Didier Trotoux
IREM, Université de Caen Normandie
Association Sciences en Seine et Patrimoine, Rouen

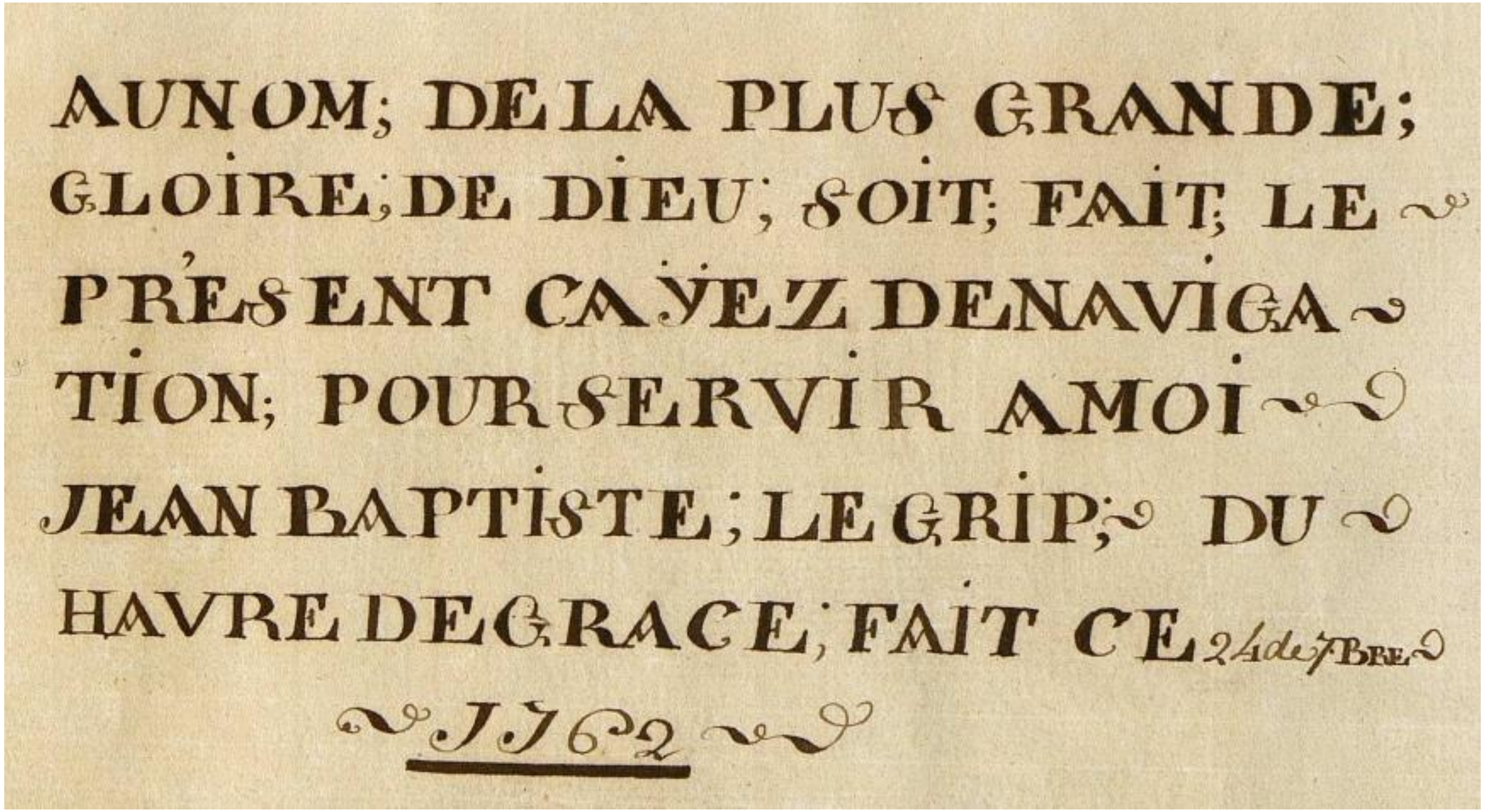
Mathématiques et science de la navigation aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles : l'échelle anglaise ou échelle de Gunter

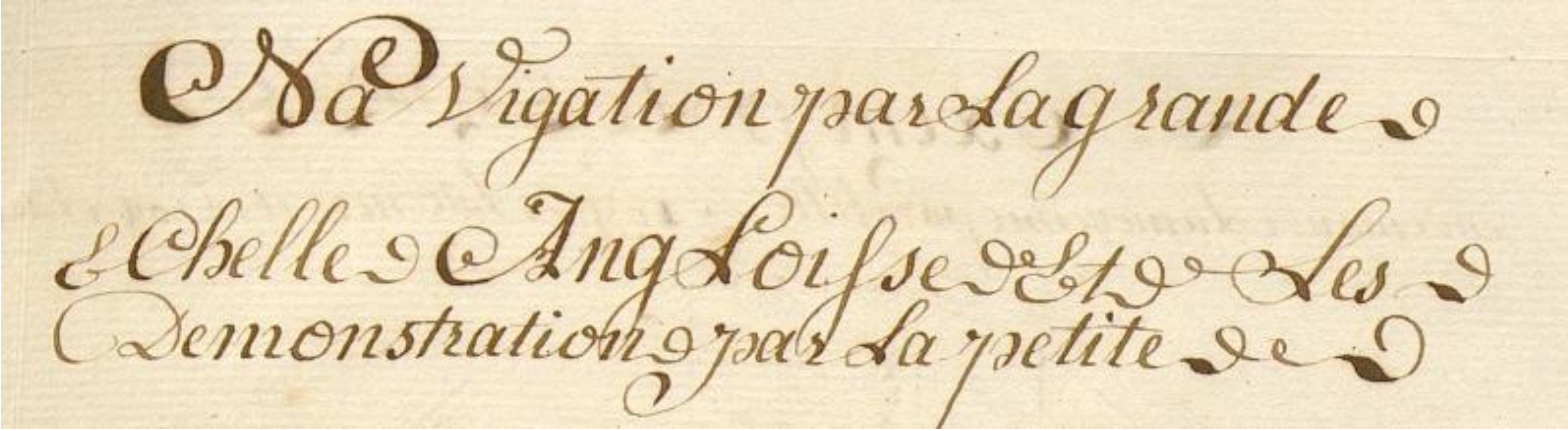
XXVI^{e} colloque de la CIIEHM : les mathématiques et les sciences
Toulouse, 20 mai 2022

Plan

1. Le Cayez de navigation de Jean-Baptiste Legrip
2. L’échelle anglaise ou échelle de Gunter
3. Utilisation de la règle de Gunter
4. Fabrication d’une règle de Gunter

1. Le *Cayez de navigation* de J.-B. Legrip (1762)


AUNOM; DELA PLUS GRANDE;
GLOIRE; DE DIEU; SOIT; FAIT; LE
PRÉSENT CAYEZ DENAVIGA-
TION; POUR SERVIR AMOI
JEAN BAPTISTE; LEGRIP; DU
HAVRE DEGRACE; FAIT CE 24 de 7BRE
1762


Navigation par la grande
Echelle Angloise Et les
Demonstrations par la petite

La partie du manuscrit où il est question d'échelle anglaise occupe environ un cinquième de l'ouvrage.

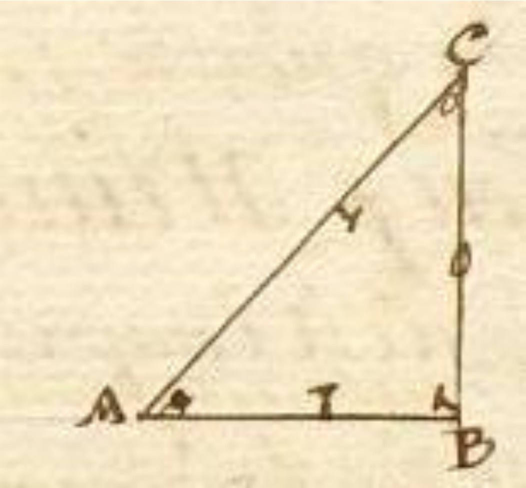
La première partie (p. 191-231) traite de navigation et aborde la détermination de la moyenne parallèle entre deux latitudes données, la réduction de lieues mineures en lieues majeures, la résolution des problèmes généraux de navigation et le calcul des corrections à y apporter (trigonométrie plane).

Exemple de problème de navigation

Exemple d 3e

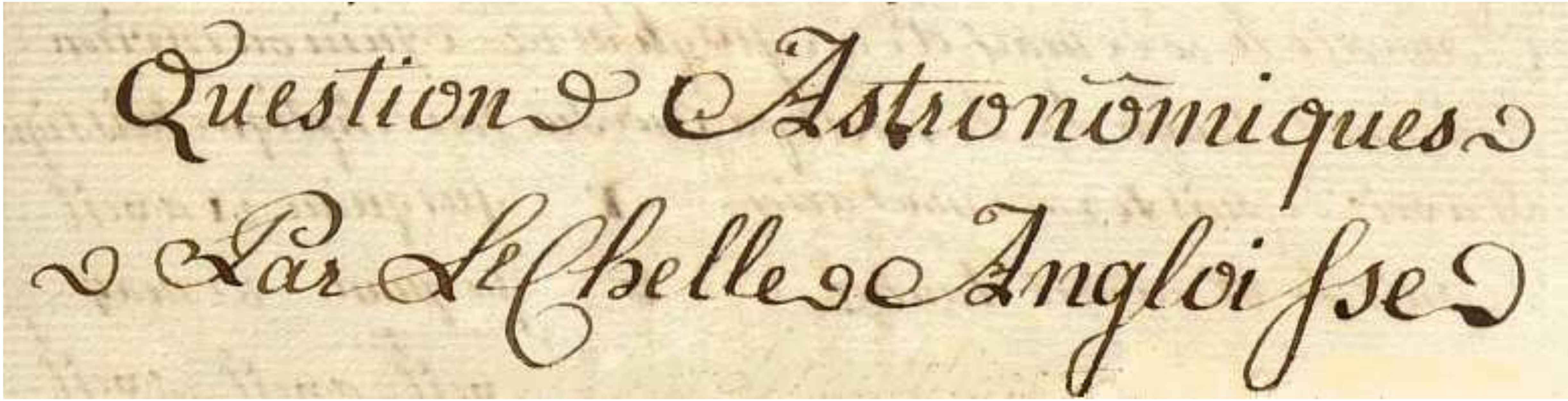
Lon Supposse partye de 48°30' de latt nord et de 07°10' de longt occidentalle Et ont a Singlé entre le nord et l'Est, 32 lieux de chemin et par la hauteur lon Se trouve par 49°36' de latt aussy nord lon demande l'air de vent et la diff en longt et par quel longt ont est arivé

Air ou *aire de vent*, ſ. m. c'eſt une des 32 diviſions fictices de l'horizon, auxquelles ſe rapportent les 32 diviſions de la roſe. Il ſuit de cette définition, que l'intervalle de chaque *aire de vent* eſt de 11° 15'.



Reponce

Lair de vent avallée La Routte le NE, 14°30' plus Est, et lon Se trouve arivé par les 35°24' de longt occidentalle aux meridien de paris


Question Astronõmiques
Par Le Chelle Angloiſe

La deuxième partie (p. 231-266) traite des questions astronomiques, à savoir, la détermination de la déclinaison du Soleil, son ascension droite, la différence ascensionnelle, l'heure de lever et coucher du Soleil, l'azimut et l'heure d'observation (trigonométrie sphérique) .

2. L’échelle anglaise ou échelle / règle de Gunter

Enpremier Lieux il faut Scavoir Et Connoitre Les Cordez de Lechelle
qui Est Composée de Cinq Corde donc La premiere ala main droitte
Est La Corde des huit Rumb de vent ou est marquez SR qui veut
dire Sinus des Rumbs de vent
La deuxieme Corde Est La Corde des nombre marquez NUM ou
La Corde des Lieux La troisieme Corde Est La Corde de Sinus
ou de 90 d marquez SIN La quatrieme Corde de La tangentes
ou est marquez 45 d marquez TAN ou La prendre aussy pour 90 d
La Cinquieme Corde Est La Corde des meridionnaux qui sert a trouve
La moyenne paralelle marquez MER methode de trouve La moyenne

Il n’y a pas de schéma de l’échelle anglaise dans le *Cayez de navigation* de J.-B. Legrip. Les seuls éléments descriptifs sont ceux que l’on vient de voir (p. 191 du manuscrit) :

En premier lieu il faut savoir les cordes(*) de l’échelle qui est composée de cinq cordes dont la première à la main droite est la corde des huit rumbs de vent où est marqué S_R qui veut dire sinus des rumbs de vent. La deuxième corde est la corde des nombres marquée NUM ou la corde des lieues. La troisième corde est la corde de sinus ou de 90° marquée SIN. La quatrième corde de la tangente où est marqué 45°, marquée TAN ou la prendre aussi pour 90°. La cinquième corde est la corde des méridiennaux qui sert à trouver la moyenne parallèle marquée MER.

(*) Le terme « corde » est utilisé dans le sens d’échelle ou graduation (*scale* en anglais).

Les quatre première échelles sont des échelles logarithmiques (logarithmes des sinus des rumbs de vent, logarithmes des nombres, logarithmes des sinus et logarithmes des tangentes).

La cinquième échelle est construite à partir d’une table des parties méridionales, qui mesuraient les parties de méridien en fonction de leur degré de latitude.

Dans le *Nouveau traité de navigation* de Pierre Bouguer publié en 1753, nous trouvons un chapitre (Livre V, Section II, Chap. III) intitulé :

410 *NOUVEAU TRAITE' DE NAVIGATION.*

CHAPITRE III.

Méthode de réſoudre les Problêmes de Navigation par l'Echelle des Logarithmes, nommée vulgairement Echelle Angloiſe.

Après avoir expliqué comment on construit ces échelles à partir des tables de logarithmes, Bouguer indique comment on les utilise :

Uſage de l'Echelle des Logarithmes pour réſoudre les Problêmes de Navigation.

214. Lorſqu'on ſe ſert des logarithmes pour faire une Regle de Trois ou proportion, on met préciſément la même différence entre les logarithmes des deux derniers termes, qu'entre les logarithmes des deux premiers. Il faut faire la même choſe lorſqu'on travaille ſur l'échelle des logarithmes, & l'opération eſt extrêmement aiſée. On ouvre un Compas commun depuis le premier terme juſqu'au ſecond, on le porte enſuite ſur le troiſiéme terme, & l'autre pointe du Compas marque le quatriéme terme.

Pourquoi cette dénomination d'échelle anglaise ?

Trois mathématiciens anglais ont joué un rôle majeur dans l'histoire de cette échelle anglaise :

- **John Napier** (1550-1617), inventeur du concept de logarithmes et auteur des premières tables dans sa *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* en 1614.
- **Henry Briggs** (1556-1630), calculateur et auteur de la première table logarithmique à base décimale *Logarithmorum chilias prima* en 1617 reprise et complétée dans son *Arithmetica Logarithmica* en 1624.
- **Edmund Gunter** (1581-1626), auteur en 1620 du *Canon triangulorum…* table contenant ses propres logarithmes décimaux des sinus et des tangentes nouvellement calculés et les logarithmes des nombres de Briggs et inventeur de la méthode des échelles logarithmiques dans *Description and use of the sector* en 1624.

C'est le nom de ce dernier qui passera à la postérité grâce à cette invention des échelles et puis des règles dites de Gunter ou tout simplement Gunters.

Edmund Gunter (1581-1626)

Gunter fut nommé professeur d’astronomie au collège de Gresham en 1619. C’était un savant actif dans de nombreux domaines en particulier l’astronomie et la navigation. Il s’intéressait aux applications des mathématiques et était, de plus, un fervent partisan du système décimal.

La règle des sinus : $\frac{X}{\sin(x)} = \frac{Y}{\sin(y)}$, qui était l’une des opérations les plus utiles en navigation pour déterminer les côtés et les angles d’un triangle ne pouvait pas être utilisée directement avec les tables de Napier, ni avec les tables de Briggs. En 1620, Gunter publia la première table combinée, le *Canon Triangulorum…* et désormais, la règle des sinus pouvait enfin être appliquée en utilisant les logarithmes des tables d’un seul livre.

Gunter a poursuivi ensuite ses recherches estimant que certains problèmes de navigation nécessitaient une solution plus simple et plus rapide que ne le permettait le calcul par tables. Cela l’a conduit à concevoir un nouveau type d’échelle où les nombres étaient représentés par des distances d’échelle logarithmique et où un compas à pointes sèches était utilisé pour ajouter et soustraire ces distances dans le domaine logarithmique.

Edmund Gunter (1581-1626)

The Lines for working of proportions may be known by their unequal diviſions, and the numbers at the end of each Line.

1. The Line of numbers noted with the Letter N, divided unequally into 1000 parts, and numbred with 1, 2, 3, 4, unto 10.

2. The Line of Artificial Tangents is noted with the letter T, divided unequally into 45 degrees, and numbred both ways, for the Tangent and the Complement.

3. The Line of Artificial Sines noted with the letter S, divided unequally into 90 degrees, and numbred with 1, 2, 3, 4, unto 90.

4. The Line of Verſed Sines for more eaſie finding the hour and Azimuth, noted with V, divided unequally into about 164 *gr.* 50 *m.* numbred backward with 10, 20, 30, unto 164.

Edmund Gunter (1581-1626)

Gunter a proposé trois échelles logarithmiques pour faciliter les calculs de proportions. D'abord l'échelle logarithmique des nombres notée N, mais aussi l'échelle logarithmique des sinus, notée S et celle des tangentes, notée T, afin que la règle des sinus puisse être appliquée. Il a également proposé l'ajout d'une quatrième échelle logarithmique des sinus verses pour faciliter certains calculs de trigonométrie sphérique.

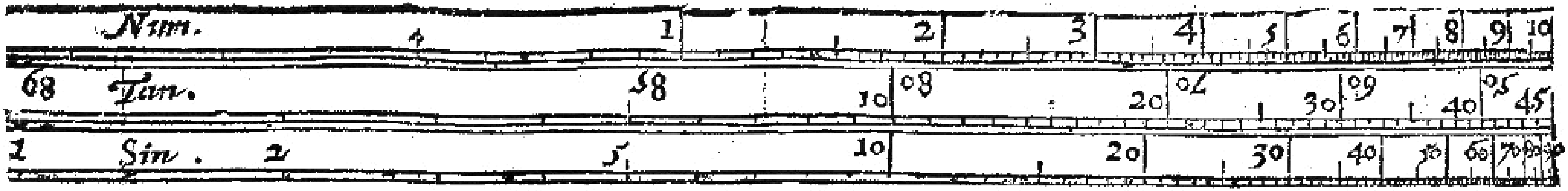
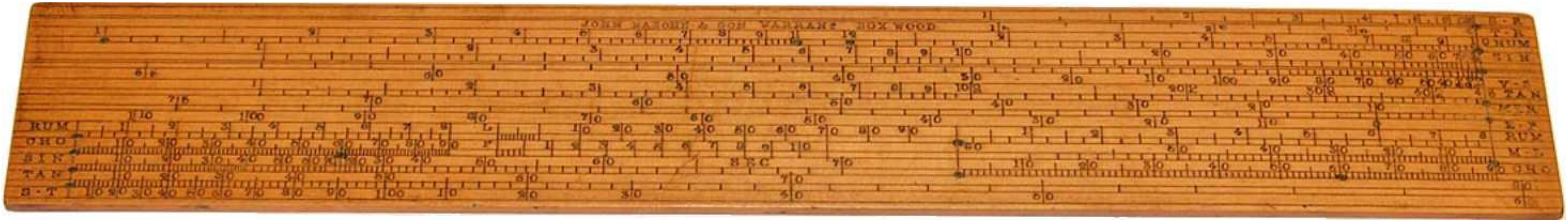


Image originale des échelles de Gunter
Description and use of the sector, the cross-staff and other instruments, London, 1624

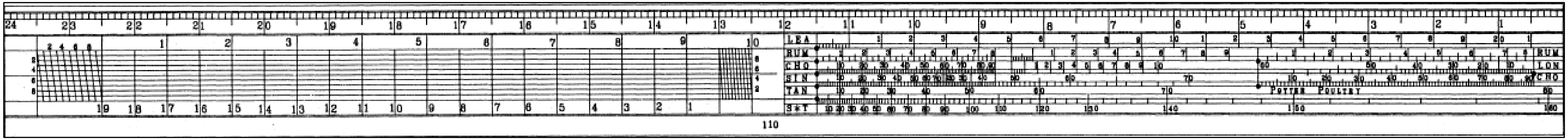
Les règles de Gunter

Les écrits de Gunter furent réédités à de nombreuses reprises après sa mort et le fait qu'il ne soit pas fait mention de l'utilisation des trois échelles sur une règle droite, dans la 5^{e} et dernière édition de ses œuvres complètes de 1673, peut laisser à penser que la règle de Gunter n'est apparue qu'à la fin du $XVII^{e}$ s. voire au début du $XVIII^{e}$ siècle.

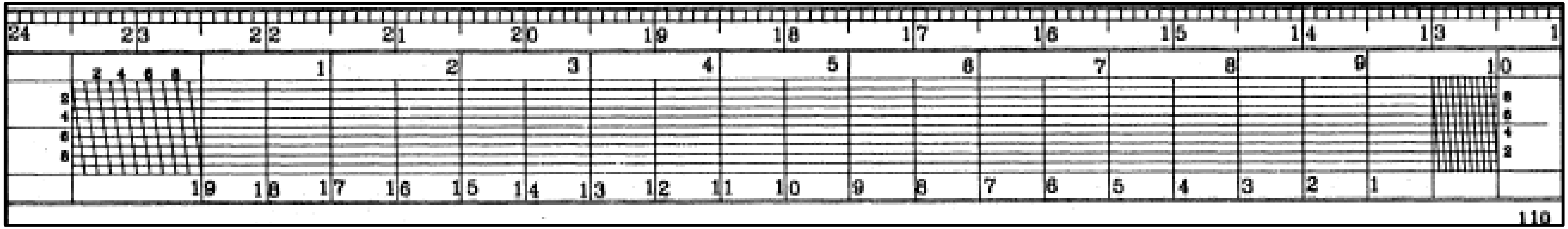
La règle de Gunter standard est le plus souvent en bois, mais parfois en laiton et des exemplaires d'un pied de long en ivoire ont été recensés. La majorité des règles de Gunter connues ne portent ni nom de fabricant ni date de fabrication. Bien sûr, on rencontre des variations, comme les échelles avec des abréviations de noms différentes, des échelles étendues mais aussi des tailles différentes. La plupart des règles de Gunter mesurent deux pieds de long sur 2 pouces ou 1 pouce et demi de large (soit environ 610 x 50 mm). Il existe des modèles d'un pied, avec les mêmes échelles que la règle de Gunter standard réduites dans cette plus petite taille.



La règle de Gunter de deux pieds : recto



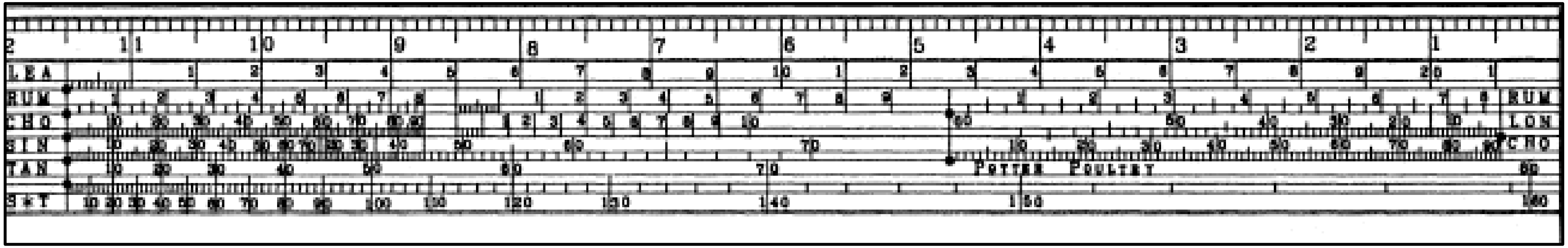
Échelles linéaires (partie gauche de la face recto)



Nom abrégé de l’échelle	Nom complet	Signification
	Échelle diagonale sur la partie gauche	Pour prendre les longueurs exactes avec le compas en centièmes de pouces et demi-pouces.
	Pouces	Échelle de mesure de 24 pouces le long du bord supérieur de la règle.
L E A	Lieues	Échelle linéaire pour construire des tracés de distances nautiques. 1 lieue (anglaise) = 3 milles marins.
L et **P**	Parties égales pour lire les fonctions des autres échelles	P (rayon 2 pouces) pour lire RUM, CHO, SIN, TAN, S*T et MER ; L (rayon 3 pouces) pour le plus long RUM & CHO à l’extrême droite.

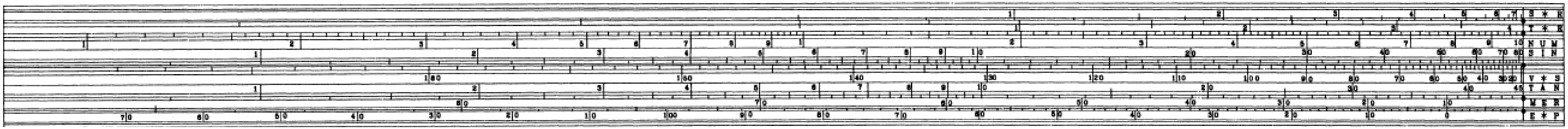
La règle de Gunter de deux pieds : recto

Échelles trigonométriques (partie droite de la face recto)

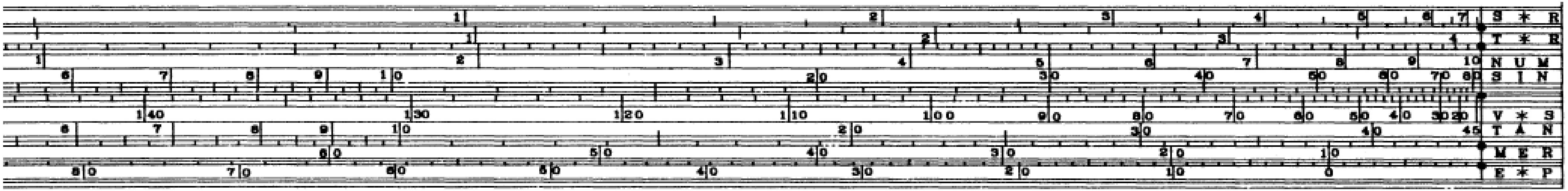


Nom abrégé de l'échelle	Nom complet	Signification	Formule
R U M	Cordes des rumbs	La corde vaut 2 fois le sinus du demi-angle pour les points cardinaux de la boussole (32 en 360°)	$2\ sin(5{,}625\ X)$
C H O	Cordes des degrés	La corde vaut 2 fois le sinus du demi-angle pour les degrés	$2\ sin(X/2)$
S I N	Sinus des degrés	Sinus de l'angle	$sin\ (X)$
S E C	Sécante des degrés	Sécante de l'angle	$sec(X)$
T A N	Tangente des degrés	Tangente de l'angle	$tan(X)$
S * T	Semi-Tangente des degrés	Tangente du demi-angle	$tan(X/2)$
L O N ou **M * L**	Milles de longitude	Longueur d'un degré à la latitude X°	60 $cos(X)$ à combiner avec l'échelle CHO située dessous

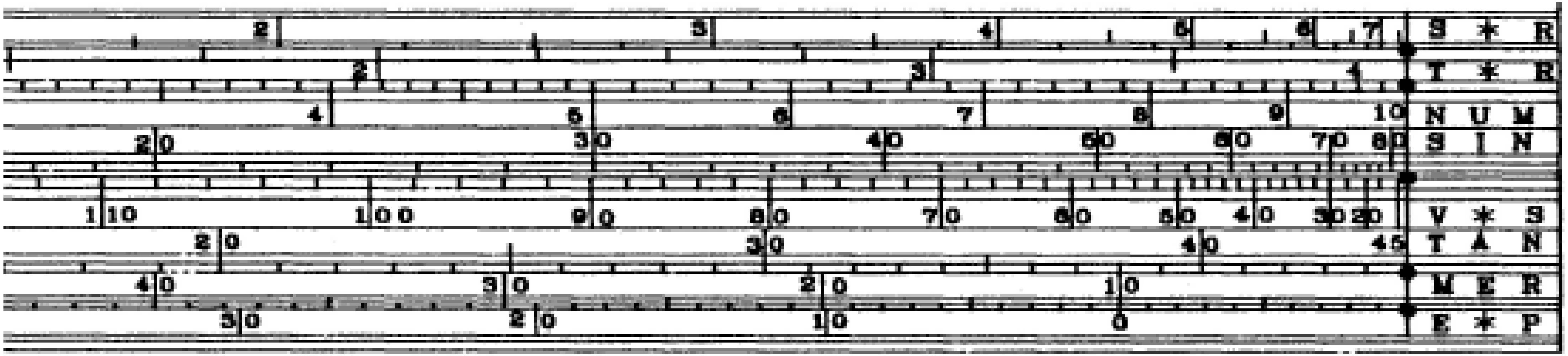
La règle de Gunter de deux pieds : verso



Échelles artificielles ou logarithmiques



DRAWN BY BRUCE E. BABCOCK, 1993

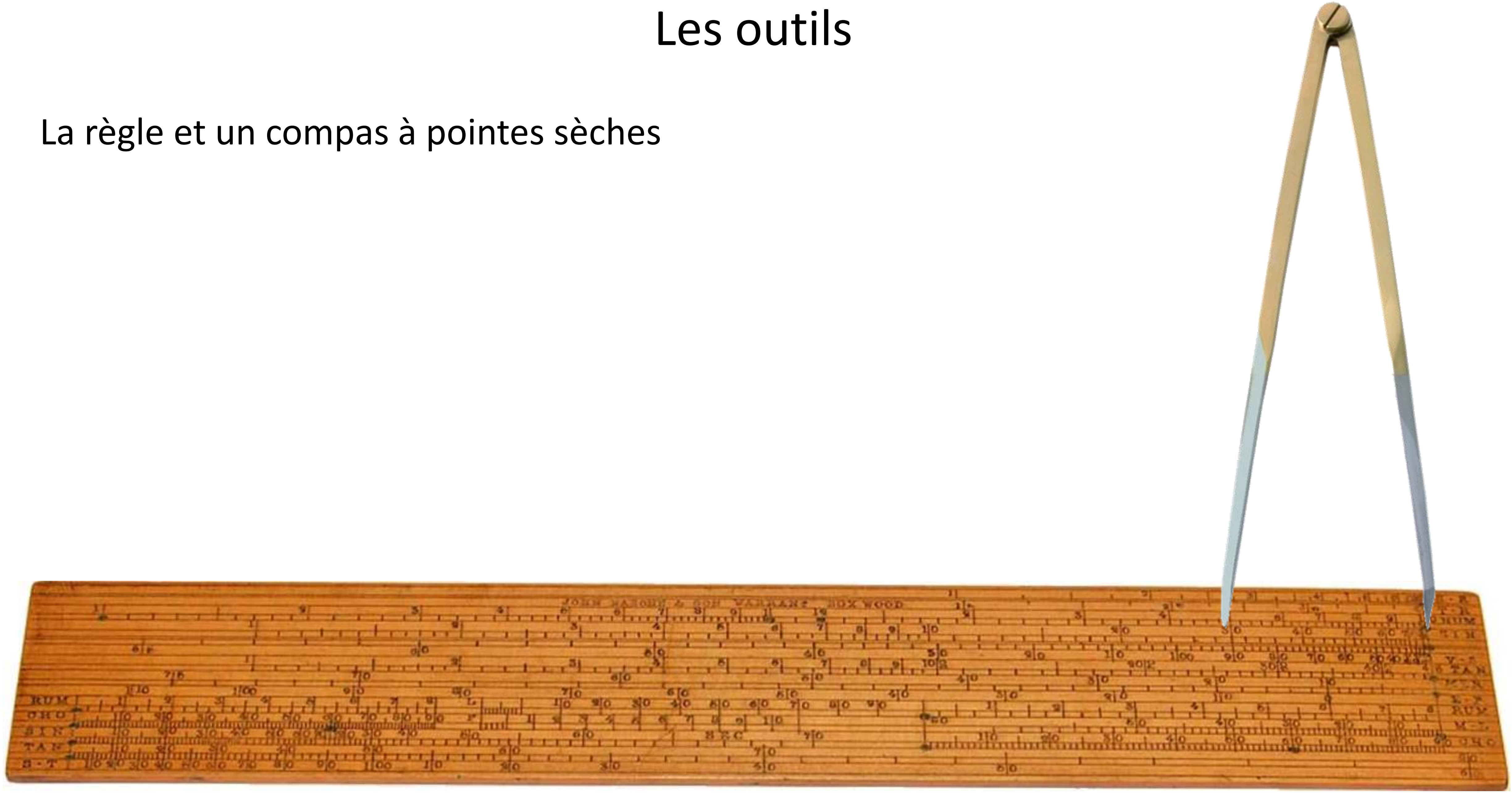


Nom abrégé de l'échelle	Nom complet	Signification	Formule
S * R	(Artificielle) Sinus des rumbs	*log sin* des points cardinaux de la boussole	*log sin*(11,25 *X*)
T * R	(Artificielle) Tangentes des rumbs	*log tan* des points cardinaux de la boussole	*log tan*(11,25 *X*)
N U M	(Artificielle) Ligne des nombres	Échelle logarithmique à deux cycles	*log* (*X*)
S I N	(Artificielle) Sinus des degrés	*log sin* des degrés (de 0° à 90°)	*log sin*(*X*)
V * S	(Artificielle) Sinus verses des degrés	*log versin* des degrés (de 0° à 180°)	*log* (1 – *sin*²(*X*/2))
T A N	(Artificielle) Tangentes des degrés	*log tan* des degrés (de 0° à 45°)	*log tan*(*X*)
M E R	Ligne Méridionale	Accroissement du degré de latitude sur un méridien de la carte de Mercator	∫ *sec*(*X*) d*X* à combiner avec E * P
E * P	Parties Egales	Échelle linéaire	*X*

3. Utilisation de la règle de Gunter

Les outils

La règle et un compas à pointes sèches



Le principe

Soit la proportion $A\!:\!B :: C\!:\!D$ où A, B et C sont connus. Comment obtenir D ?
Avec un compas à pointes sèches mesurant la distance entre des points sur l'échelle, il est plus commode de la voir comme $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, ou mieux comme :

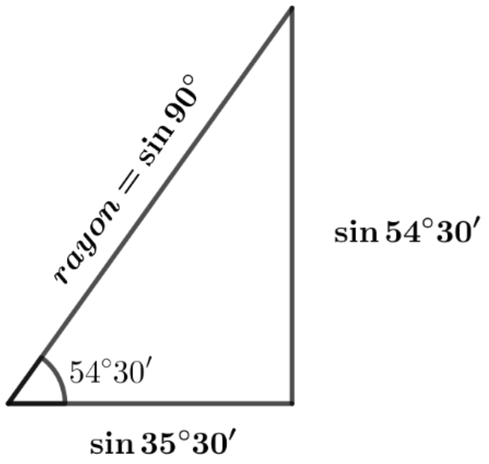
$$\log(A) - \log(B) = \log(C) - \log(D).$$

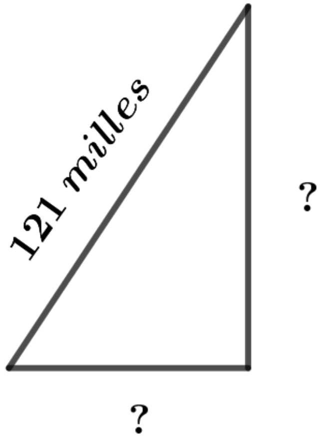
Le compas à pointes sèches nous donne la distance entre $\log(A)$ et $\log(B)$ et si nous déplaçons le compas de sorte qu'un des ses pieds soit placé en $\log(C)$, l'autre pied sera en $\log(D)$. En outre, l'échelle est graduée avec D en ce point, sa position englobant le logarithme.
Nous lisons D directement, sans avoir besoin de trouver le logarithme inverse.

Dans le cas de la règle des sinus, $\frac{X}{\sin(x)} = \frac{Y}{\sin(y)}$, cela donne :

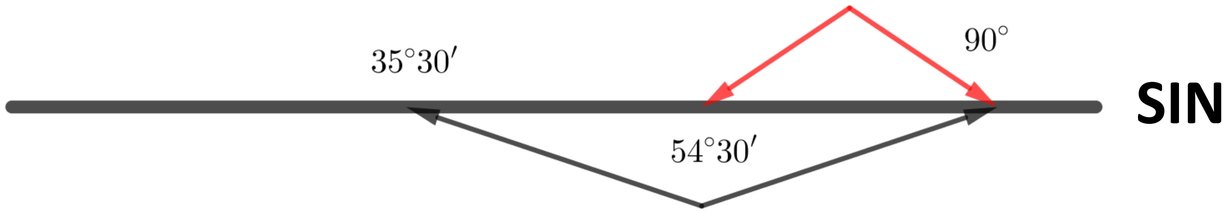
$$\log(\sin(x)) - \log(\sin(y)) = \log(X) - \log(Y).$$

Exemple d'utilisation pour déterminer des distances

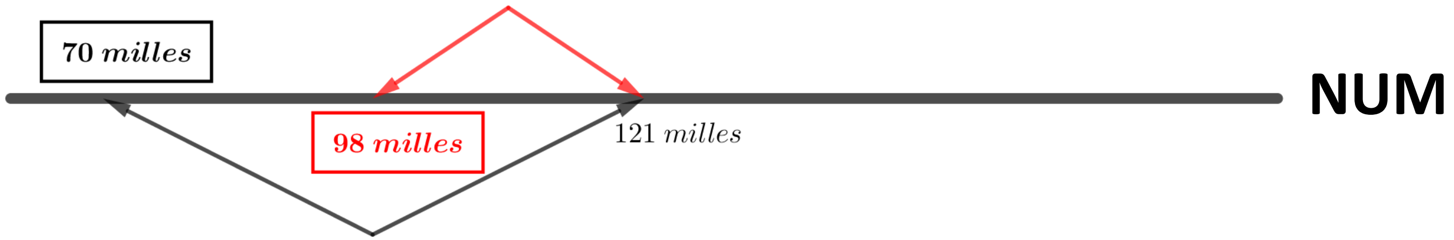


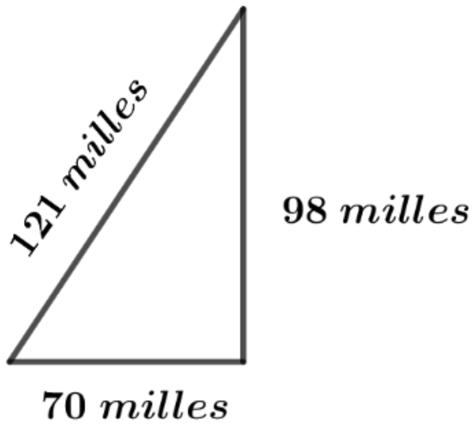


La ligne des **sinus** : une échelle des logarithmes des sinus.

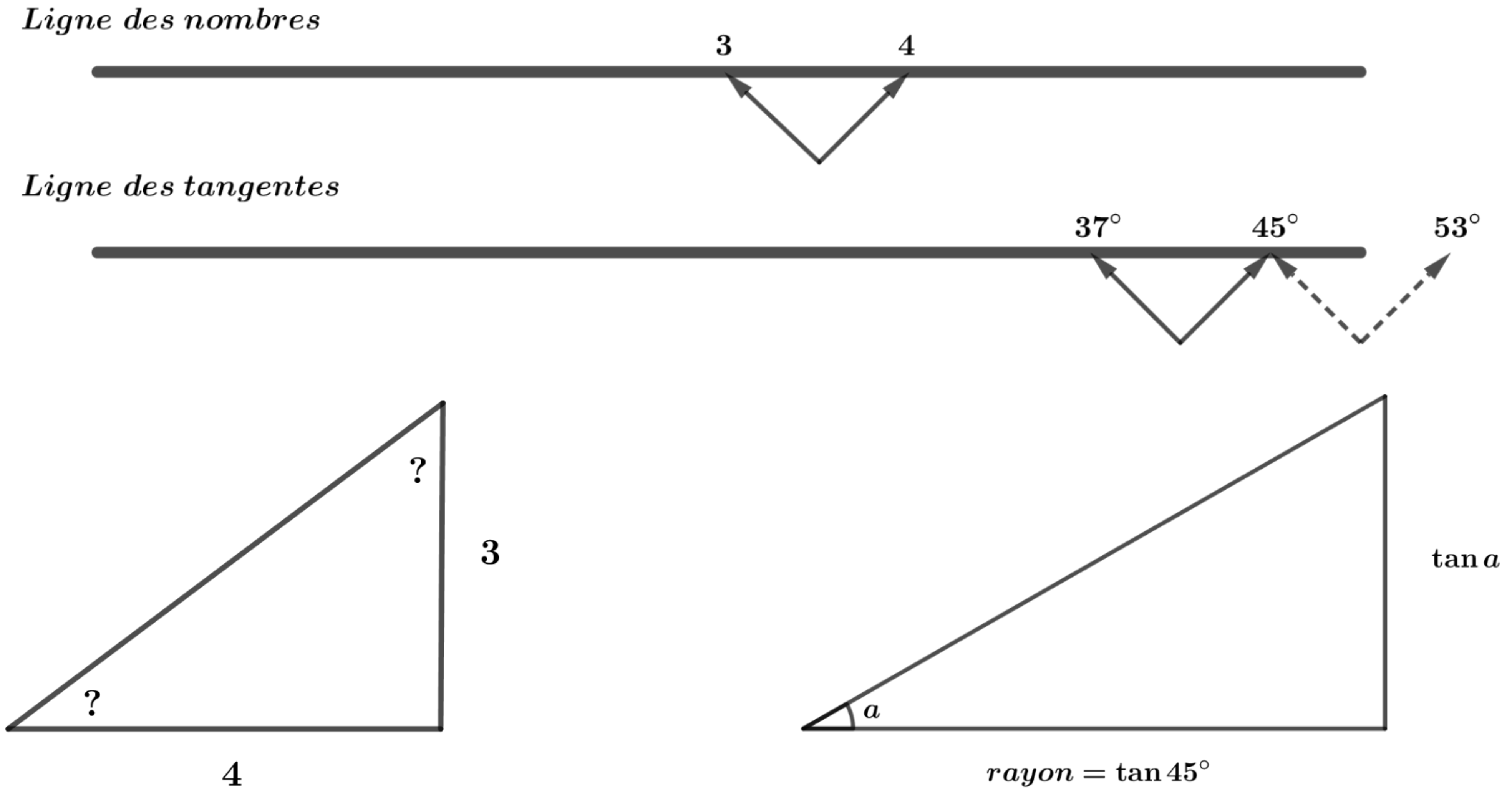


La ligne des **nombres** : une échelle des logarithmes.



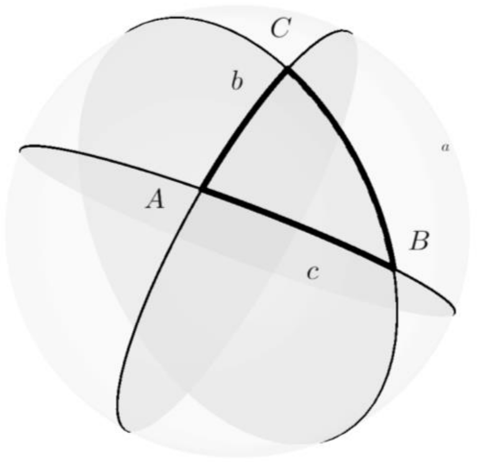


Exemple d’utilisation pour déterminer des angles



La loi des sinus de la trigonométrie sphérique (qui s'applique aussi bien au triangles rectangles qu'aux triangles obliques) s'écrit : $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ où A et B sont les angles aux sommets du triangle et a et b, les segments des grands cercles qui leur sont opposés (c'est-à-dire les côtés du triangle). Les angles et les côtés sont mesurés en degrés.

Exprimés sous forme de proportions, cela peut être vu au choix comme :
$\sin(A) : \sin(a) :: \sin(B) : \sin(b)$ ou $\sin(A) : \sin(B) :: \sin(a) : \sin(b)$.

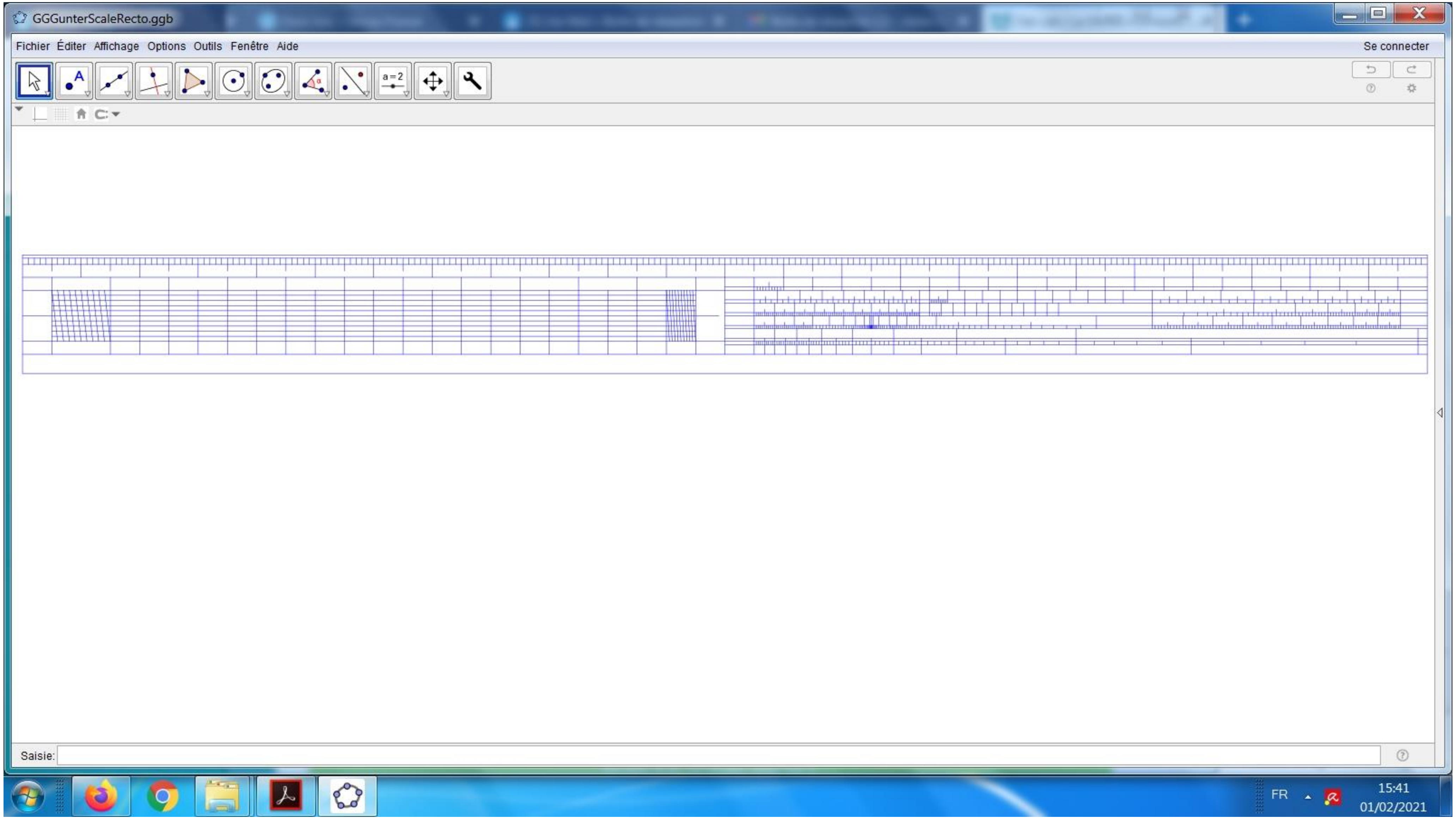


Les règles utilisées pour la résolution des triangles sphériques possédant un ou plusieurs angles droits, expriment des proportions qui relient le rapport des sinus à l'un ou l'autre des autres rapports de sinus ou des proportions qui relient les rapports des sinus aux rapports des tangentes.
Ainsi, les mêmes procédures fonctionneront, en utilisant une paire de distances sur la ligne des sinus et une autre sur la ligne des tangentes.
Pour les triangles sphériques obliques où un CAC, CCC ou AAA[(*)] est impliqué, la situation est plus compliquée et l'utilisation de la ligne des sinus verses peut être envisagée.

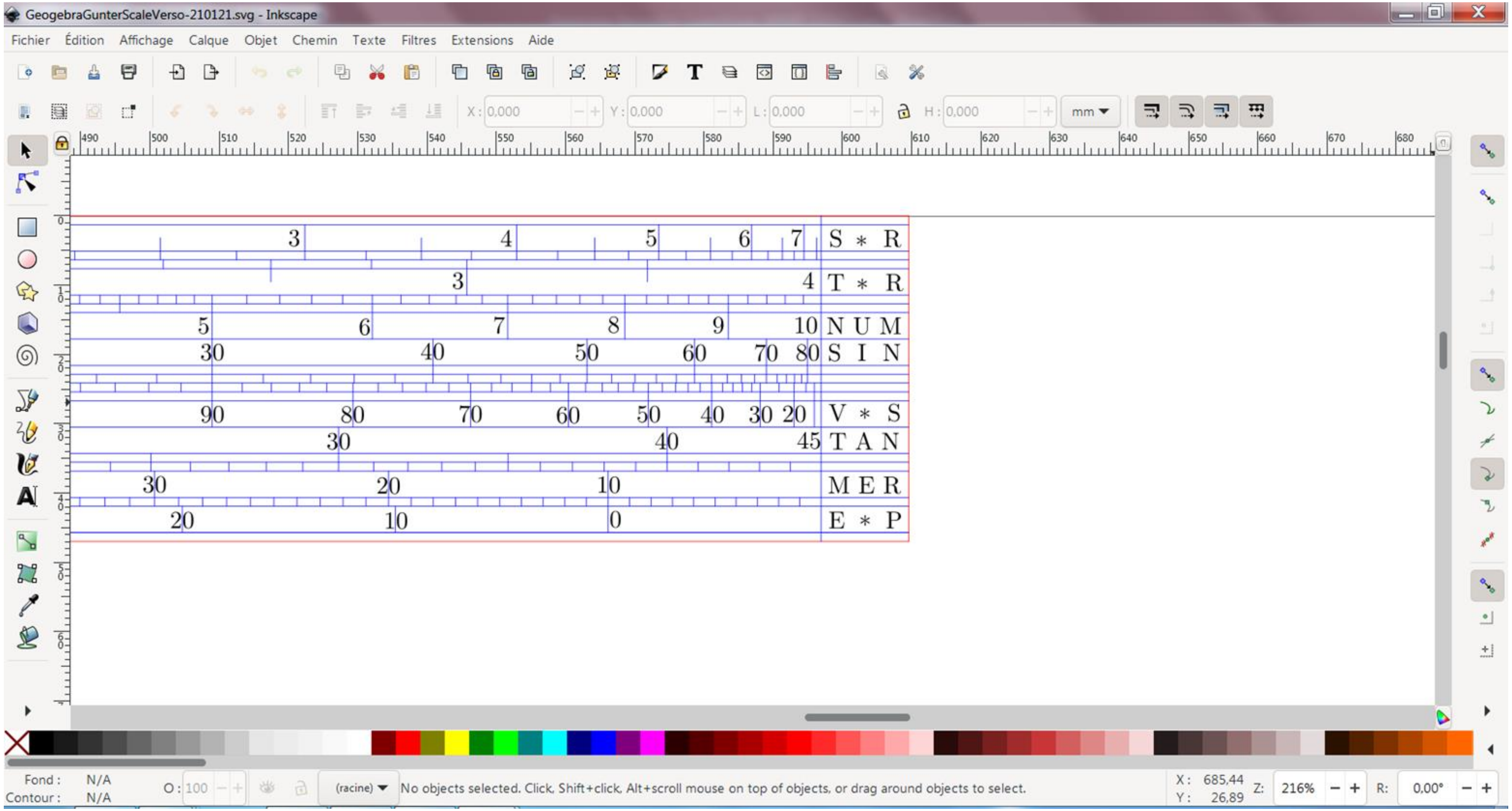
[(*)] C pour côté, A pour angle qui sont supposés connus.

4. Fabrication d’une règle de Gunter

Étape 1 : réalisation à l'échelle 1:1 des différentes graduations à l'aide du logiciel Geogebra et export des fichiers au format vectoriel SVG.



Étape 2 : Les fichiers SVG ont ensuite été importés dans le logiciel de dessin vectoriel Inkscape pour insérer les noms des différentes graduations et indiquer les différentes valeurs numériques.



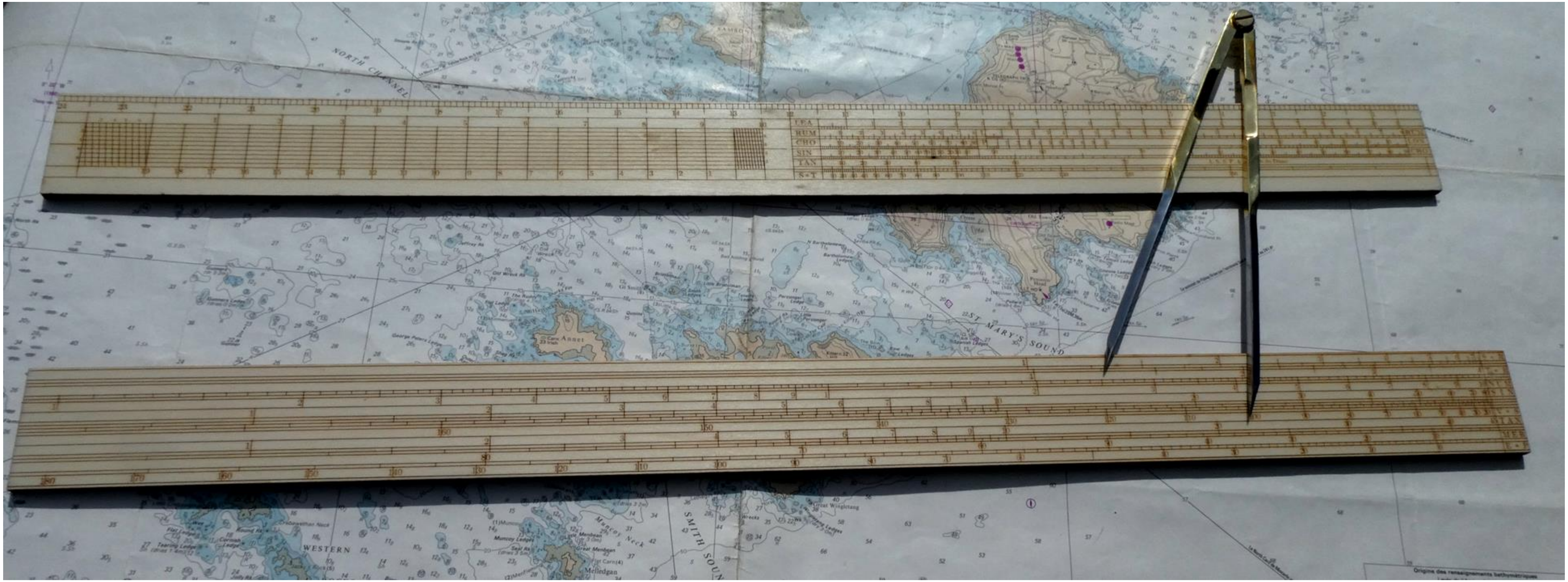
Étape 3 : Utilisation d’une découpeuse laser Trotec Speedy 400 au Fab Lab Le Dôme à Caen.

Le matériau utilisé est du contreplaqué de peuplier d’épaisseur 5 mm.

Le fichier SVG est chargé dans Inkscape, on choisit comme pilote d’impression *Trotec Engraver* et une fois les réglages effectués, on lance le logiciel *Job Control* qui pilote la découpeuse laser.

La couleur de tracé des traits détermine le travail effectué par la découpeuse laser (Rouge = découpe, Bleu = gravure fine, Noir = surface gravée).

Résultat final



Bibliographie

- Pierre Bouguer, *Nouveau traité de navigation contenant la théorie et la pratique du pilotage*, Paris, 1753.
- Joel Silverberg, *The Plain and Gunter's Scales – Seventeenth Century Additions to the Toolbox of Students and Practitioners of the Mathematicks*, MAA/AMS Joint Mathematical Meetings, Baltimore, 01/2014.
- Edmund Stone, *The construction and principal uses of mathematical instruments* translated from the French of M. Bion, chief instrument-maker to the French king, to which are added, the constructions and uses of such instruments as are omitted by M. Bion ; particularly of those invented or improved by the English, London, 1723 (traduction des pages consacrées à l'échelle de Gunter).
- Otto Van Poelje, Gunter Rules in Navigation, *Journal of the Oughtred Society*, Vol. 13, N° 1, Spring 2004, p. 11-22, (traduction).
- Évelyne Barbin et al., *Histoires de logarithmes*, Ellipses, Paris, 2006.
- Le dossier Naviguer par l'échelle anglaise sur le site de l'ASSP : http://assprouen.fr/.
- La documentation du projet sur le site du Fab Lab Le Dôme de Caen