UN APERÇU HISTORIQUE SUR LE DÉVELOPPEMENT DES PROBABILITÉS ET DE LA STATISTIQUE

Stage PAF (19A0050166-41624)

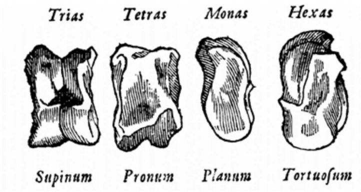
27 mars 2020

IREM de Caen Normandie

Cette présentation est inspirée de la frise historique sur la probabilité et la statistique de Jean-François PICHARD extraite de l'ouvrage collectif de la commission inter-IREM Statistique et Probabilités, *Autour de la modélisation en probabilités*, coordonné par Michel HENRY, collection « *Didactiques* », Besançon, Presses Universitaires de Franche-Comté, 2001.

Didier TROTOUX

La préhistoire



- Dés, astragales (Mésopotamie, Égypte)
- **Aristote** (IV^{e} s. av J.-C.) : notion d'« événement accidentel »
- Rentes viagères (**Ulpien**, Rome, III^{e} s.)

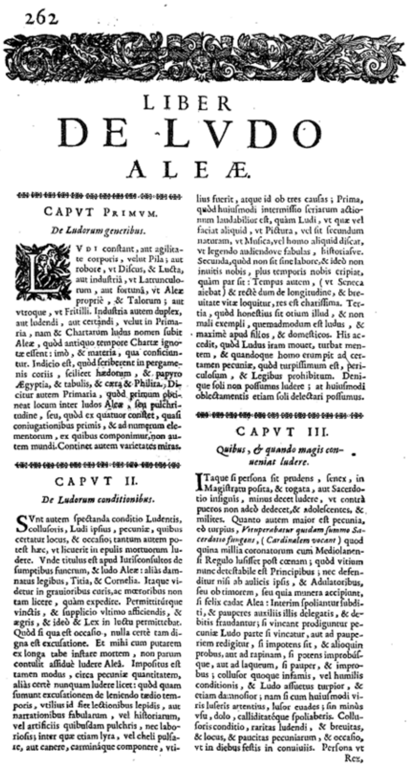
Les expériences aléatoires sont réalisées depuis longtemps en Mésopotamie, en Égypte, dans la Rome Antique.

Le déroulement imprévisible de la vie d'un homme, l'incertitude de la situation présente et à venir, ont d'abord été attribués aux divinités (le Destin, Dieu), à la Nature et à l'Homme.

Les philosophes de la Grèce Antique se sont efforcé de préciser ce concept vague et la notion d'événement accidentel a été dégagée très tôt en particulier par Aristote qui distinguait les événements contingents, qui doivent nécessairement se produire ou qui se produisent fréquemment et les événements fortuits ou accidentels qui peuvent ou non se produire. Le mot « probable » utilisé chez lui signifie « communément admis ».

Les premiers écrits

- **Girolamo Cardano** (1501-1576), *Liber de Ludo Aleae*, c. 1565, publication 1663.
- **Galileo Galilei** (1564-1642) *La Scorperte de i Dadi*, c. 1620, publication 1718.



262

LIBER
DE LVDO
ALEÆ.

CAPVT PRIMVM.

De Ludorum generibus.

LVDI conſtant, aut agilitate corporis, velut Pila; aut robore, vt Diſcus, & Lucta, aut induſtriâ, vt Latrunculorum, aut fortunâ, vt Aleæ propriè, & Talorum; aut vtroque, vt Fritilli. Induſtria autem duplex, aut ludendi, aut certandi, velut in Primaria, nam & Chartarum ludus nomen ſubit Aleæ, quòd antiquo tempore Chartæ ignotæ eſſent: imò, & materia, qua conficiuntur. Indicio eſt, quòd ſcriberent in pergamenis coriis, ſcilicet hædorum, & papyro Ægyptia, & tabulis, & cæra & Philira. Dicitur autem Primaria, quòd primum obtineat locum inter ludos Aleæ, ſeu pulchritudine, ſeu, quòd ex quatuor conſtet, quaſi coniugationibus primis, & ad numerum elementorum, ex quibus componimur, non autem mundi. Continet autem varietates miras.

CAPVT II.

De Ludorum conditionibus.

SVnt autem ſpectanda conditio Ludentis, colluſoris, Ludi ipſius, pecuniæ, quibus certatur locus, & occaſio; tantum autem poteſt hæc, vt licuerit in epulis mortuorum ludere. Vnde titulus eſt apud Iuriſconſultos de ſumptibus funerum, & ludo Aleæ: aliàs damnatus legibus, Titia, & Cornelia. Itaque videtur in grauioribus curis, ac mœroribus non tam licere, quàm expedire. Permittitúrque vinctis, & ſupplicio vltimo afficiendis, & ægris, & ideò & Lex in luctu permittebat. Quòd ſi qua eſt occaſio, nulla certè tam digna eſt excuſatione. Et mihi cum putarem ex longa tabe inſtare mortem, non parum contulit aſſiduè ludere Aleâ. Impoſitus eſt tamen modus, circa pecuniæ quantitatem, aliàs certè nunquam ludere licet: quòd quam ſumunt excuſationem de leniendo tædio temporis, vtilius id fiet lectionibus lepidis, aut narrationibus fabularum, vel hiſtoriarum, vel artificiis quibuſdam pulchris, nec laborioſis; inter quæ etiam lyra, vel cheli pulſare, aut canere, carmináque componere, vtilius fuerit, atque id ob tres cauſas; Prima, quòd huiuſmodi intermiſſio ſeriarum actionum laudabilior eſt, quàm Ludi, vt quæ vel faciat aliquid, vt Pictura, vel ſit ſecundum naturam, vt Muſica, vel homo aliquid diſcat, vt legendo audiendove fabulas, hiſtoriaſve. Secunda, quòd non ſit ſine labore, & ideò non inuitis nobis, plus temporis nobis eripiat, quàm par ſit: Tempus autem, (vt Seneca aiebat) & rectè dum de longitudine, & breuitate vitæ loquitur, res eſt chariſſima. Tertia, quòd honeſtius ſit otium illud, & non mali exempli, quemadmodum eſt ludus, & maximè apud filios, & domeſticos. His accedit, quòd Ludus iram mouet, turbat mentem, & quandoque homo erumpit ad certamen pecuniæ, quòd turpiſſimum eſt, periculoſum, & Legibus prohibitum. Denique ſoli non poſſumus ludere; at huiuſmodi oblectamentis etiam ſoli delectari poſſumus.

CAPVT III.

Quibus, & quando magis conueniat ludere.

ITaque ſi perſona ſit prudens, ſenex, in Magiſtratu poſita, & togata, aut Sacerdotio inſignis, minus decet ludere, vt contrà pueros non adeò dedecet, & adoleſcentes, & milites. Quanto autem maior eſt pecunia, eò turpius, *Vituperabatur quidam ſummo Sacerdotio fungens*, (*Cardinalem vocant*) quod quina millia coronatorum cum Mediolanenſi Regulo luſiſſet poſt cœnam; quòd vitium nunc deteſtabile eſt Principibus; nec defenditur niſi ab aulicis ipſis, & Adulatoribus, ſeu ob timorem, ſeu quia munera accipiunt, ſi felix cadat Alea: Interim ſpoliantur ſubditi, & pauperes auxiliis illis delegatis, & debitis fraudantur; ſi vincant prodiguntur pecuniæ Ludo parte ſi vincatur, aut ad pauperiem redigitur, ſi impotens ſit, & alioquin probus, aut ad rapinam, ſi potens improbúſque, aut ad laqueum, ſi pauper, & improbus; colluſor quoque infamis, vel humilis conditionis, & Ludo aſſuetus turpior, & etiam damnoſior; nam ſi cum huiuſmodi viris luſeris attentius, luſor euades; ſin minùs vſu, dolo, calliditatéque ſpoliaberis. Colluſoris conditio, raritas ludendi, & breuitas, & locus, & paucitas pecuniarum, & occaſio, vt in diebus feſtis in conuiuiis. Perſona vt Rex,

Cardan qui était médecin et mathématicien était aussi un joueur invétéré. Il rédigea vers 1565 le premier traité sur les jeux de hasard. Ce traité de quinze pages écrit en latin est composé de 32 courts chapitres et ne sera publié qu'un siècle plus tard en 1663 dans l'édition en dix volumes de ses œuvres. C'est un traité sur les aspects moraux, pratiques et théoriques des jeux de hasard et en particulier des jeux de dés (chapitres 9 à 15) et des jeux de cartes.

Galilée est aussi auteur d'un texte sur le nombre de points que l'on peut obtenir quand on lance trois dés, quelquefois nommé problème du Grand Duc de Toscane. Ce texte écrit vers le début du XVII[e] ne sera publié qu'un siècle plus tard en 1718.

La publication tardive de ces textes n'a pas pu influencer des développements de la théorie des probabilités mais il semble raisonnable de penser que les résultats contenus dans ces textes étaient connus de la communauté mathématique du début du XVII[e] siècle.

« Le début officiel » : 1654

- **Blaise Pascal** (1623-1662), Lettres à Fermat (29/7/1654, 24/8/1654, 27/10/1654),*Traité du Triangle arithmétique* (1654, éd. posthume 1665).
- **Pierre de Fermat** (1601-1665), Lettres à Pascal (29/8/1654, 25/9/1654)
- Le problème des partis

C'est Huygens qui attribue à Pascal et Fermat, l'invention du calcul des probabilités quand il écrit à Frans van Schooten : «Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a un certain temps que quelques-uns des plus Célèbres Mathématiciens de toute la France se sont occupés de ce genre de Calcul, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première Invention qui ne m'appartient pas » (OC T. 14, p. 57-58).

Citation de Poisson, 1837 : « Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été à l'origine du calcul des probabilités. Il avait pour objet de déterminer la proportion suivant laquelle l'enjeu doit être partagé entre les joueurs, lorsqu'ils conviennent de ne point achever la partie, et qu'il leur reste à prendre, pour la gagner, des nombres de points inégaux. Pascal en donna le premier la solution, mais pour le cas de deux joueurs seulement ; il fût ensuite résolu par Fermat, dans le cas général d'un nombre quelconque de joueurs. »

Problème des partis

Ce problème apparaît chez différents auteurs de livres d'arithmétique des XVe, XVIe et XVIIe siècles (Pacioli 1494, Cardano 1539, Tartaglia 1556, Forestani 1603) mais n'est pas résolu correctement.

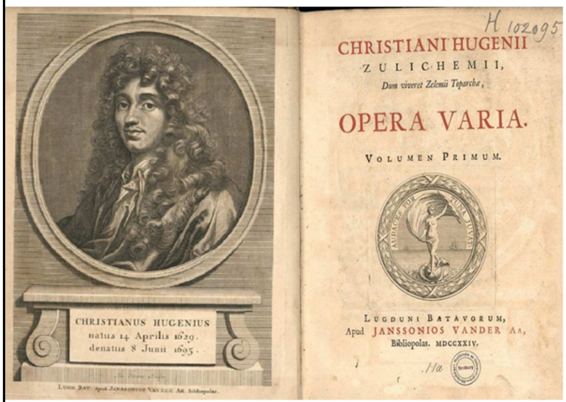
Des textes italiens extraits d'arithmétiques commerciales du XVe siècle proposent des solutions conforme au résultat de Pascal et Fermat. (N. Meusnier, Le problème des partis avant Pacioli in *Histoires de probabilités et de statistiques*, Ellipses, 2004)

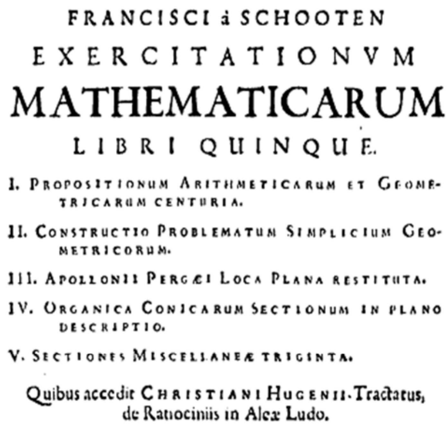
La solution de Pascal est « juridique » alors que celle de Fermat est « combinatoire ».

Lorsque Pascal présente en 1654 l'ensemble des ses travaux scientifique à l'Académie des Sciences, il s'arrête sur ce qu'il appelle « La géométrie du Hasard ». Il dit : « J'ai écrit un traité tout à fait nouveau, d'une matière absolument inexplorée jusqu'ici, savoir : la répartition du hasard dans les jeux qui lui sont soumis, ce qu'on appelle en français **faire les partis des jeux** ; la fortune incertaine y est si bien maîtrisée par l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on assigne toujours exactement ce qui s'accorde avec la justice. Et c'est là certes ce qu'il faut d'autant plus chercher par le raisonnement, qu'il est moins possible d'être renseigné par l'expérience. En effet, les résultats du sort ambigu – soit lorsqu'un événement peut exister ou ne pas exister; par exemple : sortir un as avec un dé en un coup – sont justement attribués à la contingence fortuite plutôt qu'à la nécessité naturelle. C'est pourquoi la raison a erré incertaine jusqu'à ce jour ; mais maintenant, demeurée rebelle à l'ignorance, elle n'a pu échapper à l'empire de la raison. Et grâce à la géométrie, nous l'avons réduite avec tant de sûreté à un art exact, qu'elle participe à sa certitude et déjà progresse audacieusement. Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparences contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : **La Géométrie du Hasard** ».

Le premier traité publié : 1657

- **Christiaan Huygens** (1629-1695), *De ratiociniis in Ludo aleae*, 1657




FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONUM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.

I. Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum Centuria.
II. Constructio Problematum Simplicium Geometricorum.
III. Apollonii Pergæi Loca Plana restituta.
IV. Organica Conicarum Sectionum in plano descriptio.
V. Sectiones Miscellaneæ triginta.

Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.

En 1654, date de la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat, Christiaan Huygens a 25 ans et vient de terminer ses études. Il les avait commencé avec son père, puis avec un mathématicien d'Amsterdam, Stampioen et les poursuit à Leyde, où il étudie le droit, et surtout à la nouvelle université de Breda, où il travaille sous la férule de Francis van Schooten. Huygens a publié déjà deux petits opuscules sur les quadratures, en particulier une réfutation de Grégoire de Saint Vincent, mais ce ne sont encore là que travaux d'étudiant. En 1655, il visite la France pour recevoir son doctorat de droit à l'université protestante d'Angers. A l'aller, comme au retour, il séjourne quelques mois à Paris et se lie avec les milieux mondains et savants. Il n'y rencontre ni Pascal – ce qu'il regrette –, ni Fermat – toujours à Toulouse –, ni Carcavi, mais se lie avec Mylon et rencontre Roberval. C'est sans doute à ce moment qu'il est informé du problème des partis et de l'existence des travaux des mathématiciens français, mais c'est sûrement une connaissance très partielle, puisque aucune publication n'a eu lieu. De retour en Hollande, il travaille sur le sujet, et, en 1656, écrit à van Schooten qu'il a un manuscrit sur les jeux de hasard.

Van Schooten projette alors la publication d'un recueil d'exercices, applications de l'analyse cartésienne à divers sujets. Il propose, donc, à Huygens d'y insérer son traité. Le recueil devant paraître en latin, puis en hollandais, il faut donc traduire le texte de Huygens en latin, ce qui est fait par van Schooten. Ceci ne semble pas aisé, car sur une matière aussi nouvelle, les mots et les usages ne sont pas encore fixés.

Plan de l'ouvrage de Huygens

- Règles du calcul, introduction et prop. I, II & III
- Le problème des partis, prop. IV à IX
- Les problèmes des dés, prop. X à XIV
- Les cinq exercices.

PROPOSITION III [1]).

Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Le traité débute par une courte introduction, fixant les "éléments" sur lesquels s'est fondé Huygens, puis comporte 14 propositions et les cinq exercices terminaux.

On peut y distinguer quatre parties :

* les règles du calcul qui regroupe l'introduction et les propositions I, II et III ;
* le problème des partis, propositions IV à IX ;
* les problèmes de dés, propositions X à XIV ;
* les cinq exercices.

Proposition III

Par exemple, soit une situation de jeu où le joueur a trois chances de gagner 13 et deux chances de gagner 8. Huygens a recours à des schémas légèrement différents de nos arbres employés en calcul des probabilités. Huygens démontre que la valeur de la chance du joueur est alors de 11. Selon lui, elle représente un prix de vente équitable de la participation au jeu : en vendant sa place dans le jeu à un autre joueur qui jouera à sa place, il est juste que le vendeur reçoive 11 de l'acheteur. La situation initiale de jeu peut alors être complètement remplacée par ce prix de vente.

C'est le concept d'espérance qui est abordé ici.

Arithmétique politique

- **John Graunt** (1620-1674), *Observations Made upon the Bills of Mortality,* 1662.
- **William Petty** (1623-1687), *Political Arithmetick* 1676 (publié en 1690).
- **Christiaan et Lodjewick Huygens**, correspondance 1669-1671 (publiée en 1920)
- **Jan De Witt** (1625-1672), rapports sur les rentes viagères 1671.
- **Edmund Halley** (1656-1742), *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Phil. Trans.* 1693

Mise en relation des statistiques (basées sur les registres de mortalité) avec la théorie naissante des probabilités.

Il s'agit de saisir tous les aspects de la vie sociale et économique à partir de recensements détaillés.

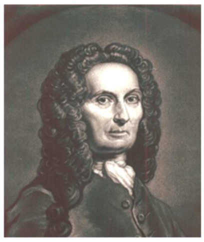
On a retenu pour ce stage, en particulier la table de mortalité de Graunt qui est plutôt un modèle qu'une table à proprement parler et sera l'objet de la correspondance entre les frères Huygens qui sont en désaccord sur la notion d'espérance de vie (durée de vie moyenne vs durée de vie probable).

La table de mortalité de Halley, réalisée à partir du recensement des naissances et des morts des habitants de la ville de Breslau sur une dizaine d'années permettant l'établissement de rentes viagères va avoir un très grand succès et être citée dans pratiquement tous les ouvrages des successeurs de Halley.

Il est intéressant de noter que c'est la médiane qui apparaît la première dans la littérature comme paramètre central de série.

1708 – 1718 : Trois grands traités

- **Jakob Bernoulli** (1654–1705), *Ars Conjectandi*, 1713.
- **Pierre Rémond de Montmort** (1678-1719), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 1708, 1713 (2e éd.).
- **Abraham de Moivre** (1667-1754), *De Mensura Sortis*, 1712 et *The Doctrine of Chances*, 1718, 1738 (2e éd.), 1756 (3e éd.).



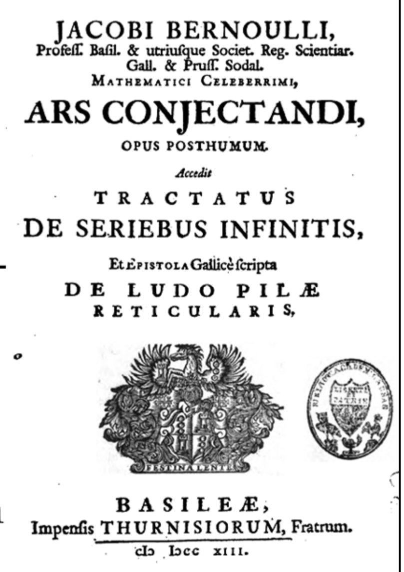
Dans la deuxième moitié du XVIIe siècle, peu de textes ont été publiés sur les probabilités depuis le traité de Huygens. Un véritable tournant va s'opérer au début du XVIIIe siècle avec la publication de trois ouvrages majeurs, l'*Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, de P.R. de Montmort en 1708, le mémoire *De Mensura Sortis* publié par A. de Moivre dans les *Philosophical Transactions* en 1712 et développé pour en faire le traité *The Doctrine of Chances* publié en 1718 et enfin l'*Ars Conjectandi* de J. Bernoulli publié en 1713.

Ces ouvrages traitent des mêmes problèmes (trouver les rapports des chances de gagner et les gains espérés dans les jeux de hasard sauf en ce qui concerne la quatrième partie de l'*Ars Conjectandi* qui aborde pour la première le théorème limite en probabilité, connu sous le nom de loi des grands nombres.

J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, 1713

- Ouvrage posthume publié par les soins de son neveu Nicolas.
- Quatre parties :

- $1^{ère}$ partie : reprise et analyse du traité de Huygens.
- $2^{ème}$ partie : doctrine des permutations et des combinaisons.
- $3^{ème}$ partie : emploi de la doctrine dans les sorts variés et les jeux de dés.
- 4ème partie : Usage et application de la doctrine aux affaires civiles, morales et économiques.


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
clɔ Iɔcc XIII.

La quatrième partie est restée inachevée mais expose une réflexion sur la probabilité et se termine par la démonstration du théorème de Bernoulli (connue aujourd'hui sous la dénomination de loi faible des grands nombres).

J. Bernoulli écrit : « La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout. »

Il explicite la démarche de base d'un calcul de probabilité :

« Il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres » ce que l'on peut faire pour « les jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, … de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité » et passe aux cas où cela n'est pas possible

« Ce qu'il n'est pas possible d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant de nombreux exemples semblables »

C'est le problème de la probabilité inverse qui ne sera résolue efficacement qu'à la fin du XVIII^{e} siècle par Bayes et Laplace.

Énoncé du théorème :

« J'appellerai **fertiles** les cas dans lesquels un événement peut se produire, et **stériles** les cas dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences **fertiles** celles pour lesquelles on constate qu'un des cas **fertiles** peut survenir, et stériles celles pour lesquelles on observe qu'un des cas **stériles** se produit. Soit donc le nombre de cas fertiles au nombre de cas stériles précisément ou approximativement r/s et qu'il soit en conséquence, au nombre de tous dans le rapport r/(r+s) ou r/t rapport qu'encadrent les limites (r-1)/t et (r+1)/t. Il faut montrer que l'on peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois qu'on le veut (soit c) que le nombre des observations tombe à l'intérieur de ces limites plutôt qu'en dehors, c'est-à-dire que le nombre des observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que (r+1)/t ni plus petit que (r-1)/t. »

Il utilise dans sa démonstration des méthodes combinatoires.

Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 1708

- **Traitement combinatoire** (développement binomial et multinomial) de divers problèmes concernant des jeux de cartes et jeux de dés, résolution des cinq problèmes posés par Huygens.
- L'édition de 1713 est réorganisée et enrichie de lettres entre Montmort, Jean Bernoulli et Nicolas Bernoulli


ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.
MDCCVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Jacques Bernoulli en 1685 deux problèmes relatifs au jeux de hasard à deux personnes et comme, cinq ans plus tard, il n'avait pas eu de réponse, il s'était contenté de publié les solutions dans le Journal de Leipzig. Leibniz avait publié une solution dont Pierre Rémond de Montmort trouvait qu'elle laissait à désirer, c'est pourquoi il s'attela à la recherche d'une solution du problème : « Trouver l'avantage du banquier au jeu du Pharaon ».

Il trouva la solution générale et une méthode qui permettait de résoudre des problèmes du même genre. Il s'apprêtait à publier ses résultats dans un journal scientifique de l'époque : *Journal des Scavans* ou *Journal de Leipzig* mais la mort de Jacques Bernoulli en 1705 modifia ses projets (J. Bernoulli avait annoncé la publication d'un ouvrage sur les combinaisons et leurs applications pour résoudre les problèmes de hasard *l'Ars Conjectandi*), c'est la raison pour laquelle il décida de publier son *Essay*.

- L'édition de 1708

Structure de l'ouvrage

- Préface
- Première Partie : Problèmes sur les jeux de Hazard (jeux de cartes), p. 1-108

  dont Sur les combinaisons, p. 79-100
- Deuxième Partie. Problèmes sur les jeux de Hazard (jeux de dés), p. 109-155.
- Troisième Partie : Où l'on donne la solution des cinq problèmes proposés par M. Huygens, p. 156-185.
- Quatrième Partie : Quatre problèmes à résoudre, p. 186-189.

Les solutions sont assez besogneuses (par exemple résolution d'un système de 23 équations à 23 inconnues pour la solution du cinquième problème de Huygens)

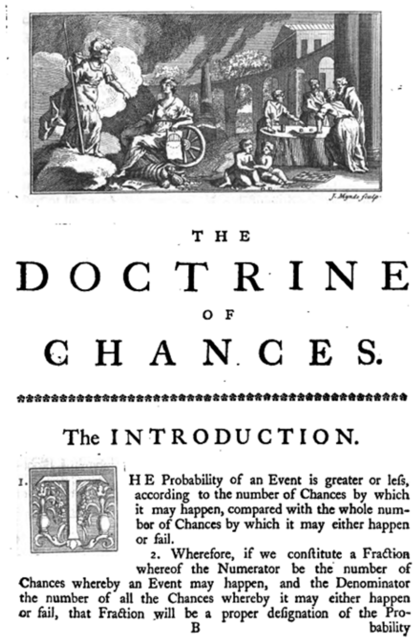
2. L'édition de 1713 (remaniée et enrichie suite aux échanges entre Pierre Rémond de Montmort et Jean et Nicola Bernoulli)

Réorganisation :

- La préface est identique et est suivie d'un avertissement au lecteur.
- Le chapitre sur les combinaisons, nommé, Traité des combinaisons, est enrichi et placé juste cet avertissement (p. 1-72).
- Une cinquième partie contenant les lettres échangées entre lui Jean Bernoulli et Nicolas Bernoulli depuis la publication de la première édition est ajoutée (p. 283-414).

De Moivre, *The Doctrine of Chances*

- **Traitement analytique** des problèmes à l'aide des séries, de développements du binôme et de la binomiale négative.
- Ce traité restera le grand traité de probabilités jusqu'à la parution de celui de Laplace, *Théorie analytique des probabilités* en 1812.



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES.

The INTRODUCTION.

1. THE Probability of an Event is greater or less, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

2. Wherefore, if we constitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper designation of the Probability

B

Le mémoire *De Mensura Sortis* de 1711 porte sur les jeux mais De Moivre en fait un traitement mathématique épuré en utilisant les nouveaux outils de l'analyse : développement en série, équations récurrentes, etc.

Il améliore les résultats dans les éditions successives du traité *Doctrine of Chances* (1718, 1738, 1756). En particulier il développe dans les *Miscellanea Analytica* (1730) les outils mathématiques lui permettant d'améliorer le résultat de Bernoulli, en donnant une approximation numérique des coefficients binomiaux équivalente à la formule de Stirling et prouve que le logarithme du rapport d'un terme situé à la distance d du terme médian est $-2dd/n$. Il arrive ainsi à une approximation de la courbe « normale ».

La dernière édition incorpore *Annuities upon Lives* traité sur les assurances

Démographie (XVIII^{e} s.)

- **John Arbuthnot** (1667-1735), *An Argument for Divine Providence, taken from The constant regularity observed in the Birth of both Sexes*, 1712.
- **Léonhard Euler** (1707-1783), *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*, 1760.
- **Antoine Deparcieux** (1703-1768), *Essai sur les probabilités de la durée de vie humaine*, 1746.

Arbuthnot soutient que le fait qu'il naisse plus de garçons que de filles est une preuve de la divine Providence. Cette question va soulever de vives polémiques entre Nicolas Bernoulli, s'Gravesande puis de Moivre.

Chez Deparcieux, les tables de mortalité sont utilisées afin de pouvoir calculer le montant des rentes viagères.

La théorie des erreurs

- **Thomas Simpson** (1710-1761), *On the Advantage of Taking the Mean of a Number of Observations*, 1756.
- **Daniel Bernoulli** (1700-1782), *Dijudicatio maxime probababilis plurium observationum discrepantium*, 1778.
- **Johann H. Lambert** (1728-1777), *Photometria …*, 1760.
- **Joseph Louis Lagrange** (1736-1836), *Mémoire sur l'utilité de prendre le milieu …*, 1776.
- **Adrien Marie Legendre** (1752-1833), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, 1805.
- **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827), *Mémoire sur le milieu …*, 1777, *Théorie Analytique des probabilités*, 1812.
- **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855), *Theoria Motus …*, 1809, *Theoria combinationis observationum erroribus minimis*, 1821.

La théorie des erreurs a été développée par les géomètres entre 1750 et 1820. Il s'agissait de répondre à la question suivante :

« Comment peut-on fonder une science naturelle universelle sachant que les observations et mesures de la nature par les savants sont toujours entachées d'erreurs ? »

Trois questions principales ont été abordées :

1. La combinaison des mesures d'une même grandeur en un « milieu »
2. La « loi » des erreurs : comment se répartissent les erreurs par rapport à cette valeur « milieu » ?
3. Le critère d'optimisation de l'ajustement

Des différentes approches envisagées, Laplace et Gauss feront une synthèse au début du XIX^{e} siècle s'appuie sur le tiercé « gagnant » associant la moyenne, la loi « normale » et la méthode des « moindres carrés ».

Les domaines d'application ont été principalement l'astronomie et la géodésie.

1. En <u>astronomie</u>, après Kepler et Newton, les observations devaient permettre une validation et une application de la théorie de l'attraction universelle. D'une part les mathématiques utilisées dans les calculs d'erreur, à savoir le calcul différentiel et le calcul des probabilités avaient bien progressées et d'autre part la précision des instruments de mesure avait été amélioré. Il y avait aussi d'autres enjeux comme, par exemple, le problème du point en mer (problème du calcul de la la longitude ce qui nécessitait d'avoir des horloges précises) qui était de première importance pour la puissance militaire et commerciale des nations).
2. Le problème de la détermination de la « figure de la terre » a été un cadre privilégié de l'émergence de la théorie des erreurs : il s'agissait de préciser la déformation de la Terre par rapport à la sphère pour trancher entre l'hypothèse « aplatie » (sphéroïde elliptique aplati aux pôles conforme à la théorie newtonienne) et l'hypothèse « allongée » (sphéroïde elliptique aplati à l'équateur). Sa solution dépendait à la fois des erreurs astronomiques et des erreurs de mesures géodésiques.

Thomas Simpson publie un article dans les *Philosophical Transactions* où il prouve qu'il est préférable d'utiliser la moyenne d'une série d'observation sous l'hypothèse d'une distribution triangulaire ou uniforme.

Lambert est le premier a représenter une courbe des erreurs « en cloche ».

Daniel Bernoulli propose trois modèles pour distribution des erreurs : semi-circulaire, semi-elliptique et parabolique.

Lagrange parle le premier de loi de « facilité » des erreurs. Il reprend le travail de Simpson en l'approfondissant de manière importante.

Legendre qui fait partie de la commission de mesure du quart de méridien terrestre pour mettre en place le système métrique publie en 1805 un « appendice sur la méthode des moindre carrés ».

Laplace et Gauss ont fait apparaître la loi « normale » dans deux contexte différents, Gauss comme loi des erreurs dans le cas d'erreurs indépendantes et Laplace dans le prolongement des travaux de de Moivre, comme loi limite d'un tirage aléatoire pas nécessairement symétrique ce qui contenait en germe ce qu'est devenu dans la suite le problème « central limite ».

Le problème de la probabilité inverse

- **Thomas Bayes** (1701-1761), *An essay towards solving a problem in Doctrine of Chances in Phil. Trans.*, 1763.

- **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827), *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements*, 1774.

Le problème de la probabilité inverse est l'inverse du problème posé et résolu par Bernoulli dans *l'Ars Conjectandi*.

Il est ainsi formulé par Bayes : « Étant donné le nombre de fois qu'un événement inconnu s'est réalisé ou a fait défaut, on demande la chance que la probabilité de sa réalisation lors d'une seule épreuve soit comprise entre deux degrés que l'on puisse assigner ».

L'*Essay* … est publié dans les *Philosophical Transactions* deux ans après la mort de Bayes par son ami Price qui publie en 1765 un complément précisant la démonstration de la seconde règle. Malgré les efforts de Price, ces publications n'ont suscité aucune attention à l'époque. Il faut attendre 1781 pour voir les recherches de Bayes citées par Condorcet dans une texte de l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris. Laplace ne semble pas les avoir connues lorsqu'il publie son mémoire de 1774.

Bayes : P(A & B) = P(A) x P(B si A) ou P(B si A) = P(A & B)/P(A)

D'où l'on peut tirer la formule de la probabilité des causes (expression due à Laplace) mais l'énoncé de Bayes est différent.

Énoncé de Laplace : « Si un événement peut être produit par un nombre *n* de causes différentes, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'événement sont entre elles comme les probabilités de l'événement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles est égale à la probabilité de l'événement prise par cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'événement prises de chacune de ces causes »

Si B est l'événement causé par les causes $A_1, \ldots, A_n$: $P(A_i|B) = P(B|A_i) / \Sigma_i P(B|A_i)$

Probabilités des témoignages

- **Marie Jean Antoine Condorcet** (1743-1794), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, 1785.
- **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827), *Théorie Analytique des probabilités*, 1812
- **Siméon Denis Poisson** (1781-1840), *Recherches sur la probabilité des jugements …*, 1837.

Application des probabilités aux sciences morales

Enseignement et philosophie des probabilités

- **Marie Jean Antoine Condorcet** (1743-1794), *Elemens du calcul des probabilités …*, 1805.
- **Sylvestre Lacroix** (1765-1840), *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, 1816 puis 1822.
- **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827), *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814.
- **Siméon Denis Poisson** (1781-1840), *Recherches sur la probabilité des jugements …*, 1837.
- **Antoine Augustin Cournot** (1801-1877), *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, 1843.
- **Joseph Bertrand** (1822-1900), *Calcul des probabilités*, 1889.

Les deux premiers ouvrages sont des manuel destinés à présenter le calcul des probabilités à un public large sans avoir besoin de connaissances mathématiques élevées.

Ainsi Lacroix écrit : « Après quelques ouvrages superficiels ou incomplets, on ne trouve plus que des mémoires académiques ou des traités fondés sur les parties les plus élevées de l'analyse ; en sorte que, même avec des connaissances assez étendues dans les mathématiques élémentaires, il faut encore se borner à croire sur parole, la vérité des points fondamentaux de la théorie des probabilités, qui peut cependant s'établir de manière très solide par le seul recours des élémens d'Algèbre. C'est pour résoudre cette lacune, que j'ai rédigé le Traité que j'offre en ce moment au public. »

Laplace publie en 1812 son monumental *Traité analytique des Probabilités*.

Il est l'auteur de la fameuse formule « la probabilité … est le rapport du nombre de cas favorables à celui de tous cas possibles » (Premier principe) en ajoutant aussitôt « mais cela suppose les divers cas également possibles … » (Deuxième principe) qui sera reprise dans les traités suivants.

C'est un ouvrage de recherche destiné à un public averti. Peu de ses contemporains seront à même de le comprendre (S. D. Poisson, I. J. Bienaymé en font partie).

La définition ci-dessus fait partie de *l'Essai philosophique sur les probabilités* qu'il publie en 1814 et qu'il met en préface de la 2e édition du *Traité analytique des Probabilités* et des suivantes.

En fin de l'essai il écrit : « On voit, par cet Essai, que la théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul ; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte. »

Mathématicien, philosophe et économiste, Augustin Cournot est l'auteur d'une théorie des probabilités où il fait une part importante au hasard qui est chez lui la rencontre accidentelle et imprévisible entre plusieurs séries de faits ou de causes indépendantes.

Statistique économique et sociale

- **William Playfair** (1759-1823), *The commercial and political atlas*, 1786, *Statistical Breviary*, 1801.
- **André-Michel Guerry** (1802-1866), *Essai sur la statistique morale de la France*, 1833.
- **Adolphe Quételet** (1796-1874), *Sur l'homme et le développement des ses facultés, ou Essai de physique sociale*, 1835.

Le statisticien belge Quételet a joué un rôle essentiel dans le développement et la diffusion des « mesures sociales ». Il a contribué à donner à la statistique l'importance qu'elle a aujourd'hui en entendant ce mot « statistique » dans les deux sens usuels modernes de ce terme :

1. L'organisation publique de la collecte et de la mise en forme des données quantitatives sur le monde social
2. L'interprétation et l'analyse de données portant sur des grands nombres.

Il a le mérite d'avoir rapproché plusieurs traditions scientifiques auparavant distinctes, celles des mesures pratiquées dans les sciences de la nature du XVIIIe siècle (astronomie et physique) et celle des enquêtes et relevés administratifs « sociaux » issus de l'arithmétique politique anglaise ou de la statistique allemande (en amont collecte par une organisation systématique de mesures régulières à grande échelle et en aval interprétation par un recours à des techniques mathématiques probabilistes ou non, telles calcul de moyennes ou application de la loi des grands nombres qui permettent d'établir et d'interpréter des régularités macro-sociales).

Lois limites

- **Siméon Denis Poisson** (1781-1840), *Recherches sur la probabilité des jugements …*, 1837.
- **Irénée Jules Bienaymé** (1796-1878), *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace …*, 1853.
- **Pafnouti Tchebychev** (1821-1894), *Des valeurs moyennes*, 1867.
- **Andréï Markov** (1856-1922), *La loi des grands nombres et le principe des moindres carrés*, 1899.

Les démonstrations des lois limites dues à Bernoulli, de Moivre, Laplace et Gauss portant le nom de loi des grands nombres ou théorème central limite sont reprises et améliorés successivement par IJ Bienaymé, P. Tchebychev (qui prouvent séparément l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev) qui est le fondateur de l'école de probabilités de Saint-Pétersbourg au sein de laquelle s'illustreront Markov et Lyapounov.

A noter que l'expression de « théorème central limite » est due à Polya dans un article de 1920. Il serait sans doute plus correct de parler de théorème asymptotique fondamental.

Biométrie en Angleterre

- **Francis Galton** (1822-1911), *Regression towards mediocrity in hereditary stature*, 1886, *Co-relations and their measurements*, 1888.
- **Karl Pearson** (1857-1936), On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Philosophical Magazine*, 1900.
- **Ronald Fisher** (1890-1962), *The design of experiments*, 1935.

Darwin influencé par les idées de Malthus (1798) sur l'évolution des populations humaines, à partir de l'énorme masse de données accumulées par des siècles d'observations, dégage une direction d'évolution soumise à des variations fortuites secondaires. Son influence sera considérable sur le développement des statistiques théoriques. Une école probabiliste anglaise s'édifie dans le dernier quart du XIXe siècle, cherchant à justifier les théories de Darwin et fonde la statistique moderne.

Ce sera l'œuvre de Galton, Edgeworth, Pearson, Student. Partant de l'étude statistique des données biologiques (la biométrie), ils retrouvent une grande partie des résultats de Gauss en théorie des erreurs et dégagent les notions de corrélation et de régression. Ils fondent la théorie des tests, la statistique inférentielle (tests paramétriques et non paramétriques, plans d'expérience, analyse de variance, …).

Axiomatisation

- **Émile Borel** (1871-1957), *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1896.
- **Henri Lebesgue** (1875-1941), *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1904.
- **Maurice Fréchet** (1878-1973),
- **Paul Lévy** (1886-1971), *Calcul des probabilités*, 1925.
- **Andréï Kolmogorov** (1903-1987), *Grundbegriffe der Warscheinlichkeitstreichnung*, 1933.

A la charnière des XIXe et XXe siècles, Borel en étudiant les séries entières et Lebesgue en étudiant les séries de Fourier, reconnaissent les notions d'ensembles de points de mesure nulle, de tribu engendrée, de mesures des ensembles boréliens, de σ-additivité et construisent une théorie de l'intégration très générale.

Paul Lévy à Paris et Khintchine à Moscou fondent la théorie moderne des variables aléatoires.

Enfin en 1933, Kolmogorov propose une axiomatique du calcul des probabilités.