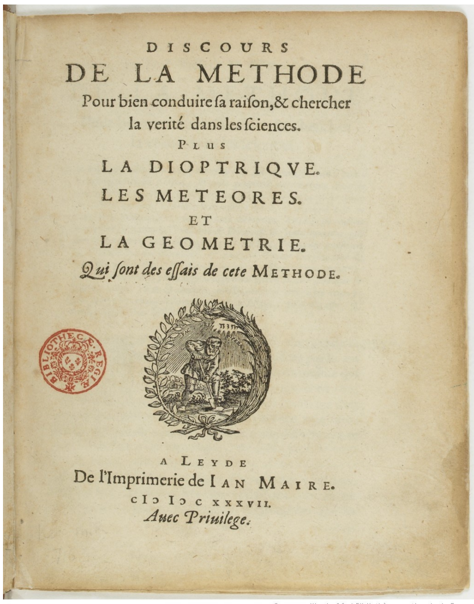
IREM
DE CAEN
NORMANDIE

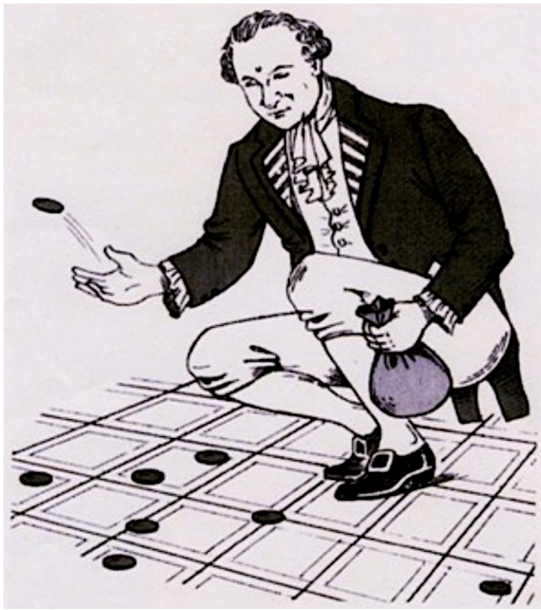
UNIVERSITÉ DE CAEN NORMANDIE
campus 2, bâtiment Sciences 3, porte S3 306
Adresse postale: BP 5186, CS 14032, 14032 CAEN Cedex
Téléphone: 02 31 56 74 02
Adresse électronique: irem@unicaen.fr
Site: http://irem.unicaen.fr

Mathématiques de Seconde appuyées sur l'histoire

stage du Plan académique de formation (19A0050166 - 41624)
14 février et 27 mars 2020

Recueil de textes historiques (deuxième partie)


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Auec Priuilege.



Document conçu par le Cercle de lecture en histoire des mathématiques

Texte n°11. Tables de mortalité et vie moyenne

1. John Graunt et la première table de mortalité (1662)

Édition originale : John Graunt, *Natural and Political Observations Mentioned in a following Index, and made upon the Bills of Mortality…*, Londres, J. Martin, J. Allestry and T. Dicas, 1662, chap. XI, §§ 9-11, p. 60-62.
Traduction française : John Graunt, *Observations naturelles et politiques répertoriées dans l'index ci-après et faites sur le bulletins de mortalité*, édition critique et traduction par Éric Vilquin, Paris, INED, 1977, p. 105-107.

Chapitre XI Du nombre d'habitants

[…]

9. Nous avons trouvé que, sur 100 individus conçus et animés, 36 environ meurent avant l'âge de 6 ans et peut-être un seul est survivant à 76 ans. Comme il y a 7 décennies entre 6 et 76, nous avons recherché six nombres moyens proportionnels entre 64, le nombre de survivants à 6 ans, et 1, celui qui survit à 76 ans, et nous trouvons que les nombres suivants sont pratiquement assez proches de la vérité, car les Hommes ne meurent pas selon des proportions exactes ni en fractions ; d'où résulte la table suivante :

Sur 100 individus, il en meurt pendant les six premières années ..	36
Les dix années suivantes ou [1re] décennie ………………………	24
La 2e décennie ………………………………………………………	15
La 3e décennie ………………………………………………………	9
La 4e …………………………………………………………………	6
La suivante …………………………………………………………	4
La suivante …………………………………………………………	3
La suivante …………………………………………………………	2
La suivante …………………………………………………………	1

10. Il s'ensuit que, sur ces 100 individus conçus, il en survit

au bout de 6 ans ………………………………………	64
" " de 16 ans………………………………………	40
" " de 26 ans………………………………………	25
" " de 36 ans………………………………………	16
" " de 46 ans………………………………………	10
" " de 56 ans………………………………………	6
" " de 66 ans………………………………………	3
" " de 76 ans………………………………………	1
" " de 80 ans………………………………………	0

11. Il s'ensuit également que, de tous ceux qui ont été conçus, il y a actuellement 40 % de survivants au-dessus de 16 ans, 25 au-dessus de 26 ans et ainsi de suite, comme dans la Table précédente. Donc, entre 16 et 56 ans, il y a 40 moins 6, soit 34 individus ; entre 26 et 66 ans, il y en a 25 moins 3, soit 22 et ainsi de suite. […]

Texte en anglais (orthographe non modernisée)

9. Where as we have found, that of 100 quick Conceptions about 36 of them die before they be six years old, and that perhaps but one surviveth 76, we, having seven *Decads* between six and 76, we sought six mean proportional numbers between 64, the remainer, living at six years, and the one, which survives 76, and finde, that the numbers following are practically near enough to the truth; for men do not die in exact Proportions, nor in Fractions: from when arises this Table following.

Viz. of 100 there dies		The fourth	6
within the first six years	36	The next	4
The next ten years, or		The next	3
Decad	24	The next	2
The second *Decad*	15	The next	1
The third *Decad*	09		

10. From whence it follows, that of the said 100 conceived there remains alive at six years end 64.

At Sixteen years end	40	At Fifty six	6
At Twenty six	25	At Sixty six	3
At Tirty six	16	At Seventy six	1
At Fourty six	10	At Eight	0

11. It follows also, that of all, which have been conceived, there are now alive 40 *per Cent*. above sixteen years old, 25 above twenty-six years old, *& sic deinceps,* as in the above Table: there are therefore of Aged between 16, and 56, the number of 40, less by six, *viz*. 34; of between 26, and 66, the number of 25 less by three, *viz*. 22: *sic deinceps*.

2. Correspondance entre Christiaan Huygens et son frère Lodewijk sur la vie moyenne.

Source : Christiaan Huygens, *Œuvres complètes*, t. VI : *Correspondance 1666-1669*, éd. Johannes Bosscha jr, La Haye, Martinus Nijhoff, 1895.

N° 1755. [Lodewijk Huygens] à Christiaan Huygens. 22 août 1669.

[…] A propos d'âge, j'ai fait une Table ces jours passés du temps qu'il reste à vivre, à des personnes de toute sorte d'âge. C'est une conséquence que j'ai tiré de cette table du livre Anglais *of the Bills of Mortality,* de laquelle je vous envoie ici une copie, afin que vous preniez la peine de faire un peu les mêmes supputations, et que nous puissions voir comme nos calculs s'accorderont. J'avoue que j'ai eu assez de peine d'en venir à bout, mais à vous il n'en sera pas de même, et les conséquences qui en résultent sont fort plaisantes et peuvent même être utiles pour les constitutions des rentes à vie. La question est jusqu'à quel âge doit vivre naturellement un enfant aussitôt qu'il est conçu. Puis un enfant de 6 ans, puis un de 16 ans, de 26. etc. Si vous y trouvez de la difficulté ou trop d'embarras, je m'offre à vous faire part de ma méthode, qui est assurée, par la première occasion.

Adieu.

Selon mon calcul vous vivrez environ jusqu'à l'âge 56 ans et demi. Et moi jusqu'à 55.

N° 1756. Christiaan Huygens à Lodewijk Huygens. 28 août 1669.

[…] C'est beaucoup fait à vous, d'avoir pu faire le calcul des âges, dont vous dites être venu à bout. Mais afin que ce calcul fût exact il faudrait avoir une table qui marquât d'année en année combien il meurt des personnes de 100 qu'on suppose, et il faut que vous l'ayez suppléée par quelque moyen comme j'en sais pour cela, ou autrement vous ne sauriez déterminer au vrai, combien doit vivre une personne de 6, 16 ou 26 ans &c. et encore moins de quelque âge moyen entre ceux-là, comme vous l'avez entrepris de vous et de moi. Je crois donc que vous n'en décidez qu'a peu près.

Ce que je puis conclure de certain par les données de la table c'est que qui gagerait qu'un enfant nouveau-né (ou conçu comme vous dites, mais il me semble que l'Anglais ne parlait pas des conçus car comment en peut-on tenir registre) vivra à 16 ans, prendrait le mauvais parti et hasarderait 4 contre 3. De même qui gagerait qu'une personne de 16 ans vivra jusqu'à 36, il hasarde tout de même 4 contre 3.

J'ai envie de suppléer la table comme j'ai dit et résoudre les problèmes qu'on peut proposer en cette matière qui est assez subtile. Vôtre méthode ne saurait être la même que la mienne, et je serais bien aise de la voir. Adieu.

N° 1771. Lodewijk Huygens à Christiaan Huygens. 30 octobre 1669.

[…] J'avoue que mon calcul des âges n'est pas tout à fait juste mais il y a si peu à dire que cela n'est aucunement considérable, et d'autant moins que la table Anglaise, sur laquelle nous nous fondons, n'est pas dans cette dernière justesse aussi bien, mais comme dit cet Auteur, « *those numbers are practically near enough to the truth*, *for men doe not die in exact proportions nor in fractions* ». Voilà donc la méthode dont je me suis servi. Je compte premièrement les années que toutes ces 100 personnes ensemble doivent avoir vécu, qui sont en tout 1822 années, ce que vous verrez prouvé dans la page qui suit.

Les 36 personnes qui meurent au-dessous de 6 ans ont vécu l'un portant l'autre 3. ans, qui fait	108 ans.
Les 24 qui meurent entre 6 et 16 ont vécu l'un portant l'autre 11 ans, qui fait	264
Les 15 qui meurent entre 16 et 26 ont vécu 21. ans, qui fait	315
Les 9 entre 26 et 36. ont vécu 31 ans, qui fait	279
Les 4 entre 46 et 56. ont vécu 51 ans, qui fait	204
Les 3 entre 56 et 66. ont vécu 61 ans, qui fait	183

Les 2 entre 66 et 76. ont vécu 71 ans, qui fait	142
Et l'un qui meurt entre 76 et 86 a vécu 81 ans	81
	---------
somme	1822 ans

Ces 1822 ans partagés également entre 100 personnes il vient pour chacun 18 ans et environ 2 mois, qui est l'âge de chaque personne créée ou conçue, l'une portant l'autre. Car notez en passant que c'est des personnes conçues que l'Anglais parle, et il en peut bien tenir registre aussi bien que de ceux qui sont nés, parce que les fausses couches entrent aussi dans ses observations.

Or pour venir à notre compte et spécifier combien il reste de vie à chaque personne d'un tel ou d'un tel âge, voilà comme je fais.

J'ôte premièrement les 108 ans (qui est l'âge des 36 enfants qui meurent au-dessous des 6 ans) de tout ce nombre de 1822 ans ; reste 1714 ans, lesquels doivent être partagés entre les 64 personnes qui restent, ce qui fait pour chacun, c'est à dire pour chaque enfant de 6 ans, 26 ans et environ 10 mois de sorte qu'il leur reste encore à vivre au susdit âge de 6 ans, 20. ans et 10. mois.

Ensuite ôtez de ces 1714 ans, l'âge des 24 personnes qui meurent entre 6 et 16 (qui est 264 ans) il restera 1450. Lesquels se doivent partager entre les 40 personnes qui restent, ce qui fait pour chacun d'eux. C'est à dire :

		ans	**mois**
Pour chaque personne de 16 ans	36 ans et 3 mois, de sorte qu'il leur reste de vie	20	3
Pour ceux de 26	il viendra 45 ans 4 mois, ou pour leur reste	19	4
Pour ceux de 36	53 ans 6 mois; pour leur reste	17	6
Pour ceux de 46	61 ans. Pour leur reste	15	-
Pour ceux de 56	67 ans et 6 mois. Pour leur reste	12	8
Pour ceux de 66	74 ans 4 mois. Pour leur reste	8	4
Pour ceux de 76	81 ans. Pour leur reste	5	-
Pour ceux de 86	Rien	0	-

Lorsque je veux déterminer l'âge d'une personne qui est entre 36 et 46 par exemple, comme vous et moi, je règle leurs années futures à proportion de celle qu'ils ont excédé plus ou moins ledit nombre de 36 et ainsi du reste.

Ensuite de ce que dessus je ne comprends pas la raison de vôtre calcul de 4 contre 3 car à mon avis la partie est environ égale lors qu'on gage qu'une personne de 6 ou une de 16 vivront environ encore 20 ans. J'attends donc vos raisons comme je vous ai envoyé les miennes.

N° 1776. Christiaan Huygens à Lodewijk Huygens. 21 novembre 1669.

Je viens d'examiner votre calcul des âges, et de refaire le mien que j'avais perdu. Je voudrais que le vôtre fût véritable, puisqu'il nous donne un peu plus de vie, mais il ne sert de rien de nous flatter […]. Vous concluez assez près du vrai, que les 100 personnes ont à faire ensemble 1822 ans de vie, mais il ne s'ensuit pas que les 18 ans et 2 mois, qui viennent en divisant ce nombre par 100 soit l'âge de chaque personne créée ou conçue, ainsi que vous tenez pour certain. Prenons, par exemple, que les hommes soient encore plus faibles dans leur enfance qu'ils ne sont, et que de 100 il en meure d'ordinaire 90 dans les premières 6 années, mais que ceux aussi qui surpassent cet âge soient des Nestors, et Mathusalems, et qu'ils vivent d'ordinaire jusqu'a 152 ans et 2 mois. Vous aurez pour les 100 le même nombre de 1822 ans, et cependant qui gagerait, qu'un enfant conçu parviendrait alors à l'âge de 6 ans seulement, aurait grand désavantage, puis que de 10 il n'y a qu'un qui y parvient.

Voici encore une autre instance. Prenez que sur 100 enfants conçus (dans la supposition ordinaire) je gageasse pour chacun d'eux qu'il atteindra l'âge de 16 ans. Il est certain que puisque de 100 il n'en reste d'ordinaire que 40 de 16 ans, que j'aurais du désavantage et que je ne devais avoir gagé que 40 contre 60, ou 2 contre 3, pour faire la partie égale.

Et partant vous voyez que les 18 ans 2 mois ne sont nullement l'âge d'un chacun qui soit conçu, et je ne le trouve que d'11 ans environ.

Qui gagerait qu'un enfant de 6 ans vivra jusqu'a 26 peut mettre 25 contre 39, puis que de 64 enfants de 6 ans, il y en a 25 qui parviennent à l'âge de 26 ans, contre 39 qui meurent au-dessous.

Et qui gagerait qu'un garçon de 16 ans vivra jusqu'à l'âge de 36, peut mettre 16 contre 24 ou 2 contre 3 de sorte qu'il est un peu plus apparent pour un de 16 ans que pour un de 6 de vivre encore 20 ans.

Ce calcul comme vous voyez est fort sûr et fort facile, mais vous demanderez comment je pourrai déterminer comme vous, combien il reste raisonnablement à vivre à une personne d'un âge proposé. Pour faire cela j'ai suppléé la petite table anglaise, sans pourtant m'embarrasser d'aucun calcul, mais en traçant une ligne courbe, sur la quelle avec le compas je mesure la vie de celui qu'on veut, et je vois par exemple qu'a votre âge de 38 ans, vous pouvez encore faire état de 19 ans et 4 mois environ. Mais si vous vous amusez à faire appeler souvent des gens pour vous battre, il faut encore en retrancher quelque chose. Je vous enverrai la ligne de vie une autre fois avec la pratique d'icelle et même une table des vies à chaque âge d'année en année, qui ne me coûtera guère.[…]

N° 1777. Christiaan Huygens. *Appendice I au No.* 1776. 21 novembre 1669.
En examinant le calcul de Mon frère Louis.

[…] Qui gagerait donc qu'un enfant conçu vivrait jusqu'a 6 ans peut mettre 64 contre 36, ou 16 contre 9 et qui gagerait qu'un enfant conçu vivra jusqu'à 16 ans ne peut mettre que 40 contre 60, ou 2 contre 3, puisque de 100 il y en aura seulement 40 qui vivront jusqu'à l'âge de 16 ans.

Mais qui gagerait qu'un enfant de 6 ans vivra jusqu'a 16 peut mettre 40 contre 24 ou 5 contre 3, parce que de 64 personnes de 6 ans il y en a 40 qui vivent jusqu'à 16 et 24 meurent au-dessous.

De même qui gagerait qu'un enfant de 16 ans vivra jusqu'a 26 peut aussi mettre 5 contre 3, puisque de 40 personnes de 16 ans il y en a 25 qui vivent jusqu'a 26 ans, et 15 qui meurent au-dessous.

Qui gagerait qu'un enfant de 6 ans vivra jusqu'à sa 26^{e} année peut mettre 25 contre 39, puisque de 64 enfants de 6 ans il y en a seulement 25 qui parviennent à l'âge de 26 ans et les autres 39 meurent au-dessous.

Semblablement sur un de 16 ans qui gagerait qu'il vivra jusqu'à sa 36^{e}, peut mettre 16 contre 24 ou 2 contre 3, de sorte qu'il est un peu plus apparent pour un de 16 ans que pour un de 6 de vivre encore 20 ans.

De cent enfants conçus il en meurt 36 devant l'âge de 6 ans, lesquels on peut dire avoir vécu, l'un portant l'autre, 3 ans.

Des 64 restants de 6 ans il en meurt 24 devant l'âge de 16 ans, lesquels ont vécu l'un portant l'autre, 11 ans.

Et ainsi du reste comme il y a dans cette table.

multipliez	36	par	3	faire	108
	24	„	11		264
	15	„	21		315
	9	„	31		279
	6	„	41		246
	4	„	51		204
	3	„	61		183
	2	„	71		142
	1	„	81		81
					1822

1822 per 100
108/1714 per 64
264/1450 per 40
315/1135 per 25
279/856 per 16
246/610 per 10
204/406 per 6.
183/223 per 3
142/81 per 1

Donc un enfant conçu a 36 chances pour vivre 3 ans, et 24 chances pour vivre 11 ans, et 15 chances pour vivre 21 ans, etc.

Donc par ma règle des jeux de hasard il faut multiplier chaque nombre des chances par les ans qu'elles donnent, et diviser la somme des produits, qui est ici 1822, par la somme de toutes les chances qui sont ici 100. Et le quotient, qui est ici 18 ans et environ 2½ mois, sera ce que vaut la chance de l'enfant conçu.

La méthode de mon frère Louis revient à la même chose, quoiqu'il y soit parvenu par d'autres voies.

Mais quoique l'espérance d'un enfant conçu vaille ces 18 ans 2½ mois, ce n'est pas à dire qu'il soit apparent qu'il vivra si longtemps, car il est beaucoup plus apparent qu'il mourra devant ce terme. De sorte que si on voulait gager qu'il y parviendrait la partie serait désavantageuse. Car on peut seulement gager avec égal avantage qu'il vivra jusqu'a 11 ans environ. Partant il se trompe aussi en disant que quand on gage, qu'un enfant de 6 ans ou de 16 vivra encore 20 ans, la partie est égale. Car on ne peut mettre que 25 contre 39 sur celui de 6 ans, et 2 contre 3 sur celui de 16. Quoique l'espérance de l'un et de l'autre vaille les 20 ans, c'est à dire qu'ils se feraient tort en acceptant moins de 20 ans assurés. Son calcul est bon pour les rentes viagères.

Pour savoir dans quel temps de 40 personnes de 46 ans il en mourra 2. Fait 1 an 3 mois.
De 10 il en meurt 4 entre 46 et 56.
Ergo de 40 il en meurt 16 entre 46 et 56 c'est à dire en 10 ans

morts	en	ans		morts	
16	-	10	-	2	1 an 3 mois.

Un homme de 56 ans épouse une femme de 16 ans, combien peuvent-ils faire état de vivre ensemble sans que l'un ni l'autre meure. Ou bien si on m'avait promis 100 francs au bout de chaque an qu'ils vivront ensemble, pour combien serait-il juste qu'on rachetât cette obligation. Item dans combien de temps doivent ils mourir tous deux.
En combien de temps mourront 40 hommes de 46 ans chacun ?
En combien de temps mourront 2 personnes de 16 ans chacun ? Réponse en 29 ans 2⅔ mois.

	Age où ils parviennent.
à un enfant conçu reste de vie 18,22 ou 18 ans 2⅔ mois à peu prés	18,22
à un de 6 ans reste de vie 20,81 ou 20 ans 10 mois	26,81
à un de 16 ans reste de vie 20,25 ou 20 ans 3 mois	36,25
a un de 26 ans reste de vie 19,40 ou 19 ans 5 mois	45,40
a un de 36 ans reste de vie 17,50 ou 17 ans 6 mois	53,50
a un de 46 ans reste de vie 15,00 ou 15 ans 0 mois	61,00
a un de 56 ans reste de vie 11,67 ou 11 ans 8 mois	67,67
a un de 66 ans reste de vie 8,33 ou 8 ans 4 mois	74,33
a un de 76 ans reste de vie 5,00 ou 5 ans 0 mois	81
a un de 86 ans reste de vie 0,00 ou 0 an 0 mois	86

Pour savoir combien vivra le dernier de 2 personnes de 16 ans, il faut s'imaginer que chacun d'eux tire un billet hors de 40 (complets) dont il y en a
15 qui donnent 5 ans, 9 qui donnent 15 ans, 6 qui donnent 25 ans, 4 qui donnent 35 ans, 3 qui donnent 45 ans, 2 qui donnent 55 ans, 1 qui donne 65 ans.
Et qu'ils prendront des 2 billets celui qui a le plus d'ans pour la vie du dernier.

Supposons que l'on prenne premièrement son billet, et il est certain qu'il a 15 chances pour en avoir un qui donne encore 5 ans de vie. Et 9 chances pour en avoir un de 15 ans de vie, &c. Or s'il en prend un de 5 ans de vie, il faut après cela que l'autre personne tire aussi son billet, Et tout ce qui lui échoit au-dessous de 5 ans, ne peut point nuire, puisque le premier a déjà un billet de 5 ans, de sorte que tout ce qui peut échoir au second de moins que 5 ans, vaut autant que 5 ans, mais ce second a 15 chances dont 7½ sont pour vivre moins que 5 ans, et 7½ pour vivre 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 ans, qui vaut autant que 7½ pour vivre 8 ans. Et encore 25 chances qui valent à un homme de 16, 20, 40 ans (car ceux-ci doivent être pris comme cela puisque pas une de ces 25 chances ne donne moins que 5 ans). Donc le premier en tirant son billet a 15 chances pour avoir 7½ chances à 5 ans, 7½ chances à 8 ans, 25 chances à 29,40 ans.

Ce premier en tirant a aussi 9 chances pour prendre un billet de 15 ans, et en ayant pris un de ceux-ci, tout ce qui peut échoir à l'autre de moins que 15 ans vaut autant que 15 ans. Mais ce second a 15 chances qui donnent au-dessous de 15 ans, qui sont donc autant que 15 chances à 15 ans. Et il en a 9 dont les 4½ sont au-dessous de 15 ans qui sont donc aussi de 15 ans, et les autres 4½ pour 16, 17, 18, 19 ou 20 ans qui vaut autant que 4½ pour 18 ans. Et encore 16 chances pour vivre 37½ ans.

Donc le premier en tirant a aussi 19½ chances a 15 ans, 4½ chances a 18 ans, 16 chances a 37½ ans.
Et ainsi toujours comme ici à la marge.
Le premier en tirant

15 chances a 20,3	304,5
9 chances a 24,3	218,7
6 chances a 30,2	181,2
4 chances a 37,6	150,4
3 chances a 46,1	138,3
2 chances a 55,3	110,6
1 chances a 65,0	65,0
somme	1168,7

29,22 ans que vivra le dernier de 2 personnes de 16 ans chacun. C'est à dire que l'un des 2 parviendra à l'âge de 45 ans 2⅔ mois.
Pour savoir dans combien de temps mourra un de 2 personnes chacun de 16 ans, il faut derechef s'imaginer que l'un après l'autre tire un billet de 40 (complets) dont il y en a 15 qui donnent 5 ans, 9 qui donnent 15 ans &c.

15	7½	5	20,3
	7½	8	
	25	29,40	
9	19½	15	24,3
	4½	18	
	16	37½	
6	27	25	30,2
	3	28	
	10	45	
4	32	35	37,6
	2	38	
	6	51,67	
3	35½	45	46,1
	½	48	
	3	58,33	
2	38	55	55,3
	1	58	
	1	65	
1	39	65	65,0
	1	66½	

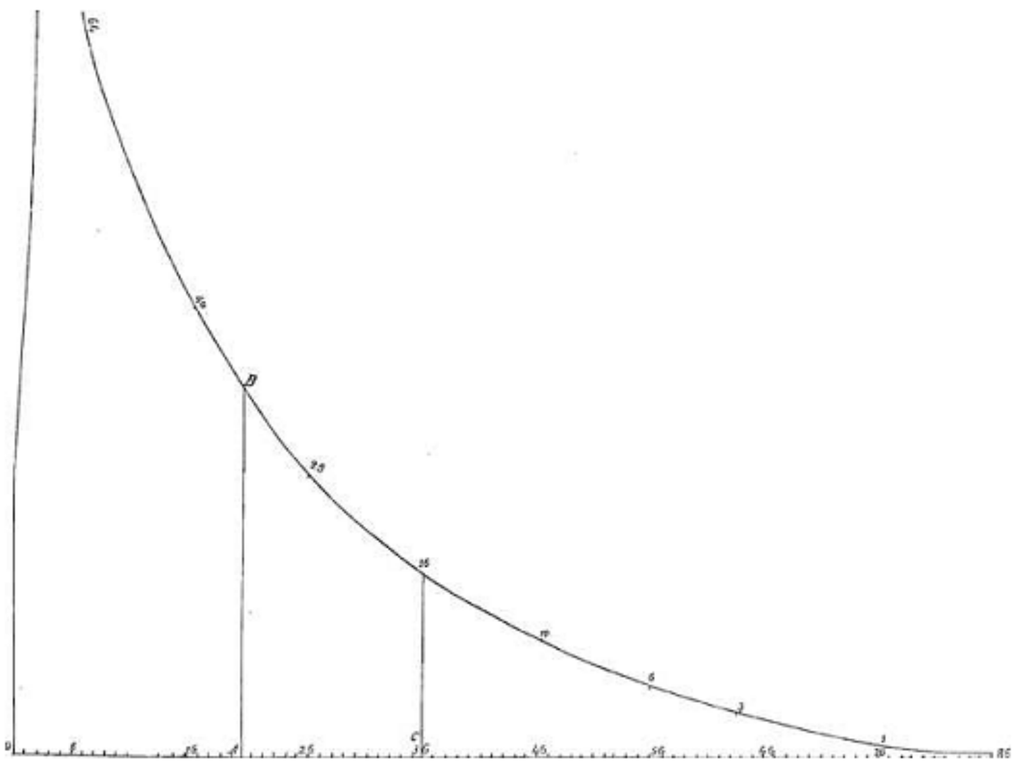
De même que dans la question précédente, mais qu'ici il faut prendre les années du moindre billet.

Le premier en tirant son billet a 15 chances pour vivre 5 ans, 9 chances pour vivre 15 ans &c. Et s'il prend un des 15 billets de 5 ans ; l'autre en tirant ensuite quelque billet qu'il tire, il ne peut servir de rien pour passer les 5 ans, puis que des 2 billets on s'arrête au moindre. Mais au contraire il peut encore diminuer de quelque chose ; car il faut considérer à son égard les 15 billets de 5 ans, comme s'il y en avait 7½ de au-dessus de 5, qui ne vaudront que 5 pourtant, et 7½ de 5 ou 4, ou 3 ou 2 ou 1 ans. Or ce second outre ces 15 billets ou chances il en a encore 25 qui ne peuvent aussi valoir que 5 ans. Donc le premier en tirant a 15 chances pour avoir 7½ chances à 3 ans et 32½ chances à 5 ans.

Le premier avait aussi en tirant 9 chances pour avoir un billet de 15 ans. Et s'il en tire un de ceux-ci, l'autre en tirant en suite ne peut rien tirer qui serve à passer ces 15 ans. Mais il les peut diminuer, premièrement s'il en tire un des 15 de 5 ans ou un des 4½ qui étant au-dessous de 15 valent autant que 13 ans ; les autres 4½ valant aussi 15 seulement quoi qu'ils soient au-dessus. Or ce second outre ces 15 et 9 c'est à dire 24 chances il en a encore 16 qui ne peuvent aussi valoir que 15.

Donc le premier en tirant avait aussi 9 chances pour avoir 15 chances à 5. 4½ chances à 13. 20½ chances à 15.

Nº 1778. Christiaan Huygens. ***Appendice II au No.*** **1776. [21 novembre 1669].**



Sur la ligne droite d'en bas sont marqués les âges des personnes et sur les 6 il y a une perpendiculaire de 64 parties parce que de 100 personnes selon la table anglaise il en reste 64 à l'âge de 6 ans. Sur le 16 il y a une perpendiculaire de 40 parties parce qu'a l'âge de 16 ans il reste 40 personnes des 100 qui étaient conçues, et ainsi du reste. Et par tous les points ou bouts de ces perpendiculaires j'ai mené la ligne courbe 64, 40, 25 &c. Si je veux savoir maintenant combien il reste de personnes après les 20 années de 100 enfants conçus, je prends sur la ligne d'en bas l'âge de 20 ans au point A d'où ayant érigé une perpendiculaire qui rencontre la courbe en B, je dis que AB, qui pris sur l'échelle d'en bas fait presque 33 parties, est le nombre des personnes qui de 100 conçus atteignent l'âge de 20 ans. Que si je veux savoir ensuite combien il reste raisonnablement à vivre à une personne de 20 ans par exemple, je prends la moitié de BA et l'ajuste en DC entre la courbe et la droite en sorte qu'elle soit perpendiculaire à la dernière. Et j'ai AC pour les années qui restent à vivre à ladite personne, qui sont près de 16 ans, comme il paraît par les divisions dont chacune est une année. La raison est, que la perpendiculaire DC étant la moitié de BA que marquait le nombre d'hommes qui restent des 100, 20 ans après la conception, à savoir 33, cette DC tombant sur 36 de la droite marquera qu'il reste la moitié de 33 c'est à dire 16½ hommes après la 36ᵉ année. Donc puisque des 33 personnes de 20 ans la moitié meurt d'ordinaire dans les prochains 16 ans, on peut gager avec égal avantage qu'une personne de 20 ans vivra encore 16 ans. On trouvera de même que la vie d'un enfant conçu doit être taxée à 11 ans au lieu que mon frère comptait 18 et 2 mois.

Texte n°12. Sur quelques jeux de hasard

1. D'Alembert et le jeu de croix ou pile (1754)

Article "CROIX OU PILE [signé (*O*)], *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, tome 4e, Paris, Briasson, David, Le Breton & Durand, 1754, p. 512-513.

CROIX OU PILE, (*analyſe des haſards.*) Ce jeu qui eſt très-connu, & qui n'a pas beſoin de définition, nous fournira les réflexions ſuivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amenera *croix* en jouant deux coups conſécutifs. La réponſe qu'on trouvera dans tous les auteurs, & ſuivant les principes ordinaires, eſt celle-ci: Il y a quatre combinaiſons,

Premier coup.	Second coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaiſons une ſeule fait perdre, & trois font gagner; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joüeur qui jette la piece. S'il parioit en trois coups, on trouveroit huit combinaiſons dont une ſeule fait perdre, & ſept font gagner; ainſi il y auroit 7 contre 1 à parier. *Voyez* COMBINAISON & AVANTAGE. Cependant cela eſt-il bien exact? Car pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il

C R O

faut-il pas réduire à une les deux combinaiſons qui donnent *croix* au premier coup? Car dès qu'une fois *croix* eſt venu, le jeu eſt fini, & le ſecond coup eſt compté pour rien. Ainſi il n'y a proprement que trois combinaiſons de poſſibles:

Croix, premier coup.
Pile, *croix*, premier & ſecond coup.
Pile, *pile*, premier & ſecond coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même dans le cas de trois coups, on trouvera

Croix.
Pile, *croix*.
Pile, *pile*, *croix*.
Pile, *pile*, *pile*.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier: ceci eſt digne, ce me ſemble, de l'attention des Calculateurs, & iroit à réformer bien des regles unanimement reçûes ſur les jeux de haſard.

CROIX OU PILE, (*analyse des hasards.*) Ce jeu qui est très connu, et qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera *croix* en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, et suivant les principes ordinaires, est celle-ci : il y a quatre combinaisons,

Premier coup.	Second coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaisons une seule fait perdre et trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il pariait en trois coups, on trouverait huit combinaisons dont une seule fait perdre, et sept font gagner ; ainsi il y aurait 7 contre 1 à parier. *Voyez* COMBINAISON ET AVANTAGE. Cependant cela est-il bien exact ? Car pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent *croix* au premier coup ? Car dès qu'une fois *croix* est venu, le jeu est fini, et le second coup est compté pour rien. Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix, premier coup.
Pile, Croix, premier et second coup.
Pile, pile, premier et second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même dans le cas de trois coups, on trouvera

Croix.
Pile, croix.
Pile, pile, croix.
Pile, pile, pile.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier : ceci est digne, ce me semble de l'attention des calculateurs, et irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard.

2. Leibniz et un jeu de dés (1678)

Source : S. de Mora-Charles, « Quelques jeux de hazard selon Leibniz (manuscrits inédits) », *Historia Mathematica* 19, 1992, p. 125-157 (p. 132-135). Début d'un manuscrit écrit en français daté d'octobre 1678 intitulé « Sur le jeu de quinquenove ». Nous avons modernisé l'orthographe et la ponctuation.

C'est une question curieuse et même utile parmi les joueurs si l'avantage dans le jeu qui s'appelle quinquenove est du côté de celui qui joue ou non. Elle est curieuse parce qu'il faut faire quelques raisonnements assez plaisants pour la déterminer ; et elle est utile non seulement parce qu'elle peut servir d'essai pour estimer les degrés de probabilité en des matières plus importantes, et qui à mon avis est le principal usage qu'on en peut tirer, mais elle est avantageuse à ceux même qui jouent : car j'ai vu des habiles gens soutenir, que celui qui joue a du désavantage par les lois du jeu et qu'il y a plus d'apparence contre lui que pour lui. D'où il s'ensuivrait qu'il ferait sagement de ne pas tenir tout ce que son adversaire veut mettre et l'autre ferait sagement de mettre le plus qu'il peut pour l'engager à le soutenir, car dans la suite du temps observant toujours cette règle et jouant avec des gens qui ne l'observent pas, on ne saurait manquer de gagner. D'autres étaient dans un sentiment tout opposé : pour moi j'ai trouvé après une considération exacte qu'il faut distinguer et que l'avantage au commencement est du côté de celui qui joue, mais quand le premier coup est passé sans réussir, il commence d'avoir du pire, et l'avantage se met du côté de son adversaire, plus ou moins suivant le nombre des points qu'il a faits du premier coup.

Mais afin de rendre cette matière plus intelligible, je dis premièrement que *l'apparence se peut estimer, et même qu'elle se peut vendre ou acheter*. Par exemple un homme a droit ou engagement de jouer : le jeu est de hasard et nullement d'adresse, et il dépend de certaines règles ; je me veux mettre à sa place et achever le jeu qu'il a commencé ; la question est à combien je dois acheter l'avantage qu'il s'est déjà acquis, pour ne pas pécher contre les lois de la prudence, supposant que pour mon divertissement ou pour des raisons je ne puis ou je ne veux pas m'en dispenser. On voit par-là que l'avantage se peut vendre et par conséquent estimer quoique l'événement soit encore incertain. Prenons en un exemple. Deux personnes jouent aux dés : l'un gagnera s'il a encore huit points, l'autre s'il en a cinq. Il s'agit de savoir pour lequel des deux il faudrait plutôt parier. Je dis qu'il faut plutôt parier pour celui qui a besoin de huit points, et même que son avantage comparé avec l'espérance que l'autre doit avoir, est comme de trois à deux. C'est-à-dire, je pourrais parier trois écus contre deux pour celui qui demande huit points contre l'autre, sans me faire tort. Et si je parie un contre un, j'ai un grand avantage. Il est vrai que nonobstant l'apparence je puis perdre ; d'autant que l'apparence de perdre est comme deux et celle de gagner comme trois. Mais dans la suite du temps observant ces règles de l'apparence, et jouant ou pariant souvent, il est constant qu'il se trouvera à la fin, que j'aurai gagné plutôt que perdu.

Mais pour faire voir qu'il y a plus d'apparence pour celui qui a besoin de huit points, en voici la démonstration. Je suppose qu'on joue à deux dés, et que ces deux dés sont bien faits, sans qu'il y a de la tricherie, cela étant il est visible qu'il n'y a que deux manières de rencontrer cinq points, l'une est 1 et 4, l'autre 2 et 3, au lieu qu'il y a trois manières pour avoir huit points, savoir 2 et 6, item 3 et 5, et enfin 4 et 4. Or chacune de ces manières a en elle-même autant d'apparence que l'autre, car par exemple il n'y a point de raison pour laquelle on puisse dire qu'il y a plus d'apparence de rencontrer 1 et 4 que 3 et 5. Par conséquent il y a autant d'apparences (égales entre elles) qu'il y a de manières. Donc cinq points se pouvant faire seulement de deux manières, mais huit points se pouvant faire de trois façons, il est manifeste qu'il y a deux apparences pour cinq et trois apparences toutes semblables, pour huit. Or l'apparence entière n'est que la somme de toutes ces apparences particulières, car puisqu'elles sont égales, il suffit de les compter, et il ne sert de rien de les peser. Et supposant que chaque apparence valait un écu ou quelque autre chose, il y aurait la valeur de 2 écus d'apparence pour cinq points et la valeur de 3 écus d'apparence pour les huit points. Donc l'apparence de l'un à l'autre est comme de deux à trois.

Cette décision pourrait même avoir lieu en justice. Car posons le cas que celui qui a du désavantage renverse le jeu par quelque imprudence. Je ne crois pas qu'il soit juste de le faire perdre tout en ce cas-là : cela aurait peut-être lieu s'il l'avait fait par malice ou emportement, et je crois qu'il suffira que l'argent qui est au jeu soit partagé suivant l'avantage que chacun avait, c'est-à-dire il sera en ce cas présent partagé en cinq parties égales, et l'un en aura trois, l'autre n'en aura que deux. Tout cela se doit entendre en cas que la coutume ou convention n'est pas contraire, car souvent elle condamne celui qui a fait une telle faute (de renverser le jeu, sans qu'on le puisse achever) à perdre tout, afin qu'on ne soit pas obligé de se mettre en peine des scrupulosités d'une estime si subtile, ce qui ne serait pas commode dans les compagnies. Mais autre chose est ce qui est commode, ou conforme à la pratique et à la convention, et ce qui est de l'exactitude du droit même, faisant abstraction de ce dont on est convenu. Mais je veux bien laisser là la question du droit, et je me contente d'avoir expliqué la nature de cette apparence. Cependant pour donner plus de jour à toutes ces pensées, on peut s'imaginer, ou supposer, que le droit ou la convention expresse veut qu'on fasse la distribution de l'argent mis au jeu suivant les avantages, en cas du renversement susdit. Cela étant posé, il est visible qu'il faudra suivre l'estime que je viens de faire. C'est-à-dire, cette maxime fondamentale aura lieu :

L'apparence ou probabilité de l'effet A garde la même proportion à l'apparence ou probabilité de l'effet B, que le nombre de toutes les manières capables de produire l'effet A garde au nombre de toutes les manières capables de produire l'effet B, supposant toutes ces manières également faisables. [...]

Texte n°13. Le jeu de franc-carreau selon Buffon

Édition originale : Comte de Buffon, *Histoire naturelle générale et particulière, servant de suite à l'Histoire naturelle de l'homme*, supplément, tome quatrième, Paris, Imprimerie royale, 1777, p. 95-100.

XXIII.

L'ANALYSE eſt le ſeul inſtrument dont on ſe ſoit ſervi juſqu'à ce jour dans la ſcience des probabilités, pour déterminer & fixer les rapports du haſard ; la Géométrie paroiſſoit peu propre à un ouvrage auſſi délié ; cependant ſi l'on y regarde de près, il ſera facile de reconnoître que cet avantage de l'Analyſe ſur la Géométrie, eſt tout-à-fait accidentel, & que le haſard ſelon qu'il eſt modifié & conditionné, ſe trouve du reſſort de la géométrie auſſibien que de celui de l'analyſe ; pour s'en aſſurer, il ſuffira de faire attention que les jeux & les queſtions de conjecture ne roulent ordinairement que ſur des rapports de quantités diſcrètes ; l'eſprit humain plus familier avec les nombres qu'avec les meſures de l'étendue les a toujours préférés ; les jeux en ſont une preuve, car leurs loix ſont une arithmétique continuelle ; pour mettre donc la Géométrie en poſſeſſion de ſes droits ſur la ſcience du haſard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent ſur l'étendue & ſur ſes rapports, ou calculer le petit nombre de ceux de cette nature qui ſont déjà

trouvés ; le jeu du franc-carreau peut nous ſervir d'exemple : voici ſes conditions qui ſont fort ſimples.

Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après ſa chute ſe trouvera à franc-carreau, c'eſt-à-dire, ſur un ſeul carreau ; le ſecond parie que cet écu ſe trouvera ſur deux carreaux, c'eſt-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les ſéparent ; un troiſième joueur parie que l'écu ſe trouvera ſur deux joints ; un quatrième parie que l'écu ſe trouvera ſur trois, quatre ou ſix joints : on demande les ſorts de chacun de ces joueurs.

Je cherche d'abord le ſort du premier joueur & du ſecond ; pour le trouver, j'inſcris dans l'un des carreaux une figure ſemblable, éloignée des côtés du carreau, de la longueur du demi-diamètre de l'écu ; le ſort du premier joueur ſera à celui du ſecond, comme la ſuperficie de la couronne circonſcrite eſt à la ſuperficie de la figure inſcrite ; cela peut ſe démontrer aiſément, car tant que le centre de l'écu eſt dans la figure inſcrite, cet écu ne peut être que ſur un ſeul carreau, puiſque par conſtruction cette figure inſcrite eſt par-tout éloignée du contour du carreau, d'une diſtance égale au rayon de l'écu ; & au contraire dès que le centre de l'écu tombe au dehors de la figure inſcrite, l'écu eſt néceſſairement ſur deux ou pluſieurs carreaux, puiſqu'alors ſon rayon eſt plus grand que la diſtance du contour de cette figure inſcrite au contour du carreau ; or, tous les points où peut tomber ce centre de l'écu, ſont repréſentés dans le premier cas par la ſuperficie de la couronne qui fait le reſte du carreau; donc le ſort du premier joueur eſt au ſort du ſecond, comme cette première ſuperficie eſt à la ſeconde; ainſi pour rendre égal le ſort de ces deux joueurs, il faut que la ſuperficie de la figure inſcrite, ſoit égale à celle de la Couronne, ou ce qui eſt la même choſe, qu'elle ſoit la moitié de la ſurface totale du carreau.

Je me ſuis amuſé à en faire le calcul, & j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal ſur des carreaux carrés, le côté du carreau devoit être au diamètre de l'écu, comme $1 : 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$; c'eſt-à-dire, à peu-près trois & demi fois plus grand que le diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

Pour jouer ſur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3 + 3\sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'eſt-à-dire, preſque ſix fois plus grand que le diamètre de la pièce.

Sur des carreaux en lozange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$; c'eſt-à-dire, preſque quatre fois plus grand.

Enfin ſur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'eſt-à-dire, preſque double.

Je n'ai pas fait le calcul pour d'autres figures, parce

que celles-ci ſont les ſeules dont on puiſſe remplir un eſpace ſans y laiſſer des intervalles d'autres figures; & je n'ai pas cru qu'il fût néceſſaire d'avertir que les joints des carreaux ayant quelque largeur, ils donnent de l'avantage au joueur qui parie pour le joint, & que par conſéquent l'on fera bien, pour rendre le jeu encore plus égal, de donner aux carreaux carrés un peu plus de trois & demi fois, aux triangulaires ſix fois, aux lozanges quatre fois, & aux hexagones deux fois la longueur du diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

• Je cherche maintenant le ſort du troiſième joueur qui parie que l'écu ſe trouvera ſur deux joints; & pour le trouver, j'inſcris dans l'un des carreaux, une figure ſemblable comme j'ai déjà fait, enſuite je prolonge les côtés de cette figure inſcrite juſqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du carreau, le ſort du troiſième joueur ſera à celui de ſon adverſaire, comme la ſomme des eſpaces compris entre le prolongement de ces lignes & les côtés du carreau, eſt au reſte de la ſurface du carreau. Ceci n'a beſoin pour être pleinement démontré, que d'être bien entendu.

J'ai fait auſſi le calcul de ce cas, & j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal ſur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'un peu moins d'un tiers.

Sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, double.

Sur des carreaux en lozange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'environ deux cinquièmes.

Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'un demi-quart.

Maintenant le quatrième joueur parie que ſur des carreaux triangulaires équilatéraux, l'écu ſe trouvera ſur ſix joints, que ſur des carreaux carrés ou en lozanges, il ſe trouvera ſur quatre joints, & ſur des carreaux hexagones, il ſe trouvera ſur trois joints; pour déterminer ſon ſort, je décris de la pointe d'un angle du carreau, un cercle égal à l'écu, & je dis que ſur des carreaux triangulaires équilatéraux, ſon ſort ſera à celui de ſon adverſaire, comme la moitié de la ſuperficie de ce cercle eſt à celle du reſte du carreau; que ſur des carreaux carrés ou en lozanges, ſon ſort ſera à celui de l'autre, comme la ſuperficie entière du cercle eſt à celle du reſte du carreau; & que ſur des carreaux hexagones, ſon ſort ſera à celui de ſon adverſaire, comme le double de cette ſuperficie du cercle eſt au reſte du carreau. En ſuppoſant donc que la circonférence du cercle eſt au diamètre, comme 22 ſont à 7; on trouvera que pour jouer à jeu égal ſur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté

du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{7\sqrt{3}}}{22}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'un peu plus d'un quart.

Sur des carreaux en lozanges, le ſort ſera le même que ſur des carreaux triangulaires équilatéraux.

Sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{11}}{7}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'environ un cinquième.

Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{21\sqrt{3}}}{44}$, c'eſt-à-dire, plus grand d'environ un treizième.

J'omets ici la ſolution de pluſieurs autres cas, comme lorſque l'un des joueurs parie que l'écu ne tombera que ſur un joint ou ſur deux, ſur trois, &c. ils n'ont rien de plus difficile que les précédens; & d'ailleurs on joue rarement ce jeu avec d'autres conditions que celles dont nous avons fait mention.

Mais ſi au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetoit une pièce d'une autre figure, comme une piſtole d'Eſpagne carrée, ou une aiguille, une baguette, &c. le problème demanderoit un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours poſſible d'en donner la ſolution par des comparaiſons d'eſpaces, comme nous allons le démontrer.

Texte n°14. Lettre de Pascal à Fermat sur le problème des partis (29 juillet 1654)

Édition reproduite : Blaise Pascal, *Œuvres,* nouvelle édition, t. IV, Paris, Lefèvre, 1819, p. 360-371.

Monsieur,

L'impatience me prend aussi-bien qu'à vous ; et quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort, que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre ; mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait ; car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous. J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés : j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Meré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval ; mais M. de Meré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties, ni de biais pour y arriver : de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion. Votre méthode est très-sûre, et c'est la première qui m'est venue à la pensée dans cette recherche. Mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé, et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois pouvoir vous dire ici en peu de mots ; car je voudrois désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris. Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu.

Posons que le premier en ait deux et l'autre une : ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles : si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles. Considérez donc, monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie, et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : je suis sûr d'avoir 32 pistoles; car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, et donnez-moi outre cela mes 32 qui me sont sûres. Il aura donc 48 pistoles, et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties, l'autre point, et qu'ils commencent à jouer une partie : le sort de cette partie est tel, que si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une. Or nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles; donc s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48. Donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, monsieur, que s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel, que si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie, donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : si vous voulez ne pas la jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié; de 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc

24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44.

Or par ce moyen vous voyez par les simples soustractions, que pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autre 12, et pour la dernière 8.

Or pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi-bien tout à découvert, et que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de 2 est double de la partie de 3; et quadruple de la dernière partie de 4; et octuple de la dernière partie de 5, etc.

Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver: elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser; et voici le problème dont je faisois tant de cas, comme en effet il me plaît fort.

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première?

Soit le nombre des parties donné, par exemple, 8 : prenez les huit premiers nombres pairs et les huit premiers nombres impairs, savoir :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.
et 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Multipliez les nombres pairs en cette sorte: le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc. Multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc. : le dernier produit des pairs est le dénominateur, et le dernier produit des impairs est le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de la première partie de 8, c'est-à-dire, que si on joue chacun le nombre des pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendra sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons, telles que vous les avez imaginées : je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons; et voici les propositions qui y mènent, qui sont proprement des propositions arithmétiques touchant les combinaisons, dont j'ai d'assez belles propriétés.

Si d'un nombre quelconque de lettres, par exemple, de huit, A, B, C, D, E, F, G, H, vous prenez toutes les combinaisons possibles de quatre lettres; et ensuite toutes les combinaisons possibles de cinq lettrès, et puis de six, de sept et de huit, etc.; et qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude, qui est la moitié de la toute, jusqu'au tout : je dis que si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de quatre avec chacune des combinaisons supérieures, la somme sera le nombre tantième de la progression quaternaire; à commencer par le binaire, qui est la moitié de la multitude. Par exemple, et je vous le dirai en latin, car le françois n'y vaut rien.

Si quotlibet litterarum verbi gratiâ octo A, B, C, D, E, F, G, H, sumantur omnes combinationes quaternarii, quinquenarii, senarii, etc., usque ad octonarium : dico, si jungas dimidium combinationis quaternarii, nempe 35 (*dimidium* 70) *cum omnibus combinationibus, quinquenarii, nempe* 56, *plus omnibus combinationibus senarii, nempe* 28, *plus omnibus combinationibus septenarii, nempe* 8, *plus omnibus combinationibus octonarii, nempe* 1, *factum esse quartum numerum progressionis quaternarii cujus origo est* 2 : *dico* quartum numerum, *quia* 4 *octonarii dimidium est.*

Sunt enim numeri progressionis quaternarii quibus origo est 2, *isti* : 2, 8, 32, 128, 512, *etc.*, *quorum* 2 *primus est*, 8 *secundus*, 32 *tertius, et* 128 *quatus, cui* 128 *æquantur* + 35, *dimidium combinationis* 4 *litterarum*, + 56 *combinationis* 5 *litterarum*, + 28 *combinationis* 6 *litterarum*, + 8 *combinationis* 7 *litterarum*, + 1 *combinationis* 8 *litterarum.*

Voilà la première proposition, qui est purement arithmétique.

L'autre regarde la doctrine des parties, et est telle. Il faut dire auparavant : Si on a une partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4 : la valeur de la première partie de

Texte n°15. La géométrie de Descartes

1. Commencement de *La Géométrie de* Descartes

Édition originale (anonyme) : *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géomérie qui sont des essais de cette méthode,* Leyde, Jean Maire, 1637, p. 297 - 302. Nous avons ici modernisé l'orthographe, la ponctuation et les notations algébriques.

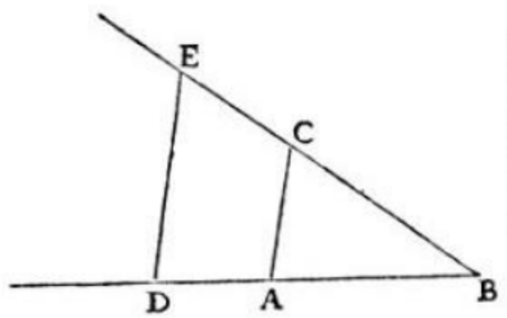
Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien, en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée, ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

La multiplication.

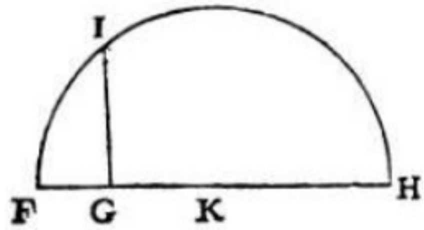


Soit, par exemple, AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC ; je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

La division.

Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

L'extraction de la racine carrée.



Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusqu'à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

Comment on peut user de chiffres en géométrie.

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; et $a - b$ pour soustraire b de a ; et ab pour les multiplier l'une par l'autre ; et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b ; et aa ou a^2 pour multiplier a par soi-même ; et a^3 pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini ; et $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour tirer la racine carrée de $a^2 + b^2$; et $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$, pour tirer la racine cubique de $a^3 - b^3 + ab^2$, et ainsi des autres.

Où il est à remarquer que par a^2, ou b^3, ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'algèbre, je les nomme des carrés, ou des cubes, etc.

Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme ici a^3 en contient autant que ab^2 ou b^3 dont se compose la ligne que j'ai nommée $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$. Mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions ; comme s'il faut tirer la racine cubique de

$a^2b^2 - b$, il faut penser que la quantité a^2b^2 est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même unité.

Au reste, afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple :

AB = 1, c'est-à-dire AB égal à 1.

GH = a

BD = b, etc.

Comment il faut venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes.

Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une équation, car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étaient inconnues. Ou bien, s'il ne s'en trouve pas tant, et que, nonobstant, on n'omette rien de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée; et lors, on peut prendre à discrétion des lignes connues pour toutes les inconnues auxquelles ne correspond aucune équation. Après cela, s'il en reste encore plusieurs, il se faut servir par ordre de chacune des équations qui restent aussi, soit en la considérant toute seule, soit en la comparant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnues, et faire ainsi, en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule égale à quelque autre qui soit connue, ou bien dont le carré, ou le cube, ou le carré de carré, ou le sursolide[1], ou le carré de cube, etc., soit égal à ce qui se produit par l'addition ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, et les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité et ce carré, ou cube, ou carré de carré, etc., multipliées par d'autres connues.

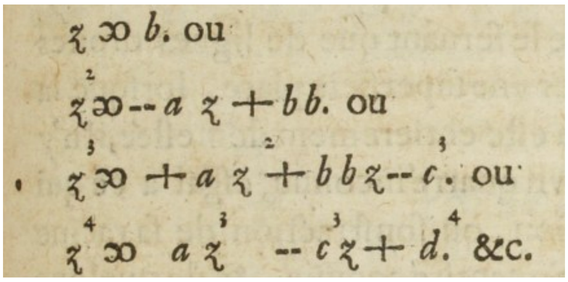
Ce que j'écris en cette sorte.

$z = b$, ou

$z^2 = -az + b^2$, ou

$z^3 = +az^2 + b^2z - c^3$, ou

$z^4 = az^3 - c^3z + d^4$, etc.



[1] Puissance cinquième.

C'est-à-dire : *z*, que je prends pour la quantité inconnue, est égale à *b* ; ou le carré de *z* est égal au carré de *b* moins *a* multiplié par *z* ; ou le cube de *z* est égal à *a* multiplié par le carré de *z* plus le carré de *b* multiplié par *z* moins le cube de *c* ; et ainsi des autres.

Et on peut toujours réduire ainsi toutes les quantités inconnues à une seule, lorsque le problème se peut construire par des cercles et des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou même par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrés plus composée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre de vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science. Aussi que je n'y remarque rien de si difficile que ceux qui seront un peu versés en la géométrie commune et en l'algèbre, ait qui prendront garde à tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver.

C'est pourquoi je me contenterai ici de vous avertir que, pourvu qu'en démêlant ces équations, on ne manque point à se servir de toutes les divisions qui seront possibles, on aura infailliblement les plus simples termes auxquels la question puisse être réduite.

2. Un problème-exemple de Claude Rabuel, *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*, Lyon, Marcellin Duplain, 1730.

Extrait : Livre 1, Partie Première, Section I, p. 3.

PROBLEME I.

La ligne *AB* fig. 1. étant donnée, il faut trouver ſur cette ligne le Point *C*, qui la diviſe de telle ſorte, que le Rectangle ſous la toute *AB* & le moindre ſegment *BC* ſoit égal au quarré du plus grand ſegment *AC*. c'eſt la Prop. 11. l. 2. Elem. d'Euclide.

Suppoſons la diviſion faite au point *C*, & nommons *AB*, a ; *AC*, x. *BC* ſera $a - x$. Nous aurons par la nature du Problême $AB \times BC = \overline{AC}^2$ $aa - ax, = xx$, $xx + ax = aa$; mettons $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté, c'eſt $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$; extrayons la racine quarrée de chaque côté, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$

Conſtruction. Sur l'extrêmité *B* de la ligne *AB* élevons la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$, joignons *DA* ; du point *D* comme centre, & de l'intervale *DB* décrivons l'arc *BE*, & du point *A* comme centre à l'intervale *AE*, l'arc *EC*. Le point *C* eſt celui que l'on cherche.

Démonſtration. Le triangle *ABD* eſt rectangle en *B* ; donc 47. 1. Eucl. $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = aa + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$, & $AD = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Mais $DE = DB = \frac{1}{2}a$: donc $AE = AD - DE = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa} = AC = x$. Ce qu'il falloit démontrer.