pierre LE GOFF, Ruben RODRIGUEZ, Danielle SALLES

Introduction

Ce court article nous a été demandé par les webmasters du site des I.R.E.M. : PUBLIMATH pour son glossaire afin de servir d'introduction à notre article « A la rencontre du pentagone céleste » présentant la nouvelle notion de pentagone céleste, paru dans le « Miroir des maths », revue périodique de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie et que vous trouverez au chapitre suivant.

I - Constructions, définitions et propriétés des Pentagones et Croix Célestes par Ruben Rodriguez et Danielle Salles

Pour définir une figure géométrique nous avons deux possibilités complémentaires :

D'une part on peut présenter une suite d'étapes de la construction de la figure, (ce qui est nommé « programme de construction » dans la didactique de la géométrie), et d'autre part on peut donner un ensemble de propriétés nécessaires et suffisantes pour que la figure géométrique les vérifiant soit le « pentagone céleste » à une similitude plane près, (ce qu'on nomme en didactique de la géométrie une « description » de la figure, plus difficile pour les élèves, à cause du caractère « nécessaire et suffisant »). **Nous avons choisi pour nos lecteurs un parcours qui nous semble plus pédagogique qui va d'une présentation des deux constructions possibles à l'énumération des principales propriétés**

a) Première construction des pentagones célestes : convexe et étoilé

Soit ACEI un rectangle d'or de côtés de longueur a et aφ dont les diagonales se rencontrent en B.

On appelle J et D les projetés orthogonaux respectivement des points A et C sur ces diagonales.

La demi-droite [AJ) rencontre le segment [IE] en H, la demi-droite [CD) rencontre le segment [IE] en F. Appelons G le point de rencontre de [AJ) et [CD). Alors nous disons que le pentagone ACEGI est **un « Pentagone convexe céleste »** et que le pentagone ABCDEFGHIJ est un **« Pentagone étoilé céleste ».**

On peut définir un **« Pentagone céleste étoilé »** sans nommer les points, de façon plus littéraire mais plus difficile :

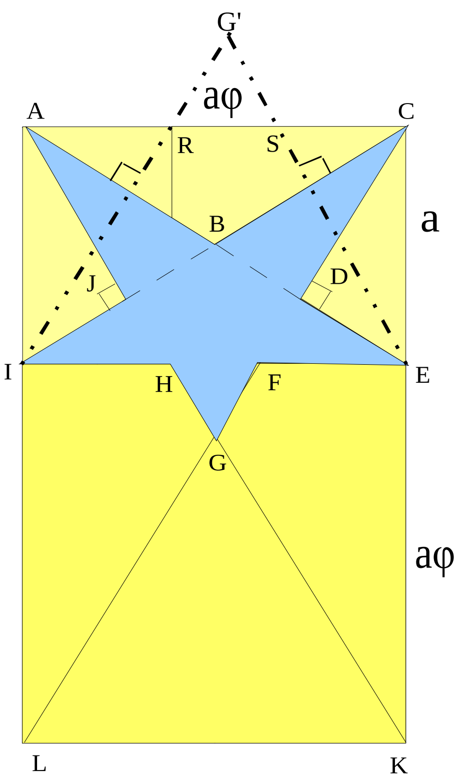
Un pentagone céleste étoilé est un pentagone dont quatre côtés sont les diagonales d'un rectangle d'or les deux autres étant deux droites orthogonales à chacune de celles-ci, issues des sommets qui leur sont extérieurs.

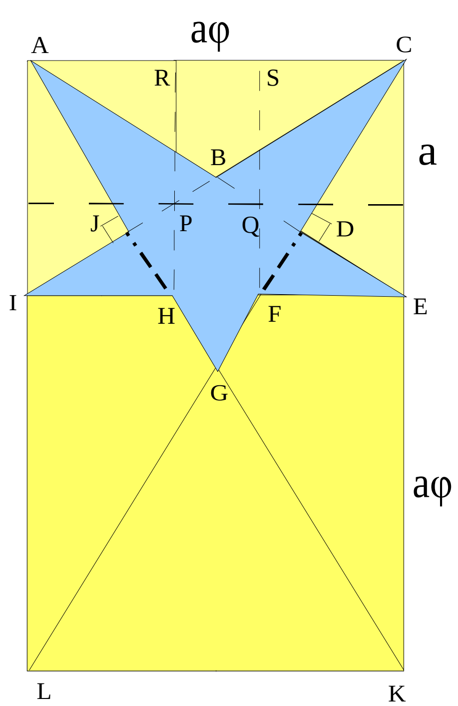
Ainsi énoncée la définition permet, pour tout rectangle d'or, de construire deux pentagones étoilés. Nous figurons en pointillés sur la première figure les deux autres droites orthogonales qui se rencontrent en G'.

b) Propriétés de cette construction

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Les points AIH sont les sommets d'un rectangle d'or de côtés de longueur : a et $a\varphi^{-1}$.
- Les points CEF sont les sommets d'un rectangle d'or de côtés de longueur : a et $a\varphi^{-1}$.
- Les points IHP sont les sommets d'un rectangle d'or de côtés de longueur : $a\varphi^{-2}$ et $a\varphi^{-1}$.
- Les points EFQ sont les sommets d'un rectangle d'or de côtés de longueur : $a\varphi^{-2}$ et $a\varphi^{-1}$.
- Le rectangle ACKL de centre G est un rectangle d'or de côtés de mesures $a\varphi$ et $a(\varphi+1) = a\varphi^2$. (Voyez les **rectangles d'or complétés** dans la deuxième figure ci-dessous)
- Les points AJHPI forment une croix dont les mesures des côtés sont les premiers termes d'une suite de Fibonacci généralisée, qui est une suite géométrique de raison φ.





Nous disons que cette croix est une **« croix céleste ».**

c) Deuxième construction (de découverte et naturelle) des pentagones célestes

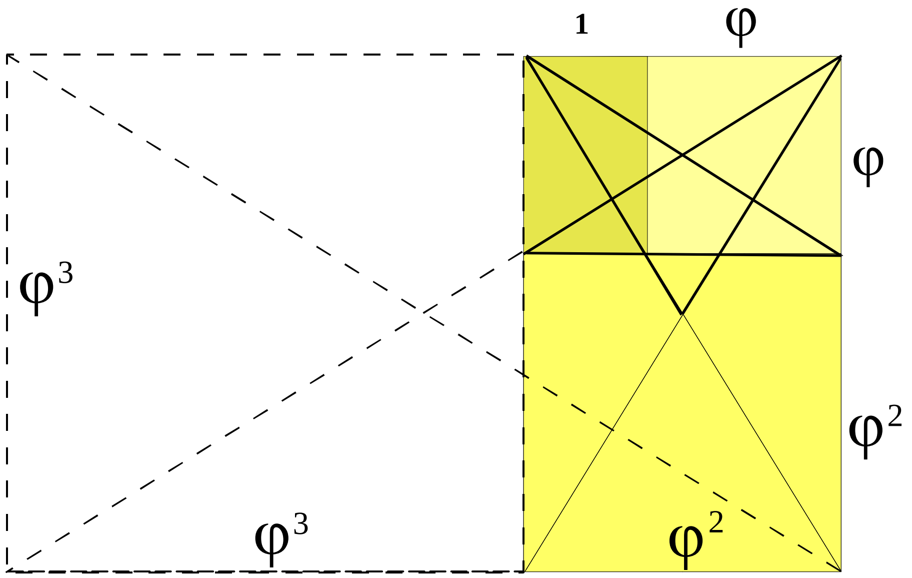
Considérons le rectangle d'or élémentaire de côtés de mesure 1 et φ, (en jaune foncé sur la figure suivante).

Construisons, le long d'un côté de mesure φ un carré de même mesure (en jaune moyen).

Alors la figure formée du premier rectangle d'or et du carré est un nouveau rectangle d'or de mesures φ et $\varphi + 1 = \varphi^2$.

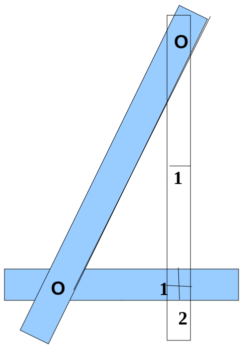
Si on itère le processus d'adjonction, toujours dans le même sens, on obtient ce que l'on appelle généralement la **spirale des rectangles d'or.**

Les diagonales des rectangles d'or successifs forment alors le **Pentagone céleste étoilé que nous avons tracé en gras**. Nous avons indiqué en pointillés une ébauche du **pentagone céleste suivant** dans la spirale (il est basculé dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au premier).



d) Une propriété remarquable de cette suite de constructions de rectangles d'or

Pour des raisons de proportionnalités des mesures des rectangles d'or successifs, certaines diagonales appartenant à des rectangles différents sont portées par le même axe, voyez la figure ci-dessus.



Toutes les diagonales d'un même rectangle d'or forment un angle aigu de tangente égale à 2, cet angle mesure 63,4° au dixième de degré près ce qui permet de construire facilement les rectangles d'or de centre donné et passant par un point donné, ce qui peut être utile en architecture en **utilisant par exemple une fausse équerre**.

Remarque : les diagonales des rectangles d'or successifs forment une suite croissante géométrique de raison φ. Cette propriété nous permet d'énoncer :

Propriétés numériques des pentagones étoilés célestes (conditions nécessaires)

Les longueurs de leurs diagonales sont :

$$a\varphi \;;\; a\sqrt{\varphi^2+1} \;;\; \frac{a}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1} \quad \text{ou encore : } a\varphi \;;\; a\sqrt{\varphi+2} \;;\; a\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi+2}.$$

Où **a** est un paramètre réel positif.

Si on multiplie a par φ on obtient les mesures des diagonales du **pentagone céleste suivant dans la spirale des rectangles d'or.**

Pour une exposition détaillée des propriétés des pentagones célestes le lecteur pourra consulter notre article en ligne dans le « Miroir des maths n°11 » revue de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie : «Á la rencontre du pentagone et de la croix célestes ».

e) Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pentagone soit céleste (voir la première construction)

- Quatre des ses sommets parmi cinq soient les sommets d'un rectangle d'or ACEI.
- Le cinquième sommet G se trouve à l'intersection des droites orthogonales [AG] à la diagonale [CI] et [CG] à la diagonale [AE].

L'observation des propriétés des pentagones célestes étoilés qui **ressemblent à des pentagones réguliers « vus de loin »** nous a incités à en proposer l'étude à notre collègue Jean-Pierre Le Goff de l'équipe « Histoire des sciences » de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie, d'un point de vue historique et « perspectiviste ». Il vous livre maintenant un résumé de ses jolis résultats et commentaires.

II – Le pentacle céleste, formé des pentagones célestes étoilé et convexe, pourrait-il être l'image par perspective centrale d'un pentacle régulier ? (par Jean-Pierre Le Goff)

Cette question fournit l'occasion d'aborder quelques aspects historiques et heuristiques d'un domaine un peu perdu de vue : la géométrie dite de situation et des propriétés projectives des figures.

En effet, le résultat le plus surprenant auquel aboutit l’étude de Danielle et Ruben sur le pentagone céleste étoilé est que le pentacle céleste (conjugaison des pentagones célestes convexe et étoilé) est l’image perspective d’un pentacle régulier. Ce résultat, au passage, pourrait être une définition *princeps* de cet objet. Un article détaillant l’aspect heuristique et calculatoire du « Pentacle céleste comme vision perspective du pentacle régulier » sera publié courant 2014 dans le « Miroir des maths » édition de l’I.R.E.M. de Normandie, téléchargeable en ligne sur le site.

S’il est assez simple de concevoir qu’un pentagone (qu’il soit convexe ou étoilé) puisse être l’image d’un pentagone régulier (convexe ou étoilé, respectivement), et si la théorie projective permet d’*intuiter* qu’il s’agit, par exemple, d’une extension du théorème de Poncelet sur les perspectives de quadrilatères plans et/ou de tétraèdres, c’est-à-dire d’un **cas particulier des théorèmes sur les images perspectives de figures polygonales planes ou gauches**, il reste que ce constat d’existence de solutions ne doit pas masquer le fait que la construction et/ou l’exhibition d”un pentagone régulier (donc un pentacle) dont l’image soit le pentagone céleste convexe (donc du pentacle céleste étoilé) ne sont pas immédiates.

Les voies heuristiques de cette construction donnent l’occasion de remettre en mémoire quelques propriétés peu connues, quoiqu’élémentaires, de la géométrie perspective des polygones et des coniques.

C’est donc la voie heuristique qui sera empruntée et exposée : elle permet de comprendre où le géomètre va chercher tout cela ! En prime**, c’est une histoire du passage de la géométrie des configurations à la géométrie des transformations – celles qui transforment “vraiment”,** c’est-à-dire qui modifient la forme et en brouille la reconnaissance – qui sera esquissée : le lecteur sera convié à (ré-) apprendre ce que sont la double projection vitruvienne et la vision arguésienne du cercle engendrant les coniques.

Quant à se faire une idée de ce résultat, deux images suffiront (peut-être ?) : l’une montre que la construction d’une perspective centrale peut toujours être conduite à partir de la connaissance de deux projections orthogonales : c’est ainsi que Gaspard Monge enseignera la perspective centrale à partir de sa géométrie descriptive à la fin du XVIIIe et au début du XIXe siècle.

Il reprendra ainsi l'idée primitive de l'architecte italien Filippo Brunelleschi, vers 1420, qui inventera la perspective centrale non empirique en coordonnant les informations fournies par le plan et l'élévation d'une situation spatiale regroupant sur un même géométral (le plan au sol) le "sujet regardant" (l'œil ponctuel Œ du perspecteur cyclopéen repéré au dessus du sol et face au tableau), le plan DCGH du tableau érigé à l'aplomb du sol et l'objet regardé (point, figure plane ou solide, ici pentagone ABCDE au sol) situé au-delà du tableau.

Ces projections orthogonales, la Renaissance les tient de l'architecte Vitruve, contemporain de César (Ier siècle av. J.-C.), qui définit l'ichnographie – projection verticale sur un plan horizontal – et l'orthographie – projection orthogonale sur un plan vertical – dans son traité d'architecture redécouvert dans cette période de néo-platonisme, dont Leon Battista Alberti donnera une version en 1452 et sera imprimé de nombreuses fois après l'invention de Gutenberg à la fin du Quattrocento.

Les rayons visuels issus de Œ traversent le tableau en des points *X* qui sont définis comme les images perspectives des points X de l'objet.

Le pentacle ABCDE devient *abcde* dans la figure 1 où l'on voit le tableau placé en regard des vues de dessus et de profil ; et *ABCDE* dans la figure 2, où l'on voit le tableau érigé au-dessus du plan géométral.

C'est grâce au relèvement des "coordonnées" (pas au sens de Descartes, mais au sens de grandeurs que l'on peut relever au compas) qu'on peut connaître la position d'un point-image dans le tableau. Les écarts se lisent sur la ligne DC ou TT du tableau en vue du dessus (où J sert d'origine) et sur la ligne TT', vue de profil de ce même tableau (où T sert d'origine).

Dans une certaine position de Œ, déterminée par sa distance A'J du tableau et sa hauteur ŒA' au-dessus du sol, l'image du pentacle régulier ABCDE "devient" un pentacle *céleste ABCDE* construit à partir du rectangle d'or *CDHG* (avec $CD = a$ et $DH = b = a \,.\, phi$.

Les conditions *ad hoc* seront explicitées dans l'article à paraître grâce à des considérations qui relèvent de la théorie des proportions dans un premier cas : la position de A' est connue du fait qu'il doit se trouver dans le plan neutre (parallèle au tableau et passant par Œ) pour que les images de (ED) et (BC) soient parallèles dans le tableau, ce qui induit que A', pied de l'observateur se trouve à l'intersection de (ED) et (BC) .

Dans un second cas, ces conditions ressortissent à la théorie des coniques : en effet le cercle circonscrit au pentagone régulier a pour image une ellipse circonscrite au pentagone régulier, qui se trouve entièrement définie par la donnée de cinq points, comme toute conique du plan.

Figure 1. Dans le géométral, en grisé, le pentagone croisé ACEBD dans le pentagone régulier ABCDE. Dans le tableau TTT'T', en grisé, l'image *acedb* de ABCD, qui est bien un pentagone céleste étoilé, dès lors que $h = b = a \cdot phi$. En rouge, l'un des pentagones-images obtenus lorsque l'on fait un choix arbitraire de *h*.

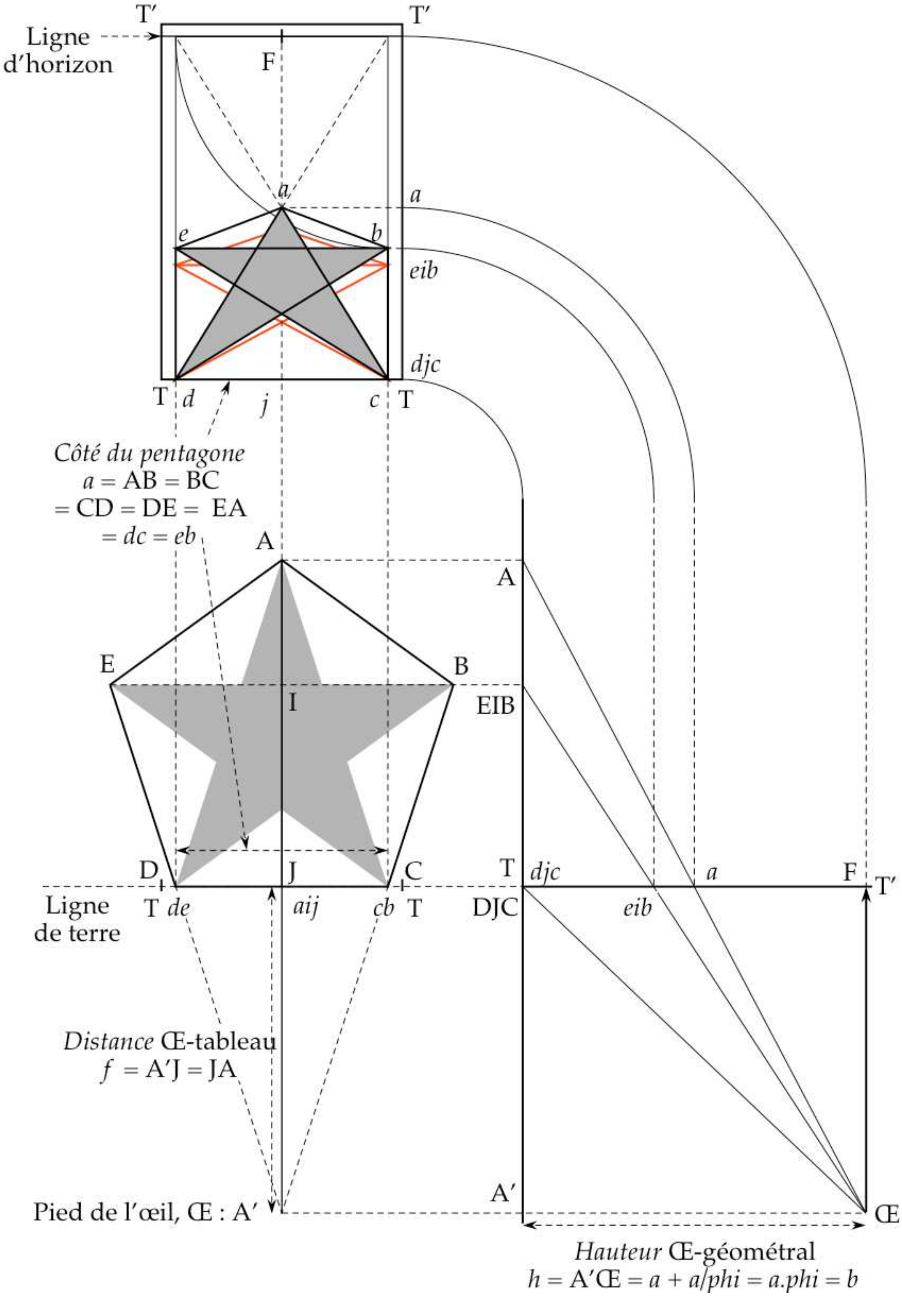
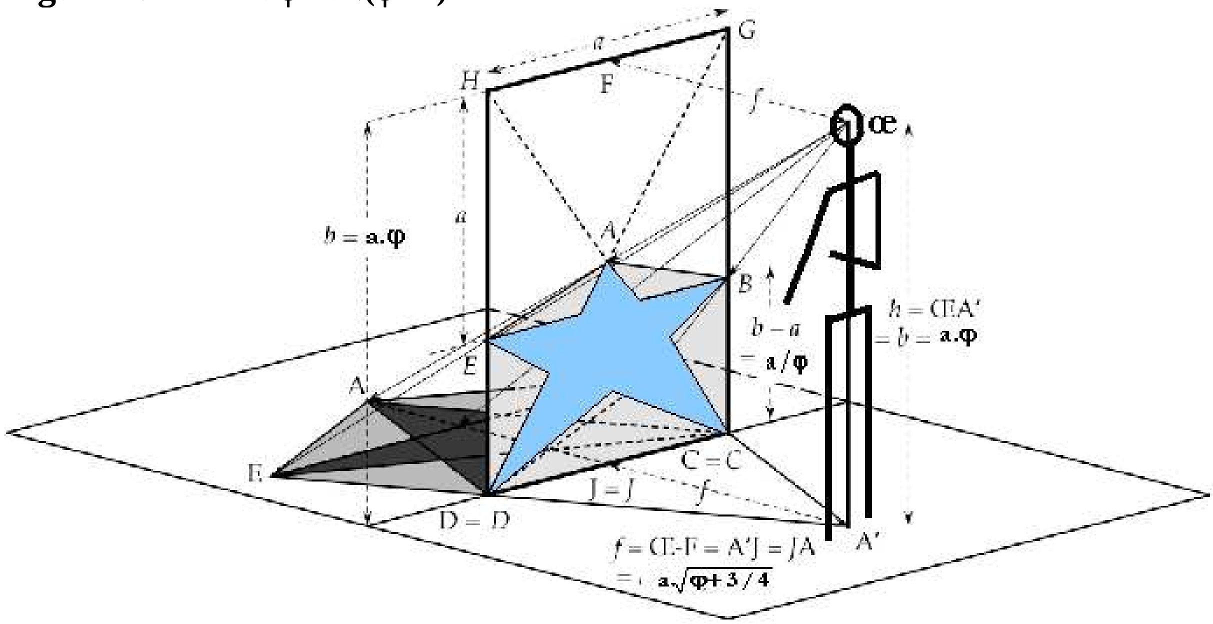


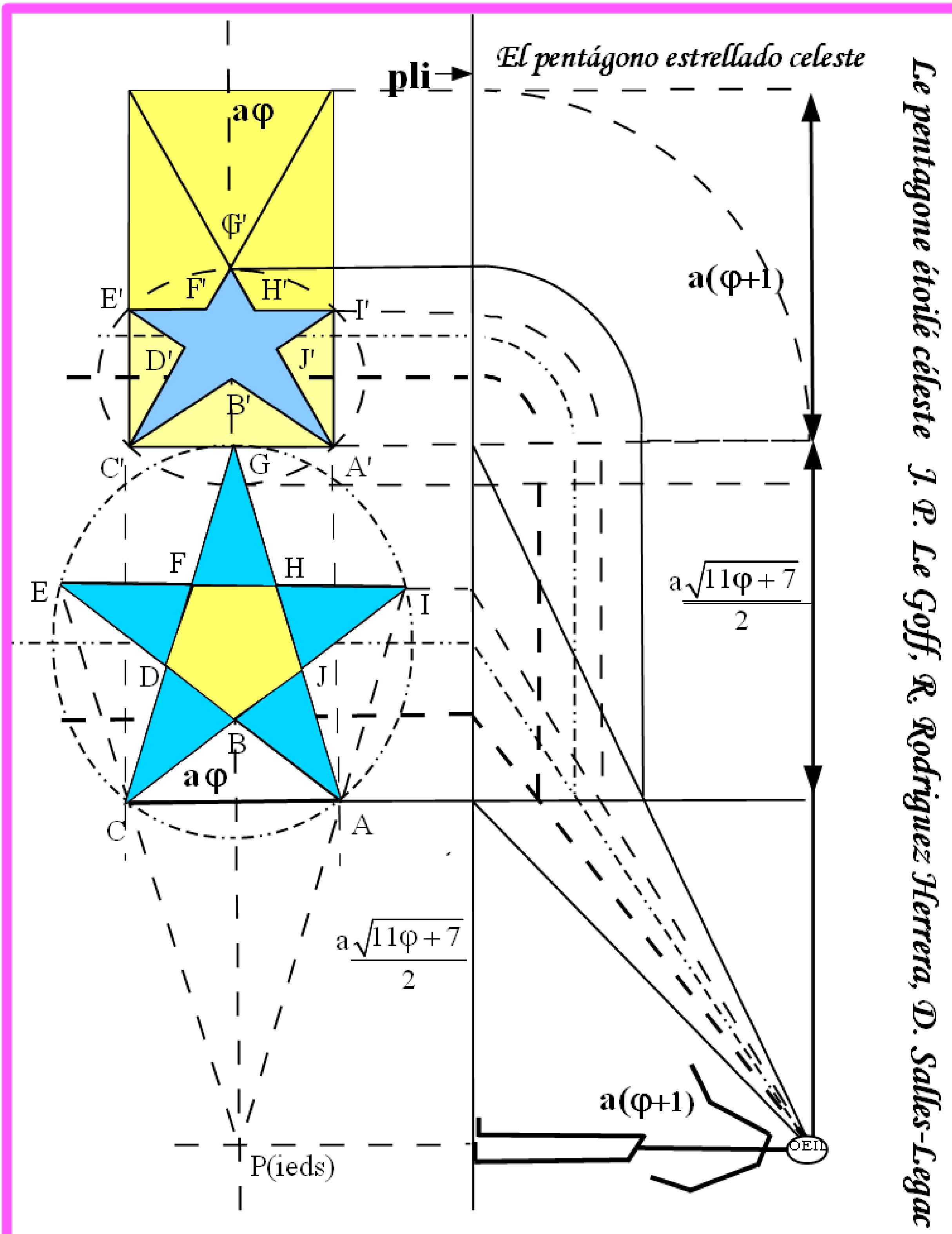
Figure 2. **AJ = *a* . φ/2 . √(φ+ 2)**



Nous vous proposons dans la page qui suit une reprise de la figure n°1 avec des notations modernes peut-être un peu plus habituelles au lecteur. Nous avons redessiné la figure de telle sorte qu'elle soit pliable le long d'un axe longeant les pieds de l'observateur. Cette petite affiche a été proposée aux visiteurs de notre exposition à l'occasion des quarante ans de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie.

Voici le texte que nous avions mis derrière l'affiche :

Cette affiche peut être pliée afin de vous montrer comment les artistes peintres du XVI ème siècle construisaient leurs images en perspective.
Faites un pli en extérieur (« pli montagne ») sur toute la feuille de haut en bas sur la ligne qui longe les pieds de l'observateur bleu qui se trouve en bas à droite. Repliez encore une fois la feuille dans le sens de sa longueur afin d'amener le premier pli sur la droite pointillée qui passe par les points G', B', G, B, P(ieds), Aplatissez le pli. Cela fait un pli plat ou « de couturière ». Les pieds de l'observateur doivent se trouver en P(ieds). Redressez verticalement la partie droite de l'affiche. Alors, par les reports de longueurs par les arcs de cercle, vous pouvez observer comment il faut dessiner le pentagone turquoise vu en perspective, s'il est représenté par exemple en décor de sol à l'italienne sur une peinture.



I.R.E.M. de Basse-Normandie Caen France 2013