IREM
DE CAEN
NORMANDIE

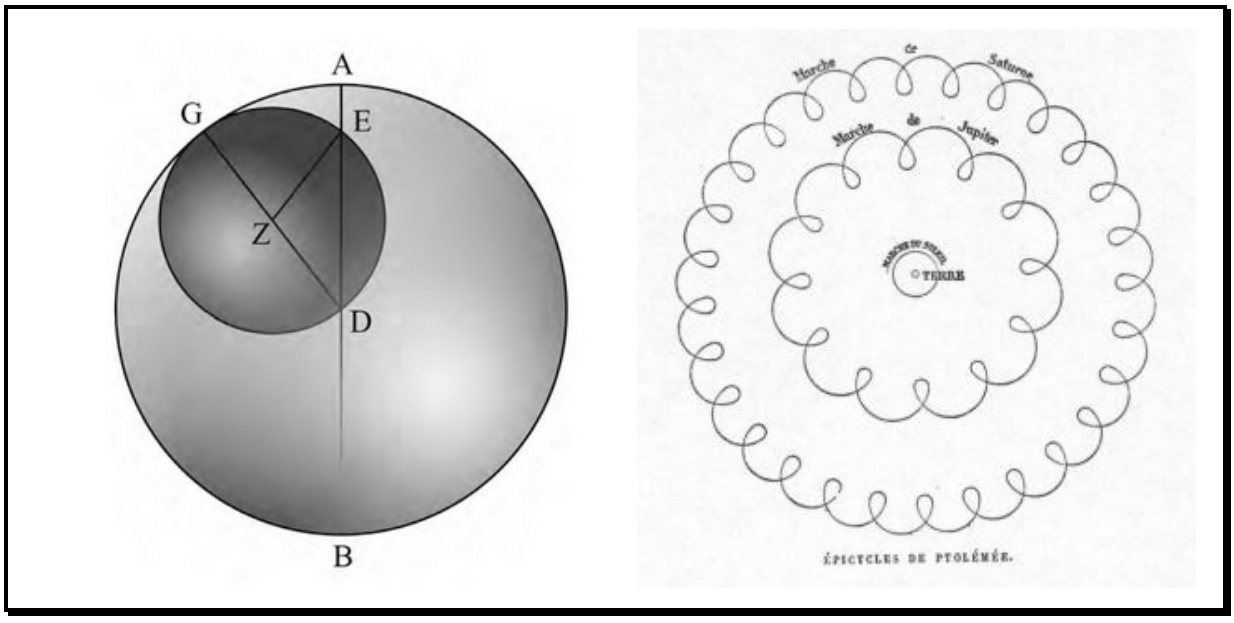
UNIVERSITÉ CAEN NORMANDIE

UNIVERSITÉ DE CAEN NORMANDIE
campus 2, bâtiment Sciences 3, porte S3 306
Adresse postale : BP 5186, CS 14032, 14032 CAEN Cedex
Téléphone : 02 31 56 73 60
Adresse électronique : irem@unicaen.fr
Site : http ://irem.unicaen.fr

Modèles de l'univers : voir le monde autrement

stage du Plan académique de formation (16A0050146 – 32155)
9 février et 3 avril 2017

Fascicule annexe (aide à la lecture des textes)



Document conçu par le Cercle de lecture en histoire des mathématiques

AVERTISSEMENT.

Ce fascicule est un complément au *Recueil de textes historiques* édité par l'IREM à l'occasion du stage « Modèles de l'univers : voir le monde autrement ». Il est mis à disposition entre la première et la deuxième journée du stage (9 février et 3 avril 2017).

Il propose des éclaircissements sur les textes, en quantité variable selon leur difficulté, et parfois des informations pour actualiser les connaissances.

Les textes 1 et 3, assez simples, n'ont pas fait l'objet d'un commentaire en particulier. Les commentaires des textes 4 à 8 ont été préparés par Pierre Ageron. Le commentaire du texte 2 a été préparé par Didier Trotoux, qui a également conçu le diaporama *Modèles de l'univers : voir le monde autrement* où l'on pourra retrouver une mise en perspective de l'ensemble.

Précisons enfin que dans ce fascicule, les numéros de pages et de lignes renvoient systématiquement au *Recueil de textes historiques.*

Texte 2. Extrait du livre III de : Ptolémée, *Composition mathématique* (*Almageste*), traduite par Nicolas Halma, vol. 1, Henri Grand, 1813 & vol. 2, J. M. Eberhart, 1816.
Titre original : *Mathematike Syntaxis*. Vers 150 après Jésus-Christ.

Le livre III de l'*Almageste* est consacré au mouvement du Soleil. Dans un premier chapitre très court, Ptolémée explique qu'après avoir présenté les principes mathématiques dans les deux livres précédents, il va expliquer tout ce qui concerne le Soleil et la Lune et leurs mouvements, connaissance préalable pour aborder ensuite les phénomènes présentés par les autres astres. Le chapitre 2 est consacré au calcul de la grandeur de l'année. Ptolémée reprend et confirme les mesures d'Hipparque et aboutit à une durée moyenne de l'année de 365 jours 14' et 48" de jour, soit 365 jours 5 heures 55 minutes et 12 secondes. Le chapitre 3 est intitulé « Des hypothèses qui expliquent le mouvement moyen et circulaire » – le terme moyen signifiant uniforme.

page 10, lignes 6-24
Ptolémée propose deux hypothèses qui « rendront également raison des phénomènes » c'est-à-dire permettront d'expliquer les anomalies apparentes ou irrégularités :

- l'hypothèse de l'excentrique

« les astres font des leurs mouvements égaux dans des cercles non concentriques au monde » (l. 19-20) ;

- l'hypothèse de l'épicycle

« si ces cercles sont concentriques, ce n'est pas simplement dans ces cercles qu'ils [les astres] se meuvent mais dans d'autres appelés *Épicycles*, portés par le concentrique. » (l. 20-22).

page 10, lignes 25-35
Ptolémée présente l'hypothèse de l'excentrique : la Terre est excentrée en un point *Z* distinct du centre *E* du cercle ABGD sur lequel se meut la planète.
La distance *EZ* est appelée excentricité.
Remarques :
- le cercle est noté par quatre points (un diamètre *AD* et deux points *B* et *G* qui sont deux positions de la planète) ;
- sur la figure, deux points ont une double notation gréco-latine : $D = \Delta$ et $G = \Gamma$.

page 11, lignes 1-10
Ptolémée présente l'hypothèse de l'épicycle.

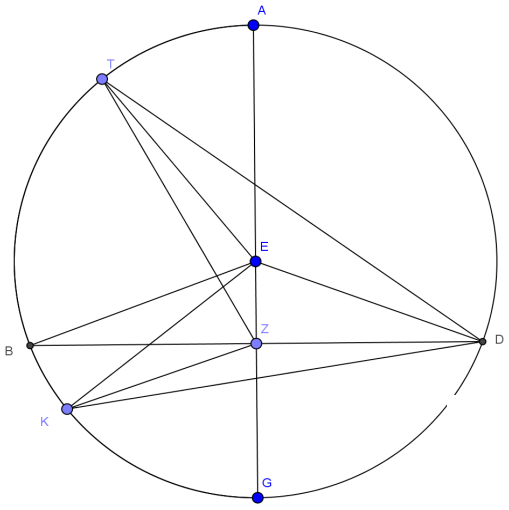
page 11, lignes 11-21
Ptolémée indique que sous l'hypothèse de l'excentrique, on a un mouvement plus lent à l'apogée et plus rapide au périgée, et que sous l'hypothèse de l'épicycle, on peut avoir l'un ou l'autre suivant les sens de rotation de l'épicycle et celui de l'astre sur son épicycle.

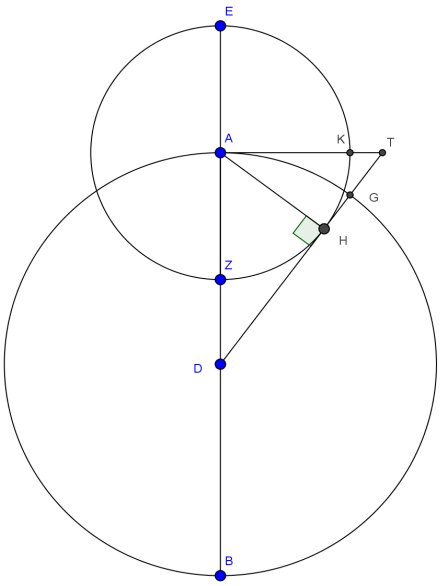
Ptolémée démontre ensuite un premier théorème :
les positions du Soleil qui correspondent à la plus grande différence entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne sont les deux positions où le Soleil est à un quadrant de l'apogée.

L'anomalie vraie d'une planète est l'angle entre la direction périgée-apogée et sa position courante mesurée depuis la Terre ; l"anomalie moyenne est l'angle que ferait la planète avec la direction apogée périgée si elle avait une trajectoire circulaire.

page 11, lignes 22-42 et page 12, lignes 1-8
Démonstration sous l'hypothèse de l'excentrique.
Sur la figure, *T* et *K* sont deux points quelconques appartenant respectivement à l'arc *AB* et à l'arc *BG* (attention à ne pas se laisser abuser par la figure, l'angle *AET* n'est pas droit).
Ligne 37 : « *TZ* est plus grand que *ZD* ». C'est une conséquence de la proposition III, 7 des éléments d'Euclide dont voici l'énoncé :

Si dans le diamètre d'un cercle on prend un point quelconque qui ne soit pas. le centre de ce cercle, et si de ce point on conduit des droites à la circonférence, la plus grande sera celle qui passera par le centre, et la plus petite sera le reste du diamètre; quant aux autres droites, celle qui sera plus proche de celle qui passe par le centre sera plus grande que celle qui en est plus éloignée; et enfin du même point on ne peut conduire de part et d'autre de la plus petite que deux droites qui soient égales.





page 12, lignes 9-31
Démonstration sous l'hypothèse de l'épicycle.

page 12, l. 32-42 et page 13, l. 1-19

Ptolémée démontre que les deux hypothèses rendent également compte des phénomènes.

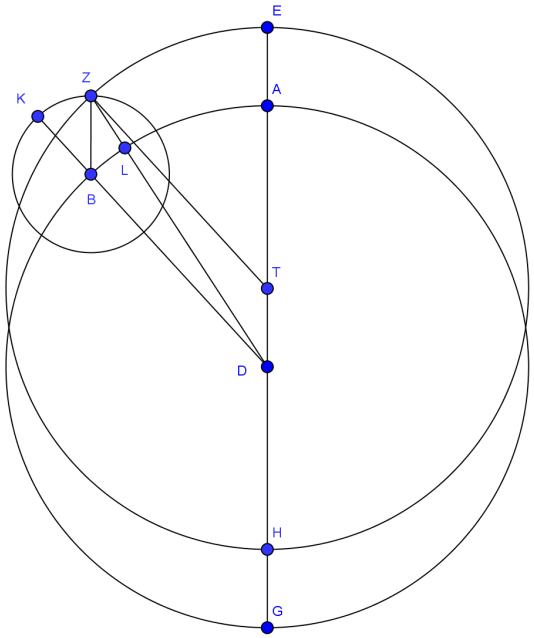
L'observateur est en *D*. *T* est le le centre de l'excentrique. Le déférent *ABG* et l'excentrique *EZH* ont le même rayon. Le rayon de l'épicycle est égal à l'excentricité *DT*.

Avec ces conventions, *BDTZ* est un parallélogramme.

Anomalie moyenne = $\widehat{ETZ}$ = $\widehat{ADB}$ = $\widehat{KBZ}$.

Anomalie vraie = $\widehat{EDZ}$.

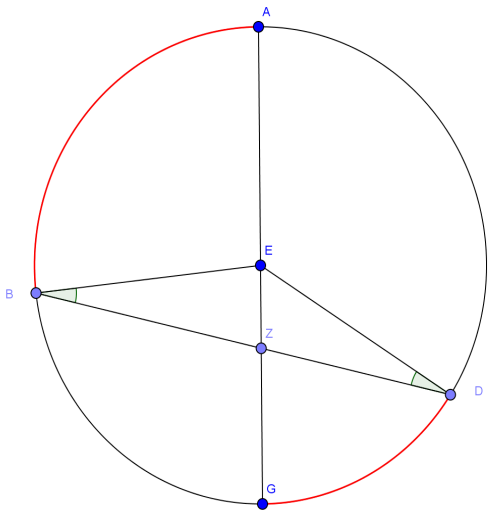
Différences des anomalies : $\widehat{ZDB}$.



Ptolémée démontre ensuite un deuxième théorème : si l'on prend deux positions de l'astre telles que l'écart entre l'apogée et la première position soit égal à l'écart entre le périgée et la deuxième position, alors il y a la même différence entre l'anomalie moyenne et l'anomalie vraie.

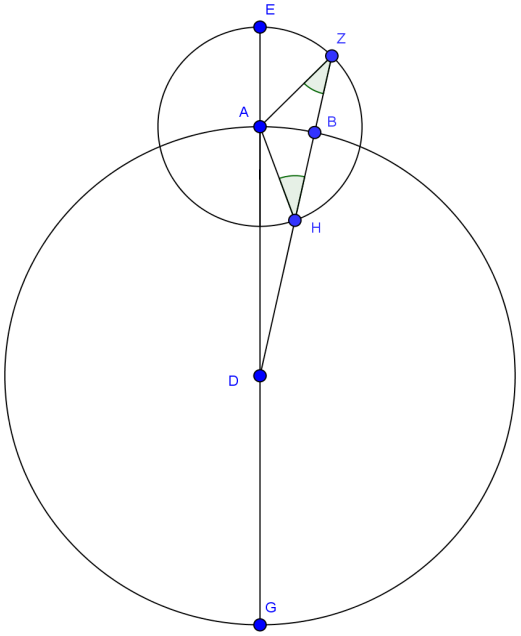
page 14, lignes 4-19

Démonstration sous l'hypothèse de l'excentrique.



page 14, lignes 20-36

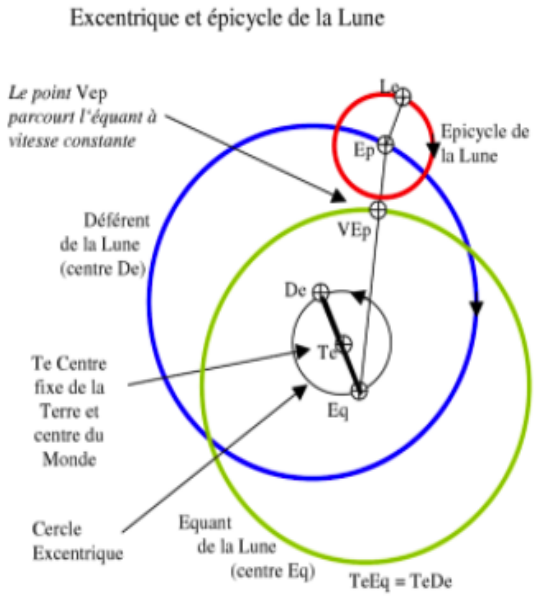
Démonstration sous l'hypothèse de l'épicycle.



Texte 4. Extrait du livre II de : Naṣīr al-dīn al-Ṭūsī, *Memento d'astronomie*. Traduction de Bernard Carra de Vaux, en appendice à : Paul Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Gauthier-Villars, 1893.
Titre original : *al-tadhkira fī 'ilm al-hay'a*. Écrit en 1261, révisé en 1274.

Ce texte est très difficile, et il ne faut pas s'inquiéter de le trouver obscur. Même les astronomes arabes qui ont suivi al-Ṭūsī y ont rencontré beaucoup de difficultés. De plus, la seule traduction française actuellement disponible, celle du baron Carra de Vaux, est ancienne et imparfaite. Malgré tout cela, c'est un texte remarquable où est introduit et utilisé un outil mathématique très simple, mais assez extraordinaire : le couple d'al-Ṭūsī, qui permet d'engendrer un mouvement rectiligne à partir de deux mouvements circulaires. Le même outil réapparaît d'ailleurs dans le texte 6, tiré du *De Revolutionibus* de Copernic, mais pour un autre usage. Voici quelques remarques pour aider à la lecture.

Au début du texte, Naṣīr al-dīn al-Ṭūsī relève qu'il y a une « difficulté » dans la théorie de la Lune. Ici, il fait référence à la théorie classique, issue de l'*Almageste* de Ptolémée.



Selon cette théorie, la Lune Le décrit dans le sens indirect un petit cercle (l'épicycle) dont le centre Ep décrit dans le sens indirect un grand cercle (le déférent) dont le centre De décrit dans le sens direct un petit cercle (l'excentrique) dont le centre Te est celui de la Terre et du monde. Le mouvement de Le autour de Ep et celui de De autour de Te sont uniformes, mais celui de Ep autour de De ne l'est pas. On considère le point Eq symétrique de De par rapport à Te, appelé point équant[1] ou *centrum oppositum*, et on admet que la ligne droite qui passe par Eq et Ep tourne uniformément autour de Eq. Ce modèle compliqué permet d'expliquer les accélérations, avances ou retards de la Lune et de calculer sa position avec une précision suffisante. De plus, il sauve, un peu artificiellement il est vrai, le mouvement circulaire uniforme idéalisé par les Grecs. Seule difficulté : en faisant les calculs, on trouve qu'il prévoit une variation du simple au double de la distance Terre-Lune, alors que l'observation permet de constater que cette variation est bien moindre (inférieure à 15%).

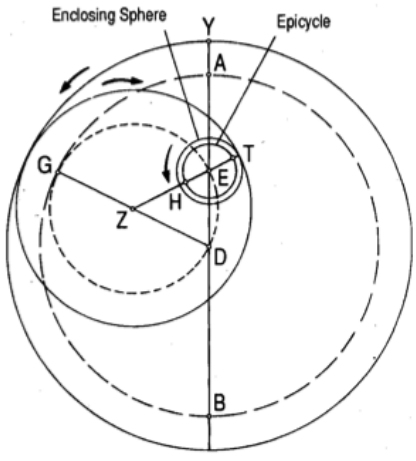
Naṣīr al-dīn al-Ṭūsī indique que ses prédécesseurs n'ont pas trouvé de solution à ce problème, et dit avoir inventé une version de la théorie de la Lune plus satisfaisante, c'est-à-dire qui n'utilise pas l'artifice du point équant.

1 Notons que Ptolémée utilise aussi le stratagème du point équant Eq pour décrire le mouvement des planètes Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, à ceci près que, dans ces quatre cas, Eq est le symétrique de Te par rapport à De (et non de De par rapport à Te). Quant à sa théorie de Mercure, dont la trajectoire est très excentrique, elle est encore plus compliquée.

C'est alors qu'il énonce ce lemme de géométrie plane : *si un cercle de rayon R « roule sans glisser » à l'intérieur d'un cercle de rayon 2R, tout point du petit cercle décrit un diamètre du grand*. Voici la preuve en une seule ligne, avec les notations du texte : $\widehat{CDA}=\frac{arc\,CA}{2R}=\frac{arc\,CO}{2R}=\frac{\mathrm{R}.\widehat{CZO}}{2R}=\frac{\mathrm{R}.2\widehat{CDO}}{2R}=\widehat{CDO}$, donc $(DO)=(DA)$, d'où D, O, A alignés. Dans cette démonstration, l'égalité des arcs CA et CO est la condition de roulement sans glissement, et l'égalité $\widehat{CZO}=2\widehat{CDO}$ résulte du théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre.

En fait, puisqu'il veut appliquer cet outil à des astres, et que rien dans le ciel, hormis la Terre, n'est immobile, al-Ṭūsī suppose que les cercles tournent *tous les deux,* en sens contraires, et que l'angle décrit par le petit est le double de celui décrit dans le même temps par le grand. Cette situation revient au même que la précédente, car on a encore : $\widehat{CDA}=\frac{1}{2}\widehat{CZO}=\widehat{CDO}$. Une lecture attentive montre cependant que la preuve telle qu'al-Ṭūsī l'a rédigée est fausse – et le traducteur français n'y est pour rien ! En effet, aux lignes 10-12 de la page 26, al-Ṭūsī suppose implicitement que O est sur (DA), c'est-à-dire précisément ce qu'il veut démontrer. Bien qu'il soit excellent mathématicien et qu'il ait probablement eu l'intuition de la démonstration correcte, il est tombé au moment de la rédiger dans un piège bien classique en géométrie : s'appuyer sur ce qu'on voit sur la figure, sans séparer correctement ce qu'on suppose connu de ce qu'on veut démontrer. Ce problème de la figure qui induit en erreur est une difficulté didactique bien connue des enseignants.

Il est à noter que ce lemme a été retrouvé de nombreuses fois, notamment par Copernic (XV^e^ siècle), Cardan (XVI^e^ siècle) et La Hire (XVII^e^ siècle), mais qu'al-Ṭūsī (XIII^e^ siècle) est le premier auteur connu à l'énoncer et le démontrer : ceci justifie le nom de lemme d'al-Ṭūsī qui lui est donné depuis les années 1960. Certains historiens pensent que Copernic a eu connaissance de l'œuvre d'al-Ṭūsī, mais rien n'est sûr, sinon que le sujet est polémique[2].



Dans la suite du texte, les choses se compliquent, car on change de dimension ! L'idée de départ est pourtant simple : al-Ṭūsī veut généraliser son lemme de géométrie plane aux corps solides utilisés en astronomie : les *orbes*. Il ne s'agira donc plus de deux cercles situés dans un même plan, mais de deux orbes ayant le même plan équatorial. Qu'est-ce qu'un orbe ? On peut s'imaginer une cerise dénoyautée : un volume limité par deux surfaces sphériques concentriques. Chaque orbe a donc deux rayons : un rayon intérieur R et un rayon extérieur $R+r$. Les deux orbes considérés par al-Ṭūsī sont tels que si l'un des deux (le petit) a pour rayon intérieur R et pour rayon extérieur $R+r$, alors l'autre (le grand) a pour rayon intérieur $2R$ et pour rayon extérieur $2R+r$.

2 Voir cette vidéo de la BBC (en anglais) : https://www.youtube.com/watch?v=RMUc3fnL4zQ (à 3 min 45).

Par ailleurs, dans la version plane du lemme, on se donnait un point sur le petit cercle. Dans la version « 3 D », ce point donné devient une *sphère donnée*, de même plan équatorial que les deux orbes, dont le centre est sur l'équateur intérieur du petit orbe, et il y a encore un *point donné* sur l'équateur de la sphère donnée.

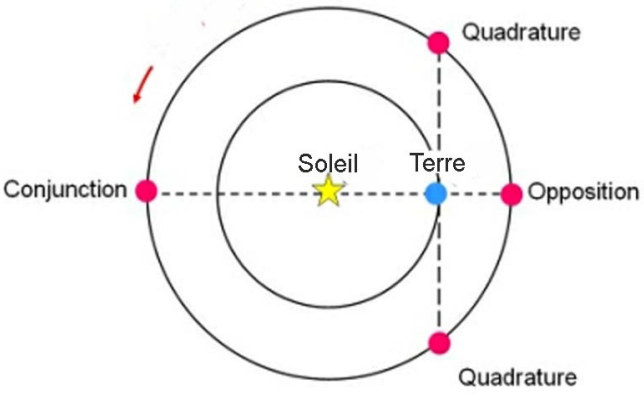
Supposons maintenant que le petit orbe et le grand orbe tournent en sens contraire, le petit roulant sur le grand[3] et tournant deux fois plus vite que lui. Alors leurs équateurs intérieurs font de même, et comme le rapport de leurs rayons est de 1 à 2, le lemme dans le plan permet de dire que le centre de la sphère donnée oscille sur le diamètre [*AB*]. Mais ce n'est pas le cas du point donné sur l'équateur ce cette sphère, noté *T* sur la figure ci-contre[4]: lui va être entraîné dans le sens de rotation du petit orbe. C'est pourquoi al-Ṭūsī introduit encore une sphère, dite enveloppante ou gardante : elle entoure la sphère donnée et a le même centre *E*. Son rôle est de s'opposer au mouvement qui entraîne *T*. Quelle doit être sa vitesse de rotation ? Si on pose $\alpha = \widehat{ZDE}$, on a : $\alpha + (\pi - 2\alpha) + \widehat{ZED} = \pi$, or $\widehat{ZED} = \widehat{AET}$, donc $\alpha = \widehat{AET}$. Ceci montre que pour garder *T* sur [*AB*], la sphère gardante (de centre *E*) doit se déplacer à la même vitesse et dans le même sens que le grand orbe (de centre *D*).

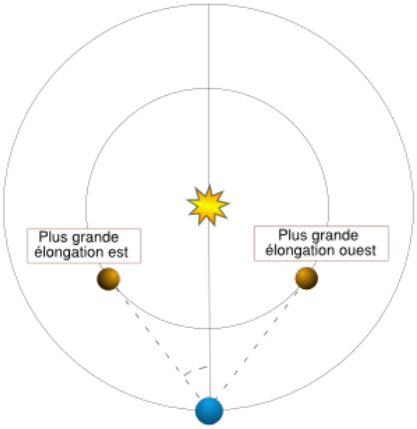
Enfin al-Ṭūsī applique ce qui précède à la théorie de la Lune, ce qui était son but. Il suppose tout le dispositif précédent (le grand orbe, le petit orbe, la sphère donnée et sa sphère gardante) entraîné par un très grand orbe, dit portant ou déférent. À la différence du modèle de Ptolémée, ce déférent n'est pas excentré : son centre est celui de la Terre et du monde. L'équateur de la sphère donnée est l'épicycle de la Lune, et le point donné *T* est la Lune elle-même. Dans la fin du texte, l'auteur s'intéresse à la trajectoire du centre *E* de l'épicycle. Dans la théorie de Ptolémée, c'est un cercle. Dans celle d'al-Ṭūsī, c'est une courbe fermée qui ressemble à un cercle, mais n'en est pas un (voir figure de la page 23). Il semble avoir établi des tables, qui lui ont montré que la différence de position de *E* calculée avec son modèle ou celui de Ptolémée est très petite : au maximum 10 minutes d'angle. La distance de *E* à la Terre, en revanche, est plus conforme aux observations.

3 Dans l'astronomie classique, il n'y a pas d'espace vide dans les cieux (tout est rempli par des solides) et il n'y a jamais pénétration d'un solide par un autre. Le grand orbe doit donc être évidé pour laisser juste place au passage du petit.

4 Figure empruntée à l'édition de Faiz Jamil Ragep (1993).

Texte 5. Extrait du livre I de : Nicolas Copernic, *Des révolutions des orbes célestes*, édition critique, traduction et notes par Michel-Pierre Lerner, Alain-Philippe Segonds et Jean-Pierre Verdet, Les Belles Lettres, 2015.
Titre original : *De revolutionibus orbium cœlestium*, Nuremberg, 1543.





Ce texte, où Copernic s'engage clairement pour un système du monde dont le Soleil soit le centre (ou système héliocentrique), est le passage le plus fameux de son grand ouvrage *De Revolutionibus orbium coelestium*[5].

Il ne présente pas de grande difficulté, mais certains points doivent être éclaircis. Ainsi cette phrase où Copernic rappelle que les planètes Vénus et Mercure, à la différence de Saturne, Jupiter et Mars, « ne prennent pas toutes les élongations par rapport au Soleil » (p. 24, l. 17-18). L'élongation η d'une planète *P* par rapport au Soleil *S* est par définition la mesure de l'angle non orienté de demi-droites $\widehat{TS,TP}$, où *T* désigne la Terre. En faisant des schémas selon le point de vue héliocentrique de Copernic, on voit clairement que pour les planètes extérieures (Saturne, Jupiter et Mars), η peut prendre toutes les valeurs de 0° (c'est la conjonction) à 180° (c'est l'opposition), tandis que pour les planètes intérieures (Vénus et Mercure), η ne peut dépasser une certaine valeur maximale.

→ À ce sujet, on peut noter que l'élongation maximale de Vénus et celle de Mercure ne sont pas des constantes : elles connaissent des variations, d'amplitude assez faible pour Vénus, mais nettement plus grande pour Mercure[6].

Un petit exercice. Sachant que la plus grande élongation de Vénus varie entre 45° et 47° et celle de Mercure varie entre 16° et 27°, calculez pour chacune de ces deux planètes sa distance moyenne au Soleil, exprimée en unités astronomiques (1 UA = 149 597 870 700 m = distance de la Terre au Soleil).

5 Sur le *De Revolutionibus* de Copernic, et notamment la part u'y prennent l'observation et le calcul, voir cette vidéo d'une conférence très claire de Denis Lavoie : https://www.youtube.com/watch?v=Q4SIdgfNXFI

6 Cette variabilité s'expliquera très bien avec la première loi de Kepler (1609) qui affirme que la trajectoire des planètes est elliptique. L'ellipse décrite par Mercure est très allongée, les autres sont assez voisines d'un cercle. Copernic, qui ne considérait que des cercles, a expliqué la variabilité de l'élongation maximale par... des épicycles (petites boucles sur leur orbite circulaire), réintroduisant ainsi pour un autre usage un subterfuge de l'astronomie grecque qu'il avait chassé.

Qui est cet Alpetragius cité p. 24, ligne 20 ? Malgré sa terminaison latine en -us, ce nom commençant par al-, l'article défini arabe, laisse présager un savant de langue arabe. Il s'agit effectivement de Nūr al–Dīn al–Biṭrūjī, qui vivait dans l'Espagne musulmane du XII^e^ siècle. Quant à Martianus Capella (p. 24, ligne 22), il vivait à Carthage (aujourd'hui en Tunisie) au V^e^ siècle après Jésus-Christ ; son système aurait déjà été proposé par Héraclide de Pont (IV^e^ siècle avant Jésus-Christ, voir p. 32 du diaporama).

La célèbre figure de la p. 26 appelle aussi des commentaires. La numérotation des orbes de l'extérieur (sphère immobile des étoiles fixes) vers l'intérieur, à rebours donc de la numérotation traditionnelle, est significative : c'est une manière pour Copernic de proclamer qu'avec son système, il n'y aura pas besoin d'inventer un neuvième ciel, un dixième, voire un onzième,... comme on l'a fait pour le système de Ptolémée[7] : les phénomènes observés par les astronomes du passé trouveront leur explication sur Terre. Les planètes sont ordonnées selon leur période de révolution, et pour insister sur le rôle clef de cette donnée, elle est indiquée sur la figure, en général en chiffres romains (pour Mars, noter l'adjectif latin *bimus*, *bima* au féminin, qui signifie « qui dure deux ans »). La figure semble représenter des cercles concentriques, mais en astronomie, ce sont les orbes qui comptent : un orbe n'est pas un cercle, mais l'espace contenu entre deux cercles, ou plutôt deux sphères. Or un des orbes, juste au-dessus de celui qui est numéroté V (celui de la Terre), n'a pas de numéro dans la figure. En conséquence, tous les orbes de II à IV sont décalés d'un rang vers l'extérieur, et l'orbe I des étoiles fixes paraît sans limite extérieure ce qui a parfois fait croire que Copernic imaginait un univers infini. Il s'agit probablement d'une erreur due au graveur, car on a conservé un manuscrit de Copernic avec la même figure, mais où l'orbe IV est immédiatement au-dessus de l'ordre V. Enfin, un seul cercle représente non pas une frontière entre orbes, mais une trajectoire : celle de la Terre. Ceci s'explique par la nécessité de figurer la Lune en orbite autour de la Terre.

Venons-en à l'« exposition du triple mouvement de la Terre » (p. 27, lignes 11-40). Les deux premiers mouvements (rotation diurne de la Terre autour de son axe et révolution annuelle autour du Soleil) nous sont aujourd'hui bien familiers. Le troisième mouvement, dit d'inclinaison, est plus surprenant. En fait, tout se passe comme si Copernic trouvait évident qu'au cours d'une révolution autour du Soleil, l'axe de rotation de la Terre doive décrire un cône autour de la perpendiculaire au plan de l'écliptique passant par le Soleil. Or ceci ne lui permettait pas d'expliquer l'alternance des saisons. Nous voyons les choses différemment : instruits par la physique moderne, nous trouvons au contraire évident une sorte de principe d'inertie, à savoir qu'en l'absence de toute force extérieure, l'axe n'a aucune raison de changer de direction et reste toujours, comme on dit, « parallèle à lui-même ».

Reste que Copernic postule l'existence d'un « troisième mouvement de la Terre »,

7 Par exemple, le *Traité de la sphère du monde* de Boulenger (2^e^ éd., 1628) place au-dessus du firmament, ou huitième ciel, le cristallin, ou neuvième ciel, sans étoile et de période 49000 ans (c'est la période qu'on attribuait alors à la précession des équinoxes, aujourd'hui estimée à 25772 ans : voir plus bas) et le premier mobile, ou dixième ciel, tournant en sens contraire des précédents, de période 24 heures, qui fixe le mouvement diurne.

de période annuelle, dont il dit clairement qu'il a pour effet de s'opposer à la rotation de l'axe et de maintenir constante sa direction. Il imagine que l'axe de la Terre décrit un cône de révolution dans le sens opposé au sens de la révolution annuelle de telle sorte que, lorsque la Terre décrit sur son orbite un angle α , son axe décrit un angle légèrement plus petit $\alpha-\varepsilon$, qu'il ne précise pas.

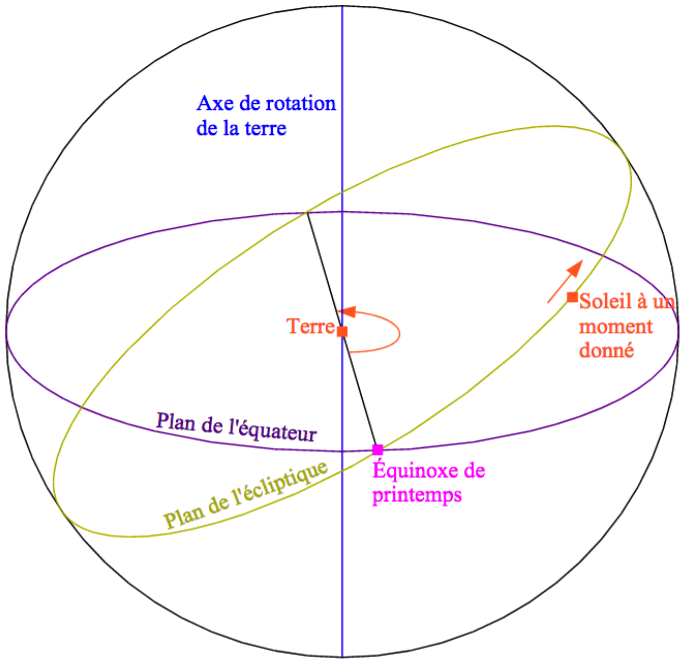
→ Le plus curieux est de constater que Copernic n'avait pas tout à fait tort ! La direction de l'axe de rotation de la Terre varie bel et bien, mais très, très lentement. C'est d'ailleurs l'explication aujourd'hui retenue d'un phénomène fort anciennement observé : la précession des équinoxes[8]. On sait aujourd'hui que l'axe de la Terre oscille à la façon d'une toupie et décrit un cône dont l'angle au sommet est le double de l'obliquité de l'écliptique, soit environ 47°. Ce cône est entièrement décrit en une période de 25772 ans. Il en résulte que le point de l'équinoxe de printemps[9] rétrograde vers l'ouest de 360°/25772 = 50,3" par an, et qu'il reste dans chacune des douze constellations du Zodiaque pendant 25772/12 = 2448 ans ! Actuellement dans les Poissons, il entrera vers 2100 dans le Verseau.

8 Les anciens Grecs avaient noté un léger déplacement des étoiles fixes proches de l'écliptique aux moments notables de l'année (solstices ou équinoxes). Selon Ptolémée (*Almageste*, VII, 2), c'est Hipparque qui a découvert vers -140 ce phénomène en comparant son catalogue de 1022 étoiles à celui dressé vers -290 par Timocharis d'Alexandrie : il a remarqué par exemple que la longitude céleste (= hauteur méridienne) de Spica virginis, évaluée à 172° par Timocharis, était maintenant de 174°, soit une rotation de 2° (indépendamment des révolutions diurnes) en 160 ans, ou 48" par an. La valeur est très bonne, mais curieusement Ptolémée retient la valeur de 36". Copernic obtient bien mieux : 50" (mais son explication du phénomène n'est pas celle retenue aujourd'hui : voir texte 6). La précession des équinoxes entraîne un décalage à long terme des saisons. L'équinoxe de printemps, par exemple, revient avant que la Terre n'ait effectué un tour complet : le printemps commence 20 minutes plus tôt chaque année, soit un jour plus tôt tous les 72 ans ! On peut aussi le dire ainsi : l'**année tropique** moyenne, d'un équinoxe de printemps à l'autre, liée à l'inclinaison de l'axe de la Terre, vaut 365,2422 j. Elle est inférieure de 20 minutes à l'**année sidérale**, durée d'une révolution complète de la Terre sur son orbite relativement à un référentiel fixe, qui vaut 365,2564 j. Quant à l'**année civile**, c'est encore autre chose. Dans le calendrier julien, où une année sur quatre est bissextile, sa durée moyenne était 365,2500 j. Pour la rapprocher de l'année tropique, on a introduit en 1582 le calendrier grégorien, où 97 années sur 400 sont bissextiles, de sorte que la durée moyenne de l'année civile est aujourd'hui 365,2425 jours. Mais comme 365,2425 jours est encore un peu supérieur à 365,2422, les dates des saisons vont encore dériver en moyenne faiblement (toujours vers le début de l'année).

9 L'équateur céleste coupe l'écliptique en deux points. L'un est le point vernal ou point de l'équinoxe de printemps, ou encore point Gamma : c'est le point de repère des astronomes dans le Ciel (les longitudes célestes s'y rattachent). L'autre est parfois appelé point Omega.

Texte 6. Extrait du livre III de : Nicolas Copernic, *Des révolutions des orbes célestes*, édition critique, traduction et notes par Michel-Pierre Lerner, Alain-Philippe Segonds et Jean-Pierre Verdet, Les Belles Lettres, 2015.
Titre original : *De revolutionibus orbium cœlestium*, Nuremberg, 1543.

Ce texte est difficile, mais a l'intérêt de montrer l'ingéniosité géométrique de Copernic. Il y utilise un outil mathématique très simple, mais assez extraordinaire, qui permet d'engendrer un mouvement rectiligne à partir de deux mouvements circulaires. Le même outil apparaît d'ailleurs dans le texte 5, tiré de l'ouvrage de al-Ṭūsī, mais pour un autre usage. Une grande question historiographique est de savoir si Copernic avait eu connaissance des travaux d'al-Ṭūsī ou s'il a réinventé cet outil indépendamment.



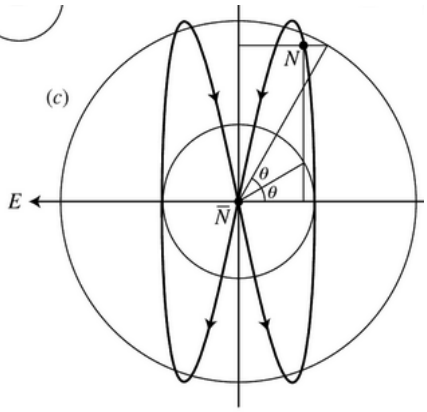
Rappelons au préalable que les premiers astronomes grecs avaient déjà noté que l'axe des pôles fait avec la perpendiculaire au plan de l'écliptique[10] un angle d'environ 23°, appelé obliquité de l'écliptique. Cet angle qui explique l'existence des saisons : en été, l'hémisphère nord est incliné vers le Soleil, le jour y est plus long que la nuit, et la quantité d'énergie solaire reçue augmente. Au IIe siècle avant Jésus-Christ, Hipparque observa un autre phénomène : celui de la précession (ou rétrogradation) des équinoxes. À chaque équinoxe de printemps, les étoiles fixes proches de l'écliptique apparaissent légèrement décalées par rapport à l'année précédente. Autrement dit, le printemps revient un peu plus tôt chaque année, avant que le Soleil n'ait achevé sa révolution autour de la Terre. La vitesse angulaire de précession (nous l'appellerons simplement la précession) est de l'ordre d'une minute d'angle par an.

Dans la première partie du texte, Copernic s'appuie sur le recensement d'observations historiques (p. 28, lignes 5-19). Il cite des astronomes grecs, mais aussi arabes (Albategnius = al-Battānī, IX-Xe siècles ; Arzachel = al-Zarqālī, XIe siècle) ainsi que le juif Prophatius (Jacob Ibn Tibbon, dit Profiat), qui vivait en Provence au XIIe siècle. À aucun moment, il ne songe à mettre en doute la rigoureuse exactitude de toutes ces mesures. Il en tire deux conclusions : 1) la précession a varié au cours des temps : elle a augmenté, puis s'est mise à diminuer ; 2) l'obliquité n'a cessé de diminuer au moins depuis Aristarque de Samos, il y a 1800 ans. Il se donne alors pour but d'imaginer dans le contexte héliocentré un modèle géométrique qui explique *à la fois* ces deux phénomènes.

10 Du point de vue héliocentrique, le plan de l'écliptique est le plan qui contient la trajectoire de la Terre, ou plus précisément, la trajectoire du barycentre du système Terre-Lune (ce barycentre se situe à l'intérieur de la Terre). Du point de vue géocentrique, c'est aussi le plan de la trajectoire apparente du Soleil vu de la Terre.

Pour cela, il fait deux hypothèses mathématiques très simples.

La première est que ces deux paramètres, obliquité et précession, sont des fonctions *périodiques* du temps. C'est audacieux, car cela implique par exemple que l'obliquité de l'écliptique, qu'on a toujours vue lentement décroître depuis 1800 ans, ne décroîtra pas éternellement, mais atteindra un minimum, puis remontera tout aussi lentement jusqu'à un maximum et variera périodiquement entre les deux. Même chose pour la précession, à ceci près que dans ce cas, les observations historiques suggèrent qu'un maximum a été atteint et que la décroissance a commencé. Deuxième hypothèse mathématique, encore plus audacieuse (cf. p. 29, lignes 9-10) : la période de l'obliquité est le *double* de la période de la précession et la précession est minimale quand l'obliquité est maximale. Au moyen de quelques règles de trois sur des observations anciennes, et aussi de raisonnements franchement circulaires, Copernic se hasarde à donner des valeurs numériques précises (elle ne sont pas dans l'extrait proposé) : l'obliquité aurait pour période 3434 années égyptiennes[11] et varierait entre 23°52' et 23°28' tandis que la précession aurait pour période 1717 années égyptiennes et varierait entre 35" et 1'7".



À partir de là, le modèle de Copernic consiste à faire subir au plan de l'équateur deux oscillations (ou balancements, ou librations) autour de deux droites perpendiculaires contenues dans ce plan : l'une autour de l'axe des équinoxes, l'autre autour de l'axe des solstices. Ces oscillations se répercutent sur l'axe des pôles, qui est la perpendiculaire à l'équateur au centre de la Terre. La première fait osciller le pôle nord *N* dans la direction du pôle de l'écliptique[12] *E*, l'autre le fait osciller dans la direction perpendiculaire. La combinaison de ces deux mouvements fait que le pôle nord *N* décrit une courbe fermée en forme de 8 tracée sur la sphère terrestre, autour d'un pôle nord moyen $\bar{N}$ (voir figure ci-contre[13]). Copernic l'appelle « petite couronne tordue » (p. 29, ligne 12) ; c'est ce qu'on nomme aujourd'hui une courbe de Lissajous. À noter que l'imprimeur de Copernic a eu du mal à en donner une représentation satisfaisante : la figure donne plutôt l'impression de deux ovales accolés ! Le dessin qu'avait fait Copernic dans son manuscrit, qu'on a conservé, est beaucoup plus parlant.

Même si la composition de ces deux mouvements donne une courbe fermée, chacun d'eux pris indépendamment est un mouvement linéaire de va-et-vient. Or ceci n'est pas conforme au principe général des Anciens auquel Copernic reste fidèle : n'utiliser que des mouvements circulaires uniformes (voir p. 30, lignes 21-22). Pour lui comme pour ses prédécesseurs, tout mouvement en ligne droite est suspect, car il implique un rebroussement et donc, croyait-on, une interruption (p. 31, ligne 3).

11 L'année égyptienne est une année de 365 jours exactement.

12 Les deux pôles de l'écliptique sont les points d'intersection de la sphère céleste et d'un axe perpendiculaire au plan de l'écliptique et passant par le centre de la Terre.

13 Figure prise dans le livre : C. M. Linton, *From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy*, Cambridge University Press, 2004, p. 134.

C'est alors qu'il énonce ce lemme de géométrie plane : *si un cercle de rayon* R *« roule sans glisser » à l'intérieur d'un cercle de rayon 2*R*, tout point du petit cercle décrit un diamètre du grand*. Voici la preuve en une seule ligne, avec les notations du texte : $\widehat{GDA}=\frac{arc\,GA}{2R}=\frac{arc\,GH}{2R}=\frac{\mathrm{R}.\widehat{GFH}}{2R}=\frac{\mathrm{R}.2\widehat{GDH}}{2R}=\widehat{GDH}$, donc $(DH)=(DA)$, d'où *D*, *H*, *A* alignés. Dans cette démonstration, l'égalité des arcs *CA* et *CO* est la condition de roulement sans glissement, et l'égalité $\widehat{GFH}=2\widehat{GDH}$ résulte du théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre.

En fait, Copernic suppose que les cercles tournent *tous les deux,* en sens contraires, et que l'angle décrit par le petit est le double de celui décrit dans le même temps par le grand. Cette situation revient au même que la précédente. La démonstration de Copernic utilise bien le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre, mais elle est obscurcie par un inutile et peu clair raisonnement par l'absurde se concluant par « autrement la partie serait plus grande que le tout » (p. 31, ligne 21), c'est-à-dire qu'il prend en défaut l'un des axiomes énoncés par Euclide.

Ce lemme a été retrouvé de nombreuses fois, notamment par Cardan (XVI[e] siècle) et La Hire (XVII[e] siècle), mais al-Ṭūsī (XIII[e] siècle) est le premier auteur connu à l'énoncer et le démontrer : voir le texte 5. Ceci justifie le nom de lemme d'al-Ṭūsī qui lui est donné depuis les années 1960. Certains historiens pensent que Copernic a eu connaissance de l'œuvre d'al-Ṭūsī, mais rien n'est sûr, sinon que le sujet est très polémique[14].

Puisque Copernic doit engendrer *deux* mouvements rectilignes, il utilise deux fois deux cercles. Il obtient ainsi deux diamètres, se coupant au pôle nord. On pourrait objecter que son lemme relève de la géométrie plane alors qu'il s'agit de l'appliquer dans l'espace, mais Copernic considère que l'approximation est suffisante.

En conclusion, ce texte montre que dans son traité *De revolutionibus*, Copernic, « le second Ptolémée », s'inspire non seulement du plan et du style de l'*Almageste*, mais aussi de ses méthodes : d'une part le recensement d'observations historiques, dont il ne songe pas à mettre en doute l'exactitude ; d'autre part l'exposé et l'utilisation de théorèmes de géométrie plane, bien que ses modèles physiques soient trimensionnels.

→ La variation de l'obliquité de l'écliptique est aujourd'hui mieux connue que du temps de Copernic. On estime qu'elle varie avec une période de 41 000 ans entre 22°2'33" et 24°30'16". En 2017, elle vaut 23°26'14" (= 23,44°) et est en phase de diminution. Cette variation a un effet à très long terme sur la sévérité des saisons et explique qu'à des périodes de glaciation succèdent des périodes de réchauffement. Quant à la précession des équinoxes, les astronomes arabes et leurs successeurs espagnols avaient déjà signalé sa variation et avaient cherché à l'expliquer par différents modèles, impliquant de nouvelles sphères : trépidation des équinoxes, accès-recès. La nouveauté du modèle élaboré par Copernic a été rendre compte simultanément de la variation de la précession et de celle de l'obliquité. Mais plus tard, Tycho Brahe (XVII[e] siècle) constata que ce modèle ne correspondait pas à ses observations et contesta la réalité même d'une variation de la précession. De fait, celle-ci était une illusion causée par l'imprécision de mesures héritées d'un très lointain passé auxquelles Copernic a accordé une confiance surprenante. Et pourtant, on sait aujourd'hui que la (vitesse de) précession varie bel et bien, mais beaucoup plus lentement que ne le croyait Copernic. Elle suit un cycle de 41000 ans, comme l'obliquité de l'écliptique, et est actuellement de 50,29" par an, en phase d'augmentation.

14 Voir cette vidéo de la BBC (en anglais) : https://www.youtube.com/watch?v=RMUc3fnL4zQ (à 3 min 45).

Texte 7. Extrait de : Jean Kepler, *Le Secret du monde*, traduction et notes d'Alain Segonds, Les Belles Lettres, 1984. Rééd. au format poche : Gallimard, collection Tel, 1993.
Titre original : *Mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium cœlestium*, Tübingen, 1596.

Ce livre de jeunesse de Kepler, écrit bien avant qu'il ne découvre que la trajectoire des planètes est elliptique et non circulaire, présente des spéculations qui ne sont absolument plus retenues par la science moderne. Il n'en est pas moins intéressant à bien des égards. Dans la préface, Kepler parle de son enthousiasme pour le système de Copernic, puis décrit par le menu la démarche (ou l'heuristique) qu'il a suivie pour tenter de percer « le secret du monde » et notamment pour expliquer les distances au Soleil des six planètes qu'on connaissait alors : Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus. Le texte relate une suite de tentatives insatisfaisantes, dont la dernière emporte sa conviction d'avoir trouvé l'harmonie du monde.

p. 33, lignes 8-31 Kepler relate avoir cherché si la suite des distances des planètes ne serait pas une suite arithmétique, puis s'être posé la même question pour la suite des différences des distances[15]. Pour tenter de faire apparaître une régularité, il a même postulé l'existence de planètes invisibles. Ces démarches n'aboutissant pas, il tente alors une solution par la trigonométrie (ce passage a été omis).

p. 33, lignes 36-41 et figure de la p. 34 Un « trigone », notion importante en astrologie, est un ensemble de trois des douze constellations du zodiaque formant un triangle équilatéral, par exemple Bélier-Lion-Sagittaire. Une « grande conjonction » est l'alignement de Jupiter et Saturne vues depuis la Terre, ce qui se produit tous les 19,8 ans. La grande conjonction revient dans le même signe au bout de 59,4 ans, mais avec un décalage de 7°3′ ce qui fait qu'après quelques retours, le retour se fait dans le signe voisin et donc dans un autre trigone. Pour bien voir ce mécanisme, il suffit sur la figure de relier les points dans l'ordre des numéros. La figure 1234 est ce que Kepler appelle un quasi-triangle, ressemblant beaucoup à un triangle équilatéral, à ceci près que le point 4 ne coïncide pas avec le point 1 et que 41 est un petit arc de cercle.

À la ligne 37, noter une double date « le 9/19 juillet 1595 » : la première est en calendrier julien, la deuxième en calendrier grégorien. En 1582 en effet, le pape Grégoire XIII conseillé par le mathématicien jésuite Clavius ordonna de retrancher dix jours du vieux calendrier introduit en 46 avant Jésus-Christ par Jules César. Les uns après les autres, les pays catholiques appliquèrent cette réforme, mais les pays protestants ont longtemps préféré, comme le dit une formule célèbre parfois attribuée à Kepler, mais probablement apocryphe, « être en désaccord avec le Soleil qu'être en accord avec le pape ». Kepler lui-même était protestant, mais vivait dans une province autrichienne catholique, la Styrie, passée au calendrier grégorien dès 1583. Ne voyant dans l'affaire qu'une question scientifique, il se montra toujours favorable à l'application du calendrier grégorien.

15 Ce type de tentative sera repris au XVIII[e] siècle avec ce qu'on appelle la loi de Titius-Bode. Voir : https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_10293102/fr/ue2014-loi-de-titius-bode

p. 34, lignes 1-10 Voici en guise de commentaire un exercice de niveau collège, adapté d'une fiche produite par l'IREM de Franche Comté, elle-même inspirée (mais de loin) par ce passage de la préface de Kepler.
Exercice. a) On considère un trangle équilatéral. Calculer le rapport R/r, où R est le rayon du cercle circonscrit et r le rayon du cercle inscrit.
b) Même question pour un carré.
c) Voici les distances moyennes des différentes planètes au Soleil, exprimées en gigamètres (1 Gm = 10^9 m) :
Mercure 57,9 Gm ; Vénus 108,2 Gm ; Terre 149,6 Gm ;
Mars 227,9 Gm ; Jupiter 778,3 Gm ; Saturne 1427,0 Gm.
Entre quelles orbites planétaires peut-on envisager (avec une approximation raisonnable) d'intercaler un triangle équilatéral ? un carré ?

p. 35, lignes 3-5 Le « scholion » ou scholie, c'est-à-dire la remarque, qui suit la proposition 18 du livre XIII des *Éléments* d'Euclide est le tout dernier énoncé, probablement ajouté après coup, de ce vaste traité mathématique bien connu. Il affirme que tout polyèdre régulier convexe est de l'un des cinq types suivants : tétraèdre (4 faces), cube (6 faces), octaèdre (8 faces), dodécaèdre (12 faces), icosaèdre (20 faces). Ce sont les solides de Platon. L'énoncé donné par Euclide « oublie » l'hypothèse de convexité :

Je dis alors qu'en plus des cinq figures susdites, il ne sera construit aucune autre figure contenue par des [figures planes] équilatérales et équiangles égales entre elles. En effet …[16]

La démonstration se trouve un peu partout et est moins difficile qu'on ne pourrait le croire ; c'est plutôt de démontrer l'existence de tous ces solides qui est délicat.

La classification des polyèdres réguliers convexes est donc très différente de celle qu'on connaît pour les polygones réguliers convexes, car ceux-ci peuvent avoir n'importe quel nombre de côtés. C'est d'abord cela qui a incité Kepler à penser en termes de poyèdres plutôt que de polygones, et ce n'est probablement qu'*a posteriori* qu'il a jugé illogique de « mettre des figures planes entre des orbes solides (p. 34, l. 20-21). S'il existe six planètes, c'est parce qu'il existe cinq polyèdres réguliers.

→ En 1846, la découverte d'une septième planète, Neptune, par l'astronome normand Le Verrier, ruinera définitivement la jolie théorie de Kepler.

16 Euclide, *Éléments*, trad. Bernard Vitrac, PUF, t. IV, 2001, p. 468.

Texte 8. Extrait de : Galileo Galilei, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, traduit par René Fréreux avec François de Gandt, Le Seuil, 1992. Rééd. au format poche : Le Seuil, collection Points, 2000.
Titre original : *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Florence, 1632.

Ce texte ne présente pas de grande difficulté. Il adopte la forme dialoguée, empruntée à Platon et qu'on retrouvera aussi plus tard chez Leibniz. Salviati, partisan des théories nouvelles de Copernic, essaye de convaincre Simplicio du fait que le centre du monde n'est pas la Terre, mais le Soleil. Sagredo, qui n'est pas spécialiste, assiste à leurs échanges.

Signalons seulement deux questions de vocabulaire :

p. 37, ligne 23. Les péripatéticiens (= « promeneurs ») étaient les disciples d'Aristote au Lycée d'Athènes ; plus généralement, ce sont tous les philosophes du passé qui ont adopté la pensée d'Aristote, et l'ont souvent figée dans une orthodoxie stérile.

p. 38, lignes 27-30. L'élongation η d'une planète *P* par rapport au Soleil *S* est par définition la mesure de l'angle non orienté de demi-droites $\widehat{TS, TP}$, où *T* désigne la Terre. On dit que *P* et *S* sont en conjonction lorsque $\eta = 0°$, en semi-quadrature lorsque $\eta = 45°$, en aspect sextile lorsque $\eta = 60°$, en quadrature lorsque $\eta = 90°$, en aspect trine lorsque $\eta = 120°$, en sesqui-quadrature lorsque $\eta = 135°$ et en opposition lorsque $\eta = 180°$. On pourra se reporter aux figures proposées dans ce fascicule dans l'explication du texte 5.