

Didier Trotoux
IREM, Université de Caen Normandie
Association Sciences en Seine et Patrimoine, Rouen

Navigation et logarithmes aux XVII^e et XVIII^e siècles : l'échelle de Gunter

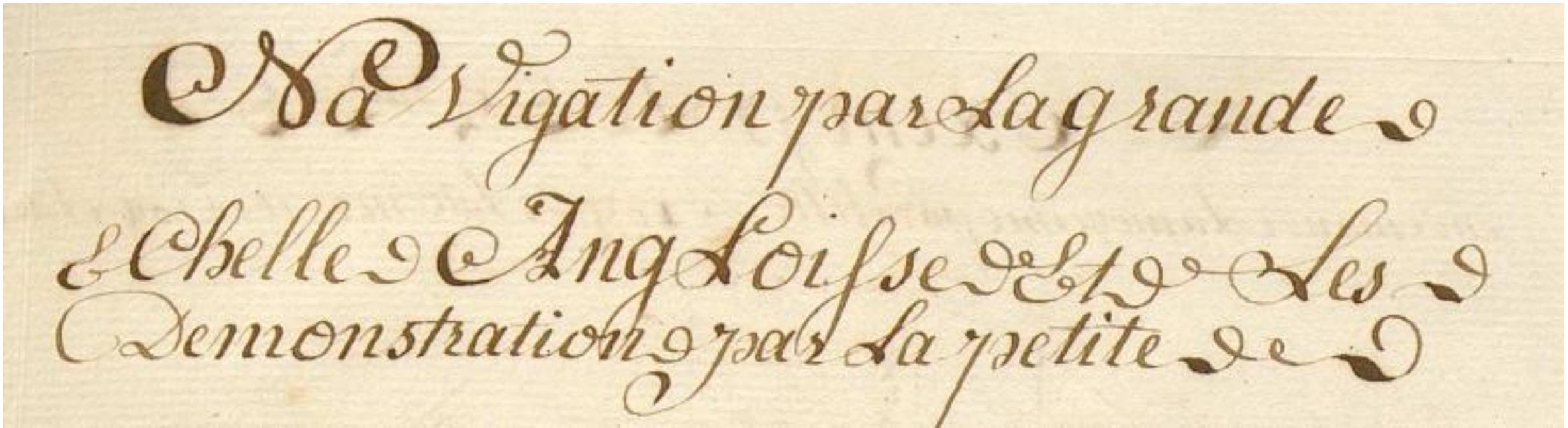
Séminaire de l'IREM de Caen Normandie 2023-2024
Caen, 17 novembre 2023

Plan

1. Le Cayez de navigation de Jean-Baptiste Legrip
2. L'échelle anglaise ou échelle de Gunter
3. La règle de Gunter
4. Utilisation de la règle de Gunter
5. Fabrication d'une réplique de la règle de Gunter

1. Le *Cayez de navigation* de J.-B. Legrip (1762)

AUNOM; DE LA PLUS GRANDE;
GLOIRE; DE DIEU; SOIT; FAIT; LE
PRÉSENT CAYEZ DENAVIGA
TION; POUR SERVIR A MOI
JEAN BAPTISTE; LE GRIP; DU
HAVRE DE GRACE; FAIT CE 24 de 7 BRE
1762

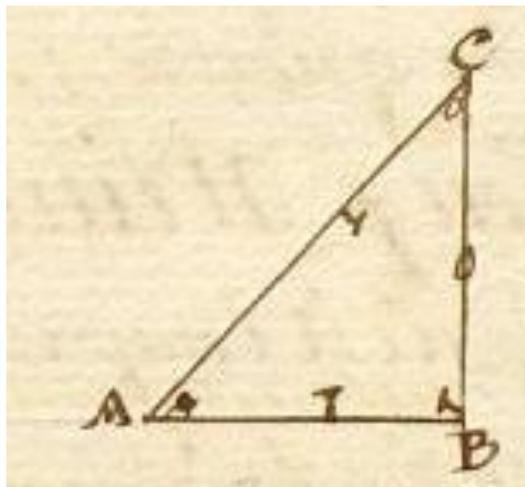


La partie du manuscrit où il est question d'échelle anglaise occupe environ un cinquième de l'ouvrage.

La première partie (p. 191-231) traite de navigation et aborde la détermination de la moyenne parallèle entre deux latitudes données, la réduction de lieues mineures en lieues majeures, la résolution des problèmes généraux de navigation et le calcul des corrections à y apporter ([trigonométrie plane](#)).

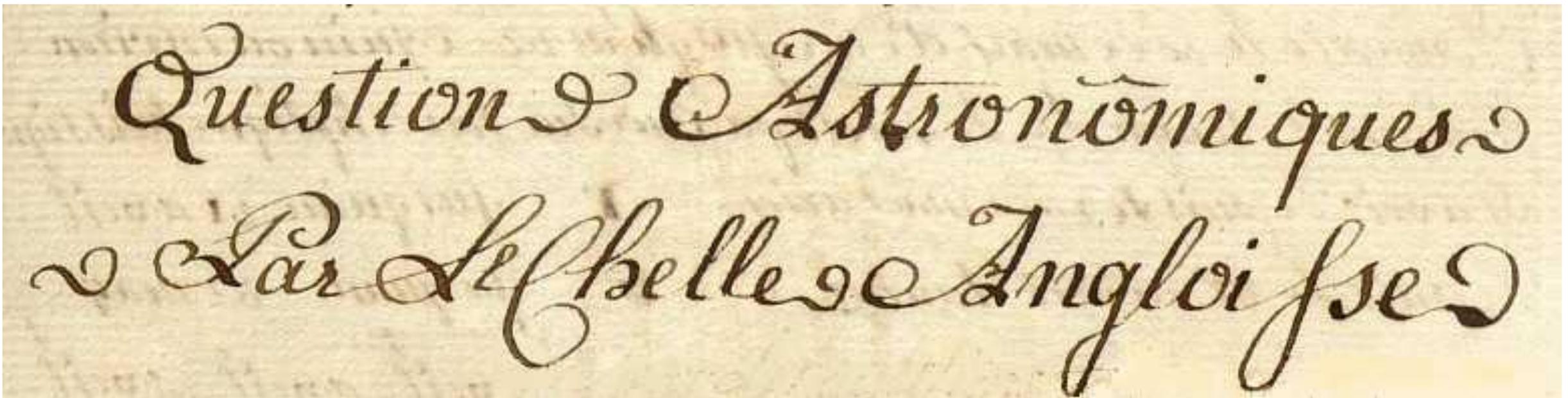
Exemple de problème de navigation

Exemple 2^{me}
Son suppose partye de 48° 30' de Latⁿ nord et de 07° 10' de Longt
occidentalle et ont, a l'ingle entre le nord et l'est, 32 lieux de chemin
et par la hauteur. Son se trouve par 49° 36' de Latⁿ aussi nord.
L'on demande l'air de vent et la diff. en Longt et par quel Longt on est arrivé



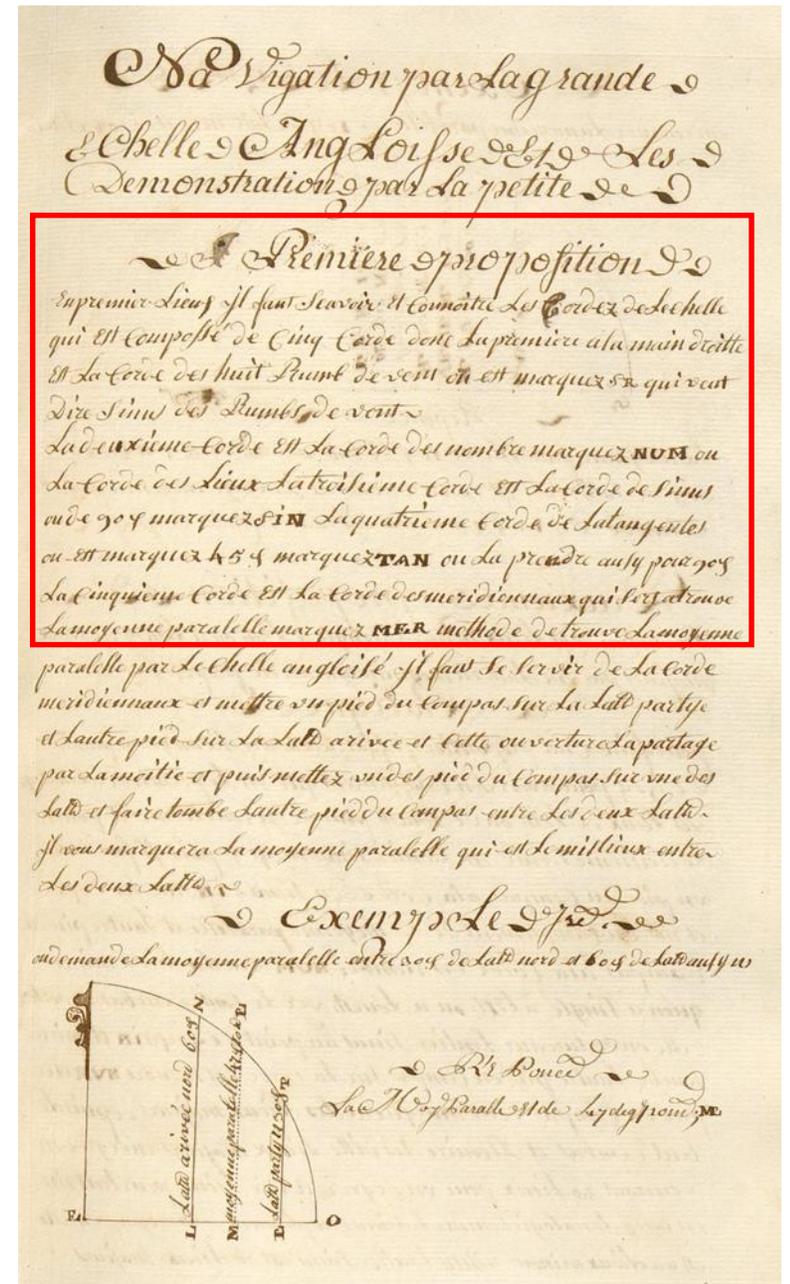
AIR ou *aire de vent*, s. m. c'est une des 32 divisions fictives de l'horizon, auxquelles se rapportent les 32 divisions de la rose. Il suit de cette définition, que l'intervalle de chaque *aire de vent* est de $11^{\circ} 15'$.

Reponce
L'air de vent avallée La Route de ne, 14 30' plus est, et son
se trouve arrivé par les 35° 24' de Longt occidentalle aux
meridien de paris



La deuxième partie (p. 231-266) traite des questions astronomiques, à savoir, la détermination de la déclinaison du Soleil, son ascension droite, la différence ascensionnelle, l'heure de lever et coucher du Soleil, l'azimut et l'heure d'observation ([trigonométrie sphérique](#)) .

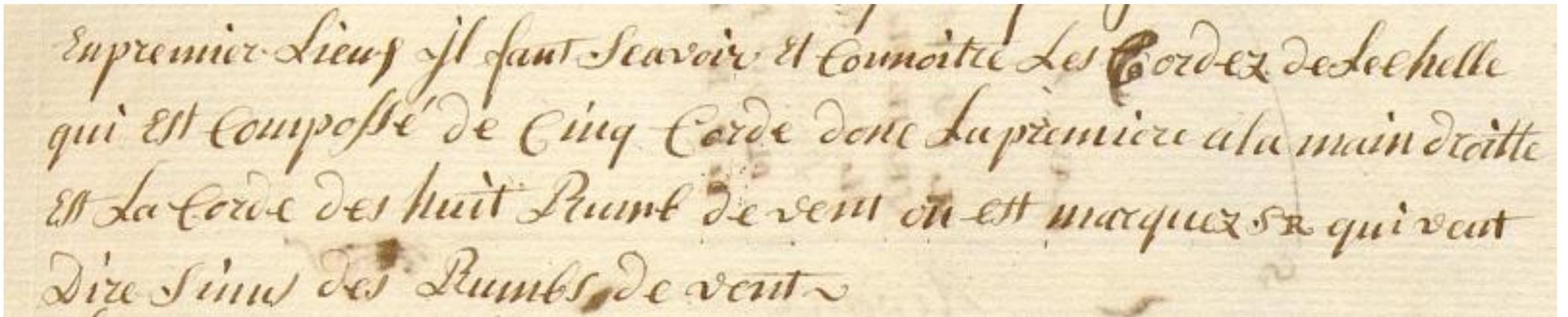
2. L'échelle anglaise ou échelle de Gunter



La Première Proposition

En premier Lieu Il faut Sçavoir et Connoître Les Cordes de la helle
qui est composée de cinq Cordes donc la première a la main droite
est la corde des huit Points de vent on est marquez **SV** qui veut
Dire sinus des Points de vent

La deuxième corde est la corde des nombre marquez **NUM** ou
la corde des lieux La troisième corde est la corde de sinus
ou de 90 & marquez **SIN** La quatrième corde de la tangente
ou est marquez **AS** & marquez **TAN** ou la prendre ausy pour 90
La cinquième corde est la corde des meridiennes qui sert a trouve
la moyenne parallele marquez **MER** methode de trouve la moyenne

A snippet of a handwritten manuscript in French, written in a cursive script on aged, yellowed paper. The text describes the components of a scale, mentioning five strings and a specific string for wind directions, marked with the symbol S_R.

En premier lieu il faut savoir et connoître Les Cordes de l'échelle
qui est composée de cinq Cordes dont la première à la main droite
est la corde des huit Rumbs de vent où est marqué S_R qui veut
dire Sinus des Rumbs de vent

Transcription

En premier lieu il faut savoir et connaître les cordes de l'échelle qui est composée de cinq cordes dont la première à la main droite est la corde des huit rumbes de vent où est marqué S_R qui veut dire sinus des rumbes de vent.

La deuxième corde est la corde des nombres marquée **NUM** ou
la corde des lieues. La troisième corde est la corde de sinus
ou de 90° marquée **SIN**. La quatrième corde de la tangente
ou est marquée 45° marquée **TAN** ou la prendre aussi pour 90°

Transcription

*La deuxième corde est la corde des nombres marquée **NUM** ou
la corde des lieues. La troisième corde est la corde de sinus
ou de 90° marquée **SIN**. La quatrième corde de la tangente
où est marqué 45° , marquée **TAN** ou la prendre aussi pour 90° .*

La cinquième corde est la corde des méridiennes qui sert à trouver
la moyenne parallèle marquée **MER** méthode de trouver la moyenne

Transcription

*La cinquième corde est la corde des méridiennes qui sert à trouver la moyenne parallèle marquée **MER**.*

Dans le *Cayez de navigation* de J.-B. Legrip, il n'y a aucun schéma de l'échelle anglaise. Les seuls éléments descriptifs sont ceux que l'on vient de voir (p. 191 du manuscrit) :

- Le terme « corde » est utilisé dans le sens d'échelle ou graduation (*scale* en anglais) et non dans celui de corde d'arc.

Ce qui n'est pas précisé :

- Les quatre premières échelles sont des échelles logarithmiques (logarithmes des sinus des rums de vent, logarithmes des nombres, logarithmes des sinus et logarithmes des tangentes).
- La cinquième échelle est construite à partir d'une table des parties méridionales, qui mesuraient les parties de méridien en fonction de leur degré de latitude.

Dans le *Nouveau traité de navigation* de Pierre Bouguer publié en 1753, nous trouvons un chapitre (Livre V, Section II, Chap. III) intitulé :

410 NOUVEAU TRAITE' DE NAVIGATION.

CHAPITRE III.

Méthode de résoudre les Problèmes de Navigation par l'Echelle des Logarithmes, nommée vulgairement Echelle Angloise.

Après avoir expliqué comment on construit ces échelles à partir des tables de logarithmes, Bouguer indique comment on les utilise :

*Usage de l'Echelle des Logarithmes pour
résoudre les Problèmes de Navigation.*

214. Lorsqu'on se sert des logarithmes pour faire une Regle de Trois ou proportion, on met précisément la même différence entre les logarithmes des deux derniers termes, qu'entre les logarithmes des deux premiers. Il faut faire la même chose lorsqu'on travaille sur l'échelle des logarithmes, & l'opération est extrêmement aisée. On ouvre un Compas commun depuis le premier terme jusqu'au second, on le porte ensuite sur le troisième terme, & l'autre pointe du Compas marque le quatrième terme.

Pourquoi cette dénomination d'échelle anglaise ?

Trois mathématiciens anglais ont joué un rôle majeur dans l'histoire de cette échelle anglaise :

- **John Napier** (1550-1617), inventeur du concept de logarithmes et auteur des premières tables dans sa *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* en 1614.
- **Henry Briggs** (1556-1630), calculateur et auteur de la première table logarithmique à base décimale *Logarithmorum chilias prima* en 1617 reprise et complétée dans son *Arithmetica Logarithmica* en 1624.
- **Edmund Gunter** (1581-1626), auteur en 1620 du *Canon triangulorum...* table contenant ses propres logarithmes décimaux des sinus et des tangentes nouvellement calculés et les logarithmes des nombres de Briggs et inventeur de la méthode des échelles logarithmiques dans *Description and use of the sector* en 1624.

C'est le nom de ce dernier qui passera à la postérité grâce à cette invention des échelles et puis des règles dites de Gunter ou tout simplement Gunters.

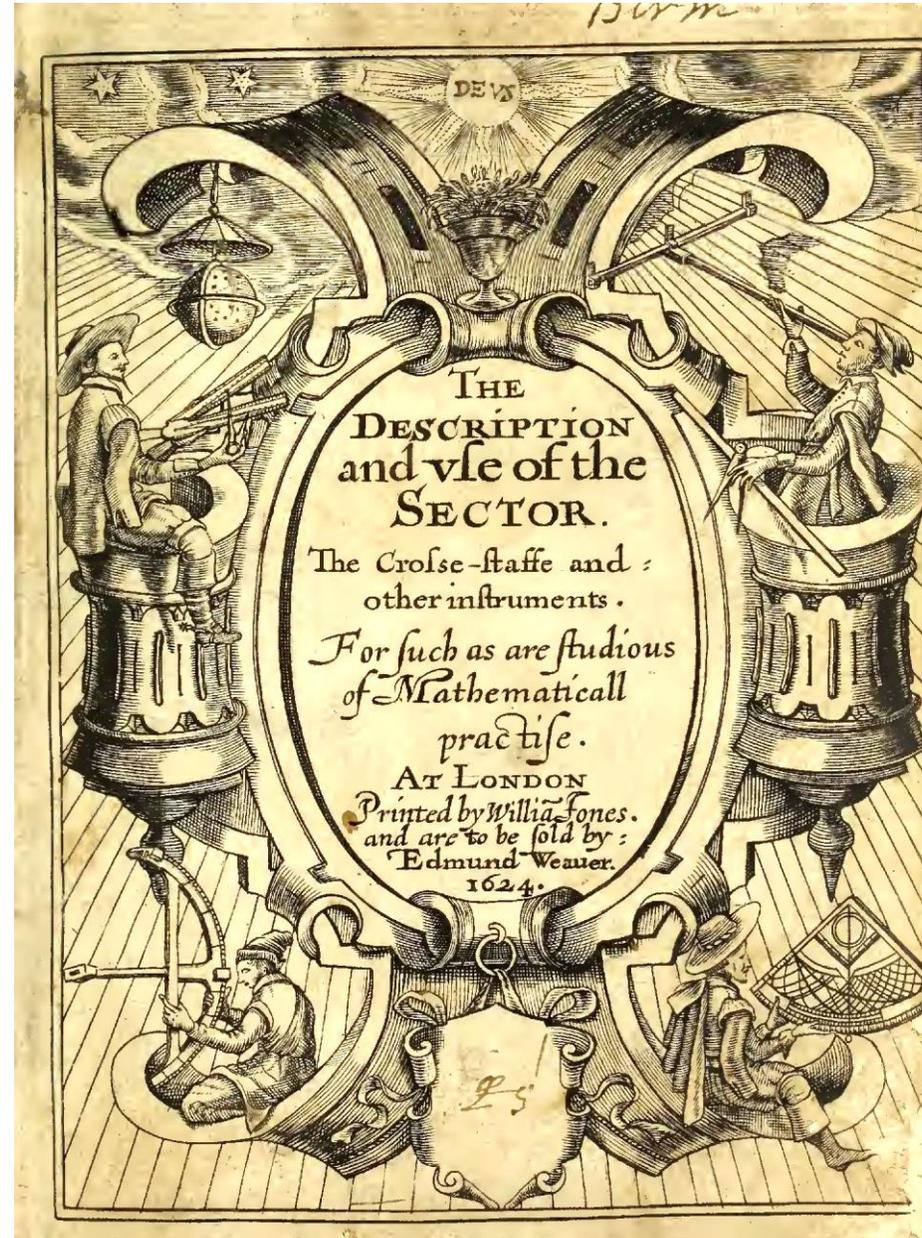
Edmund Gunter (1581-1626)

Gunter fut nommé professeur d'astronomie au collège de Gresham en 1619. C'était un savant actif dans de nombreux domaines en particulier l'astronomie et la navigation. Il s'intéressait aux applications des mathématiques et était, de plus, un fervent partisan du système décimal.

La règle des sinus : $\frac{X}{\sin(x)} = \frac{Y}{\sin(y)}$, qui était l'une des opérations les plus utiles en navigation pour déterminer les côtés et les angles d'un triangle ne pouvait pas être utilisée directement avec les tables de Napier, ni avec les tables de Briggs. En 1620, Gunter publia la première table combinée, le *Canon Triangulorum...* et désormais, la règle des sinus pouvait enfin être appliquée en utilisant les logarithmes des tables d'un seul livre.

Gunter a poursuivi ensuite ses recherches estimant que certains problèmes de navigation nécessitaient une solution plus simple et plus rapide que ne le permettait le calcul par tables. Cela l'a conduit à concevoir un nouveau type d'échelle où les nombres étaient représentés par des distances d'échelle logarithmique et où un compas à pointes sèches était utilisé pour ajouter et soustraire ces distances dans le domaine logarithmique.

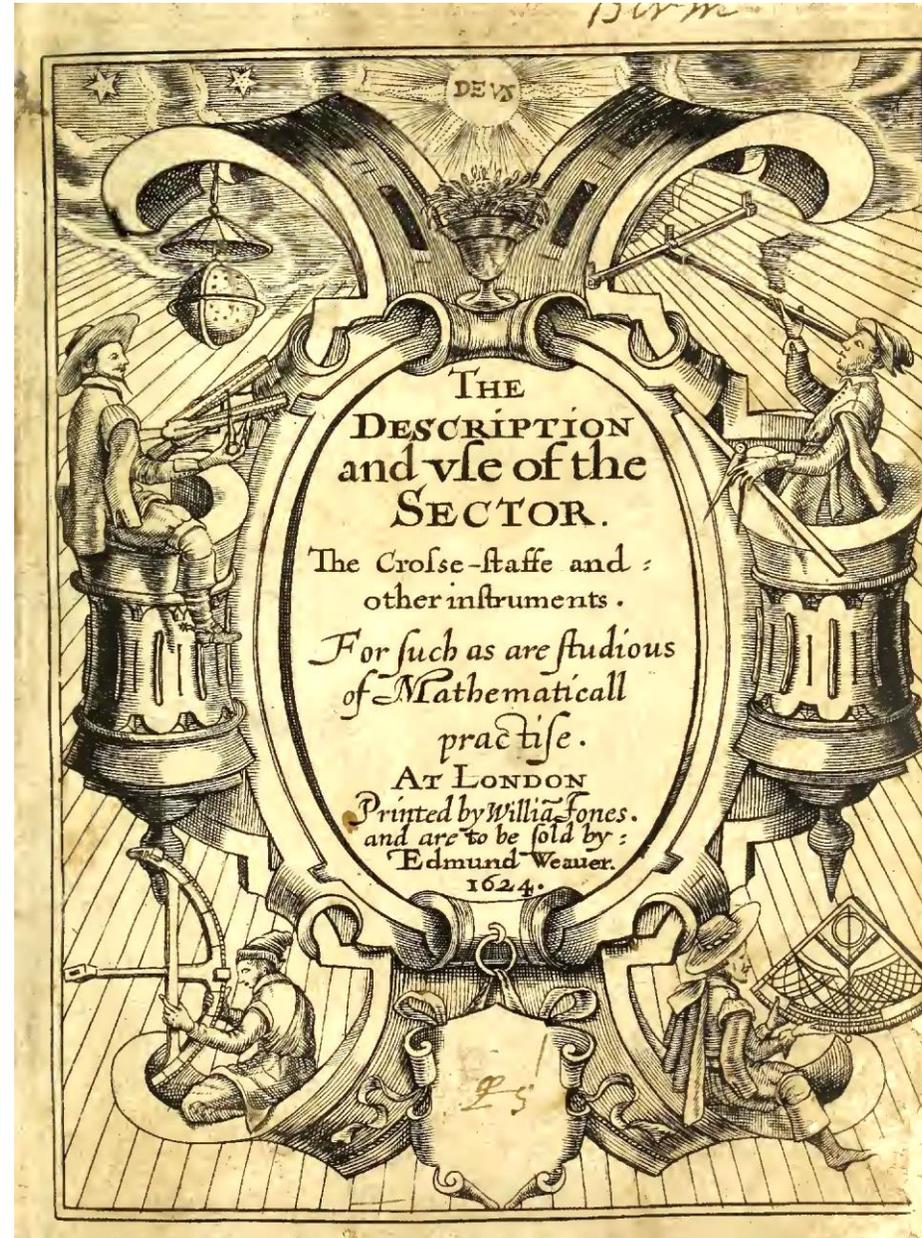
The description and use of the sector..., 1^{ère} éd., Londres, 1624



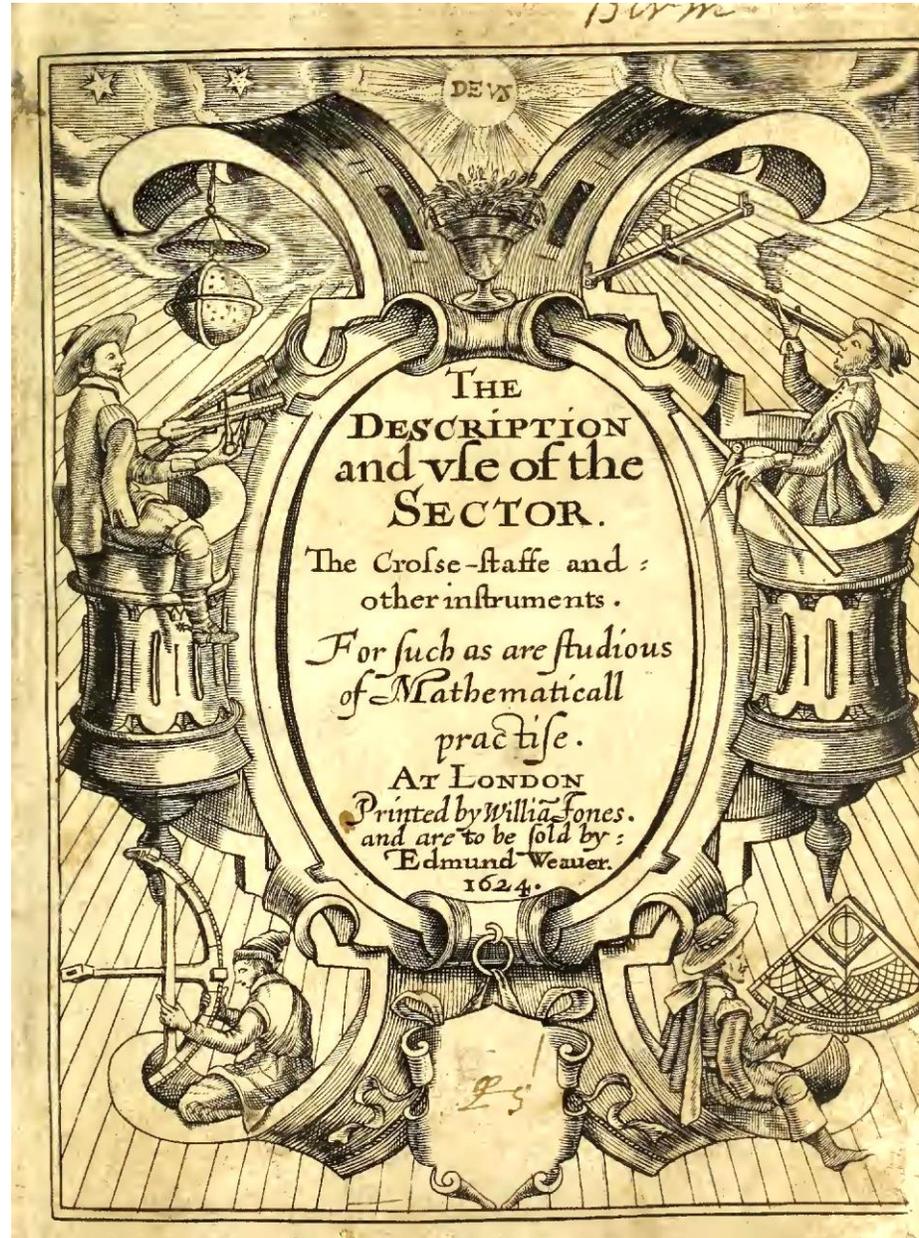
The description and use of the sector..., 1^{ère} éd., Londres, 1624



Le compas de proportion

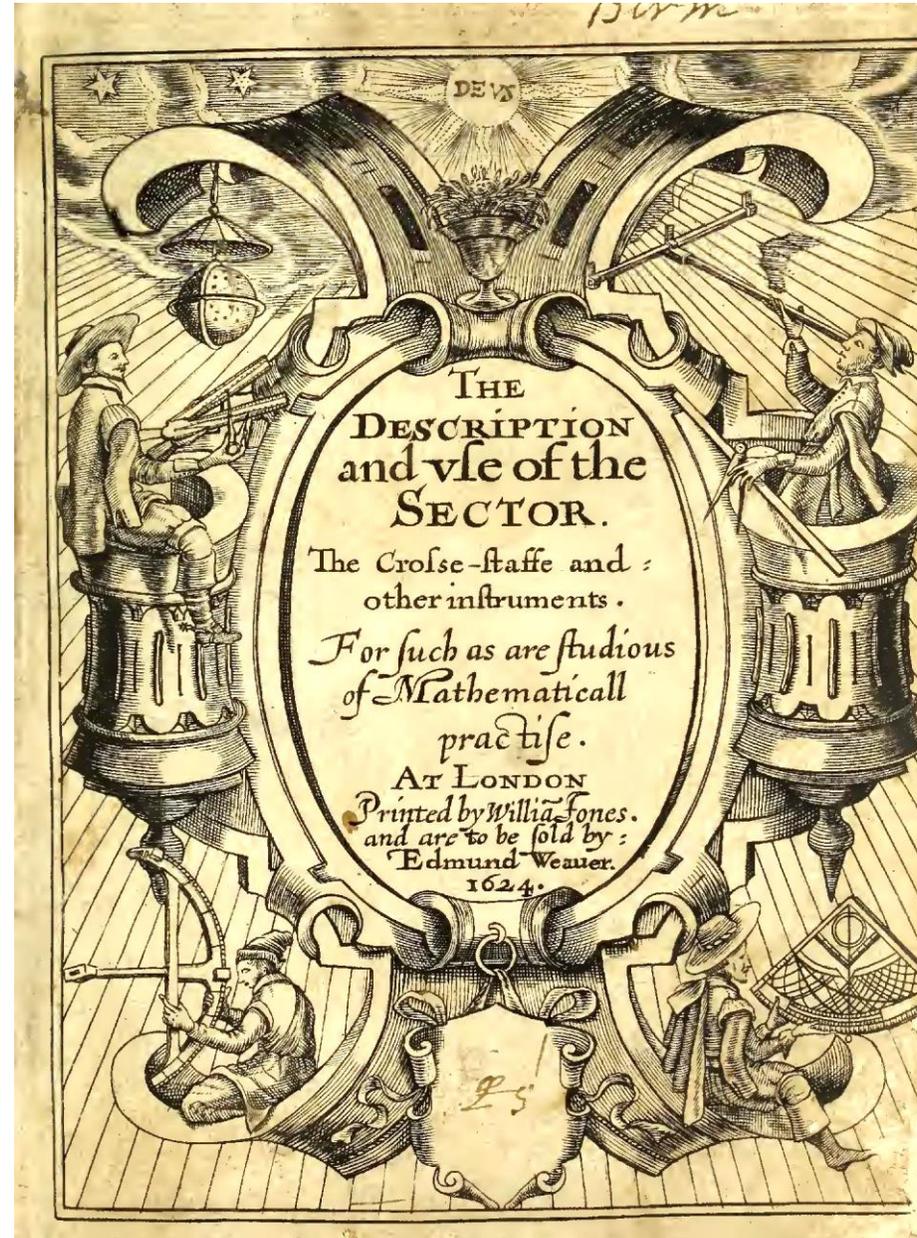


The description and use of the sector..., 1^{ère} éd., Londres, 1624



L'arbalestrille et la règle

The description and use of the sector..., 1^{ère} éd., Londres, 1624

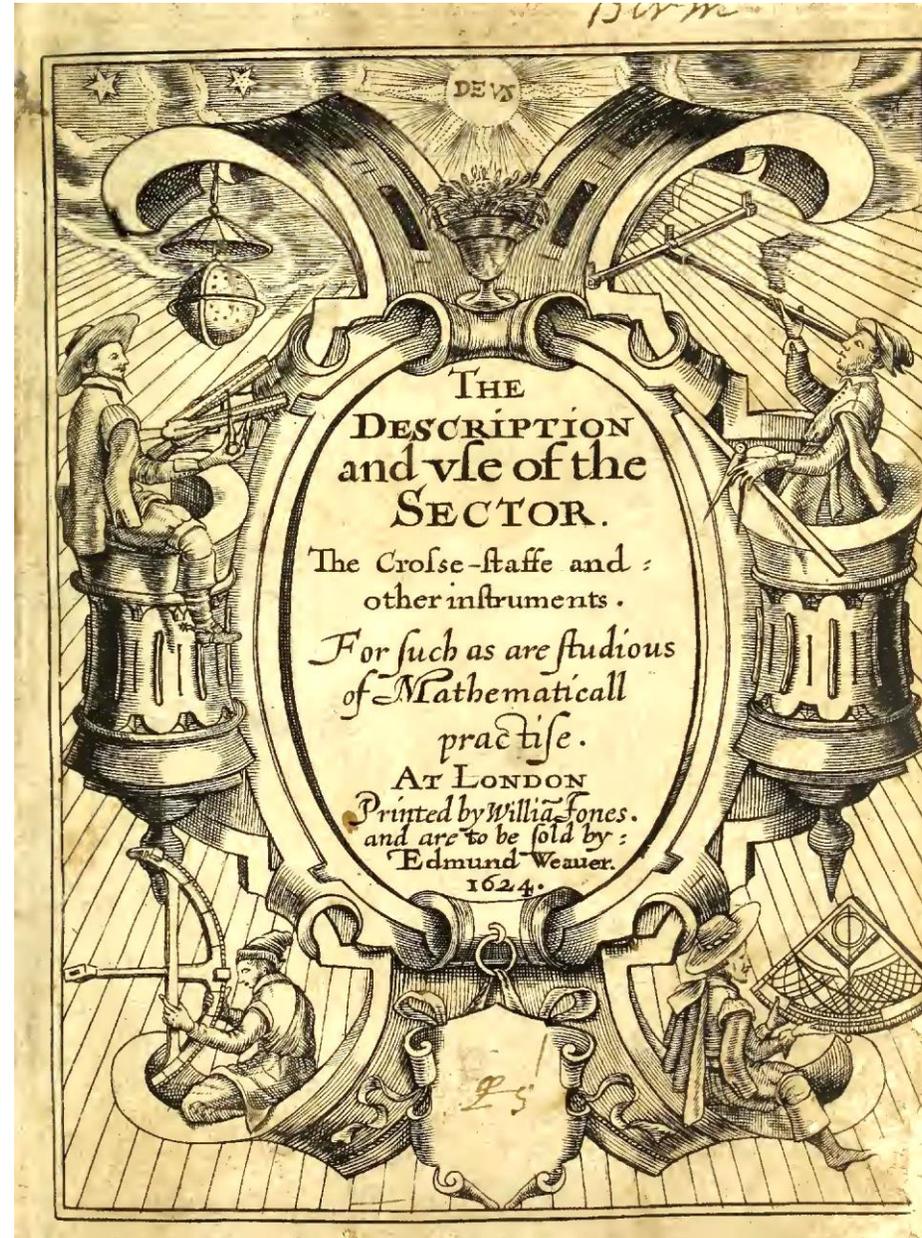


Le quadrant de Gunter



The description and use of the sector..., 1^{ère} éd., Londres, 1624

Instrument en forme
d'arbalète pour trouver
la latitude en mer



Edmund Gunter (1581-1626)

The Lines for working of proportions may be known by their unequal divisions, and the numbers at the end of each Line.

1. The Line of numbers noted with the Letter N, divided unequally into 1000 parts, and numbred with 1, 2, 3, 4, unto 10.

2. The Line of Artificial Tangents is noted with the letter T, divided unequally into 45 degrees, and numbred both ways, for the Tangent and the Complement.

3. The Line of Artificial Sines noted with the letter S, divided unequally into 90 degrees, and numbred with 1, 2, 3, 4, unto 90.

4. The Line of Versed Sines for more easie finding the hour and Azimuth, noted with V, divided unequally into about 164 gr. 50 m. numbred backward with 10, 20, 30, unto 164.

Edmund Gunter (1581-1626)

Gunter a proposé trois échelles logarithmiques pour faciliter les calculs de proportions. D'abord l'échelle logarithmique des nombres notée N, mais aussi l'échelle logarithmique des sinus, notée S et celle des tangentes, notée T, afin que la règle des sinus puisse être appliquée. Il a également proposé l'ajout d'une quatrième échelle logarithmique des sinus verses pour faciliter certains calculs de trigonométrie sphérique.

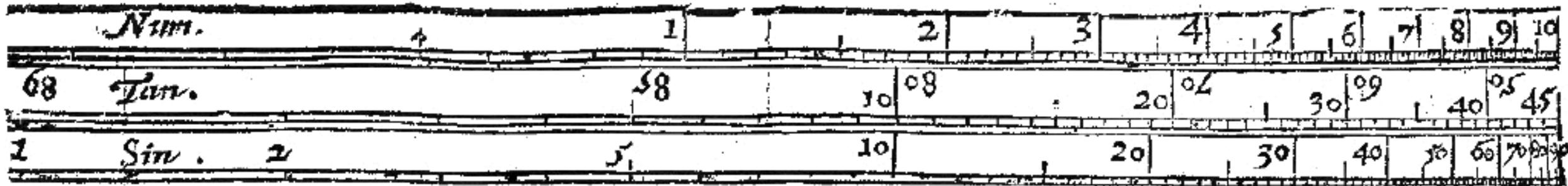


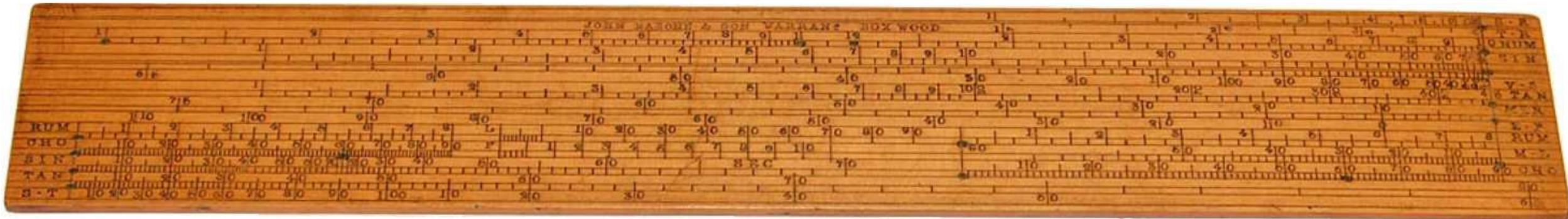
Image originale des échelles de Gunter

Description and use of the sector, the cross-staff and other instruments, London, 1624

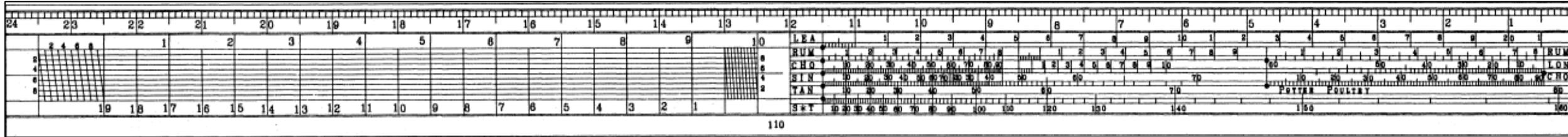
3. La règle de Gunter

La règle de Gunter

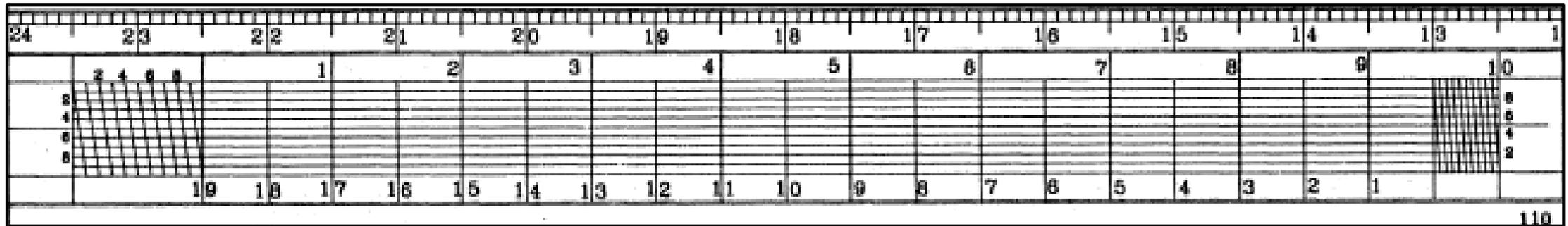
La règle de Gunter standard est le plus souvent en bois, mais parfois en laiton et des exemplaires d'un pied de long en ivoire ont été recensés. La majorité des règles de Gunter connues ne portent ni nom de fabricant ni date de fabrication. Bien sûr, on rencontre des variations, comme les échelles avec des abréviations de noms différentes, des échelles étendues mais aussi des tailles différentes. La plupart des règles de Gunter mesurent deux pieds de long sur 2 pouces ou 1 pouce et demi de large (soit environ 610 x 50 mm). Il existe des modèles d'un pied, avec les mêmes échelles que la règle de Gunter standard réduites dans cette plus petite taille.



La règle de Gunter de deux pieds : recto



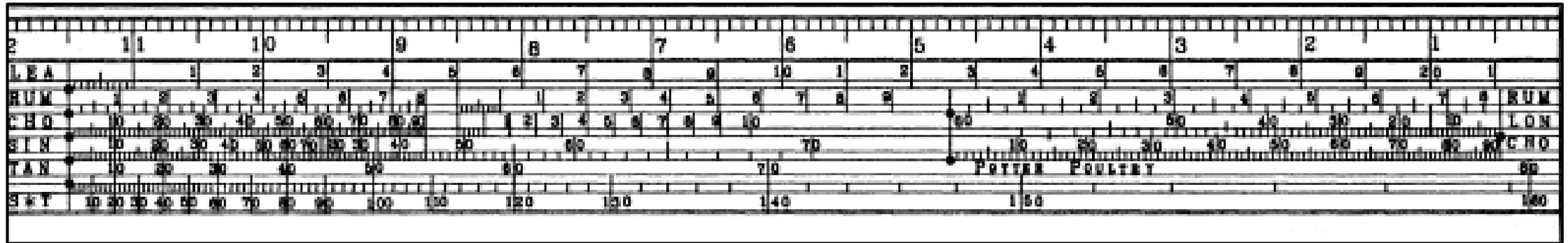
Échelles linéaires (partie gauche de la face recto) : c'est une échelle diagonale de dîmes.



Nom abrégé de l'échelle	Nom complet	Signification
	Échelle diagonale sur la partie gauche	Pour prendre les longueurs exactes avec le compas en centièmes de pouces et demi-pouces.
	Pouces	Échelle de mesure de 24 pouces le long du bord supérieur de la règle.
LEA	Lieues	Échelle linéaire pour construire des tracés de distances nautiques. 1 lieue (anglaise) = 3 milles marins.
L et P	Parties égales pour lire les fonctions des autres échelles	P (rayon 2 pouces) pour lire RUM, CHO, SIN, TAN, S*T et MER ; L (rayon 3 pouces) pour le plus long RUM & CHO à l'extrême droite.

La règle de Gunter de deux pieds : recto

Échelles trigonométriques (partie droite de la face recto)



Nom abrégé de l'échelle	Nom complet	Signification	Formule
R U M	Cordes des rumbes	La corde vaut 2 fois le sinus du demi-angle pour les points cardinaux de la boussole (32 en 360°)	$2 \sin(5,625 X)$
C H O	Cordes des degrés	La corde vaut 2 fois le sinus du demi-angle pour les degrés	$2 \sin(X/2)$
S I N	Sinus des degrés	Sinus de l'angle	$\sin(X)$
S E C	Sécante des degrés	Sécante de l'angle	$\sec(X)$
T A N	Tangente des degrés	Tangente de l'angle	$\tan(X)$
S * T	Semi-Tangente des degrés	Tangente du demi-angle	$\tan(X/2)$
L O N ou M * L	Milles de longitude	Longueur d'un degré à la latitude X°	$60 \cos(X)$ à combiner avec l'échelle CHO située dessous

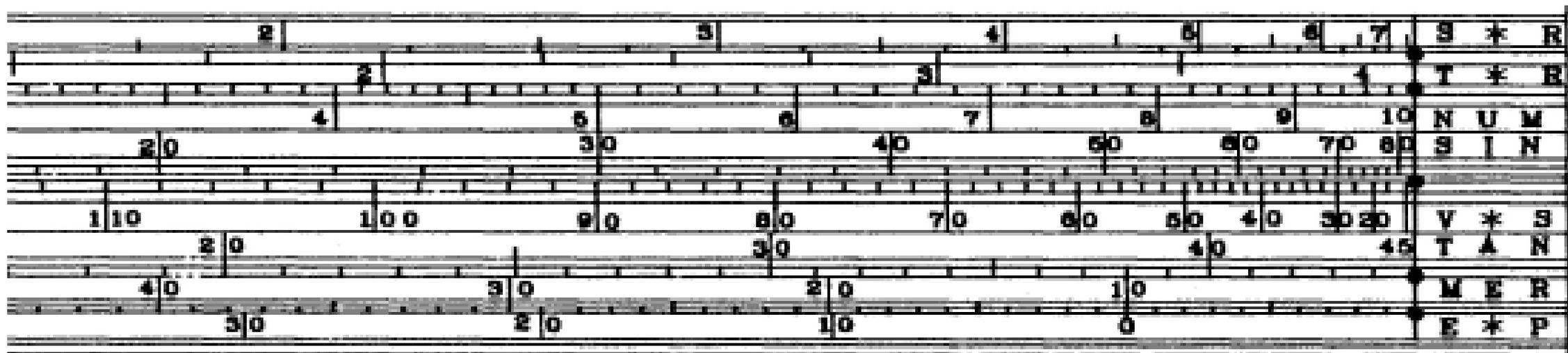
La règle de Gunter de deux pieds : verso



Échelles artificielles ou logarithmiques



DRAWN BY BRUCE E. BABCOCK, 1993

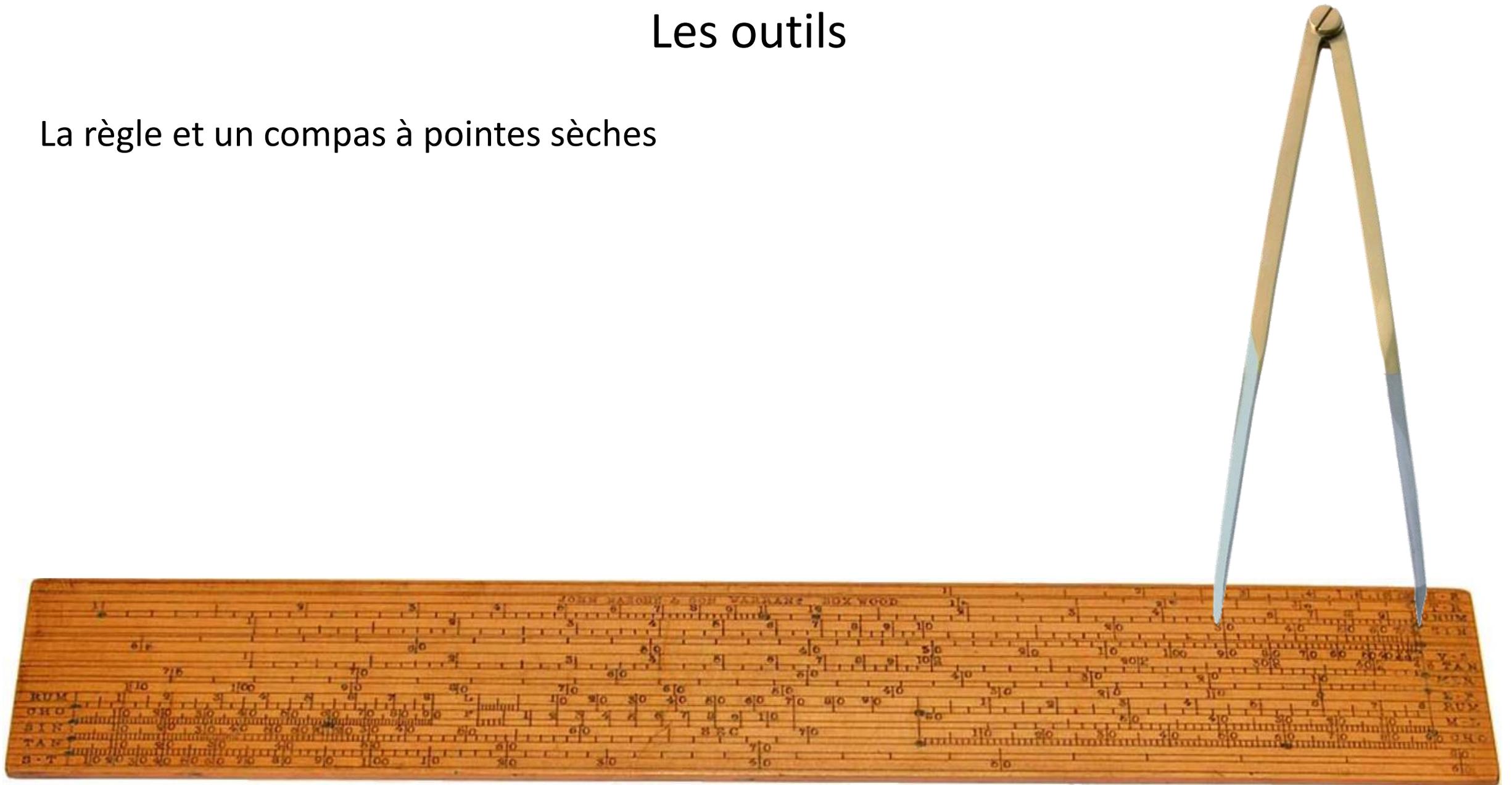


Nom abrégé de l'échelle	Nom complet	Signification	Formule
S * R	(Artificielle) Sinus des rumbs	$\log \sin$ des points cardinaux de la boussole	$\log \sin(11,25 X)$
T * R	(Artificielle) Tangentes des rumbs	$\log \tan$ des points cardinaux de la boussole	$\log \tan(11,25 X)$
NUM	(Artificielle) Ligne des nombres	Échelle logarithmique à deux cycles	$\log (X)$
S I N	(Artificielle) Sinus des degrés	$\log \sin$ des degrés (de 0° à 90°)	$\log \sin(X)$
V * S	(Artificielle) Sinus verses des degrés	$\log \operatorname{versin}$ des degrés (de 0° à 180°)	$\log (1 - \sin^2(X/2))$
T A N	(Artificielle) Tangentes des degrés	$\log \tan$ des degrés (de 0° à 45°)	$\log \tan(X)$
M E R	Ligne Méridionale	Accroissement du degré de latitude sur un méridien de la carte de Mercator	$\int \sec(X) dX$ à combiner avec E * P
E * P	Parties Egales	Échelle linéaire	X

4. Utilisation de la règle de Gunter

Les outils

La règle et un compas à pointes sèches



Le principe

Soit la proportion $A : B :: C : D$ où A , B et C sont connus. Comment obtenir D ?

Avec un compas à pointes sèches mesurant la distance entre des points sur l'échelle, il est plus commode de la voir comme $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, ou mieux comme :

$$\log(A) - \log(B) = \log(C) - \log(D).$$

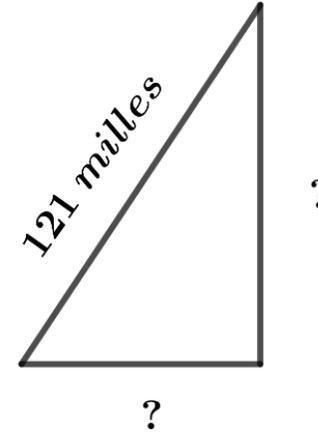
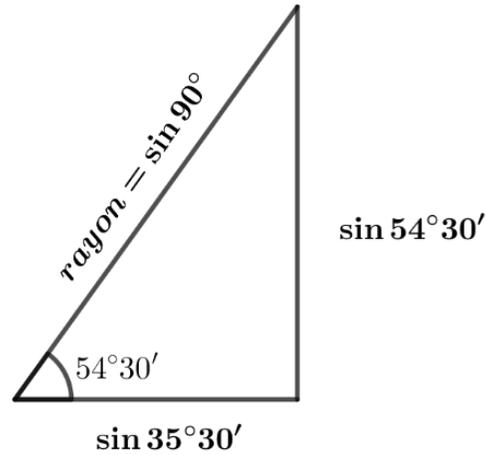
Le compas à pointes sèches nous donne la distance entre $\log(A)$ et $\log(B)$ et si nous déplaçons le compas de sorte qu'un des ses pieds soit placé en $\log(C)$, l'autre pied sera en $\log(D)$. En outre, l'échelle est graduée avec D en ce point, sa position englobant le logarithme.

Nous lisons D directement, sans avoir besoin de trouver le logarithme inverse.

Dans le cas de la règle des sinus, $\frac{X}{\sin(x)} = \frac{Y}{\sin(y)}$, cela donne :

$$\log(\sin(x)) - \log(\sin(y)) = \log(X) - \log(Y).$$

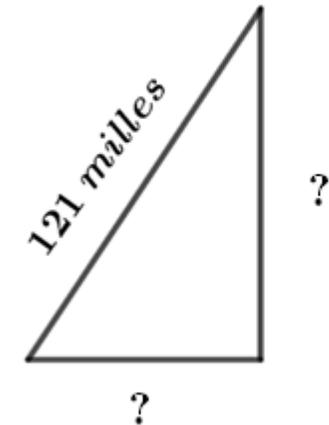
Exemple d'utilisation pour déterminer des distances



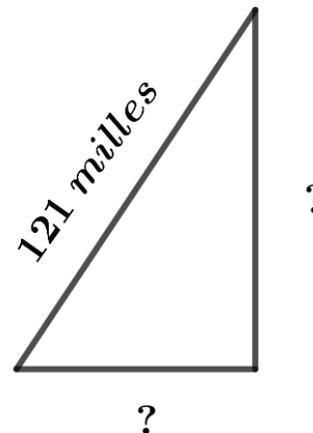
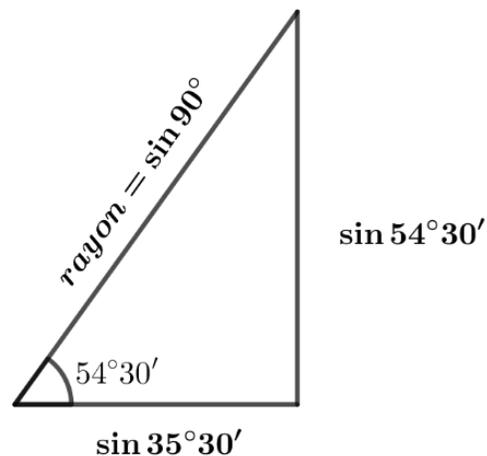
La ligne des **sinus** : une échelle des logarithmes des sinus.



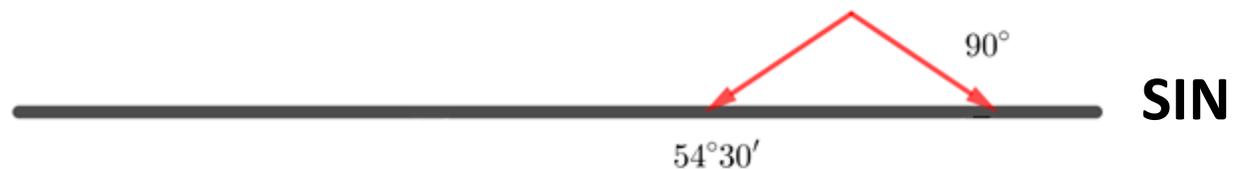
La ligne des **nombres** : une échelle des logarithmes.



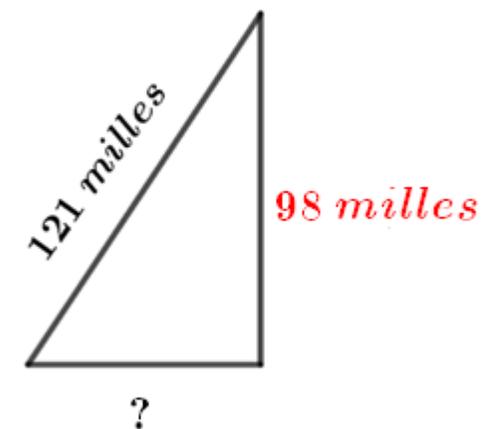
Exemple d'utilisation pour déterminer des distances



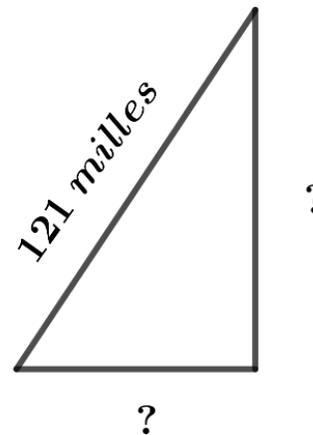
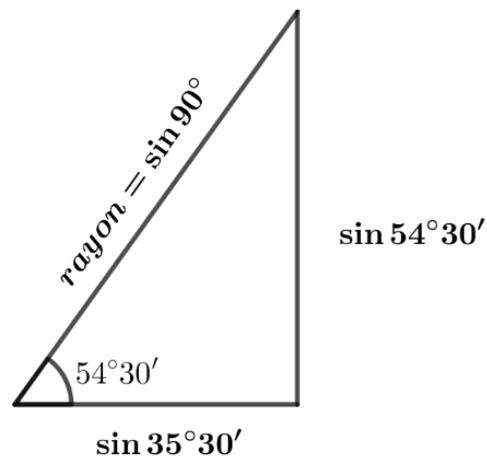
La ligne des **sinus** : une échelle des logarithmes des sinus.



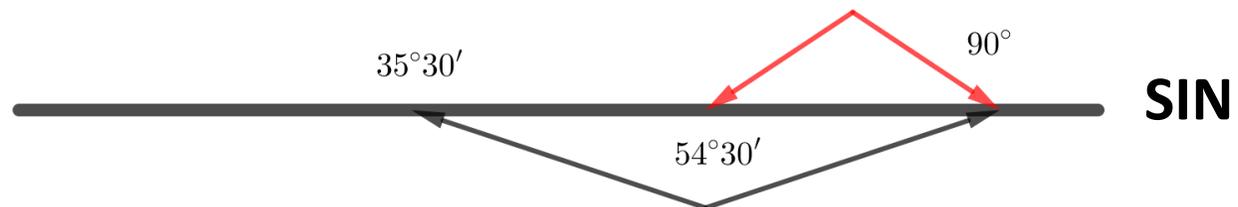
La ligne des **nombres** : une échelle des logarithmes.



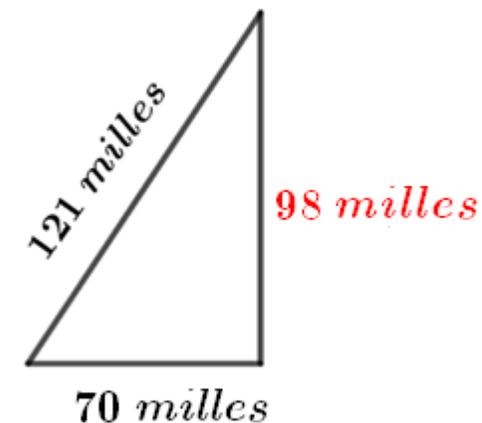
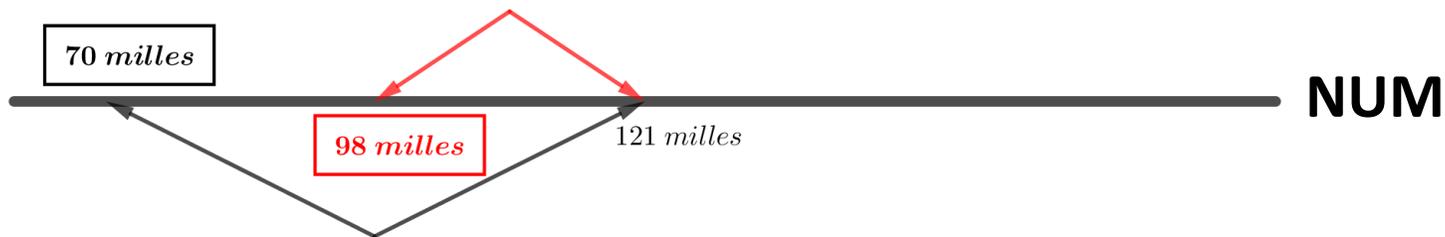
Exemple d'utilisation pour déterminer des distances



La ligne des **sinus** : une échelle des logarithmes des sinus.

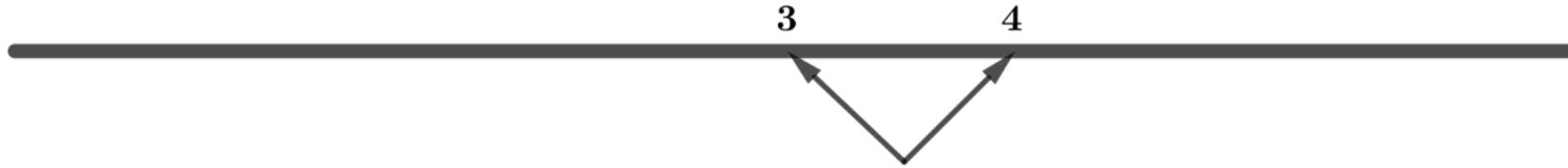


La ligne des **nombres** : une échelle des logarithmes.

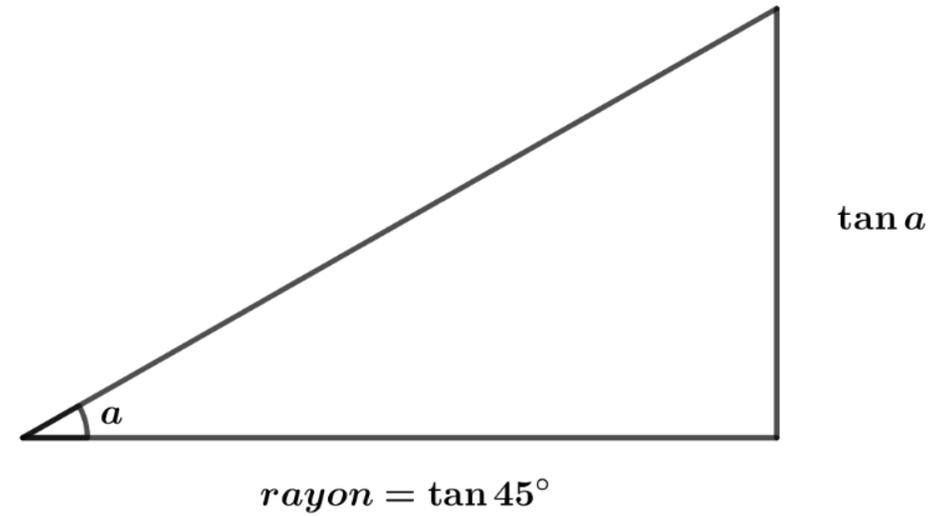
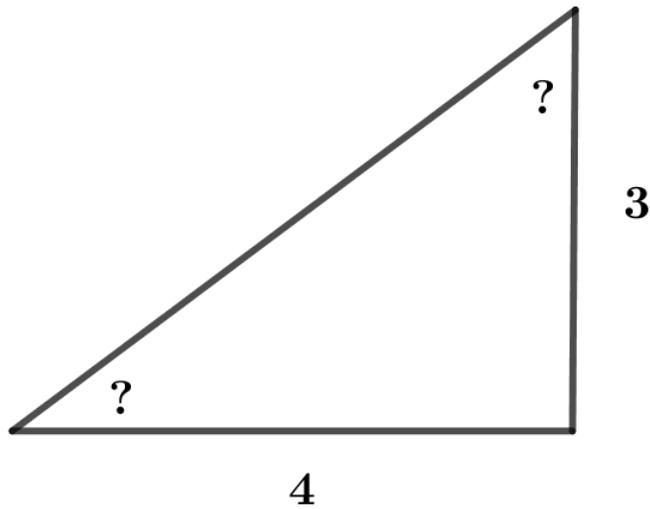


Exemple d'utilisation pour déterminer des angles

Ligne des nombres



Ligne des tangentes



La loi des sinus de la trigonométrie sphérique (qui s'applique aussi bien aux triangles rectangles qu'aux triangles obliques) s'écrit : $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ où A et B sont les angles aux sommets du triangle et a et b , les segments des grands cercles qui leur sont opposés (c'est-à-dire les côtés du triangle). Les angles et les côtés sont mesurés en degrés.

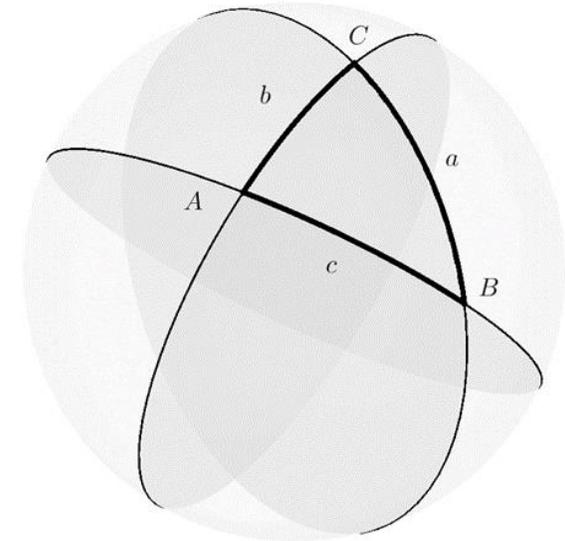
Exprimés sous forme de proportions, cela peut être vu au choix comme : $\sin(A) : \sin(a) :: \sin(B) : \sin(b)$ ou $\sin(A) : \sin(B) :: \sin(a) : \sin(b)$.

Les règles utilisées pour la résolution des triangles sphériques possédant un ou plusieurs angles droits, expriment des proportions qui relient le rapport des sinus à l'un ou l'autre des autres rapports de sinus ou des proportions qui relient les rapports des sinus aux rapports des tangentes.

Ainsi, les mêmes procédures fonctionneront, en utilisant une paire de distances sur la ligne des sinus et une autre sur la ligne des tangentes.

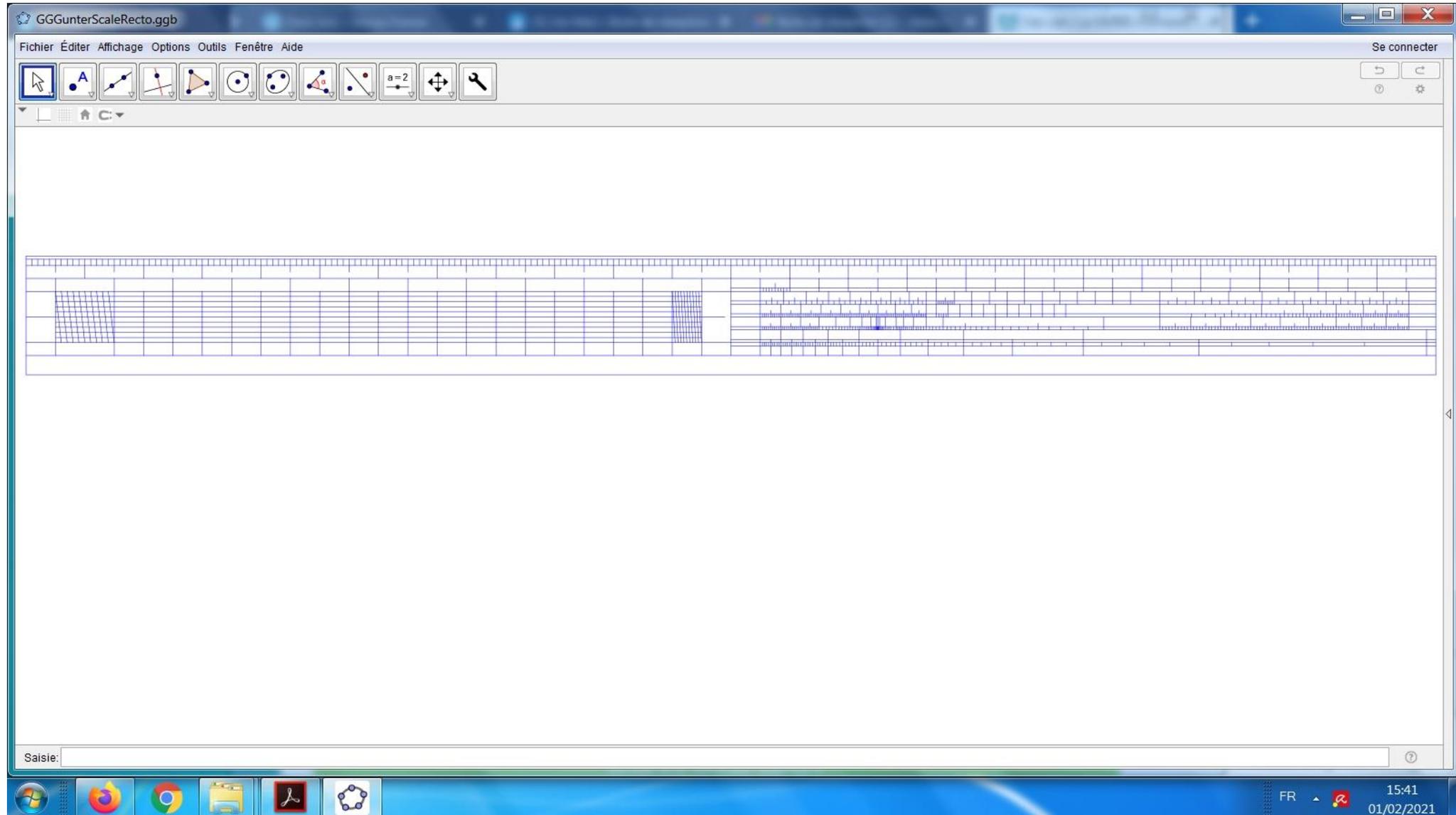
Pour les triangles sphériques obliques où un CAC, CCC ou AAA^(*) est impliqué, la situation est plus compliquée et l'utilisation de la ligne des sinus verses peut être envisagée.

(*) C pour côté, A pour angle qui sont supposés connus.

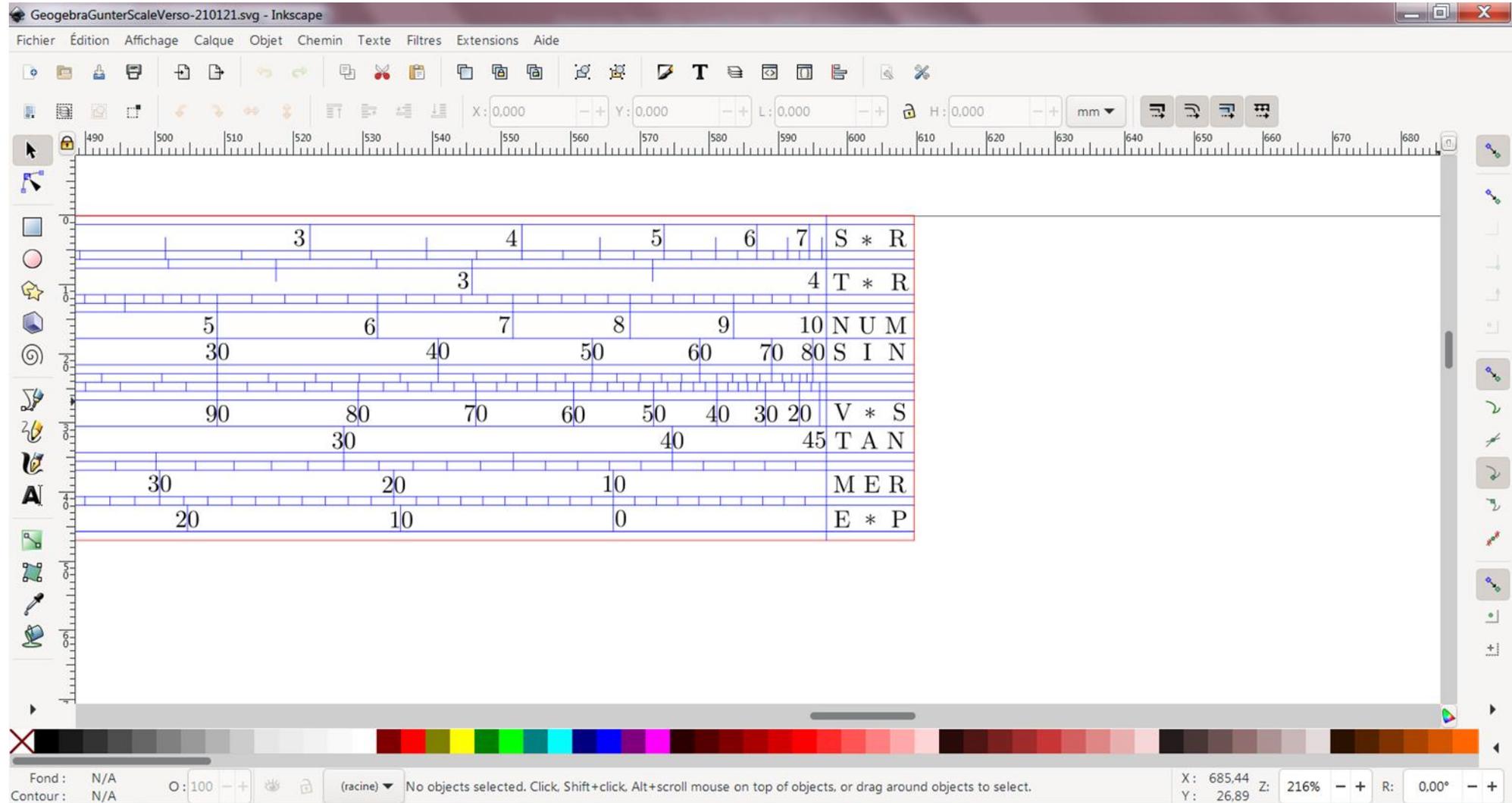


5. Fabrication d'une réplique de la règle de Gunter

Étape 1 : réalisation à l'échelle 1:1 des différentes graduations à l'aide du logiciel Geogebra  et export des fichiers au format vectoriel SVG.



Étape 2 : Les fichiers SVG ont ensuite été importés dans le logiciel de dessin vectoriel Inkscape  pour insérer les noms des différentes graduations et indiquer les différentes valeurs numériques.



Étape 3 : Utilisation d'une découpeuse laser au Fab Lab Le Dôme à Caen (Trotec Speedy 400).

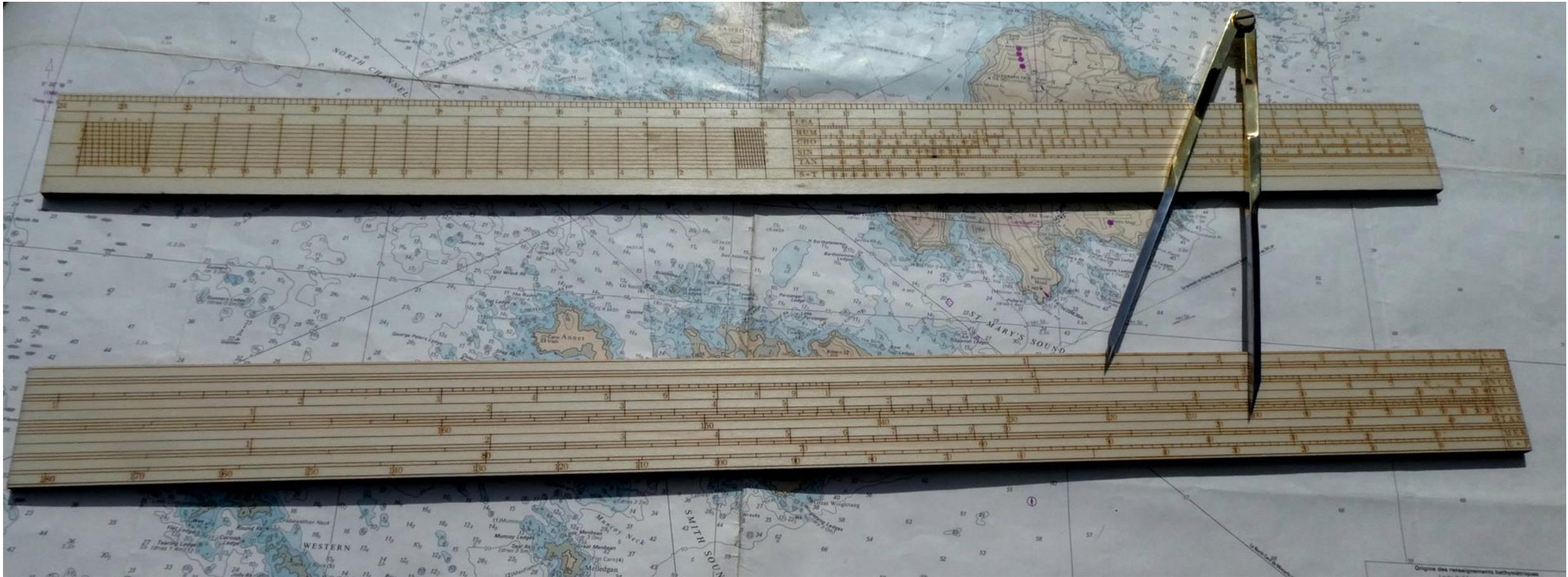
Le matériau utilisé est du contreplaqué de peuplier d'épaisseur 5 mm.

Le fichier SVG est chargé dans Inkscape, on choisit comme pilote d'impression *Trotec Engraver* et une fois les réglages effectués, on lance le logiciel *Job Control* qui pilote la découpeuse laser.

La couleur de tracé des traits détermine le travail effectué par la découpeuse laser (Rouge = découpe, Bleu = gravure fine, Noir = surface gravée).



Résultat final



Bibliographie

- Pierre Bouguer, *Nouveau traité de navigation contenant la théorie et la pratique du pilotage*, Paris, 1753.
- Joel Silverberg, *The Plain and Gunter's Scales – Seventeenth Century Additions to the Toolbox of Students and Practitioners of the Mathematicks*, MAA/AMS Joint Mathematical Meetings, Baltimore, 01/2014.
- Edmund Stone, *The construction and principal uses of mathematical instruments* translated from the French of M. Bion, chief instrument-maker to the French king, to which are added, the constructions and uses of such instruments as are omitted by M. Bion ; particularly of those invented or improved by the English, London, 1723 ([traduction](#) des pages consacrées à l'échelle de Gunter).
- Otto Van Poelje, Gunter Rules in Navigation, *Journal of the Oughtred Society*, Vol. 13, N° 1, Spring 2004, p. 11-22, ([traduction](#)).
- Évelyne Barbin et al., *Histoires de logarithmes*, Ellipses, Paris, 2006.
- Le dossier [Naviguer par l'échelle anglaise](#) sur le site de l'ASSP : <http://assprouen.fr/>.
- La [documentation](#) du projet sur le site du Fab Lab Le Dôme de Caen

