Pierre Ageron
LMNO & IREM, université de Caen Normandie, France

Introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques : pourquoi ? comment ?

stage IREM pour le PAF,
Caen, 14 février 2020

Enseignement des sciences et histoire des sciences en France au XIXe siècle : un contexte spécifique pour les mathématiques ?

1. une science ancienne, des savoirs pérennes, un développement cumulatif

2. des textes anciens qui restent des choix pédagogiques possibles
(1863 : retour à Euclide au lieu de Clairaut pour la géométrie en Quatrième)

3. une recherche historique féconde dans la seconde moitié du XVIIIe siècle
(d'Alembert, Montucla, Bossut, Lalande)

4. des savants favorables à l'introduction de l'histoire des sciences dans l'enseignement

5. et pourtant, les programmes ne font presque pas de place à l'histoire

6. des allusions historiques rares et malencontreuses dans des manuels
(le pseudo-Pierre Métius, le pseudo-théorème de Thalès)

7. Un échec : l'épreuve de « méthode et histoire des sciences »
à l'agrégation de mathématiques (1869-1878)

L’histoire des mathématiques au temps des Lumières

Jean le Rond d’Alembert, l’*Encyclopédie*, articles mathématiques, 1751- 1772

Une vision **génétique et dynamique** de l’avancée des mathématiques : elles ne sont pas un système figé et intemporel, mais s’articulent sur les problèmes, selon une dynamique propre à leur avancement. La genèse des concepts est aussi important que les concepts eux-mêmes. Polémiques et nouveaux problèmes rythment l’avancée scientifique. Sources variées et nombreuses.

——-

Nicolas de Condorcet, *Esquisse d’un Tableau historique des progrès de l’esprit humain*, 1795
(avait un vaste projet d'histoire des sciences)

L'histoire des mathématiques au temps des Lumières

Jean-Étienne Montucla, *Histoire des mathématiques*, 1758
(rééd. augmentée par Jérôme de La Lande en 1799-1802)

va dans le même sens que d'Alembert :
rassembler les connaissances mathématiques dans une perspective historique
Ce n'est pas une collection de biographies ou d'anecdotes.
« Un des spectacles les plus dignes d'intéresser un œil philosophique est sans contredit
celui du développement de l'esprit humain & des différentes branches de ses connaissances »

Charles Bossut, « Discours préliminaire », in : *Encyclopédie méthodique – mathématiques*, Pancoucke, 1784
+ *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, 1802 (rééd. complétée en 1810)

« Je ne considère dans chaque partie que les idées mères et les principales conséquences qui en découlent. »

remarque : Montucla, Bossut, La Lande ont été les élèves du même professeur lyonnais

Les savants et l'histoire des sciences dans l'enseignement

Charles Hermite,
lettre à Angelo Genocchi
du 31 octobre 1884

Quelque chose de la marche historique doit subsister dans l'enseignement ; certaines conceptions qui ont servi de transition pour parvenir à d'autres plus profondes sont d'une intelligence plus facile et doivent, je le crois, être conservées, comme offrant une succession plus naturelle dans les idées, pour conduire par un chemin plus aisé, quoique plus long, aux résultats acquis en dernier lieu. […] Je pense que des notions incomplètes, mais immédiatement claires et parfaitement intelligibles valent mieux pour les commençants que l'affreuse scolastique chère aux modernes.

Les savants et l'histoire des sciences dans l'enseignement

Henri Poincaré, *Science et méthode*, 1908

La logique [ne peut pas être] le seul guide du pédagogue. Nous [sommes] obligés de revenir en arrière. Sans doute il est dur pour un maître d'enseigner ce qui ne le satisfait pas entièrement, mais la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement ; on doit d'abord se préoccuper de ce qu'est l'esprit de l'élève et de ce qu'on veut qu'il devienne. […] L'éducateur doit faire repasser l'enfant par où ont passé ses pères, plus rapidement, mais sans brûler d'étape. À ce compte, l'histoire de la science doit être notre premier guide.

Les savants et l'histoire des sciences dans l'enseignement

Paul Langevin, « La valeur éducative de l'histoire des sciences », *Revue de synthèse* 6, 1933

L'enseignement scientifique perd à être uniquement dogmatique, à négliger le point de vue historique. En premier lieu, il perd de l'intérêt. L'enseignement dogmatique est froid, statique, et aboutit à cette impression absolument fausse que la science est une chose morte et définitive. […] Or pour contribuer à la culture générale et tirer de l'enseignement des sciences tout ce qu'il peut donner pour la formation de l'esprit, rien ne saurait remplacer l'histoire des efforts passés, rendue vivante par le contact avec la vie des grands savants et la lente évolution des idées.

A. Amiot,
Éléments de géométrie,
1855

les circonférences données, a donc lieu quels que soient le nombre et la grandeur de leurs côtés; par conséquent elle existe aussi pour les limites de ces périmètres, c'est-à-dire que le rapport des circonférences R et r est le même que celui de leurs rayons.

COROLLAIRE I. — *Le rapport d'une circonférence à son diamètre est constant.*

Car, les circonférences étant proportionnelles à leurs rayons ou à leurs diamètres, le rapport d'une circonférence quelconque R à son diamètre 2 R égale celui de toute autre circonférence r à son diamètre $2\,r$.

Ce rapport constant, que l'on désigne ordinairement par la lettre grecque π, est égal à 3,14159265358979...; un géomètre français, *Lambert*, a prouvé que ce nombre est irrationnel, mais sa démonstration ne peut être donnée dans ces leçons de géométrie élémentaire. *Archimède* a trouvé, pour la première fois, deux limites de π qui sont $3\,\frac{10}{70}$ et $3\,\frac{10}{71}$; on se sert généralement de la première qui surpasse π de moins d'un demi-centième. *Pierre Métius* a donné, pour valeur approchée du même rapport, le nombre $\frac{355}{113}$ qui n'en diffère pas d'un cent-millième.

« … toutes les relations possibles entre lignes (...) sont essentiellement réductibles au théorème de Pythagore sur le triangle rectangle et à celui de Thalès sur la proportionnalité des côtés entre deux triangles équiangles, proposition qui, d'ailleurs, comprend logiquement l'autre. »

Auguste Comte, *Traité élémentaire de géométrie analytique*, 1843, p. 37

« Le théorème de Thalès sur la proportionnalité des côtés homologues des triangles équiangles, le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse sont, en géométrie, deux propositions fondamentales qui interviennent sans cesse dans les démonstrations. »

Eugène Rouché et Charles de Comberousse, *Traité de géométrie élémentaire conforme aux programmes officiels*, 1866, p. 229

Un échec : l'épreuve de « méthode et histoire des sciences » à l'agrégation de mathématiques (1869-1878)

(d'après Nicole Hulin)

durée : 7 heures

1869	Exposé historique de la découverte des logarithmes et de la construction des tables. Examen des méthodes employées pour en démontrer les propriétés.
1871	Exposé historique et critique des diverses méthodes qui ont été employées pour déterminer le rapport de la circonférence au diamètre.
1872	Aperçu historique et critique sur l'introduction et sur le rôle des quantités imaginaires en analyse et en géométrie.
1873	Des divers systèmes de coordonnées d'un point en géométrie plane ; leur origine, et leur rôle.
1874	Théorie générale des foyers.
1875	Théorie élémentaire des déterminants : principales applications.
1876	Théorie élémentaire des fractions continues.
1877	Exposer la marche à suivre pour trouver l'équation d'un lieu géométrique, en géométrie plane. Choisir des exemples propres à faire comprendre la méthode et à mettre en évidence les particularités les plus remarquables que l'on peut rencontrer dans cette recherche.
1878	Exposer la marche à suivre pour discuter une courbe dont on connaît l'équation en coordonnées polaires. Donner des exemples. (*Nota*. On regardera comme connues les formules relatives à la détermination des tangentes, des points d'inflexion et des asymptotes.)

1872, rapport au ministre : « Mr Mollier [président du jury] a déclaré qu'il était fort embarrassé pour cette [...] composition et il a proposé d'indiquer six mois à l'avance le sujet dont les candidats devraient étudier le développement historique. Mr Briot [professeur à l'ÉNS] s'y est opposé en faisant remarquer que ces études historiques seraient une perte de temps pour les élèves, et il a demandé que cette composition fût supprimée. »

Les savants et l'histoire des sciences dans l'enseignement

Idée générale : l'histoire des mathématiques permet de contrer le dogmatisme des mathématiques scolaires et l'excès de rigueur. Bien qu'appartenant au passé, l'histoire rend la science vivante et humaine, tandis que dogmatisme et rigueur lui donnent le froid et la rigidité d'un cadavre (*rigor mortis*).

Un point de vue opposé du XX^{e} siècle : les mathématiques modernes

André Lichnerowicz, Introduction à *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques*, CIEM, 1966

Il convient, semble-t-il, d'éviter soigneusement un enseignement mathématique de type historique, composé de couches hétérogènes juxtaposées, d'époques différentes. (…) Il nous faut fondre tout cela au feu de l'esprit contemporain. (…) L'histoire des sciences, celle des mathématiques en particulier, sont des disciplines précieuses pour chaque homme, mais elles ne sauraient fournir, par elles-mêmes, une base pour l'éducation mathématique. C'est à l'état d'esprit des mathématiques contemporaines que nous devons faire participer nos enfants pour leur épargner de difficiles et inutiles déconditionnements.

réaction aux excès des maths modernes :

création de la commission inter-IREM d'épistémologie et histoire des mathématiques (mai 1975) à l'initiative de J.-L. Ovaert et Ch. Houzel

premier colloque : Tailleville, mai 1977

Bénéfices escomptés de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques

1. bénéfices pour l'élève

Choc du dépaysement, expérience de l'émancipation (du déplaisir à l'émotion existentielle forte)
Plus de flexibilité cognitive (tâches non routinières, mobilisation de savoirs en l'absence de requête)
Prise de conscience de l'ancrage social des mathématiques
Prise de conscience de l'existence des mathématiques dans la plupart des cultures
Prise de conscience du caractère normal et fécond de l'erreur, du débat et de la controverse.
Prise de conscience de ce que les mathématiques ne sont pas que des symboles et des formules
Élévation du niveau de culture générale

Bénéfices escomptés de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques

2. bénéfices pour l'enseignant

Un nouveau regard sur les obstacles épistémologiques qui se présentent aux élèves : des conceptions spontanées inexactes qui leur donnaient des réponses dans certains contextes familiers, mais les ont par la suite mis en situation d'échec en dehors de ces contextes. Ils prennent parfois la forme d'obstacles didactiques (un apprentissage antérieur fait obstacle à un nouvel apprentissage).

Hypothèse : ces obstacles, inévitables et inhérents à la notion étudiée, sont présents dans l'histoire. Les élèves repassent par les étapes du passé. Le travail herméneutique sur les textes anciens est similaire à celui sur les productions et actions d'élèves.

Bénéfices escomptés de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques

2. bénéfices pour l'enseignant (suite)

L'histoire comme réservoir inépuisable de problèmes originaux

L'histoire comme possibilité de varier les approches didactiques

L'histoire comme possibilité de toucher d'autres élèves

Ouverture d'une multitude de possibilités interdisciplinaires (histoire des arts, langues,…)

Un renouveau d'activité intellectuelle pour ne pas « tourner en rond »

Seize raisons pour lesquelles un enseignant de mathématiques peut hésiter ou renoncer à utiliser l'histoire des mathématiques en classe

Man-Keung Siu
Université de Hong-Kong
(trad. de l'anglais par P. A.)

1. Je n'ai pas assez de temps en classe !
2. Ce n'est pas des mathématiques !
3. Comment poser une question d'histoire des maths dans une interrogation ?
4. Ça ne peut pas améliorer la note des élèves !
5. Les élèves n'aiment pas ça !
6. Les élèves voient ça comme de l'histoire et ils détestent les cours d'histoire !
7. Les élèves trouvent ça aussi ennuyeux que les mathématiques elles-mêmes !
8. Les élèves n'ont pas assez de culture générale pour apprécier ça !
9. Le progrès en mathématiques consiste à transformer les problèmes difficiles en routines : pourquoi alors s'embêter à regarder en arrière ?
10. Il n'y a pas assez de ressources sur ce sujet.
11. Il n'y a pas assez de formateurs sur ce sujet.
12. Je ne suis pas un professionnel de l'histoire des maths. Comment être sûr que ce que j'expose est exact ?
13. Ce qui s'est vraiment passé est parfois assez tortueux. Raconter les choses telles qu'elles se sont passées peut créer de la confusion plutôt qu'éclaircir.
14. Est-ce que ça sert vraiment à quelque chose de lire des textes originaux, ce qui est une tâche très difficile ?
15. L'histoire des maths est susceptible d'engendrer du chauvinisme culturel et un nationalisme étroit.
16. Est-ce prouvé expérimentalement que les élèves apprennent mieux quand on utilise l'histoire des maths en classe ?

Comment introduire une perspective historique ?

Identifier un point du programme déjà vu, mais qu'on souhaite éclaircir par un pas de côté historique.
Choisir une source pour son potentiel didactique et non pour sa valeur historique : privilégier les « mathématiques des hommes » aux « hommes des mathématiques ».
Travail d'adaptation sur les textes : coupures, modernisation de l'orthographe (ou non !)
Il n'y a pas que les textes : documents « sans paroles », instruments d'arpentage ou de calcul, sites patrimoniaux : géométrie et architecture, cadrans solaires, bibliothèques, musées…

Quelques exemples de lecture

Lecture-puzzle : reconstitution d’un texte préalablement mis en désordre (Euclide par exemple) afin d’en retrouver le tissu argumentatif

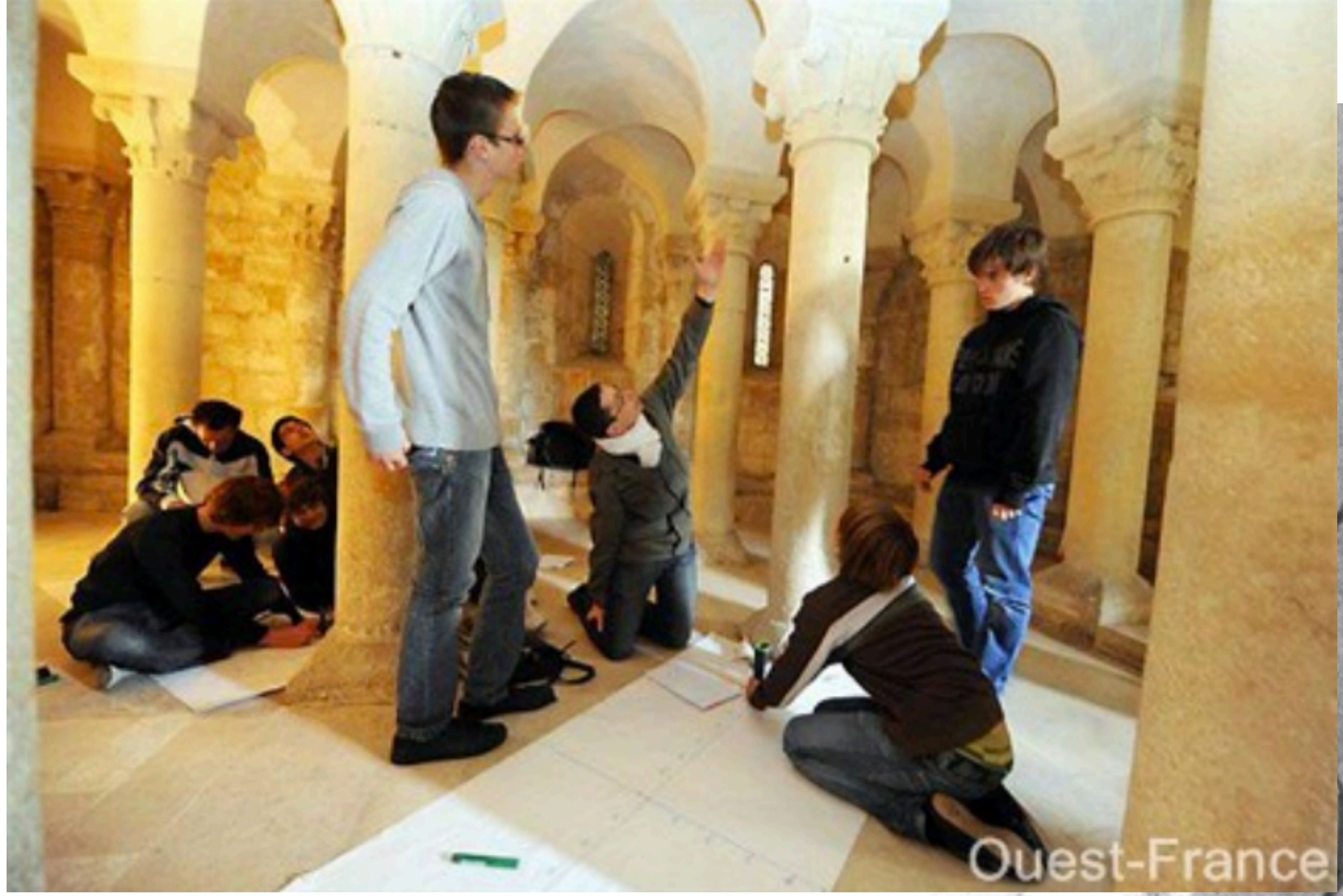
Lecture critique : l’auteur s’est trompé !
Éviter la condescendance, mais mettre en évidence les erreurs du texte et les expliquer

Lecture-confrontation : faire dialoguer deux textes
(deux méthodes pour un problème, par exemple arithmétique et algébrique, ou géométrique et algébrique)

Lecture-traduction : produire un second texte dans un langage jugé plus accessible, même s’il est anachronique (équations)

Textes sans paroles (preuves sans mots, tablettes mésopotamiennes) : remettre des mots !

Instruments de calcul anciens, algorithmes inhabituels (multiplication par jalousie) :
production de photos ou vidéos explicatives



Lecture-dans la pierre :
tester la validité d'un modèle

Lecture à haute voix : le sens se cherche dans la bonne diction

Jouer des dialogues : Platon, Galilée, Recorde, Leibniz...

Peut-on comparer les infinis ?

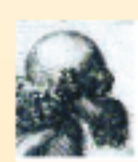
Extrait des *Dialogues au sujet de deux sciences nouvelles* de Galiléo Galiléi

Je suppose que vous savez très bien distinguer les nombres carrés des non carrés.

Je sais parfaitement qu'un nombre carré est celui qui naît de la multiplication d'un nombre par lui-même : ainsi quatre, neuf, etc., sont des nombres carrés, étant engendrés l'un par le nombre deux, l'autre par le nombre trois, multipliés par eux-mêmes.

Très bien. Et vous savez encore que si les produits s'appellent carrés, les facteurs des produits, c'est-à-dire les nombres qui se multiplient, sont appelés côtés ou racines ; quant aux nombres qui ne résultent pas de la multiplication d'un nombre par lui-même, ils ne sont aucunement des carrés. Donc, si je dis que tous les nombres, carrés et non carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j'énonce une proposition très véritable. Sommes-nous d'accord ?

Il est impossible de ne pas l'être.



Si maintenant je demande combien il y a de nombres carrés, on pourra répondre en toute vérité qu'ils sont aussi nombreux que leurs

Lecture-dessin : produire un dessin ou une animation vidéo à partir d'un texte