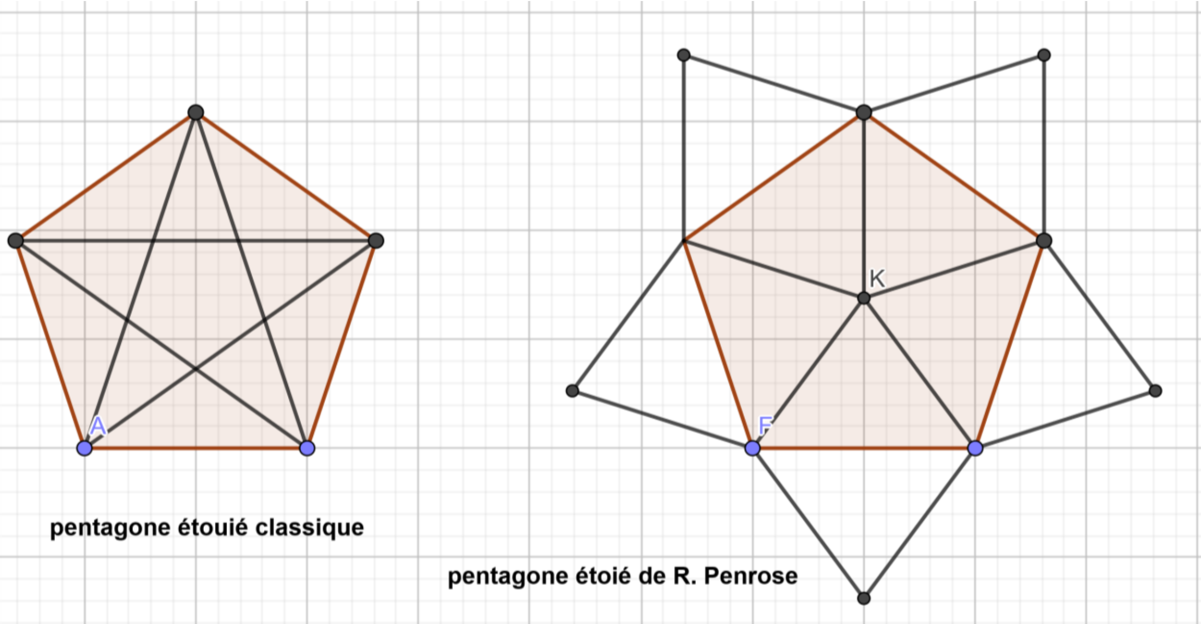
Extension de pavages pentagonal et dodécagonal en « Rosace céleste »

par Danielle Salles-Legac (*)

Quelques rappels

Nous vous avons présenté récemment des activités variées à destination **des élèves du lycée et des élèves professeurs afin de voir ou revoir des propriétés des polygones réguliers convexes et/ou concaves (voyez la bibliographie : « Rosaces célestes »).** Nous indiquons dans le texte les activités accessibles aux plus jeunes (à partir de la classe de quatrième). Ces travaux étaient inspirés de ceux de Roger Penrose et de Frédéric Mansuy. Notre attention avait été attirée par un article paru dans le journal espagnol « El mundo » présentant le sol d'une belle chapelle de l'ile de Minorque : « Santa Maria de Mahon » (voyez la photo ci-dessus). Celui-ci, récemment rénové utilisait une technique de pavage due au mathématicien anglais Roger Penrose. Le motif central nous intrigua : en effet il présentait une étoile à 5 branches que nous primes tout d'abord pour le pentagone étoilé habituel. Un examen attentif nous montra que cette étoile était en réalité formée de 5 losanges constitués de deux triangles d'or obtus et ayant leur grand côté commun et un sommet commun K (**chaque moitié de triangle d'or obtus est coloriée en rose afin de mettre en valeur le pentagone de base de la rosace**).

(*) Avec la collaboration précieuse des membres et sympathisants de l'équipe Géométrie et Relations internationales : Aurélien Detey, Eric Lehman, Frédéric Mansuy, Ruben Rodriguez Herrera, Philippe Langlois.



Rappelons qu'il existe deux sortes de triangles d'or : un triangle d'or dit « aigu » d'angle au sommet π/5 soit 32°(qui apparait dans le figure de gauche et forme les cinq bras du pentagone étoilé classique) et un triangle d'or (appelé aussi « d'argent ») « obtus » d'angle au sommet 108° et d'angles à la base de mesure 36°

Nous avons généralisé le pentagone étoilé de Penrose **aux polygones réguliers étoilés à un grand nombre de côtés**. Ces constructions étant esthétiques nous les avons appelées « **Rosaces célestes ».** Vous pouvez observer en haut de la page suivante une partie de la rosace céleste à 12 côtés ; **les polygones étoilés réguliers intermédiaires construits successivement ont 24 côtés.**

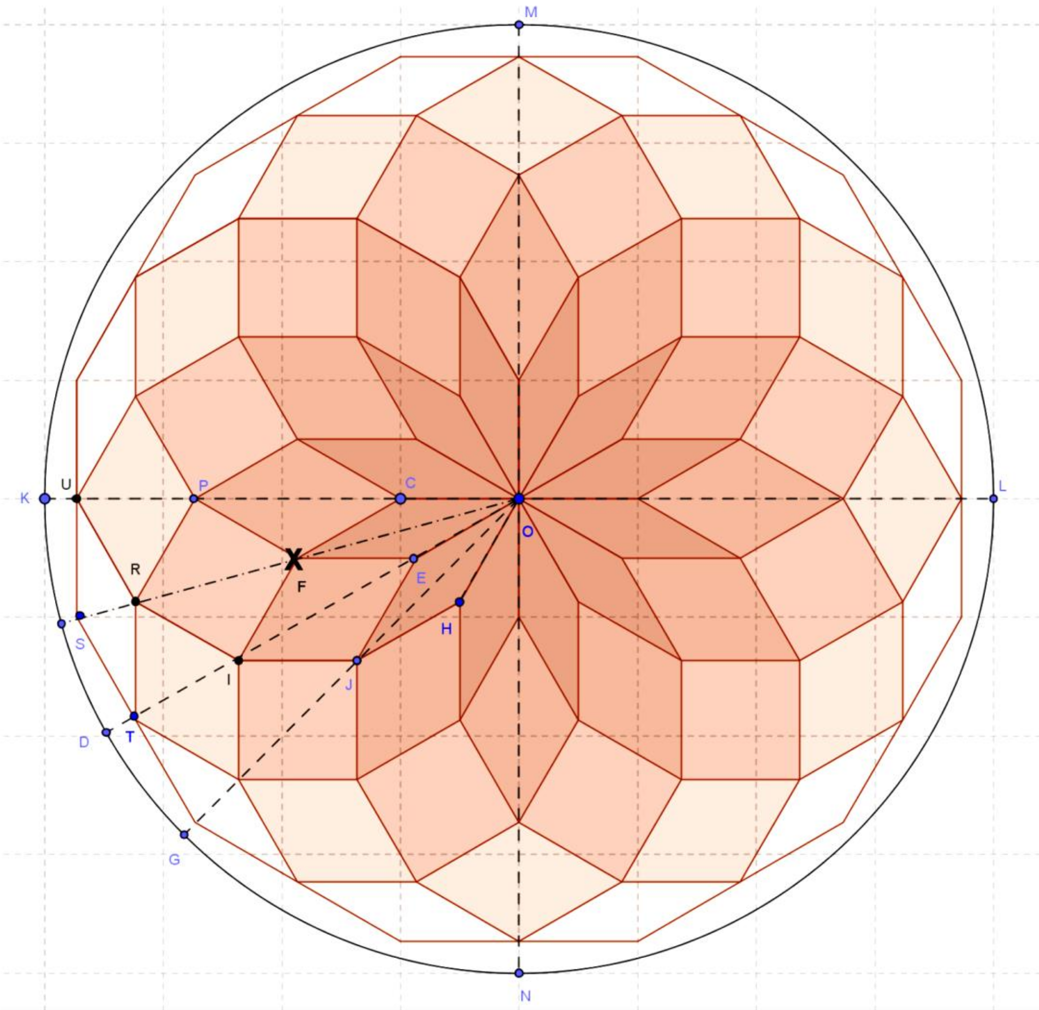
Nous remarquons **que l'enveloppe externe de ces polygones est un polygone régulier convexe à 12 côtés c'est un dodécagone. Ceci, semble-t-il, arrête le processus de construction.**

Tout d'abord rappelons quelques résultats obtenus dans notre article précédant à propos du dodécagone étoilé (les figures Géogébra sont dues à Philippe Langlois). Nous conseillons aux élèves de tracer les triangles d'or en utilisant si possible Géogébra.

En supposant que les losanges apparaissant dans la rosace aient leurs côtés de mesure 1 unité ces énoncés pourront être proposés en exercice aux élèves :

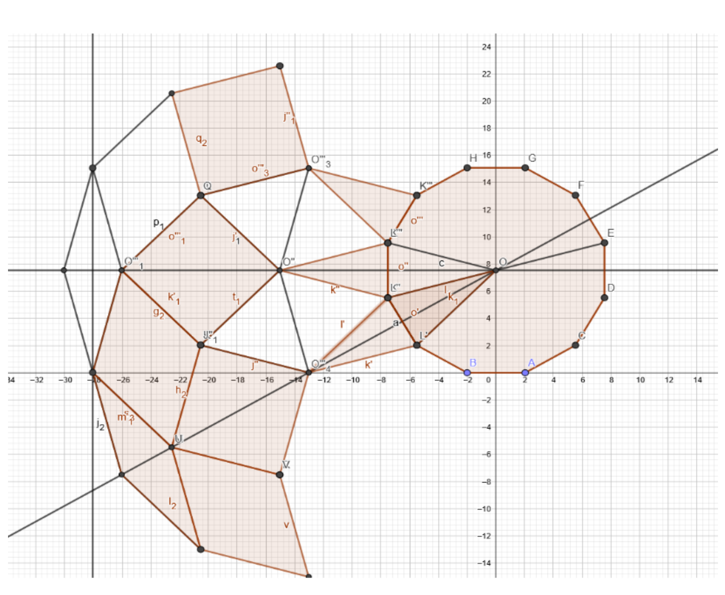
- **La mesure du périmètre du dodécagone entourant la rosace est 24 unités.**
- **Chaque polygone étoilé intermédiaire apparaissant dans la construction a pour périmètre 24 unités.**
- **Les losanges de départ de la construction, centrés en O, ont pour angle aigu π/6 et pour angle obtus 5π/6.**

3 Extension de pavages en «Rosace céleste » par Danielle Salles-Legac



Les losanges successifs pavant la rosace de son centre O jusqu'à sa périphérie ont pour angles :

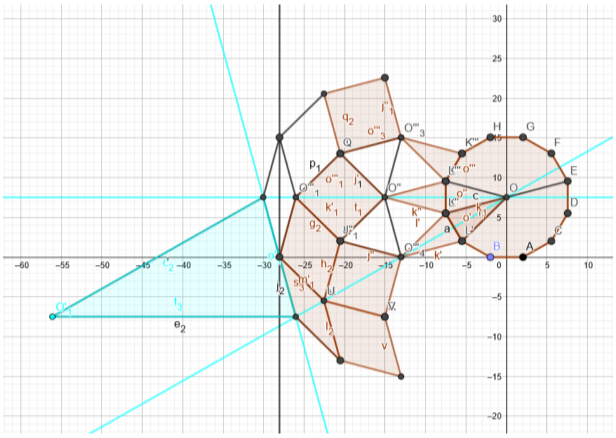
(π/6, 5π/6); (π/3, 2π/3) ; (π/2, π/2) ; (2π/3, π/3) ; (5π/6, π/6).



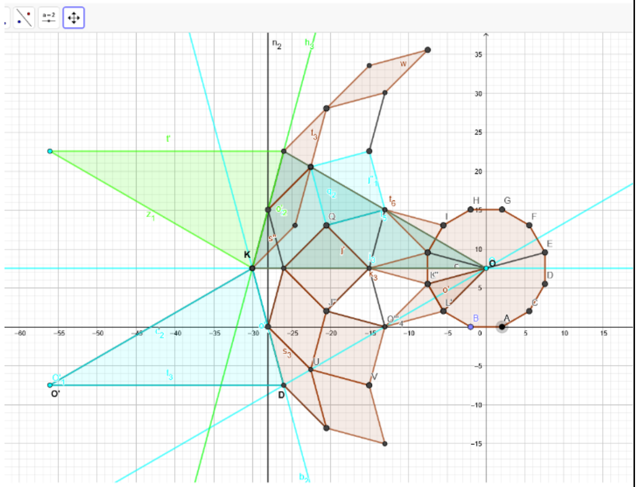
Nous remarquons que ce sont **les mêmes mesures en ordre inversé**, le losange central est un carré. Il n'y a que deux sortes de pavés. Nous nous sommes alors demandé si nous **pouvions continuer le processus de construction d'une rosace céleste plus grande**…

4 IREM de Normandie Equipe géométrie et relations internationales

Si nous utilisons le triangle isocèle de base le côté vert de mesure 2 du dodécagone externe de la rosace et de sommet le centre O de la rosace, nous pouvons, en symétrisant ce triangle par rapport à l'axe défini par la base de ce triangle obtenir un losange vert KODO' de petite diagonale 2. (Nous calculerons plus loin sa grande diagonale ; pour les plus grands).



Ensuite nous effectuerons **des rotations de ce losange autour du centre O** et obtiendrons ainsi le **début d'une nouvelle rosace céleste (à droite).**



Rappelons que, à cause des alignements de sommets des losanges, la bissectrice du triangle KOD est portée par un des côtés d'un des premiers petits losanges, de sommet O.

De plus, les côtés [OK] et [OD] sont respectivement les bissectrices des deux angles au sommet O de deux petits losanges successifs.

Nous en déduisons que le petit angle du grand losange en vert sur la figure a pour mesure π/12. Il nous est maintenant possible de calculer la hauteur HO du triangle isocèle KOD.

En effet nous avons : tan (π/12) = (HK/HO) et tan (π/12) = 0,2679 au dix millième donc HO est peu différent de 1/0,27 = 3,70 et **la grande diagonale du losange vert mesure : 7,4 au dixième près.**

Nous allons alors calculer la mesure du côté [KO] du losange vert :

Dans le triangle KHO nous avons : sin(π/12) = HK/KO = 0,2588 au dix millième donc **KO = 1 / 0,26 = 3,85 au dixième près.**

Nous allons vérifier ce résultat par un calcul (toujours pour les plus grands) :

5 Extension de pavages en «Rosace céleste » par Danielle Salles-Legac

Nous remarquons que l'un des côtés du grand losange vert traverse 3 losanges rouges de la rosace d'origine.

Ces losanges, de côté 1 ont pour angles respectifs :

(π/6, 5π/6) ; (π/2, π/2) , (5π/6, π/6).

La grande diagonale du premier losange mesure :

2 cos (π/12) soit 2 cos (15) = 1,94 au centième.

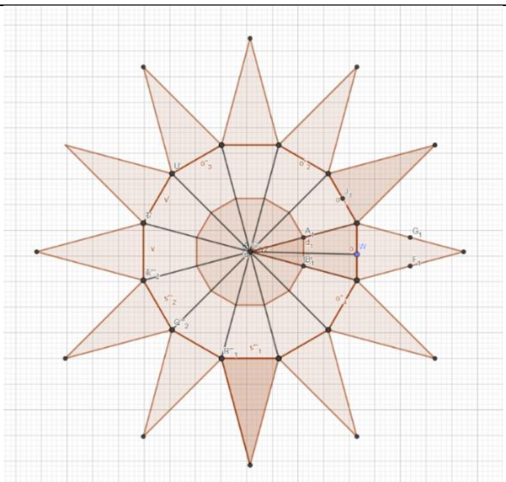
La diagonale du carré de côté 1 mesure 1,41 au millième. La petite diagonale du troisième mesure : 2 sin (15) = 0,52 au centième.

Le côté du losange vert mesure donc : 1,94 + 1,41 + 0,52 = 3,87 soit une différence de 2 centième avec notre calcul précédant.

Pour les plus jeunes on peut éviter ce calcul délicat en remarquant que le contour de la première rosace mesurant 24 unités, si nous divisons ce nombre par (2π) nous obtiendrons la mesure du rayon de cette rosace.

Celle-ci est égale à 3,82 au centième près.

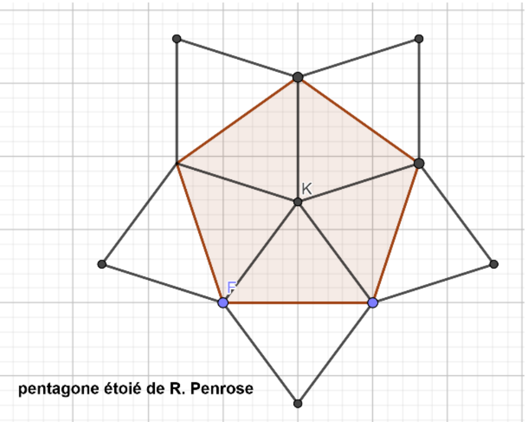
Les côtés des losanges constituant la première rosace mesurant 1 unité, ceux des losanges verts mesurent 3,85 unités (nous avons pris la moyenne de nos 3 résultats), lorsque nous aurons construit la grande rosace céleste verte, son périmètre sera 24 x 3,85 = 92,40 au centième. Son rayon mesurera : 14,71 au centième.

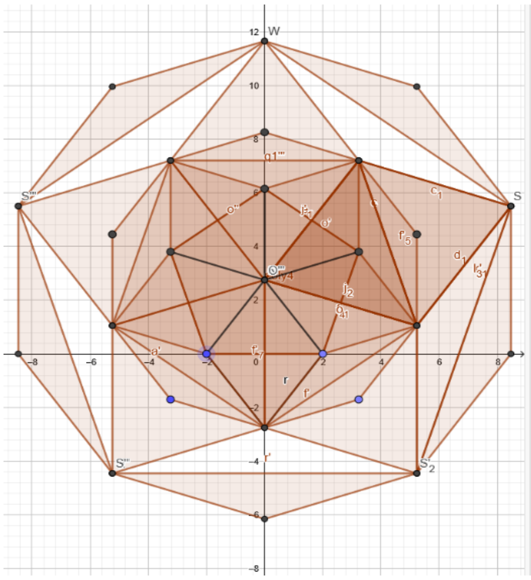
	Nous vous avons représenté ci-contre le dodécagone convexe initial inclus dans le dodécagone étoilé final.

Activité pour les plus jeunes

Si nous reprenons le cas du pentagone étudié précédemment, nous observons un pentagone central dont nous prolongeons les côtés afin d'obtenir un pentagone étoilé dont les sommets permettent de construire un pentagone convexe.

Nous allons alors tenter de construire une rosace céleste de la même façon que pour la rosace céleste à 6 côtés





Nous remarquons que cette fois le nombre de côtés de la rosace a doublé,

Ruben Rodriguez a étudié ce problème de la parité des côtés des rosaces célestes dans un de ses articles en ligne : http://publimath.irem.univ-mrs.fr/publimath.php?r=%22Rodriguez+Herrera+Ruben%22

Bibliographie

Jazbec Simon : The Properties and Applications of Quasicrystals (en ligne)

Seminar II Author: Simon Jazbec Mentor: prof. dr. Janez Dolinšek Ljubljana

Mansuy Frédéric : Supersymétrie d’ordre 5. En ligne : http://supersymetrie.fr/

Mansuy Frédéric : The Fibonacci Quarterly". En ligne :

https://www.fq.math.ca/Papers1/55-5/Mansuy.pdf

Rodriguez Herrera Ruben en ligne : http://publimath.irem.univ-mrs.fr/publimath.php?r=%22Rodriguez+Herrera+Ruben%22

Salles-Legac Danielle (en ligne) irem/caen Rosaces célestes

Shalom Eliahou Image des mathématiques : Pavages, symétrie d’ordre 5 et suites de Fibonacci. En ligne : http://images.math.cnrs.fr/Pavages-symetrie-d-ordre-5-et-suite-de-Fibonacciun-amateur-passionne.html

WIKIPEDIA en ligne :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion_Projet:Min%C3%A9raux_et_roc hes