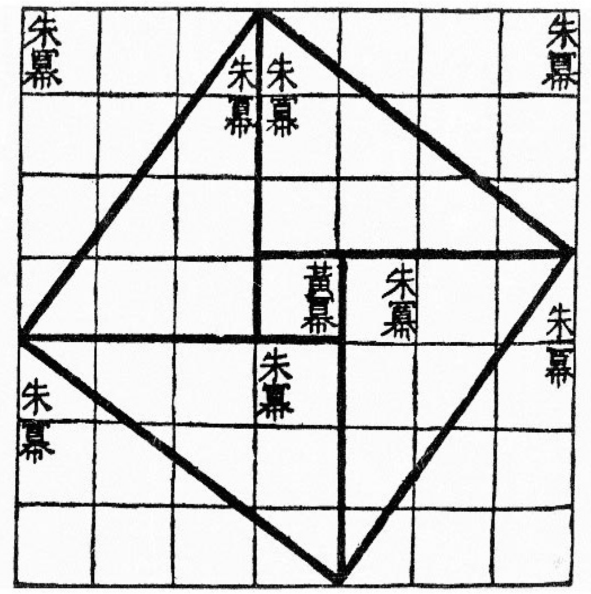
IREM
DE CAEN
NORMANDIE

UNIVERSITÉ DE CAEN NORMANDIE
campus 2, bâtiment Sciences 3, porte S3 306
Adresse postale: BP 5186, CS 14032, 14032 CAEN Cedex
Téléphone: 02 31 56 74 02
Adresse électronique: irem@unicaen.fr
Site: http://irem.unicaen.fr

Mathématiques de Seconde appuyées sur l'histoire

stage du Plan académique de formation (19A0050166 - 41624)
14 février et 27 mars 2020

Recueil de textes historiques (première partie)



Document conçu par le Cercle de lecture en histoire des mathématiques

Texte n°1. Incommensurabilité de la diagonale du carré et de son côté par la méthode du pair et de l'impair

1. Premières allusions à cette démonstration

Aristote, ***Premiers analytiques*** *(Organon III)*
traduction française par Jules Tricot, Vrin, 1e éd. 1936, livre I, chapitre 23, 41a26-32[1]

On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire. Car tel est, avons-nous dit, le raisonnement par l'absurde : il consiste à prouver l'impossibilité d'une chose au moyen de l'hypothèse concédée au début[2].

Aristote, ***Premiers analytiques*** *(Organon III)*
traduction française par Jules Tricot, Vrin, 1e éd. 1936, livre I, chapitre 44, 50a37-38

Dans le cas [des raisonnements par l'absurde], même en l'absence d'une convention préalable, on donne son assentiment en raison de l'évidence de l'erreur : par exemple, si la diagonale est commensurable, les nombres impairs seront égaux aux nombres pairs, ce qui est absurde.

Platon, ***Théétète***
traduction française par Michel Narcy, Flammarion, 1e éd. 1994, 190b-c[3]

Socrate - Examine si tu as jamais entrepris de te persuader toi-même qu'en tout état de cause une chose en est une autre, ou si, tout au contraire, même en rêve, tu n'as jamais osé te dire à toi-même que, tout bien considéré, décidément les impairs sont pairs, ou autre chose du même genre.
Théétète - Tu dis vrai.
Socrate - Mais crois tu que quelqu'un d'autre, en bonne santé ou pris de délire, ait osé se dire sérieusement à lui-même, en s'efforçant de s'en persuader, que nécessairement le bœuf est un cheval, ou deux, un ?
Théétète - Par Zeus, non, moi, je ne le crois pas.

---

[1] Toutes les éditions ou traductions des ouvrages d'Aristote indiquent en marge les numéros de pages, de colonnes (a ou b) et de lignes qui correspondent dans l'édition publiée à Berlin par Immanuel Bekker de 1831 à 1836. C'est cette pagination qui sert traditionnellement lorsqu'on veut citer un passage d'Aristote.

[2] οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης. Τὸ μὲν οὖν ἴσα **γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις** συλλογίζεται, τὸ δ´ ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν. Τοῦτο γὰρ ἦν τὸ **διὰ τοῦ ἀδυνάτου** συλλογίσασθαι, τὸ δεῖξαί τι ἀδύνατον διὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑπόθεσιν.

[3] Toutes les éditions ou traductions des ouvrages de Platon indiquent en marge les numéros de pages et les repères dans la page (a, b, c, d ou e) qui correspondent dans l'édition publiée à Genève par Henri Estienne en 1578. C'est cette pagination qui sert traditionnellement lorsqu'on veut citer un passage de Platon.

2. La démonstration qu'on trouve dans certaines éditions des *Éléments* d'Euclide (dernière proposition du dixième livre)[4]

Les Œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours, par F. Peyrard, tome second, Paris, 1816, p. 416-419.

PROPOSITION CXVII. Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le carré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale ; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.

Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible ; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le carré de ΑΓ est double du carré de ΑΒ (47.1) ; mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6.10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la qui ont la même raison avec eux ; le nombre ΕΖ ne sera pas l'unité. Car si ΕΖ était l'unité, à cause que ΕΖ a avec Η la raison que ΑΓ a avec ΑΒ, et que ΑΓ est plus grand que ΑΒ, l'unité ΕΖ serait plus grande que le nombre Η, ce qui est absurde ; ΕΖ n'est donc pas l'unité ; ΕΖ est donc un nombre.

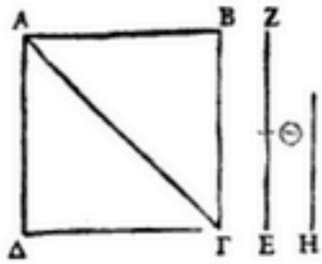
Et puisque ΓΑ est à ΑΒ comme ΕΖ est à Η, le carré de ΓΑ sera au carré de ΑΒ comme le carré de ΕΖ est au carré de Η. Mais le carré de ΓΑ est double du carré de ΑΒ ; le carré de ΕΖ est donc double du carré de Η ; le carré du nombre ΕΖ est donc pair. Le nombre ΕΖ est donc pair ; car s'il était impair, son carré serait impair ; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23.9) ; le nombre ΕΖ est donc un nombre pair. Partageons le nombre ΕΖ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres ΕΖ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entre eux. Mais le nombre ΕΖ est pair ; le nombre Η est donc impair. Car s'il était pair, les nombres ΕΖ, Η, qui sont premiers entre eux, seraient mesurés par deux ; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre Η n'est donc pas un nombre pair ; il est donc impair. Mais ΕΖ est double de ΕΘ ; le carré de ΕΖ est donc quadruple du carré de ΕΘ (11.8). Mais le carré de ΕΖ est double du carré de Η ; le carré de Η est donc double du carré de ΕΘ ; le carré de Η est donc pair ; le nombre Η est donc pair, d'après ce qui a été dit (29.9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible; la droite ΑΓ n'est donc pas commensurable en longueur avec ΑΒ ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

---

[4] Cette proposition et cette démonstration sont de style euclidien, mais sont considérées comme apocryphes. Elles semblent inspirées d'un commentaire d'Alexandre d'Aphrodise (IIe s. après J. C.) sur Aristote.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Sit quadratum ΑΒΓΔ, ipsius autem diameter ΑΓ; dico ΑΓ incommensurabilem esse ipsi ΑΒ longitudine.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερὸν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι[2] τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν[3] Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονάς ἐστὶν ὁ ΕΖ. Εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ[4] λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς[5] τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν[6] ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Si enim possibile, sit commensurabilis; dico ex hoc sequi eumdem numerum parem esse et imparem; evidens est quidem quadratum ex ΑΓ duplum esse quadrati ex ΑΒ. Et quoniam commensurabilis est ΑΓ ipsi ΑΒ, ipsa ΑΓ igitur ad ΑΒ rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat rationem quam ΕΖ ad Η, et sint ΕΖ, Η minimi eorum eamdem rationem habentium cum ipsis; non igitur unitas est ΕΖ. Si enim ΕΖ esset unitas, et habet rationem ad Η quam habet ΑΓ ad ΑΒ, et major ΑΓ quam ΑΒ; major igitur et ΕΖ unitas quam Η numerus, quod absurdum; non igitur unitas est ΕΖ; numerus igitur. Et quoniam est ut

3. La tentative de généralisation de Théodore de Cyrène

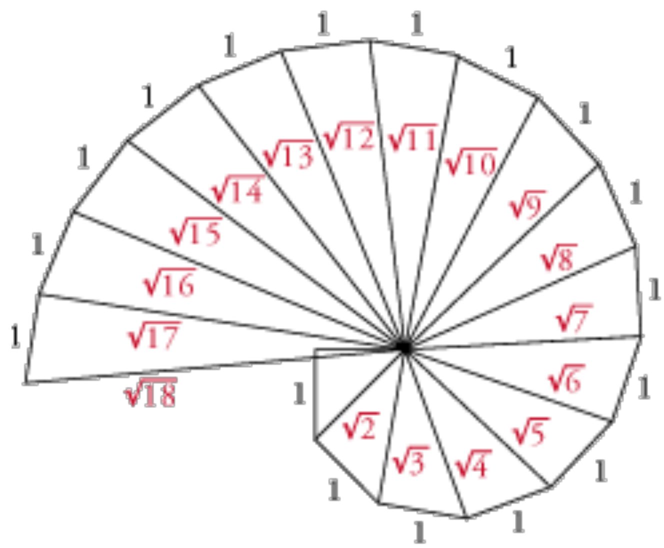
Platon, ***Théétète***
traduction française par Michel Narcy, Flammarion, 1e éd. 1994, 147d-e

Théétète - Théodore que voici nous avait tracé quelques figures à propos de racines et nous avait montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point pour la longueur commensurables avec celle d'un pied, et, les prenant ainsi, l'une après l'autre, il était allé jusqu'à celle de dix-sept pieds et il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là.

Commentaire (d'après I. Bashmakova, M. Daumas, S. Ofman…)

Pourquoi Théodore s'est-il arrêté là ? Il est possible qu'il ait raisonné ainsi.
Soit n impair. Supposons $\sqrt{n}$ rationnel, il existe donc des entiers p et q tels que $p^2 = nq^2$. On voit que p et q ont même parité, et on peut donc les supposer impairs. On a alors : $q^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 8l + 1$, où l est entier puisque $k(k+1)$ est pair. De même, $p^2 = 8m + 1$ où m est entier. On obtient : $nq^2 = n(8l+1) = 8nl + n = p^2 = 8m + 1$. On voit donc que $n - 1 = 8(m - nl)$ est divisible par 8. Comme $n - 1$ n'est pas divisible par 8 pour $n \in \{3,5,7,11,13,15\}$, on peut conclure que $\sqrt{n}$ est irrationnel pour toutes ces valeurs de n. Pour $n = 9$, $\sqrt{n}$ est évidemment entier et donc rationnel. Pour $n = 17$, la méthode ne permet pas de conclure, et Théodore aurait donc bloqué sur cette valeur.

Autre hypothèse, moins convaincante : dans l'« escargot de Pythagore », $\sqrt{17}$ est la dernière racine carrée que l'on peut construire en un seul tour.



Texte n°2

Procédé de Toepler pour l'extraction de racine au moyen de la machine à calculer de Thomas. Communiqué par le professeur F. Reuleaux de Berlin.

Original : *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen*, 44 (1865), Berlin, p. 112 - 116. Traduction IREM de Caen.

Il pourrait être intéressant de communiquer aux possesseurs et amis de la machine à calculer de Thomas un procédé que le professeur docteur Toepler à Riga a conçu pour l'extraction de racines carrées au moyen de l'arithmomètre et qui, en vertu de sa simplicité, doit être accueilli comme un heureux enrichissement des ressources théoriques du calcul mécanique.

Théorie du procédé. – Le procédé de Toepler est fondé sur des propriétés connues des suites arithmétiques. Pour la suite arithmétique de n termes de premier terme a et de raison d, la somme s est :

$$s = \left(a + \frac{(n-1)d}{2} \right) n \qquad (1)$$

et le dernier terme u est :

$$u = a + (n-1)d \qquad (2)$$

Si dans une telle suite, on pose $a = 1$, $d = 2$, alors s est la somme des n premiers nombres impairs et on a d'après la formule (1) $s = (1 + n - 1)n = n^2$, c'est-à-dire que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2. Dans ce contexte, d'après la formule (2), le dernier terme est $u = 2n - 1$ ou $u + 1 = 2n$, c'est-à-dire que le dernier terme de la suite des n premiers nombres impairs augmenté de l'unité donne le double du nombre de termes.

D'après ces deux théorèmes, les trois termes n^2, $2\,nm$, m^2 du carré d'un binôme $n+m$ peuvent être formés facilement sur la machine à calculer comme des sommes de suites et trouvés dans le compteur du quotient[1] en les ôtant terme par terme d'un radicande N.

À cette fin, on partage le radicande en tranches de deux positions à partir de la virgule, comme pour l'extraction de racine usuelle. En commençant par la gauche, on forme d'abord n^2 en réglant 1, 1 + 2 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7 etc. et en en ôtant chaque terme un par un, de sorte que n apparaît au quotient dès que la somme $s = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + u$ a épuisé les positions du radicande concernées. On additionne alors l'unité au dernier terme subsistant u, de sorte que u devient $u + 1 = 2n$. On reporte ce nombre en tant que nombre à soustraire sous la position suivante vers la droite et l'on ramène le chiffre 1 sous la deuxième position vers la droite (à condition que $u + 1 = 2n$ puisse être ôté de la position qui est au-dessus), comme premier terme de la suite arithmétique 1 + 3 + 5 +… qui doit avoir m^2 pour somme. On continue à soustraire, en ajoutant à chaque fois 2 au nombre à soustraire dans la suite pour m. La nouvelle position au quotient doit être m dès que les positions du radicande concernées sont épuisées, par le fait que $2n+m$ a été progressivement formé comme nombre à soustraire et a été retiré m fois. Dans le quotient, on a donc n et m placés consécutivement. S'il y a un reste, on pose le nombre à soustraire u', on lui ajoute 1

[1] Lucarnes D des quotients (voir schéma de la machine).

et on continue comme indiqué plus haut. Si $u + 1 = 2n$ ou ce nombre après le premier terme 1 de la suite pour m ne peut pas être ôté des positions du radicande se trouvant au-dessus, alors la suite pour m ne commencera pas à la première position à côté de $u + 1 = 2n$, mais une position plus loin à droite et de même le nombre à soustraire est reporté d'encore une position vers la droite ; au quotient apparaît alors un zéro.

Texte en allemand

Toepler's Verfahren der Wurzelausziehung mittelst der Thomas'schen Rechenmaschine. *Mitgeteilt von Prof. F. Reuleaux in Berlin.*
Den Besitzern und Freunden der Thomas'schen Rechenmaschine dürfte die Mitteilung eines Verfahrens interessant sein, welches Prof. Dr. Toepler in Riga für die Ausziehung von Quadratwurzeln mittelst des Arithmometers ersonnen hat und welches vermöge seiner Einfachheit als eine glückliche Bereicherung der theoretischen Hilfsmittel des Maschinenrechnens willkommen zu heissen ist.
Theorie des Verfahrens. – Das Toepler'sche Verfahren ist begründet auf bekannte Eigenschaften der arithmetischen Reihen. Für die arithmetische Reihe von n Gliedern mit dem Anfangsgliede a und der Differenz d ist die Summe s: $s = \left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right) n$ (1) *und das letzte Glied u:* $u = a + (n-1)d$ (2).
Setzt man in einer solchen Reihe a = 1, d = 2, so ist s die Summe der n ersten ungeraden Zahlen (1 + 3 + 5 + 7 +... d) und es wird nach Formel (1) $s = (1 + n - 1)\, n = n^2$, *d.h. die Summe der n ersten ungeraden Zahlen ist =* n^2; *dabei wird nach Formel (2) das letzte Glied* $u = 2n - 1$ *oder* $u + 1 = 2\,n$, *d.h. das letzte Glied der Reihe der n ersten ungeraden Zahlen vermehrt um die Einheit gibt die doppelte Gliederzahl an. Nach diesen beiden Sätzen können für das Quadrat eines Binoms n + m die drei Glieder* n^2, *2 nm,* m^2 *auf der Rechenmaschine leicht als Reihensummen gebildet und durch gliedweises Abziehen von einem Radicanden N im Quotientenzählwerk der Maschine gefunden werden.*

Man theilt zu diesem Ende wie bei dem gewöhnlichen Wurzelausziehen den Radicanden vom Komma an zu je 2 Stellen ab, und bildet, zur Linken beginnend, durch Einstellen von 1, 1 + 2 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7 u.s.w. und jedesmaliges Abziehen der einzelnen Glieder gliedweise zuerst n^2, *wobei im Quotienten n erscheint, sobald die Summe s = (1 + 3 + 5 + 7 +... u) die betreffenden Radicandenstellen erschöpft hat. Darauf addirt man zu dem noch dastehenden letzten Gliede u die Einheit, so daß u in u + 1 = 2 n übergeht, verlegt diese Zahl als Subtrahenten unter die nächste Stelle zur Rechten und bringt unter die zweite Stelle zur Rechten wieder die 1 (vorausgesetzt, daß u + 1 = 2n von den darüber stehenden Stellen abziehbar ist) als erstes Glied der arithmetischen Reihe 1 + 3 + 5 +..., welche* m^2 *zur Summe haben soll, und zieht wieder ab, nach dem einzelnen Abziehen in der Reihe für m jedesmal 2 zufügend. Die neue Quotientenstelle muß m seyn, sobald die betreffenden Radicandenstellen erschöpft sind, indem dann 2n + m im Subtrahenden successiv gebildet und m mal abgezogen worden ist. Im Quotienten stehen darauf n und m in aufeinanderfolgenden Stellen. Bleibt ein Rest, so wird die Zahl im Subtrahenden = u' gesetzt, zu ihr nun 1 addirt und wie oben angegeben fortgefahren. Läßt sich u + 1 = 2n, oder diese Zahl nebst dem Anfangsgliede 1 der Reihe m nicht von den darüberstehenden Radicandenstellen abziehen, so wird die m-Reihe nicht in der ersten Stelle neben u + 1 = 2n, sondern um eine Stelle weiter rechts begonnen und der Subtrahend ebenfalls um noch eine Stelle nach rechts verlegt; im Quotienten erscheint dann eine Null.*

Arithmomètre virtuel sur Internet :

http://www.aconit.org/arithmometre/

Une autre simulation plus simple :

http://www.mechrech.info/workmod/thomas/ThomasMod.html

[Thomas de Colmar], *Instruction pour se servir de l'arithmomètre,* Paris, Malteste, 1868, p. 23-25 (il s'agit d'un ajout aux éditions antérieures, dont la première date de 1851).

Il a été découvert un autre mode d'extraction de la racine carrée.

La théorie de ce procédé est basée sur les propriétés connues des progressions arithmétiques.

Si dans une progression on prend pour premier membre 1, et pour différence 2, la somme des membres est égale à celle des premiers nombres impairs 1 + 3 + 5 + 7, etc.

La somme des premiers nombres impairs égale le carré du nombre des membres, et le dernier membre de la progression, augmenté de l'unité, donne le nombre double des membres.

1^er^ EXEMPLE.

Pour extraire la racine carrée de 2,209 :

1° Faire paraître le nombre dans les lucarnes *C*.

2° Pousser le bouton *B* à *division*.

3° Diviser le nombre donné en tranches de deux chiffres comme il a été expliqué.

4° Faire glisser la platine mobile de gauche à droite jusqu'à ce que la 1^re^ tranche du carré se trouve au-dessus du bouton A_1.

5° De la 1^re^ tranche 22 soustraire successivement en les indiquant à l'aide du bouton A_1 1, 1 + 2 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7, il restera dans les lucarnes *C* 6, inférieur au dernier nombre (7) indiqué avec le bouton A_1.

5° Augmenter ce dernier nombre (7) de l'unité.

7° Rentrer la platine mobile d'un cran.

8° Du reste et de la seconde tranche 609 soustraire en indiquant avec le bouton A_2, et en laissant le bouton A_1 au chiffre 8; 81, 81 + 2 = 83, 83 + 2 = 85, 85 + 2 = 87, 87 + 2 = 89, 89 + 2 = 91 (augmenter le bouton A_1 de l'unité), 91 + 2 = 93, on voit apparaître dans les lucarnes *C* des *zéros*.

Dans les lucarnes *D* des *quotients* on lit le nombre 47, qui est la racine carrée de 2,209.

2^e^ EXEMPLE.

On cherche la racine carrée de 41,621 :

Préparer la machine ainsi qu'il a été expliqué dans les quatre premiers paragraphes ci-dessus.

De la première tranche 4, soustraire successivement 1, 1 + 2 = 3; il apparaîtra sur la platine, à la place de cette tranche, un *zéro*.

Rentrer la platine mobile d'un cran.

La deuxième tranche 16 est inférieure au nombre 4 (3 + 1), indiqué par le bouton *A*. Rentrer la platine d'un cran.

De la deuxième et de la troisième tranches 1621, soustraire en indiquant avec le bouton A_2 et en laissant A_1 à 4 et A_2 à 0, 401, 401 + 2 = 403, 403 + 2 = 405, 405 + 2 = 407, et on aura pour reste 5.

Si l'on veut avoir des fractions décimales, il faut rentrer la platine d'un cran, ce qui revient à abaisser une autre tranche (00); alors on a dans les lucarnes, au-dessus du nombre 408 (407 + 1), indiqué par les boutons A_1, A_2, A_3, le nombre 50.

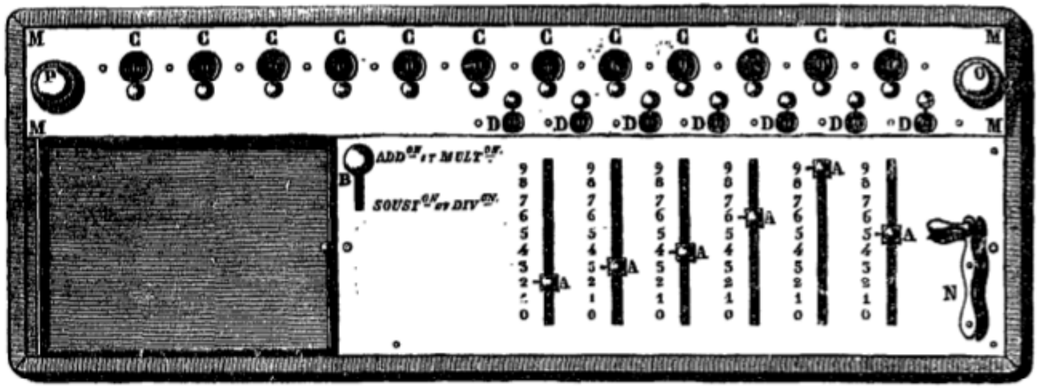
On ne peut pas retrancher 408 de 50, rentrer la platine d'un cran pour abaisser encore deux *zéros*.

Du nombre 50,000 soustraire, en laissant le bouton A_1 à *zéro*, 40,801 ; il restera 9,199.

Rentrer la platine. De 919,900 soustraire (avec 40,801 + 1) 408,021, 408,021 + 2 = 408,023, il restera dans les lucarnes 103,856, inférieur au nombre 408,023 indiqué par les boutons *A*.

La racine carrée de 41,621 est 204,012, avec un reste 103,856; cette racine est inscrite dans les lucarnes *D* et le reste dans les lucarnes *C*.

ARITHMOMÈTRE



EXPLICATION DU DESSIN

A Boutons glissant dans les coulisses pour marquer les chiffres qu'on veut soumettre à l'opération.

B Bouton indiquant l'opération que l'on veut faire.

C Lucarnes où se trouvent les résultats des opérations.

D Lucarnes indiquant le multiplicateur et le quotient.

M Platine mobile qui porte les cadrans.

N Manivelle pour donner le mouvement à la machine.

O Bouton de droite pour remettre les chiffres des lucarnes D à *zéro*.

P Bouton de gauche pour remettre les chiffres des lucarnes C à *zéro*.

Nota. — Ces deux boutons servent aussi à lever et faire glisser la platine M.

Texte n°3. Recorde (Tenby, 1512 – Londres, 1558) et la règle d'alliage

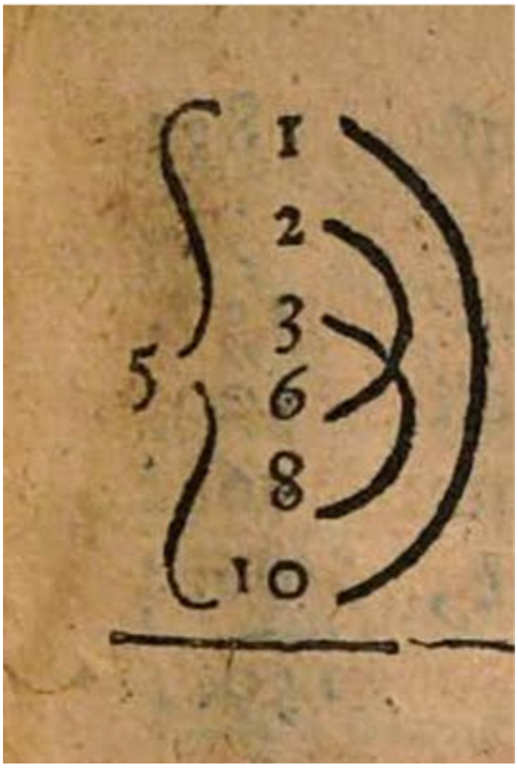
Source : Robert Recorde, *The Ground of Artes, Teaching the Perfect Worke and Practise of Arithmeticke*, Londres, Roger Jackson, 1618, p. 364-377 (extraits). Traduction de l'anglais par l'IREM de Caen. La première édition de cet ouvrage date de 1543, il a été réédité 46 fois jusqu'en 1699. Le chapitre concerné n'a pas changé pas au fil des éditions, mis à part l'orthographe.

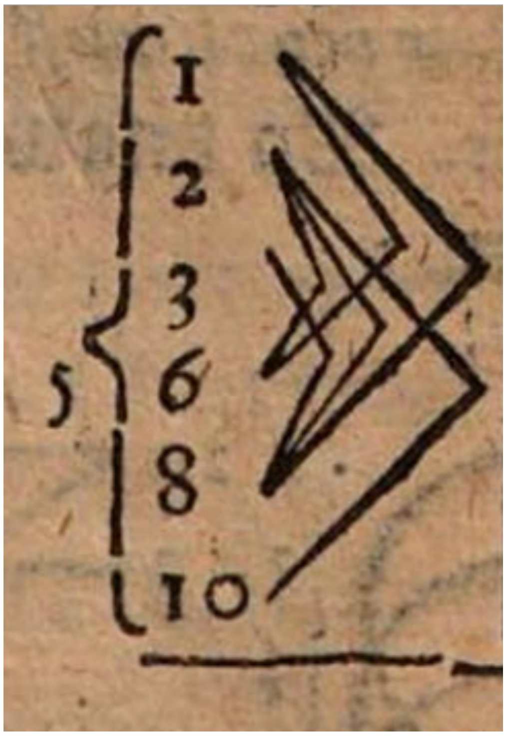
Le maître. Maintenant, je vais m'occuper de la règle d'alliage. Son nom vient de ce qu'elle permet de lier ou de mélanger ensemble plusieurs unités de marchandise de prix divers et en quantités diverses. On pourrait aussi bien l'appeler la règle de mélange. Elle est très utilisée dans la composition des médicaments, et aussi dans l'alliage des métaux. On s'en sert pour faire des mélanges de vins, mais dans ce domaine-ci, je souhaiterais qu'elle soit moins utilisée qu'elle ne l'est de nos jours. Voici comment fonctionne cette règle. Lorsque différents nombres doivent être mélangés, pose-les les uns sous les autres, dans l'ordre croissant. Sur la gauche, pose le nombre commun auquel tu veux les réduire. Note ensuite quels sont les nombres qui sont plus petits que ce nombre commun, et quels sont ceux qui sont plus grands. Avec ton crayon, fais des traits reliant deux nombres, de sorte que l'un soit plus petit que le nombre commun et l'autre soit plus grand. Autant il est nécessaire de lier chaque nombre plus petit avec un nombre plus grand et chaque nombre plus grand avec un nombre plus petit, autant on a la liberté de les relier plus d'une fois : il peut donc y avoir pour un seul problème plusieurs solutions. Une fois que tu les as ainsi reliés, pour chacun des nombres plus petits, note de combien il est plus petit que le nombre commun ou moyenne voulue, et pose cette différence à droite de chacun des nombres plus grands qui lui sont reliés. De même, pour chacun des nombres plus grands, note son excès par rapport à la moyenne voulue et pose-le à côté de chacun des nombres plus petits qui lui sont reliés. En les additionnant, fais la somme de toutes ces différences pour toutes les espèces : ce sera le premier nombre dans la règle d'or. Le second nombre sera la quantité totale de toutes les espèces. La troisième nombre sera la somme des différences pour une espèce particulière. En prenant les espèces l'une après l'autre, et à partir de ces trois nombres, on trouvera le quatrième, qui donnera la juste portion de chaque espèce particulière dans le mélange. Je vais maintenant te faire comprendre ça par des exemples.
Un problème de mélange de vins. Il y a quatre sortes de vins, de différents prix : l'un à 6 pences le gallon, un autre à 8 pence, le troisième à 11 pence et le quatrième à 15 pence le gallon. Je voudrais faire un mélange de 50 gallons de tous ces vins, de sorte que le prix de chaque gallon soit de 9 pence. Je demande combien je dois prendre de chaque sorte de vin ?

[L'écolier résout correctement le problème par la méthode indiquée…]

Le maître. Puisque je vois que tu as si bien abordé ce problème, je vais te proposer cet autre exemple, offrant plus de de variété dans les alliages ou les combinaisons.
Un problème d'épices. Un marchand a l'intention de mettre sur le marché un mélange d'épices, à savoir de clous de girofle, de noix de muscade, de safran, de poivre, de gingembre et d'amandes. Les clous de girofles coûtent 6 shillings la livre, les noix de muscade 8 shillings, le safran 10 shillings, le poivre 3 shillings, le gingembre 2 shillings et les amandes 1 shilling. Quelle quantité de chaque sorte lui faudra-t-il pour avoir au total 300 livres de mélange dont chaque livre coûtera 5 shillings ?

L’écolier. Je vais essayer. Je pose d’abord les six prix. Sur la gauche, je pose le prix commun, 5 shillings. Ensuite je les relie : 1 avec 10, 2 avec 6 et 3 avec 8. Comme¸ca (*fig*.a) :

a


b


Le maître. J’avais dans l’esprit de les combiner de manière plus variée, mais je vais d’abord me contenter de voir ton travail personnel. Ensuite, il est possible que s’ensuivent rapidement davantage de variations dans la manière de combiner.

L’écolier. Bon alors, pour continuer comme j’ai commencé, je cherche la différence entre 1 et 5, qui est 4, et je la pose à côté de 10. Ensuite à côté de 1 je pose 5, qui est l’excès de 10 sur 5. Je prends la différence entre 2 et 5, qui est 3, et donc je pose 3 à côté de 6, parce qu’il est combiné avec 2. Et de même la différence de 6 par rapport à 5, qui est 1, je la pose à côté de 2. Puis je prends la différence de 3 à 5, qui est 2, que je pose à côté de 8. Et à côté de ce 3, je pose la différence de 8 par rapport à 5, qui est 3. Ensuite j’additionne toutes ces différences, elles font un total de 18, que je pose comme premier nombre dans la règle d’or. Il apparaît alors que je dois prendre 83⅓ livres d’amandes, 16⅔ livres de gingembre, 50 livres de poivre, 50 livres de clous de girofle, 33½ livres de noix de muscade et 66⅔ livres de safran. Pour vérifier ces résultats, je multiplie la quantité de chaque marchandise par son prix : je multiplie la quantité d’amandes 83⅓ par 1 qui est son prix ; la quantité de gingembre 16⅔, je la multiplie par le prix 2, et ainsi pour chacun des autres. En additionnant le tout, je trouve que le total est de 1500, ce qui est aussi le résultat de la multiplication de la quantité globale 300 par le prix commun 5. Il semble donc que j’ai fait du bon travail.

Le maître. Bien. Maintenant, c’est moi qui vais faire le mélange, pour mieux mettre ton intelligence à l’épreuve. […] Dans cette variation (*fig*. b), j’ai relié 1 avec 6 et avec 8, donc je pose 4 à côté de 6 et à côté de 8. Ensuite [...]

Le maître. [Il donne la solution obtenue] Je dois donc prendre 34 $^2/_7$ livres d'amandes, […]

Mais le temps s'écoule, et il reste encore diverses choses dont j'aimerais bien te donner un avant-goût avant de partir.

L'écolier. S'il vous plaît, avant de laisser ce problème, faites-moi voir toutes les variations. Je me sens capable d'en faire deux ou trois supplémentaires.

Le maître. Je serais content de te voir faire deux ou trois variations supplémentaires. Mais je n'ai pas du tout envie de rester le temps qu'il faudrait pour les voir toutes, car on peut en faire plus de 300.

L'écolier. Je n'aurais jamais cru qu'on pouvait faire autant de variations !

Le maître. Ce n'est point merveille : dans certains problèmes où on applique la règle de mélange, il y a plus de 1000 manières de faire des variations. Et maintenant, pour en finir avec cette règle, je vais te montrer un ou deux problèmes sur les alliages de métaux, de sorte que tu puisses en fabriquer d'autres et t'exercer, car c'est utile dans les affaires – pas tant pour les orfèvres que pour ceux qui frappent les monnaies.
Un problème d'alliage. Si un monnayeur a de l'or à 22 carats, de l'or à 23 carats, de l'or à 24 carats, et aussi de l'or à 15 carats, à 16 carats et à 18 carats, et s'il les mélange dans le but d'obtenir 100 onces d'or à 20 carats, combien doit-il prendre de chaque sorte ?

L'écolier (applique la règle et trouve une solution). [. . .]

Le maître. Tu as bien résolu le problème. Mais comment se fait-il que tu n'aies pas eu d'hésitation sur le sens du mot « carat » qui est nouveau pour toi ?

L'écolier. Parce qu'en voyant que vous étiez tellement pressé de finir, j'ai pensé que ce n'était pas le moment de poser ce genre de question. Dans ce cas comme dans le précédent, il me suffisait d'avoir les proportions. Je suis sûr que vous m'enseignerez cela une autre fois, avec plusieurs autres choses dont je vous ai entendu parler et que j'ai un grand désir de connaître.

Le maître. Ta réponse est raisonnable. Quant à ta demande et à ton attente, j'ai l'intention de les satisfaire, avec l'aide de Dieu.

⁂

Extraits du texte anglais (l'orthographe a été modernisée)

Master. *Now will I go in hand with the rule of alligation, which has his name for that by it, there are diverse parcels of sundry prices, and sundry quantities alligate, bound or mixed together, whereby it might well be called the rule of mixture, and it has great use in the composition of medicines, and also in the mixture of metals, and some use it has in mixtures of wines, but I would wish it were less used therein than it is nowadays. The order of the rule is this: when any sums are proposed to be mixed, set them in order one over another, and the common number whereunto you will reduce them, set on the left hand, then mark what sums be lesser than that common number, and which be greater, and with a draft of your pen, evermore link two numbers together, so that one be lesser than the common number, and the other greater than he, for two* *greater or two smaller cannot well be linked together, and the reason is this, that one greater and one smaller may be so mixed that they will make the mean or common number very well: but ij lesser can never make so many as the common number, being taken orderly: no more can two sums greater than the mean, never make the mean in due order, as it shall appear better to you hereafter. And as it is of necessity to link every smaller (once at the least) with one greater, and every greater with one smaller, so it is at liberty to link them oftener than once, and so may there be to one question many solutions. When you have so linked them, then mark how much each of the lesser numbers is smaller than the mean or common number, and that difference set against the greater numbers which be linked with those smaller, each with his match still on the right hand, and likewise the excess ofthe greater numbers above the mean, you shall set before the lesser numbers which be combined with them. Then shall you by addition bring all these differences into one sum, which shall be the first number in the Golden Rule: and the second number shall be the whole masse that you will have of all those particulars: the third sum shall be each difference by itself, and then by them shall be found the fourth number, declaring the just portion of every particular in that mixture. As is now by these examples I will make it plain.*

A question of mixing wines. *There are four sorts of wine, of severall prices, one of 6 pence a gallon, another of 8 pence, the third of 11 pence, and the fourth of 15 pence the gallon. Of all these wines would I have a mixture made to the sum of 50 gallons, and so the price of each gallon may be 9 pence. Now demand I, how much must be taken of every sort of wine ? […]*

Master. *Seeing you conceive this work so well, I will propound another example unto you of more variety in the Alligations or combinings as thus:*

A question of spices. *A Merchant being minded to make a bargain for spices, in a mixt masse that is to say of cloves, nutmegs, saffron, pepper, ginger and almonds, the cloves being at 6 shillings [a pound], saffron at 10 shillings, pepper at 3 shillings, ginger at 2 shillings, and almonds at 1 shilling.*

Scholar. *That will I trie thus. First I set down those six several prices, and at the left hand, I set the common price, 5 shillings. Then, I link them thus : 1 with 10, 2 with 6, and 3 with 8. As in the example following:*

Master. *I had minded to have combined them in more variety, but I am content to see your own work first, and then more varieties in combination may follow anon.*

Scholar. *Then, to continue as I began, I seek the difference between 1 and 5, which is 4, and that I set against 10, then against 1 I set 5, which is the excess of 10 above 5, so I gather the difference between 2 and 5, which is 3, and that I set against 6, because it is combined with 2, and likewise the difference of 6 above 5, which is 1, I set against 2. Then take I the difference of 3 from 5, which is 2, and that I set against 8, and before that 3, I set the difference of 8 above 5, which is 3. Then gather I all these differences by addition, and they make 18, which I set for my first number in the Golden Rule, and so appears by those works, that of almonds, I must take 83⅓ pound, of ginger 16⅔ pound, pepper 50 pounds, of cloves 50 pounds, of nutmegs 33½ pounds and of saffron 66⅔.*

Then, for trial hereof, I multiply every parcell by his severall price, as 83⅓ which is the sum of almonds, I multiply by 1 which is their price. Also 16⅔ the sum of ginger, I multiply by 2, which is the price of it. An ti each other in his kind, as this Table annexed does represent, and them adding them all together I foind the total to be 1500, which also will amount by the multiplication of the gross mass of 300, by the common price 5, therefore it appears well wrought.

Master. *Now will I make the alligation to prove your cunning somewhat better. […]*

Scholar. *But if it may please you to let me see all the variations of this question, before you go from it, for me thinketh I could varye it two or three ways more yet.*

Master. I am content to see you make two or three variations, but I would be loth to stay to see all the variations. For it may be varied above 300 ways, although many of them would not well serve to this purpose.

Scholar. *I thought it impossible to make so many variations!*

Master. *Marvel not thereat, for some questions of this rule may be varied above 1000 ways. But I would have you forget such fantasies till a time of more leisure. And now, go forward with some variation of this question. […]*

Texte n°4. Nicole Oresme (Fleury-sur-Orne, 1320 – Lisieux, 1382)

Extraits du *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* [Traité des configurations des qualités et des mouvements]

Texte latin, traduction anglaise et commentaire : Marshall Clagett, *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*, Madison, University of Wisconsin Press, 1968.
Traduction de larges extraits en français avec commentaire par Pierre Souffrin et Jean-Pierre Weiss dans le livre : P. Souffrin et A. Ph. Segonds (dir.), *Nicolas Oresme. Tradition et innovation chez un intellectuel du XIVe siècle*, Paris, Les Belles Lettres, 1988, p. 135-144.

partie I, chapitre 1

On se représente toute chose mesurable, à l'exception des nombres, comme une grandeur continue. Pour la mesure d'une telle chose, il faut donc se représenter des points, des droites ou des surfaces, ou leur propriétés. Car, selon le Philosophe, c'est en eux que se trouve originellement la mesure ou le rapport, tandis qu'on ne les reconnaît par similitude dans les autres choses qu'en s'y référant mentalement. Bien qu'il n'existe pas de points ou de lignes indivisibles, il faut les imaginer mathématiquement pour les mesures des choses et pour connaître leurs rapports[1].

Toute intensité qui peut être acquise de façon successive doit donc être représentée par une ligne droite élevée perpendiculairement en un point de l'espace ou du sujet de la chose intensive, par exemple d'une qualité. Car, quel que soit le rapport qu'on trouve entre deux intensités en comparant des intensités de même espèce, un même rapport existe entre deux droites et vice-versa. Car de la même façon qu'une droite est commensurable à une autre et incommensurable à une autre, pour ce qui est des intensités, certaines sont commensurables entre elles et d'autres incommensurables de quelque façon que ce soit, du fait de leur continuité. Donc la mesure des intensités peut être représentée de façon pertinente comme la mesure de droites […] et au mieux par des droites élevées perpendiculairement au sujet […] Ainsi des intensités égales sont représentées par des droites égales, une intensité double par une droite double, et toujours ainsi si on continue de façon proportionnelle.

Et on doit l'entendre ainsi, d'une façon tout à fait générale, de toute intensité qu'on se représente divisible, que ce soit l'intensité d'une qualité active ou non active, ou celle d'un sujet, d'un objet ou d'un milieu sensible ou non sensible, comme l'éclat du soleil et l'éclairement d'un milieu, l'aspect diffusé dans un milieu par influence ou par sa force propre, et aussi les autres choses, à l'exception peut-être de l'intensité de courbure.

---

[1] *Omnis res mensurabilis exceptis numeris ymaginatur ad modum quantitats continue. Ideo oportet pro eius mensuratione ymaginari puncta, lineas et superficies, in quibus, ut vult Philosophus, mensura seu proportio per prius reperitur ; in aliis autem cognoscitur in similitudine dum per intellectum referuntur ad ista. Etsi nichil sunt puncta indivisibilia aut linee, tamen oportet ea mathematice fingere pro rerum mensuris et earum proportionibus cognoscendis.*

partie I, chapitre 11

Ainsi toute *qualité uniforme* est représentée par un rectangle et toute *qualité uniformément difforme* se terminant à un degré nul est représentable par un triangle rectangle. De plus, toute qualité uniformément difforme se terminant à ses deux extrémités avec des degrés non nuls doit être représentée par un quadrangle ayant deux angles droits à sa base et les deux autres angles inégaux. Toute autre qualité linéaire est dite *difformément difforme* et est représentable par des figures disposées autrement, selon de multiples variations, dont on considérera certains modes plus loin. On ne peut connaître mieux, ni plus clairement, ni plus facilement, les différences d'intensité dont il a été question que par de telles représentations et de telles relations à des figures[2].

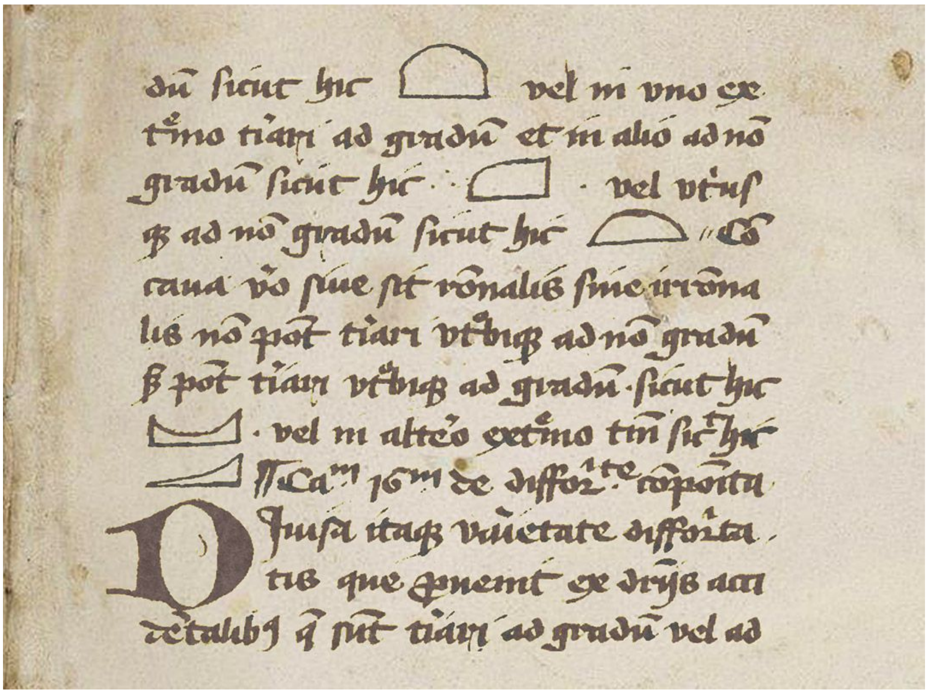
On peut donner, toutefois, d'autres descriptions ou notifications, qui sont aussi exprimées par les représentations de telles figures. Ainsi, on peut dire que la qualité uniforme est celle qui est également intense en toutes les parties du sujet. La qualité uniformément difforme est telle que le rapport de la distance entre le premier et le second de trois points quelconques données à la distance entre le second et le troisième est comme le rapport de l'excès d'intensité du premier sur le second à l'excès d'intensité du second sur le troisième[3].

---

[2] *Omnis igitur qualitas uniformis ymaginatur per quadrangulum rectangulum, et omnis qualitas uniformiter difformis terminata ad non gradum ymaginabilis est per triangulum rectangulum. Omnis vero qualitas terminata utrinque ad gradum ymaginanda est per quadrangulum habentem rectos angulos super basim et alios inequales. Omnis autem alia qualitas linearis dicitur difformiter difformis et est ymaginanda per figuras aliter dispositas secundum multifariam variationem, cuius aliqui modi postea videbuntur. Predicte vero differentie intensionum non melius, nec clarius neque facilius notificari possunt quam per tales ymaginationes et relationes ad figuras.*

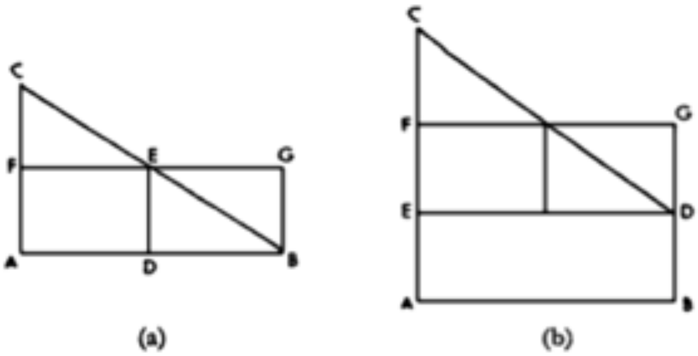
[3] *Quamvis quedam alie descriptiones seu notificationes possunt dari, que etiam per huiusmodi figurarum ymaginationes fuerint note. Ut si diceretur qualitas uniformis est, que in omnibus partibus subiecti est equaliter intensa. Qualitas vero uniformiter difformis est cuius omnium trium punctorum proportio distantie inter primum et secundum ad distantiam inter secundum et tertium est sicut proportio excessus primi super secundum ad excessum secundi supra tertium in intensione.*

partie I, chapitre 15 [4]



partie III, chapitre 7

Toute qualité uniformément difforme est de même grandeur que la qualité du même sujet, ou d'un sujet égal, qui serait uniforme avec le degré du point médian du sujet donné ; cela, sous-entendu, si le sujet est linéaire. Si c'est une surface, ce serait avec le degré de la ligne médiane, et si c'est un solide, avec le degré de la surface médiane, les choses étant comprises de la même façon. On le montrera d'abord pour une qualité linéaire[5].



---

[4] *Omnis igitur simplex difformis difformitas aut est ymaginabilis per figuram que non est portio circuli nec proportionalis in altitudine alicui circuli vel in uno extremo ad gradum et in alio ad non gradum sicut hic, vel utrobique ad non gradum sicut hic. Concava vero, sive sit rationalis, sive sit irrationalis, non potest terminari utrobique ad non gradum, sed potest utrobique terminari ad gradum sicut hic, etc.*

[5] *Omnis qualitas, si fuerit uniformiter difformis, ipsa est tanta quanta foret qualitas eiusdem subiecti vel equalis uniformis secundum gradum puncti medii eiusdem subiecti ; et hoc intelligo si qualitas fuerit linealis, et si fuerit superficialis, secundum gradum linee medie ; et si fuerit corporalis, secundum gradum medie superficiei, semper conformiter intelligendo. Istud ostenditur primo de lineari.*

Soit donc une qualité représentée par le triangle *ABC*, uniformément difforme se terminant avec un degré nul au point *B* (*fig*. (a)). Soit *D* le point médian de la droite du sujet. Le degré ou l'intensité de ce point est représenté par la droite *DE*. La qualité qui serait uniforme sur tout le sujet avec le degré *DE* peut être représentée par le rectangle *AFGB*, d'après le chapitre 10 de la première partie. Il est alors établi par la proposition 26 du livre premier d'Euclide que les deux petits triangles *EFC* et *EGB* sont égaux. Donc le grand triangle *BAC*, qui représente la qualité uniformément difforme, et le quadrangle *AFGB* qui représente la qualité uniforme selon le degré du point médian, sont égaux. Donc les qualités ainsi représentables par ce triangle et par ce rectangle sont égales. Et c'est ce qui était proposé[6].

On peut raisonner de la même façon pour une qualité uniformément difforme se terminant à ses deux extrémités avec un certain degré, comme serait la qualité représentée par le quadrangle *ABCD* (*fig*. (b)). On tire la ligne *DE* parallèle à la base du sujet et on forme le triangle *ECD*. On tire ensuite par le degré du point milieu la ligne *FG* égale et parallèle à la base du sujet, et on tire aussi la ligne *GD*. Alors, comme précédemment, on montre que le triangle *CED* et le quadrangle *EFGD* sont égaux : en ajoutant à chacun des deux le rectangle commun *AEDB*, on forme deux surfaces totales égales, à savoir le quadrangle *ACDB*, qui représente la qualité uniformément difforme, et le quadrangle *AFGB*, qui représente la qualité uniforme selon le degré du point milieu du sujet *AB*. Donc, selon le chapitre 10 de la première partie, les qualités représentables par des quadrangles de cette sorte sont égales[7].

On peut raisonner à l'identique pour une qualité qui est une surface ou un corps solide. De la vitesse, on parle en vérité tout à fait comme d'une qualité linéaire, à condition de prendre, au lieu du point médian, l'instant médian du temps pendant lequel dure cette vitesse[8].

---

[6] *Sit igitur una qualitas, ymaginabilis per triangulum ABC, que est uniformiter difformis terminata ad non gradum in puncto B, et sit D punctus medius subjective linee, cujus quidem puncti gradus vel intensio ymaginatur per lineam DE. Igitur qualitas que esset uniformis per totum subiectum secundum gradum DE ymaginabilis est per quadrangulum AFGB, ut patet per 10m capitulum prime partis. Constat autem per 26am primi Euclidis quod duo parvi trianguli EFC et EGB sunt equales. Igitur maior triangulus BAC qui designat qualitatem uniformiter difformem et quadrangulus AFGB qui designaret qualitatem uniformem secundum gradum puncti medii sunt equales; igitur qualit[ates] per hujusmodi triangulum et quadrangulum ymaginabiles sunt equales. Et hoc est propositum.*

[7] *Eodem modo potest argui de qualitate uniformiter difformi terminata utrobique ad certum gradum, sicut sit qualitas ymaginabilis per quadrangulum ABCD. Protrahatur linea DE equidistans basi subiecti et fiet triangulus CED. Deinde protrahatur per gradum puncti medii linea FG equalis et equidistans basi subiecti, et protrahatur etiam linea GD. Tunc, sicut prius, probatur quod triangulus CED et quadrangulus EFGD sunt equales, ergo addito utrobique quadrangulo AEDB fient duo tota equalia, scilicet quadrangulus ACDB, qui designat qualitatem uniformiter difformem, et quadrangulus AFDB, qui designat qualitatem uniformem secundum gradum puncti medii ipsius subiecti AB. Ergo, per 10m capitulum prime partis, per huiusmodi quadrangulos designabiles sunt equales.*

[8] *Conformiter potest argui de qualitate superficiali ac etiam de [qualitate] corporali. De velocitate vero omnino dicendum est sicut de qualitate lineari, dum tamen loco puncti medii [subiecti] instans medium temporis capiatur velocitatem huius mensurantis.*

Texte n°5. Problème de carré inscrit dans un triangle isocèle

1. Extrait des *Geometrica*, recueil de problèmes attribué à Héron (Alexandrie, Ier-IIe siècle apr. J. C.)[1]

Texte grec et traduction latine dans : *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, t. IV, éd. J.-L. Heiberg, Teubner, Leipzig, 1912, p. 254-256 (section 12, problème 12). Une traduction française de ce problème a été donnée par Roshdi Rashed à la p. 59 de la référence donnée plus bas.

Étant donné un triangle isocèle, dont la base est de 12 portions de terre, la hauteur de 8 portions de terre, et un carré étant inscrit à l'intérieur d'un tel triangle, trouver l'aire du carré.

Fais comme voici. Ajoute base et hauteur du triangle, soit 12 et 8. Cela donne 20. Ensuite, multiplie la base par la hauteur, c'est-à-dire les 12 par les 8. Cela donne 96. Divise-les par la somme, soit par 20. Cela donne $4\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{10}$, soit 4 et $\frac{4}{5}$. C'est la quantité des portions de terre de chaque côté du carré.

Multipliée par elle-même, cela donne $23\frac{1}{25}$. La multiplication s'effectue comme voici : $4\times 4 = 16$, $4\times\frac{4}{5} = \frac{16}{5}$, $\frac{4}{5}\times 4 = \frac{16}{5}$, $\frac{4}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{16}{25} = \frac{3}{5} + \frac{1}{25}$. On effectue l'addition $16 + \frac{35}{5} + \frac{1}{25}$; or $\frac{35}{5} = 7$, qu'on ajoute aux 16. Le nombre tiré de la multiplication est $23\frac{1}{25}$. C'est la quantité des portions de l'aire du carré.

2. Extrait du *Kitāb al-jabr wa-l-muqābala* [Livre de l'algèbre] de Muḥammad bin Mūsā al-Khuwārizmī (Bagdad, vers 830)

Texte arabe et traduction française : Al-Khwārizmī, *Le Commencement de l'algèbre*, texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed, Paris, Albert Blanchard, 2007, p. 228-231.
Autre traduction française : Al-Khwârizmî, *L'Algèbre et le Calcul indien*, extraits choisis, présentés et commentés par Ahmed Djebbar, collection Les Classiques Kangourou n°5, Paris, ACL & éditions du Kangourou, 2013, p. 51-52.

Si on dit : soit un terrain triangulaire, dont deux des côtés sont dix coudées, dix coudées, et la base douze coudées, à l'intérieur duquel se trouve un terrain carré, combien est le côté de ce terrain carré ?[2]

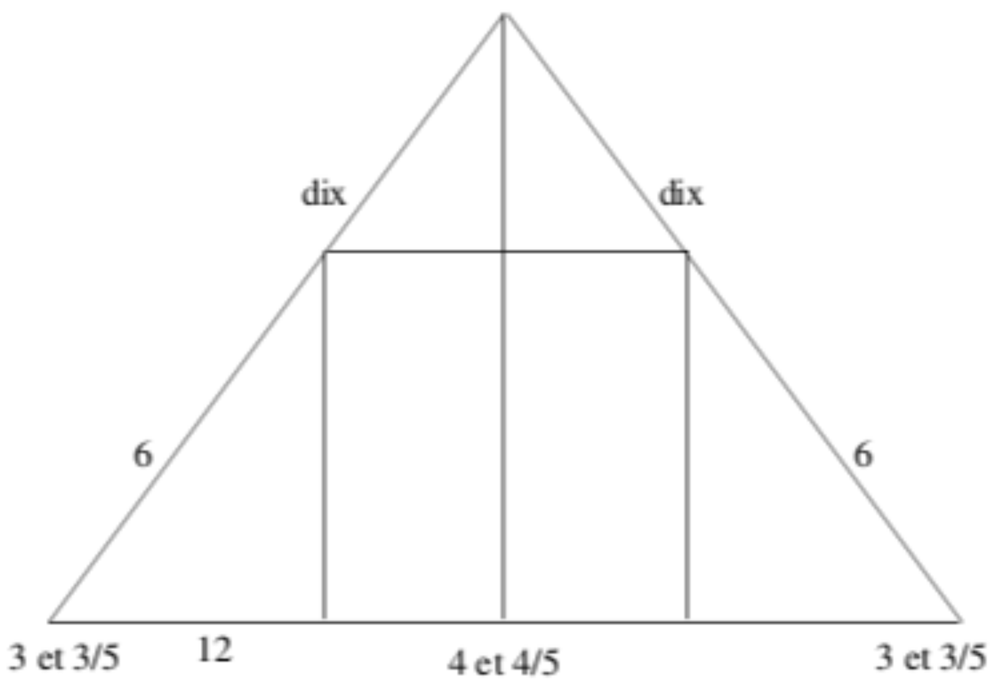
---

[1] Le plus ancien manuscrit contenant ce texte est du XIIe siècle.

[2] Dans la traduction de Djebbar, l'énoncé se présente ainsi :
Si on dit : une terre triangulaire, ses deux côtés ont dix coudées, dix coudées, et la base douze coudées, et dans son ventre une terre carrée. Quel est le côté du carré?

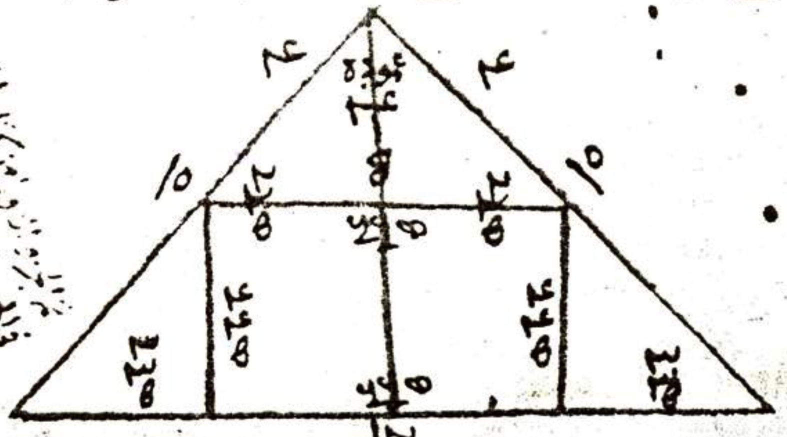
On l'infère ainsi : que tu connaisses la perpendiculaire du terrain triangulaire, c'est-à-dire que tu multiplies la moitié de la base, qui est six, par elle-même. On a trente-six. Soustrais-le de l'un des deux petits côtés multiplié par lui-même, ce qui est cent, il reste soixante-quatre. Prends sa racine, qui est huit, qui est la perpendiculaire. L'aire du terrain triangulaire est quarante-huit coudées, c'est-à-dire le produit de la perpendiculaire par la moitié de la base, qui est six. Posons l'un des côtés du carré une chose. Multiplions-le par lui-même. Il vient un *carré*[3] que nous retenons. Mais nous savons ensuite qu'il nous reste deux triangles, de part et d'autre du carré, et un triangle au-dessous de lui. Les deux triangles de part et d'autre du carré sont égaux, et leurs deux perpendiculaires sont les mêmes et sont suivant un angle droit. Pour avoir leur aire, tu multiplies une chose par six moins une demi-chose. On a six choses moins un demi-*carré*[3], ce qui est l'aire des deux triangles réunis, qui sont de part et d'autre du carré.

Pour avoir l'aire du triangle supérieur, tu multiplies huit moins une chose, qui est la perpendiculaire, par une demi-chose. On a quatre choses moins un demi-*carré*[3]. Ceci est l'aire du carré et l'aire des trois triangles, c'est-à-dire dix choses égales à quarante-huit, ce qui est l'aire du grand triangle. Une seule chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée, ce qui est chacun des côtés du carré. Voici la figure :



[3] Le traducteur écrit le mot *carré* en italiques lorsque celui-ci rend le mot arabe مـــال (*māl*) désignant en général un bien financier et en algèbre le carré de la chose inconnue, afin de le distinguer du mot مـــربـــع (*murabba'*) désignant un carré au sens géométrique.

من جانبيه عشرة عشرة والقاعدة اثنى عشر
ذراعاً في جوفها ارض مربعة كم كل جانب من جوانب المربعة فقياس
ذلك ان تعرف عمود المثلثة وهو ان تضرب نصف القاعدة وهو ستة
في مثلها فتكون ستة وثلثين فانقصها من احد الجانبين الاقصرين مضروباً
في مثله وهو مائة فيبقى اربعة وستون فخذ جذرها ثمانية وهو العمود
وتكسيرها ثمانية واربعون ذراعاً وهو ضرب العمود في نصف القاعدة
وهو ستة فجعلنا احد جوانب المربعة شيئاً فضربناه في مثله فصار مالاً
فحفظناه ثم علمنا انه بقي لنا مثلثتان عن جنبتي المربعة ومثلثة فوقها
فاما اللتان عن جنبتي المربعة فهما متساويتان وعمودهما واحد على
زاوية قائمة فتكسيرهما ان تضرب شيئاً في ستة الا نصف شيء فيكون ستة
اشياء الا نصف مال وهو تكسير المثلثتين جميعاً اللتين عن جنبتي المربعة
واما العليا فتكسيرها ان تضرب ثمانية غير شيء وهو العمود في نصف شيء فذلك اربعة اشياء
الا نصف مال فجميع تكسير المربعة مال وتكسير الثلاث مثلثات عشرة اشياء الا مال
فجبرناه بمال المربعة فصار عشرة اشياء تامة وهي تعدل ثمانية واربعين التي هي تكسير المثلثة
العظمى فالشيء الواحد من ذلك اربعة اذرع واربعة اخماس ذراع وهو كل جانب من المربعة وهذه صورتها



Texte n°6
Tablette mathématique de Suse dite TMS I
(aujourd'hui Šuš en Iran, vers 1700 avant Jésus-Christ)

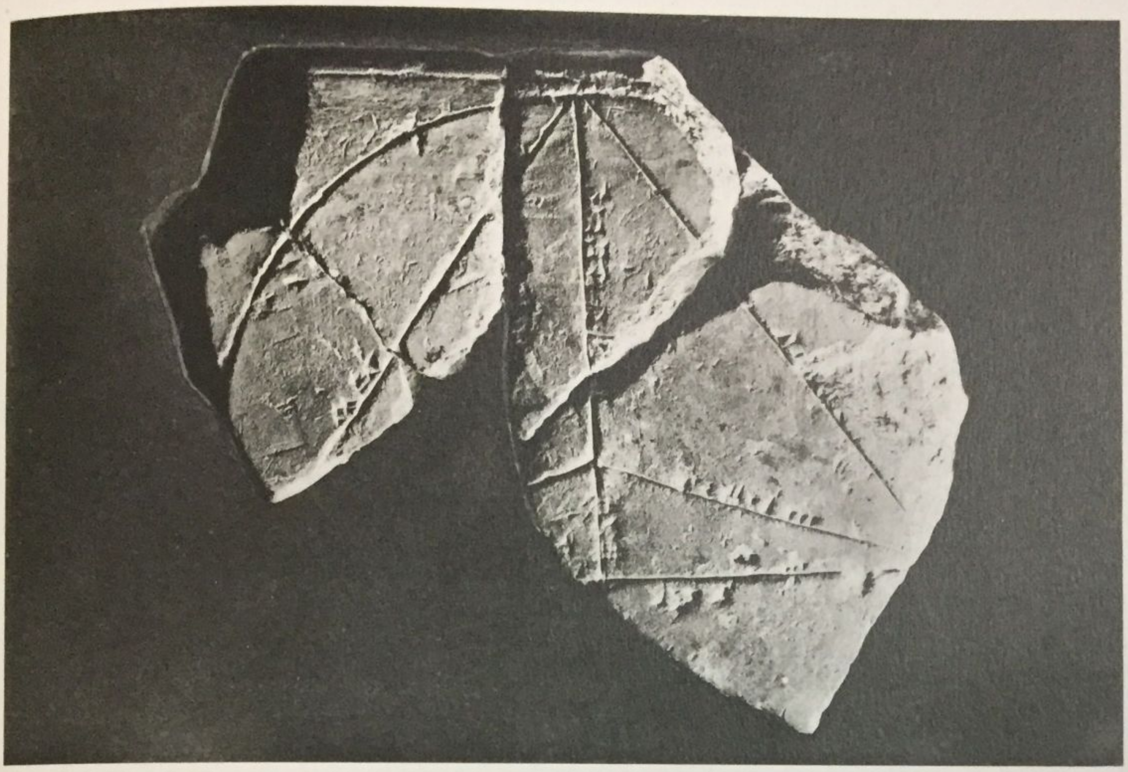
Photographie, transcription et analyse dans : Evert M. Bruins & Marguerite Rutten, *Textes mathématiques de Suse* (Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, XXXIV), Paris, Paul Geuthner, 1961.

<u>Lexique</u>

uš : unité de longueur (environ 360 m)
sag̃ : tête, sommet, front
KAK : clou, piquet, cheville
sag̃.KAK : triangle
ga-am-ru : entier, total

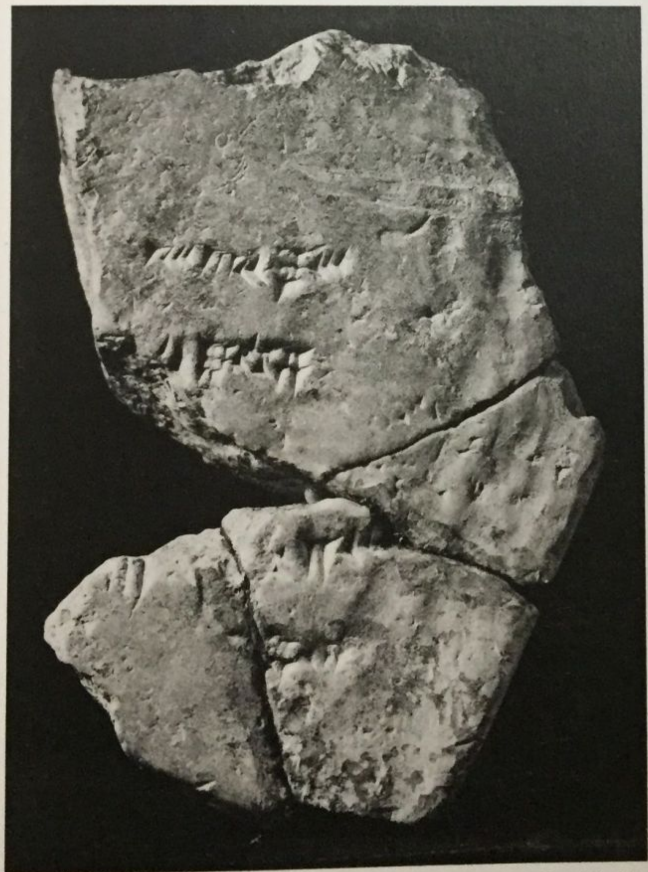
𒌍𒐈 𒑰 : 2020

𒁹 𒁹 𒑰 : 222000



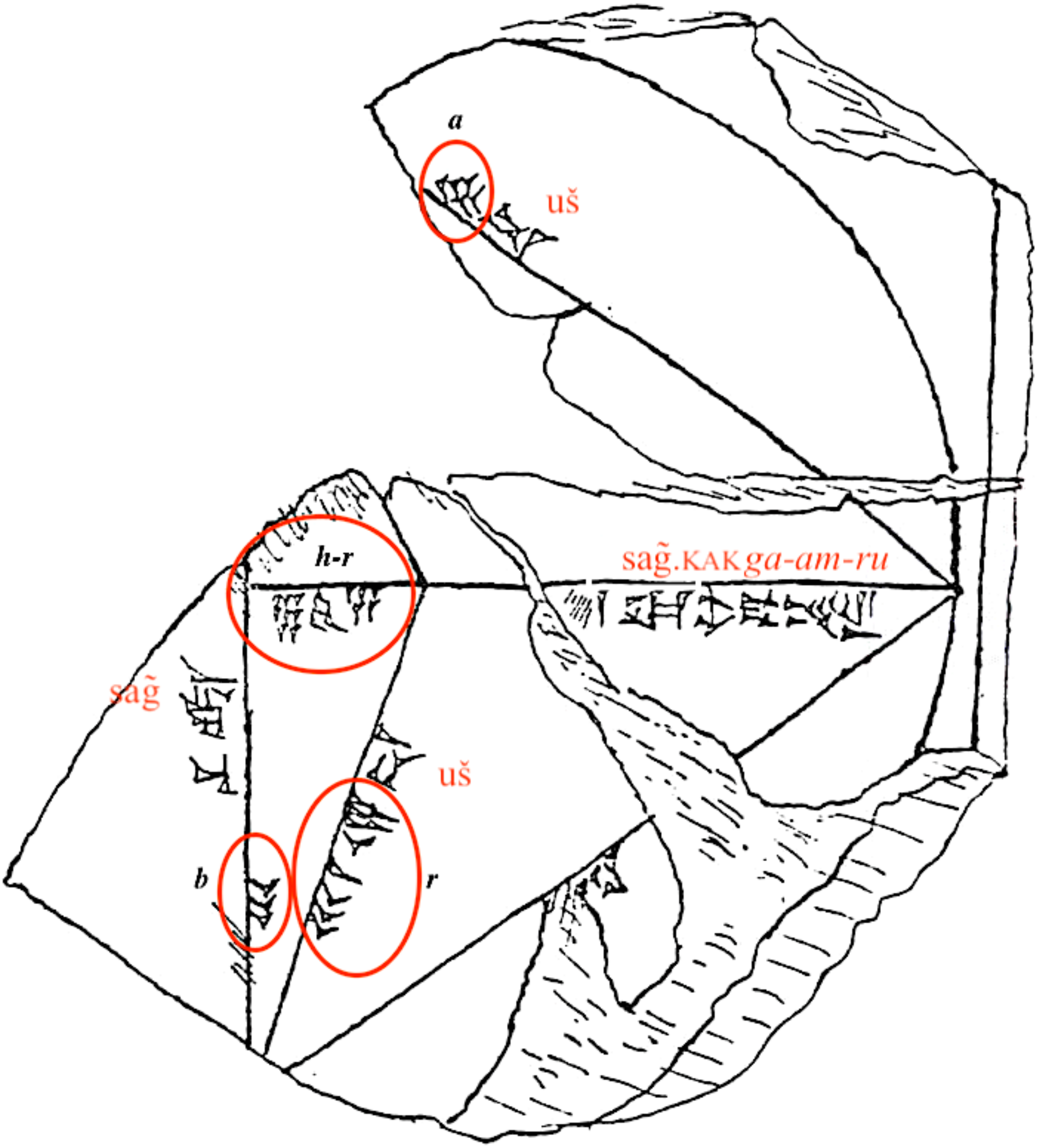
Face

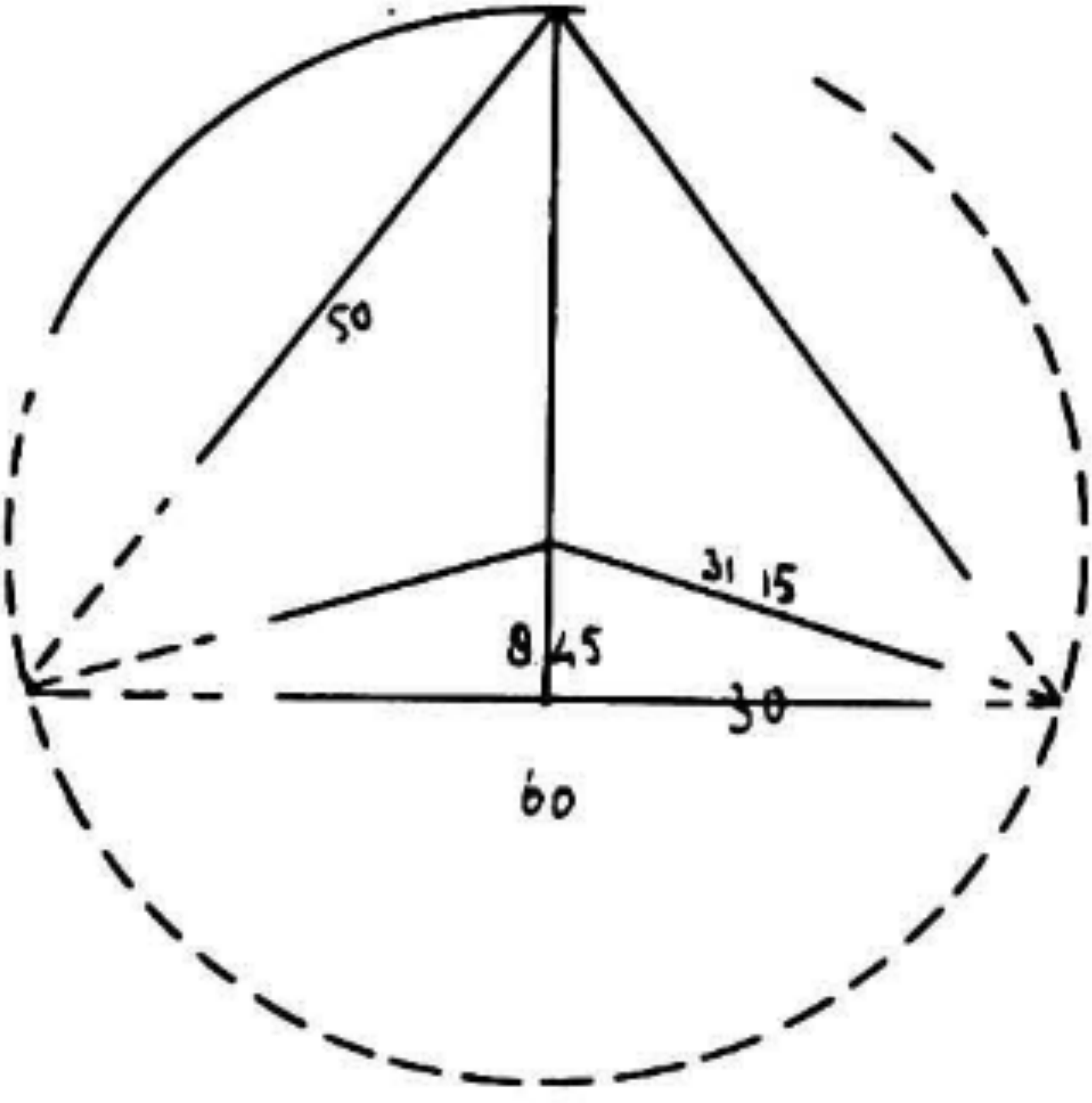
(Photo Passani.)



(Photo Séarl.)

Revers


a
uš
h-r
sag̃.KAK ga-am-ru
sag̃
uš
b
r


50
31 15
8 45
30
60

Texte n°7. Euclide, *Stoicheia* [*Éléments*], propositions 5 et 6 du livre II

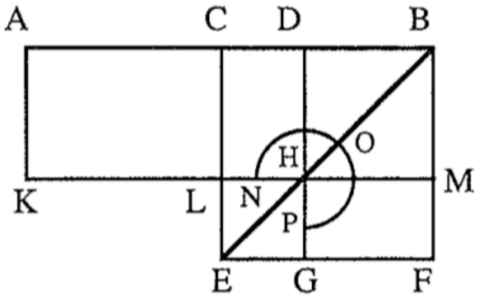
Traduction française : Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, traduction d'après le texte grec établi par J. L. Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac, Paris, PUF, vol. I, 1990, p. 333-336.

Papyrus Oxyrhynchus 29 (vers 100 après J.-C.) et ms. Oxford, d'Orville 301 (daté de 888)

5

Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section[11] *est égal au carré sur la moitié de la droite.*

En effet qu'une certaine droite AB soit coupée en segments égaux au point C, en segments inégaux au point D. Je dis que le rectangle contenu par AD, DB pris avec le carré sur CD est égal au carré sur CB.

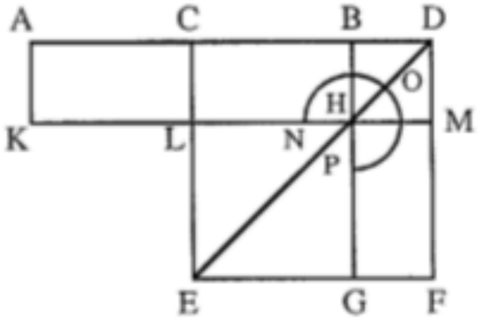


En effet que le carré CEFB soit décrit sur CB (I. 46), que BE soit jointe, et d'une part que par D soit menée DG parallèle à l'une ou l'autre des droites CE, BF ; et d'autre part que par H soit ensuite menée KM parallèle à l'une ou l'autre des droites AB, EF ; enfin que par A soit aussi menée AK parallèle à l'une ou l'autre des droites CL, BM (I. 31). Et puisque le complément CH est égal au complément HF (I. 43), que DM soit ajouté de part et d'autre. Donc le rectangle CM tout entier est égal au rectangle DF tout entier (N.C. 2). Mais CM est égal à AL puisque AC est aussi égal à CB. Et donc AL est égal à DF (N.C. 1). Que CH soit ajouté de part et d'autre. Donc AH tout entier est égal au gnomon NOP[12] (N.C. 2). Mais AH est le rectangle contenu par AD, DB, car DH est égale à DB. Et donc le gnomon NOP est égal au rectangle contenu par AD, DB (N.C. 1). Que LG — qui est égal au carré sur CD — soit ajouté de part et d'autre. Donc le gnomon NOP avec LG est égal au rectangle contenu par AD, DB, avec le carré sur CD (N.C. 2). Mais le gnomon NOP et LG sont le carré CEFB tout entier qui est celui décrit sur CB. Donc le rectangle contenu par AD, DB, pris avec le carré sur CD est égal au carré sur CB (N.C .1).

Donc si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite. Ce qu'il fallait démontrer.

6

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite ajoutée, est, pris avec le carré sur sa moitié, égal au carré sur la droite composée de sa moitié et de la droite ajoutée.



En effet, qu'une certaine droite AB soit coupée en deux parties égales au point C, et qu'une certaine droite BD, lui soit ajoutée en alignement. Je dis que le rectangle contenu par AD, BD, pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD.

En effet, que le carré CEFD soit décrit sur CD. Et que DE soit jointe ; et, d'une part que par le point B soit menée BG parallèle à l'une ou l'autre des droites EC, DF ; et d'autre part que par le point H, soit menée KM parallèle à l'une ou l'autre des droites AB, EF ; et que par le point A, soit encore menée AK parallèle à l'une ou l'autre des droites CL, DM.

Or, puisque AC est égale à CB, AL est aussi égal à CH (I. 36). Mais le [complément] CH est égal au [complément] HF (I. 43), et donc AL est égal à HF. Que CM soit ajouté de part et d'autre.

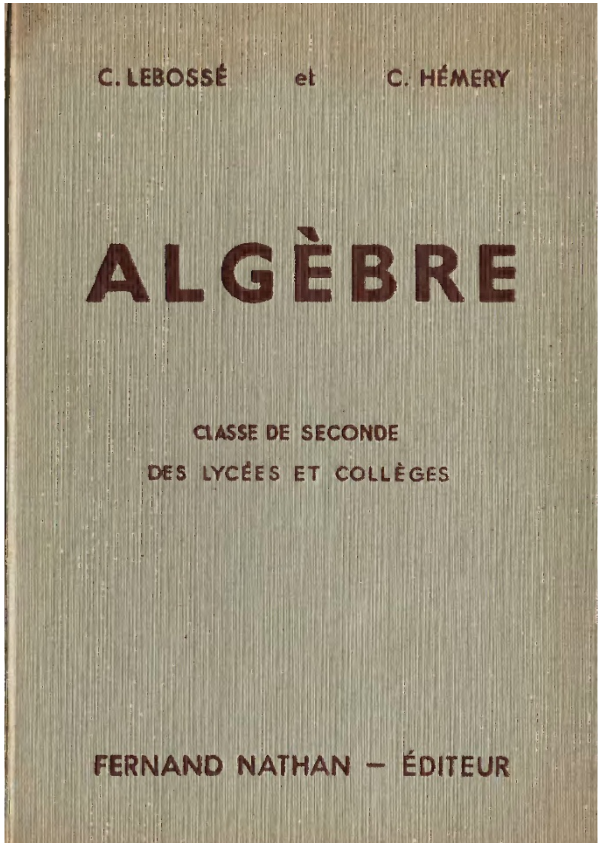
AM tout entier est donc égal au gnomon NOP. Mais AM est le [rectangle contenu] par AD, DB car DM est égal à DB, et donc le gnomon NOP est égal au {rectangle contenu} par AD, DB. Que LG — qui est égal au carré sur BC — soit ajouté de part et d'autre. Le rectangle contenu par AD, DB, avec le carré sur CB, est donc égal au gnomon NOP avec LG. Mais le gnomon NOP et LG sont le carré CEFD tout entier — qui est celui décrit sur CD. Donc le rectangle contenu par AD, DB, pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD.

Donc si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite ajoutée, est, pris avec le carré sur sa moitié, égal au carré sur la droite composée de sa moitié et de la droite ajoutée. Ce qu'il fallait démontrer.

ε′ Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Texte n°8. Introduction des vecteurs dans un manuel conforme aux programmes de 1947

Source : Camille Lebossé et Corentin Hémery, *Algèbre - classe de seconde des lycées et collèges*, Fernand Nathan, Paris, 1947, p. 31-37.



QUATRIÈME LEÇON

VECTEURS

69. Définition. — ***On appelle vecteur un segment de droite orienté.*** Ainsi (fig. 1) le segment AB orienté de A vers B définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (lire « vecteur AB »).

A est l'origine du vecteur et B son extrémité.

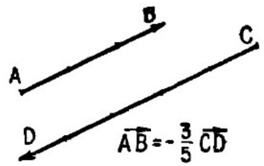
La droite indéfinie AB se nomme le *support du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ et définit sa *direction*. La distance AB est la *longueur* ou le *module* du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Fig. 1.

70. Rapport de deux vecteurs parallèles. — ***C'est le nombre algébrique qui a pour valeur absolue le rapport des longueurs des deux vecteurs et pour signe + ou — suivant que les deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.***

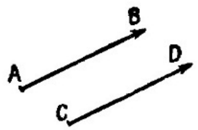
Ainsi (fig. 2) les vecteurs parallèles et de sens contraires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour rapport $-\frac{3}{5}$. On écrit :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$$



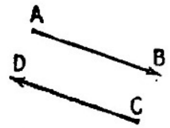
$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$

Fig. 2.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Fig. 3.



$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

Fig. 4.

Deux vecteurs parallèles sont égaux s'ils ont même longueur et même sens. Ils sont opposés s'ils sont de même longueur et de sens contraires.

leur rapport est égal à $+1$ s'ils sont égaux et -1 s'ils sont opposés.

On a :

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ (fig. 3)} \quad \text{et} \quad \overline{AB} = -\overline{CD} \text{ (fig. 4)}.$$

REMARQUE. — Les définitions précédentes s'étendent au cas où les vecteurs sont portés par le même support.

71. Axe. — ***On appelle axe une droite orientée.*** — Ainsi la droite $x'x$ orientée de x' vers x constitue l'axe $x'x$ (fig. 5).

Fig. 5.

Le sens ainsi défini se nomme *le sens de l'axe* $x'x$ ou *sens positif de l'axe*. Le sens opposé est *le sens négatif*.

72. Mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe. — ***C'est le nombre algébrique dont la valeur absolue est la longueur du vecteur et dont le signe est + ou − suivant que le vecteur a le même sens que l'axe ou le sens opposé.***

Soit un axe $x'x$ (fig. 6), sur lequel nous avons choisi une unité de longueur.

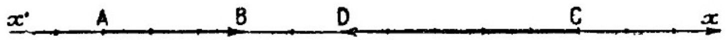


Fig. 6.

La mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ sur $x'x$ est $+3$. On écrit :

$$\overline{AB}_{x'x} = +3 \quad \text{ou} \quad \text{simplement} \quad \overline{AB} = +3.$$

On aurait de même $\overline{CD} = -5$; $\quad \overline{BA} = -3$.

On voit que $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ ***sont deux nombres opposés.***

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

Remarquons qu'il faut éviter de confondre les notations :

AB : segment AB ou longueur AB.

$\overrightarrow{AB}$: vecteur d'origine A et d'extrémité B.

$\overline{AB}$: mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$

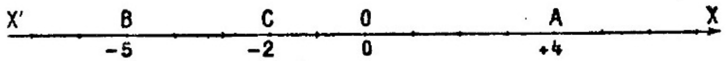


Fig. 7.

73. Repérage d'un point sur une droite. — Soit un axe X'X (fig. 7). Choisissons sur cet axe un point fixe O, appelé ***origine des abscisses.***

On appelle abscisse du point M la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$\overline{OA} = +4$ l'abscisse de A est $+4$.

$\overline{OB} = -5$ l'abscisse de B est -5.

Réciproquement à tout nombre algébrique correspond un point de l'axe X'X et un seul admettant ce nombre pour abscisse. Ainsi au nombre -2 correspond le point C tel que $\overline{OC} = -2$. On obtient C en portant à partir de O, dans le sens négatif, un segment $OC = 2$. Autrement dit :

La position d'un point sur un axe est déterminée par son abscisse.

74. Application aux nombres algébriques. — Lorsqu'un point M parcourt l'axe X'X dans le sens positif, son abscisse x prend toutes les valeurs algébriques possibles dans l'ordre croissant (fig. 8).

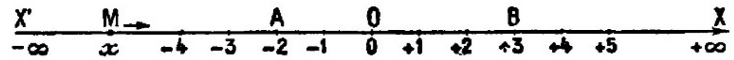


Fig. 8.

En effet de X' à O, $x = \overline{OM}$ est négatif et sa valeur absolue diminue, donc (n° 62) x croît. De O à X, x est positif et sa valeur absolue augmente, donc x croît également.

On en déduit la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M d'abscisse x appartienne à l'une des portions de l'axe X'X limitées par les points A(-2) et B($+3$) :

1° Demi-droite AX' : $\quad x < -2$

2° Demi-droite BX : $\quad x > +3$

3° Segment AB : $\quad -2 < x < +3.$

Lorsque M s'éloigne indéfiniment sur l'axe, la valeur absolue de son abscisse x finit par dépasser toute valeur fixée à l'avance. On dit que x devient infini et on écrit :

$x = +\infty$ si M s'éloigne dans le sens positif.

$x = -\infty$ si M s'éloigne dans le sens négatif.

75. Somme de deux vecteurs. — Considérons deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire tels que l'extrémité du premier soit l'origine du second (fig. 9). Par définition le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme géométrique (ou le vecteur résultant) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2

La somme géométrique de deux vecteurs consécutifs est le vecteur qui a pour origine celle du premier et pour extrémité celle du second.

On écrit : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

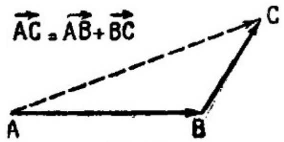


Fig. 9.

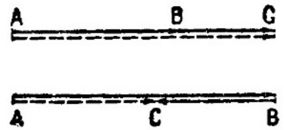


Fig. 10.

Cette définition s'applique à deux vecteurs consécutifs de même support (fig. 10).

Pour construire la somme de deux vecteurs non consécutifs, il suffit de construire deux vecteurs consécutifs qui leur sont respectivement égaux En particulier, la somme de deux vecteurs de même origine $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ s'obtient en terminant le parallélogramme AOBC (fig. 11). On a :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} \quad \text{et puisque } \vec{AC} = \vec{OB}$$
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

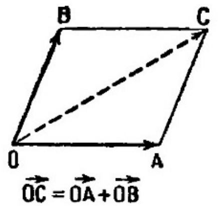


Fig. 11.

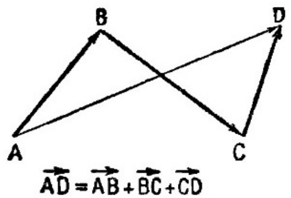


Fig. 12.

On peut aussi définir la somme de plusieurs vecteurs. Ainsi (fig. 12), on a par définition :

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}.$$

Il importe de remarquer que la longueur de la somme de deux ou plusieurs vecteurs n'est pas en général égale à la somme des longueurs de ces vecteurs.

RELATION DE CHASLES

76. Théorème I. — ***La mesure algébrique de la somme de deux vecteurs consécutifs portés par un même axe est égale à la somme des mesures algébriques de ces vecteurs.***

Il s'agit de montrer que l'*égalité vectorielle* $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

entraîne l'*égalité algébrique* $\boxed{\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}}$

connue sous le nom de relation de Chasles (mathématicien français 1793-1880). Observons qu'il existe six cas de figure possibles (fig. 13).

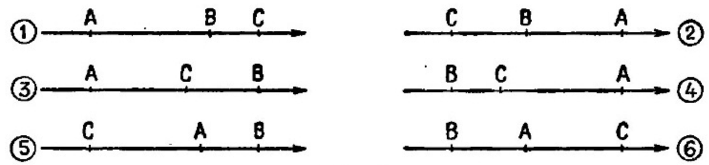


Fig. 13.

On a, par exemple, visiblement pour le 5[e] cas :

$$\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB} \quad \text{ou} \quad -\overline{BC} = -\overline{AC} + \overline{AB}.$$

D'où en transposant : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$

77. Remarque. — Il faut trois égalités arithmétiques pour traduire, selon les cas, la position relative de trois points A, B et C en ligne droite :

$$AC = AB + BC \qquad AC = AB - BC \qquad \text{ou} \qquad AC = BC - AB.$$

Au contraire : ***La relation de Chasles est générale et est indépendante du sens de l'axe.***

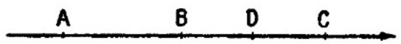


Fig. 14.

Si M, N et P sont alignés, on a toujours : $\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$ (intercaler la lettre N entre M et P qui figurent au premier membre) quel que soit le sens suivant lequel la droite MP est orientée.

78. Généralisation. — La relation de Chasles se généralise pour un nombre quelconque de vecteurs consécutifs. Si A, B, C et D sont alignés (fig. 14) on a :

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD}.$$

D'où : $$\boxed{\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}.}$$

79. Théorème II. — ***La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité, diminuée de l'abscisse de son origine.***

Appliquons la formule de Chasles aux trois points O, A et B (fig. 15 et 16)

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}.$$

D'où : $$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Désignons par a et b les abscisses de A et de B. Nous obtenons

$$\boxed{\overline{AB} = b - a.}$$

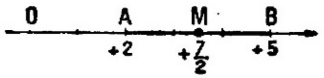


Fig. 15.

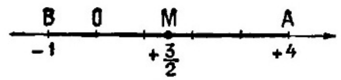


Fig. 16.

Ainsi (fig. 15) : $a = +2 \quad b = +5, \quad \overline{AB} = +3 \quad = (+5) - (+2)$

et (fig. 16) : $a = +4 \quad b = -1, \quad \overline{AB} = -5 \quad = (-1) - (+4).$

80. Abscisse du milieu d'un segment. — ***Le milieu d'un segment a pour abscisse la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment.***

Soit M le milieu du segment AB (fig. 15 et 16). Les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont égaux :

$$\overline{AM} = \overline{MB} \quad \text{soit} \quad \overline{OM} - \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{OM}.$$

D'où : $$2\,\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}.$$

Désignons par a, b et m les abscisses de A, B et M. Nous obtenons :

$$\boxed{m = \frac{a+b}{2}.}$$

Ainsi (fig. 15) : $\overline{OM} = \dfrac{+2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$ et (fig. 16) : $\overline{OM} = \dfrac{+4-1}{2} = \dfrac{3}{2}.$

EXERCICES

79. Démontrer que le rapport de deux vecteurs AB et CD portés par un même axe est égal au rapport de leurs mesures algébriques. Autrement dit :

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD} \quad \text{équivaut à} \quad \overline{AB} = k\,\overline{CD}.$$

80. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et I le milieu de AB. Démontrer que

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

81. On considère un triangle ABC dont le centre de gravité est G et un point M quelconque.

1° Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$

2° En déduire la relation : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}.$

82. 1° Vérifier la relation de Chasles $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, sachant que $\overline{OA} = +7$ $\overline{OB} = -5$ et $\overline{OC} = +13$.

2° Vérifier les relations : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ et $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$.

3° Calculer les abscisses de M, N et P milieux de BC, CA et AB.

83. Soient sur un axe deux points A(a) et B(b). Déterminer les abscisses des points M et N qui partagent AB en 3 parties égales.
Application : $a = +15$, $b = -9$.

84. Reprendre l'exercice précédent pour les points qui partagent AB en 4 puis en 6, et en 8 parties égales.

85. On prend sur un axe deux points A et B d'abscisses a et b. Déterminer l'abscisse x du point M tel que $\overline{MA} = k\,\overline{MB}$ (k nombre donné).

Application : $a = -4 \quad b = +10 \quad$ et $\quad k = -2{,}5$.

86. Etant donnés 4 points A, B, C et D d'un axe dont les abscisses sont a, b, c et d :

1° Montrer qu'il existe en général un point M tel que $\overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD}$.

2° Qu'arrive-t-il si AB et CD ont même milieu ?

Application : $a = +8$, $b = -3$, $c = +11$ et $d = +1$.

87. Soient sur un axe 4 points A, B, C et D, tels que $\overline{AC}.\overline{BD} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$.

1° Montrer que les abscisses a, b, c et d de ces 4 points vérifient la relation $(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$.

2° I et J désignant les milieux de AB et CD en déduire les relations suivantes :

a) $\overline{OA}.\overline{OB} + \overline{OC}.\overline{OD} = 2\overline{OI}.\overline{OJ}$ b) $\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$.

c) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ d) $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} + \dfrac{1}{\overline{BC}} + \dfrac{1}{\overline{BD}} = 0.$

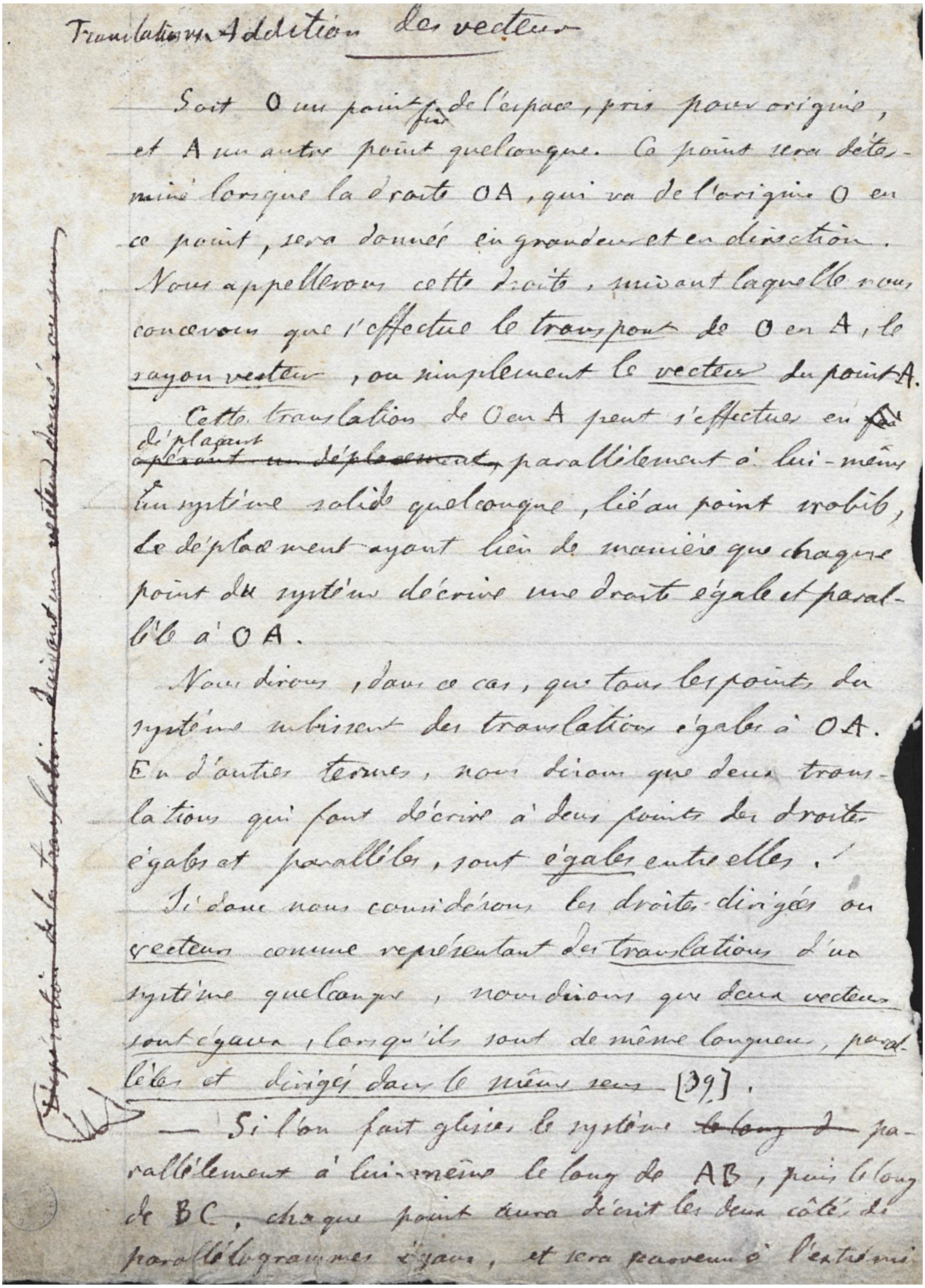
88. On considère sur un axe d'origine O, les points A(a), B(b) et C(c). Démontrer les relations :

1° $\overline{OA}.\overline{BC} + \overline{OB}.\overline{CA} + \overline{OC}.\overline{AB} = 0.$

2° $\overline{OA}^2.\overline{BC} + \overline{OB}^2.\overline{CA} + \overline{OC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0.$

Texte n°9. Notes manuscrites de cours sur les vecteurs du mathématicien Jules Houël (1823-1886), rédigées dans les années 1870

manuscrit in-fol. 426.5, bibliothèque Alexis de Tocqueville, Caen.



Translation ou Addition des vecteurs

Soit O un point fixe de l'espace, pris pour origine, et A un autre point quelconque. Ce point sera déterminé lorsque la droite OA, qui va de l'origine O en ce point, sera donnée en grandeur et en direction. Nous appellerons cette droite, suivant laquelle nous concevons que s'effectue le transport de O en A, le rayon vecteur, ou simplement le vecteur du point A.

Cette translation de O en A peut s'effectuer en déplaçant ~~opérant un déplacement~~, parallèlement à lui-même un système solide quelconque, lié au point mobile, le déplacement ayant lieu de manière que chaque point du système décrive une droite égale et parallèle à OA.

Nous dirons, dans ce cas, que tous les points du système subissent des translations égales à OA. En d'autres termes, nous dirons que deux translations qui font décrire à deux points des droites égales et parallèles, sont égales entre elles.

Si donc nous considérons les droites dirigées ou vecteurs comme représentant des translations d'un système quelconque, nous dirons que deux vecteurs sont égaux, lorsqu'ils sont de même longueur, parallèles et dirigés dans le même sens [39].

— Si l'on fait glisser le système ~~le long de~~ parallèlement à lui-même le long de AB, puis le long de BC, chaque point aura décrit les deux côtés de parallélogrammes égaux, et sera parvenu à l'extrémi

Représentation de la translation suivant un vecteur dans un sens

B

té de la diagonale de chaque parallélogramme. Toutes ces diagonales étant égales et parallèles, formeront des vecteurs égaux. §

Le résultat de ces deux translations successives est donc, pour un point quelconque, la translation unique et déterminée AC. On voit donc que la combinaison de deux translations $AB \frown BC$ est une opération uniforme.

De plus, si un seul des vecteurs AB, BC varie, AC variera. Donc l'opération est complètement uniforme [ ].

Si, au lieu de faire décrire au point A les côtés AB, BC du parallélogramme $ABCD$, on lui avait fait décrire les deux autres côtés AD, DC, on aurait encore obtenu pour résultat la même translation AC. Or, puisque $\overline{AD} = \overline{BC}$ et que $\overline{DC} = \overline{AB}$, la première combinaison de translations étant représentée par $AB \frown BC$, la seconde pourra l'être par $BC \frown AB$. Puisque l'on a maintenant

$$AB \frown BC = AC = BC \frown AB,$$

il en résulte que l'opération $\frown$ est commutative.

— Faisons maintenant décrire successivement les trois arêtes contiguës d'un parallélépipède $ABCDEFGH$, ~~[illegible]~~ savoir AB, BF, FG. ~~[illegible]~~ On a évidemment

$$AB \frown BF = AF, \quad AF \frown FG = AG,$$
$$BF \frown FG = BG, \quad AB \frown BG = AG.$$

Donc

$$(AB \frown BF) \frown FG = AB \frown (BF \frown FG)$$

L'opération $\frown$ est donc associative.

Enfin, si l'un des vecteurs AB, BC s'annule, le résultat $AB \frown BC$ se réduit au vecteur restant.

Donc cette opération de la combinaison des translations possède toutes les propriétés essentielles de l'addition ordinaire. De plus, elle se réduit à cette addition quand les deux vecteurs tout situés en ligne droite.

On peut donc, ~~conformément au~~ d'accord avec le principe de permanence, appeler <u>addition des vecteurs</u> cette combinaison des translations.

Nous aurons, d'après cela, quels que soient les points A, B, C,

$$(1) \qquad AB + BC = AC.$$

De même, pour un nombre quelconque de points dans l'espace A, B, C, D, ...,

$$AB + BC + CD + \dots + KL = AL.$$

Ainsi, le vecteur qui ferme un polygone quelconque formé par des vecteurs est égal à la somme de tous les autres côtés.

Si le polygone se ferme de lui-même, la somme de tous ses côtés est nulle.

— L'addition des vecteurs étant une opération complètement uniforme, la soustraction est une opération déterminée. Elle sera définie par l'une ou l'autre des deux équations

$$(2) \qquad AB = AC - BC,$$

$$(3) \qquad BC = AC - AB,$$

qui sont équivalentes, à cause de la commutativité de l'addition.

Si le point ~~A~~ C coïncide avec A, AC devient AA = 0 = le module de l'addition. On a ainsi

$$AB + BA = 0, \quad \text{d'où (4)} \quad BA = -AB,$$

$-AB$ étant la quantité réciproque de AB.(1)

(1) (en note) Les ~~distances~~ vecteurs AB, CD, ... se comportent dans les formules comme le feraient les différences B − A, D − C, ... si A, B, C, ... représentaient des quantités. C'est ce que l'on exprime symboliquement en assimilant le vecteur AB à la différence des points A et B, pris en retranchant le premier du second.

D

A l'aide de l'équation (4) on pourra toujours remplacer la soustraction d'un vecteur AB par l'addition de son réciproque BA, de sorte que, au lieu de $AC - AB$, on pourra écrire $AC + BA$.

Si l'on ajoute deux vecteurs ~~égaux de~~ situés en ligne ~~même direction~~ droite, la somme sera un vecteur situé sur la même droite, et dont la longueur sera la somme ou la différence des longueurs des deux premiers, selon que ceux-ci seront de même sens ou de sens contraire.

Si l'on ajoute un nombre n de vecteurs égaux en grandeur et en direction, la somme sera le produit de l'un d'eux par n, et ce produit sera un vecteur de même direction et de longueur n fois plus grande.

Du cas de n entier on passe, par le raisonnement connu au cas de n fractionnaire ou incommensurable.

D'après cela, AB étant un vecteur quelconque, n.AB représentera un vecteur quelconque parallèle à AB, et de même ~~dir~~ sens ou de sens contraire, selon que n sera positif ou négatif. Ainsi

$$AB + n.CD = 0$$

exprime que les droites AB et CD sont parallèles.

On a évidemment

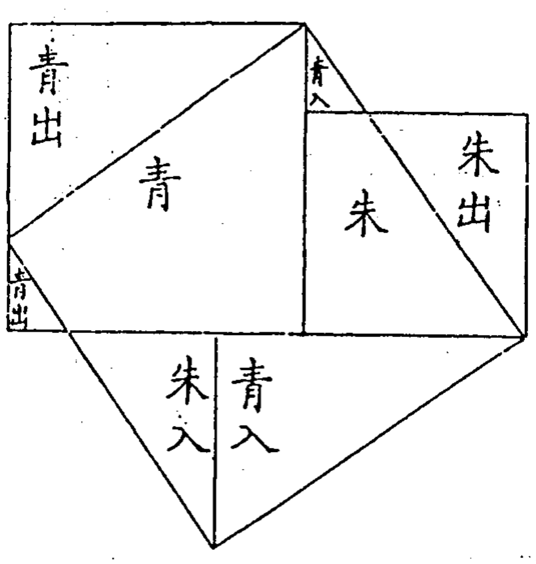
$$n.AB = -n.BA.$$

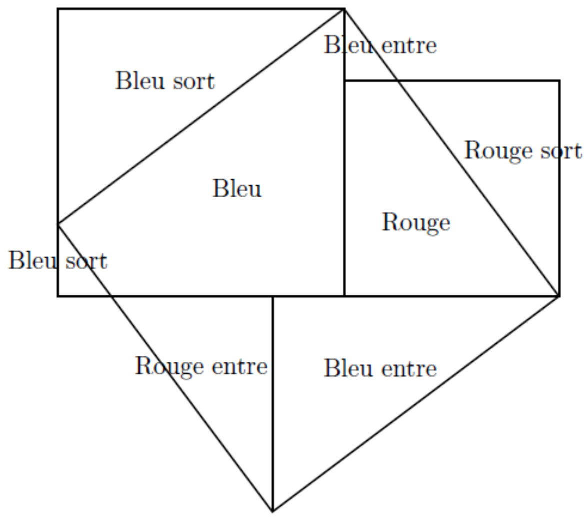
~~Ainsi~~ Si une relation de la forme (5) m.AB + n.CD a lieu sans que AB et CD soient parallèles, on doit en conclure que les coefficients m et n sont nuls séparément.

Texte n°10. Le théorème de Pythagore : preuves visuelles

1. Preuves par « puzzle », décomposition et recomposition

Dans les *Neuf Chapitres sur l'art du calcul*, texte classique et anonyme du IIe s. avant J.-C., le commentaire ultérieur de Liu Hui (IIIe s. après J.-C.) fait allusion à une preuve visuelle, malheureusement non dessinée. Voici une reconstitution de la figure de Liu Hui, datant de la fin du XIXe siècle :



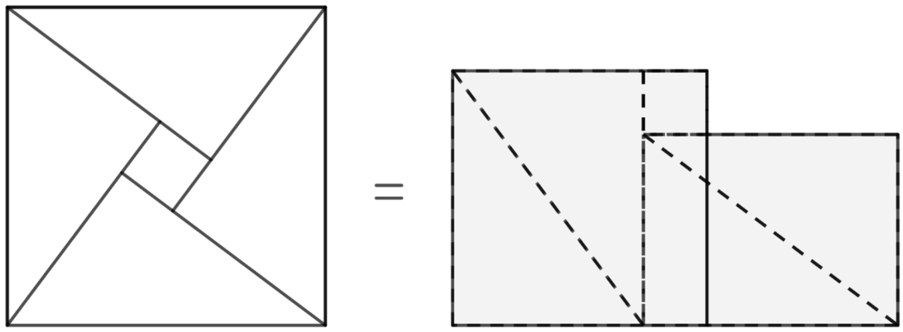


Source du dessin chinois : Gu Guanguang, *Jiushu cungu* [Les Neuf Chapitres, dépositaires de la tradition], Nankin, Jiangsu Shuju, 1892, ch. 9, p. 4v. Cité dans : Jean-Claude Martzloff, « Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises », in : *La démonstration mathématique dans l'histoire*, actes du VIIe colloque inter-IREM d'épistémologie et histoire des mathématiques, Besançon (12-13 mai 1989), Besançon et Lyon, IREM, 1990.

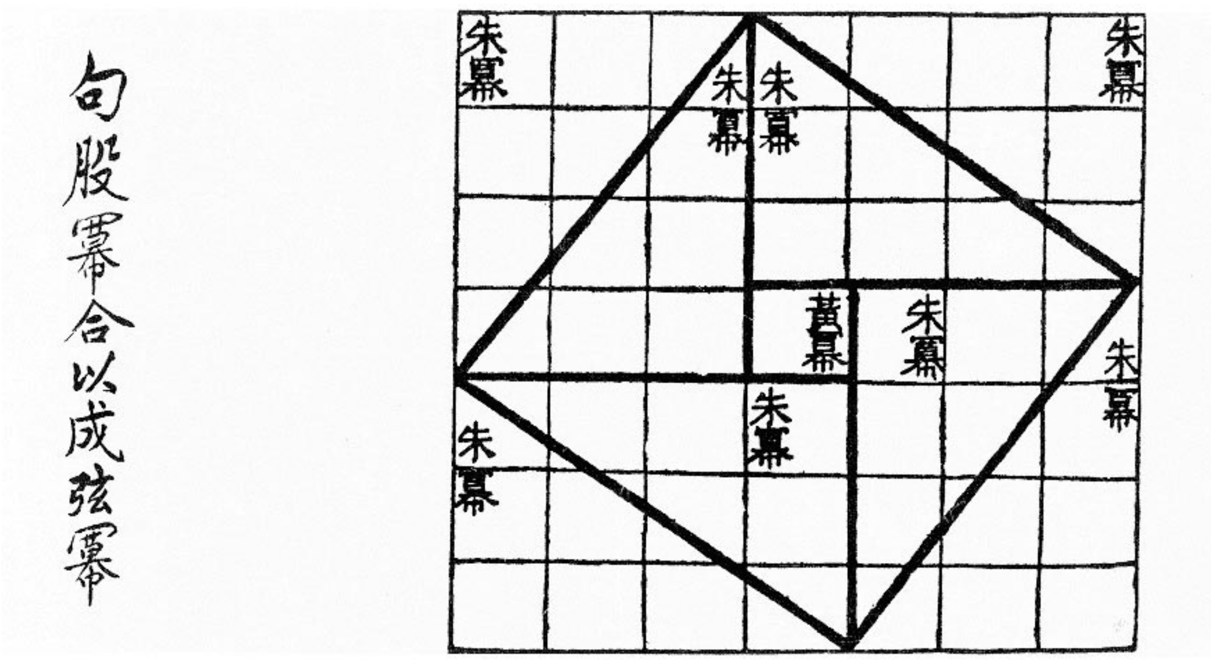
La construction de Bhāskara (mathématicien indien, vers 1150)

Source : Henry Thomas Colebrooke, *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara*, Londres, Murray, 1817, p. 222-223.

Voyez !



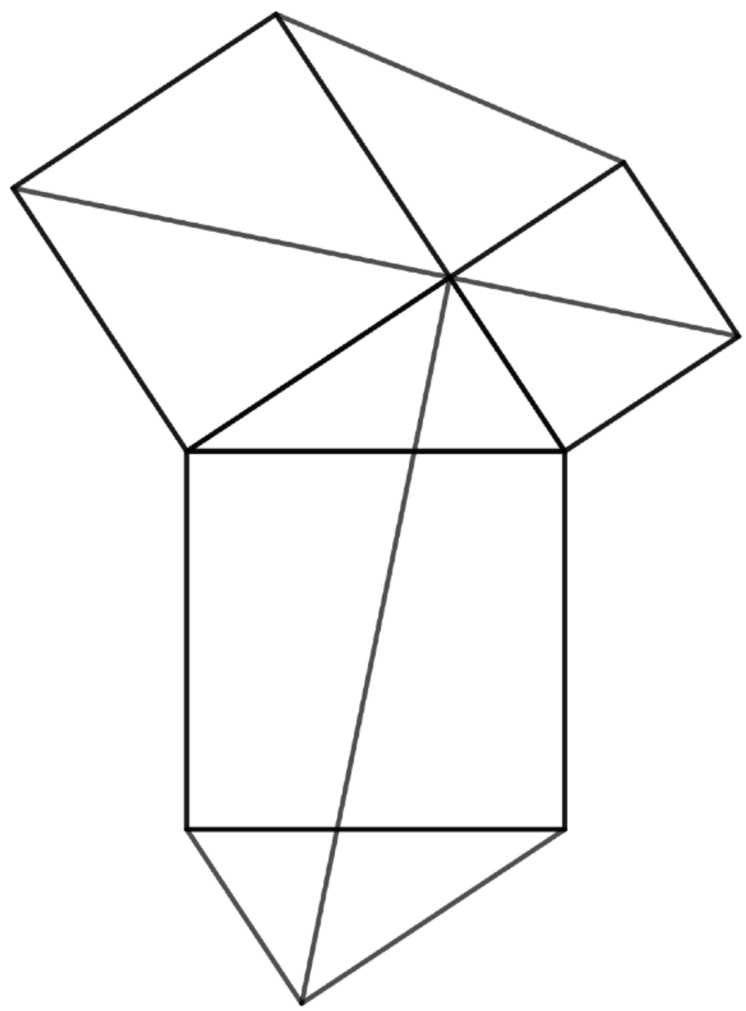
Cette construction a une origine chinoise (époque Han, II^{e} siècle avant J.-C.) :



Source : Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, vol. 3: Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth, Taipei, Cave Books Ltd, 1986, p. 22.

La démonstration dite de Leonardo da Vinci

Source : Olry Terquem, *Nouveau manuel de géométrie, ou Exposition élémentaire des principes de cette science,* nouvelle édition, Paris, Roret, 1838, § 223 et fig. 49. Terquem semble avoir retrouvé indépendamment la démonstration qu'enseignait le professeur de lycée Tobias Mayer (1752-1830) et qui se trouve dans Georg Friedrich von Tempelhof, *Geometrie für Soldaten und die es nicht sind*, Berlin, J.F. Unger, 1790. L'attribution à Léonard de Vinci date du XX^{e} siècle et ne repose sur rien.



2. Preuve dynamique

Source : Oliver Byrne, *The First Six Books of the elements of Euclid in which Coloured Diagrams and Symbols are used instead of Letters for the Greater Ease of Learners*, London, William Pickering, 1847, p. 48-49.