DE LA VITESSE DE GALILEE AUX FLUXIONS DE NEWTON

Mathématiques et réalités physiques au XVII e siècle

Exposé de François de GANDT (PARIS)

Table des matières:

§ 1. Dérivée et vitesse.

Le 17e siècle a vu naître en même temps le calcul infinitésimal et la science du mouvement, à peu près entre 1610 et 1690. Les deux directions de recherche sont inséparables, elles font partie d'un unique effort global pour élucider les phénomènes du mouvement. Ce sont souvent les mêmes hommes qui enrichissaient à la fois la réflexion philosophique, les procédés mathématiques et l'appréhension physique de la nature.

Je voudrais montrer dans le détail cette imbrication, et récuser une manière trop naïve de voir les choses, qui serait la suivante: le physicien, qui s'occupe des phénomènes naturels de mouvement, avait bien de la peine à étudier et calculer des vitesses instantanées, et voilà qu'un beau jour, un spécialiste d'une autre discipline, le mathématicien, lui a fourni les outils infinitésimaux, principalement la notion de dérivée. En fait cette notion est née dans un contexte d'étude du mouvement; chez plusieurs auteurs, la dérivée n'est même rien d'autre que la vitesse elle-même.

On pourrait dire, en forçant à peine: ce n'est pas la dérivée qui a permis la définition de la vitesse, mais bien le contraire. Dans un grand nombre de textes, la vitesse instantanée est une notion considérée comme admise, et qui sert de base aux raisonnements infinitésimaux. L'exemple de Newton est très net: son calcul des "fluxions" est une comparaison entre des vitesses de variation.

Mon propos ici sera de suivre ce fil continu qui mène de la vitesse "physique" étudiée par Galilée aux fluxions "mathématiques" de Newton. Je choisirai quelques étapes décisives dans le raffinement progressif de la notion de vitesse, et ce sont aussi tout naturellement des étapes décisives dans la naissance du calcul infinitésimal. Les hommes du 17e siècle ont manipulé pendant assez longtemps des mouvements accélérés et des vitesses, avant de pouvoir préciser ce qu'ils entendaient par là. (Il est vrai que nos "pédaguogues" d'aujourd'hui, surtout en mathématiques, sont persuadés qu'il faut définir avant de manipuler...)

Tous les créateurs de l'analyse infinitésimale ne peuvent pas être rattachés à ce courant, à cette inspiration cinématique. Ni Fermat ni Leibniz par exemple ne raisonnent de cette manière, leur contribution n'aura donc pas sa place ici.

De plus certains auteurs ont refusé cette mathématique liée au mouvement. Descartes est le plus grand de ceux-là, sa Géométrie représente la réaction d'une mathématique extrêmement stricte, trop étroite en fait pour embrasser le développement des notions et des problèmes à cette époque, mais féconde justement en raison des contraintes qu'elle a imposées. J'aurai donc à situer la tentative de Descartes, comme une digression, un coup d'arrêt dans la progression inévitable des idées et des procédés.

Le parti-pris qui a guidé ma présentation, et qui demanderait à être précisée et vérifié, pourrait se formuler ainsi: dans la vie culturelle du 17e siècle, la question du mouvement a joué un rôle primordial, et notamment comme introduction naturelle, intuitive, aux problèmes et aux découvertes du calcul infinitésimal; bien sûr il fallait résoudre aussi les difficultés logiques de l'infiniment petit, des indivisibles, etc...Mais les spéculations logiques n'ont pas été le moteur de cette histoire: l'étude des mouvements et des vitesses constituait un motif autrement puissant, parce qu'elle fournissait un support physique et imaginatif au raisonnement.

I - LA VITESSE DANS LES DISCORSI DE GALILÉE.

§ 2. Une notion intuitive de la vitesse.

Les recherches de Galilée sur la chute des corps fourniront le point de départ de notre enquête. Dans son dernier livre, les Discours sur deux Sciences nouvelles, (1638, cité en abrégé Discorsi), Galilée donne la loi du mouvement uniformément accéléré (l'espace parcouru est proportionnel au carré du temps), et prouve que les projectiles doivent avoir une trajectoire parabolique.

Pourtant l'idée qu'il se fait de la vitesse est encore assez vague et intuitive. Nulle part il n'explique précisément ce qu'il appelle "velocitas": aucune définition de la vitesse instantanée, ni même de la vitesse uniforme ou moyenne. Dans le déroulement relativement rigoureux de son raisonnement, la notion de vitesse intervient tout à coup, sans préparation ni justification, au beau milieu d'un axiome:

> "Axiome III: Pour un même intervalle de temps, l'espace franchi avec une vitesse plus grande est supérieur à l'espace franchi avec une vitesse moins grande"
>
> (Discorsi, trad. Clavelin, p. 126)

La vitesse est simplement une certaine qualité des corps, susceptible de croître et de diminuer, on pourra éventuellement tenter de mettre en rapport des vitesses différentes, en tous cas ce n'est pas une quantité à proprement parler. Ainsi, pour affirmer que la vitesse croît proportionnellement au temps, Galilée emploie une formule qui marque la différence de statut entre vitesse et temps:

> "l'intensification de la vitesse a lieu conformément à l'extensification du temps" (intensionem velocitatis fieri juxta temporis extensionem, Discorsi, trad. p. 131).

Alors que le temps ou la longueur sont des "extensions", des grandeurs additives, la vitesse est une grandeur d'un autre genre, ce qu'on appelle une grandeur "intensive": impossible de la mesurer directement, comme on mesurerait une longueur, impossible de la calculer en ajoutant des "parties de vitesse" . Galilée ne parle d'ailleurs pas de "quantité de vitesse", mais uniquement de "degrés de vitesse".

En fait il faudra attendre assez longtemps une définition proprement dite, en termes modernes: peut-être la première se trouve-t-elle dans les communications de Varignon à l'Académie des Sciences en 1700. Même chez Newton, je n'ai trouvé jusqu'ici que la "définition" suivante, dans un manuscrit de jeunesse:

> "velocitas est motus intensio", "la vitesse est l'intensité (ou l'intensification) du mouvement" (Unpublished Scient. Papers, ed. Hall & Hall, p. 115)

On peut supposer en outre que les hommes de cette époque n'éprouvaient pas le besoin de définir pareille notion.

§ 3. Comment comparer des vitesses ?

Pour faire comprendre ce qu'est un degré de vitesse instantanée, Galilée évoque la distance que le mobile parcourrait en un certain temps, si sa vitesse ne changeait plus, si le degré de vitesse qu'il a acquis à ce moment restait le même (p. 13[illegible]). Cette distance parcourue par un mouvement uniforme donne une évaluation, un critère de comparaison, surtout elle permet de concevoir ou de figurer la notion dont il s'agit. Mais elle n'est bien sûr jamais constatable directement.

Galilée utilise un autre moyen d'appréciation de la vitesse, pour répondre à une objection qui lui est faite. Voici l'enchaînement des idées (p. 132-133): admettons d'une part que la vitesse à chaque instant est mesurée par la distance que parcourrait le mobile si son mouvement était uniforme; d'autre part Galilée affirme que le corps qui tombe passe par tous les degrés de vitesse, de plus en plus lents si l'on remonte très près du début de la chute;

cela signifie alors que le mobile, vers le début de sa chute, possède une vitesse qui, en un millier d'années, ne lui ferait pas parcourir la largeur d'une main, ou même moins encore. Comment imaginer une chose pareille ? Galilée répond en proposant une autre manière, plus directe et plus sensible, de mesurer la vitesse : si l'on considère qu'un maillet agit d'autant plus fortement sur un piquet que la vitesse du maillet est plus grande, on admettra que le même maillet peut avoir un ~~[illegible]~~ effet et donc une vitesse aussi petite que l'on veut, à condition de le lâcher d'une hauteur très minime. La lenteur de son mouvement se constatera par l'enfoncement quasi-nul du piquet. Galilée rend ainsi concevable l'idée d'une vitesse très faible, et fait admettre sa thèse que le mobile passe par tous les degrés de vitesse. Dans ce cas, la vitesse est mesurée par l'effet produit:

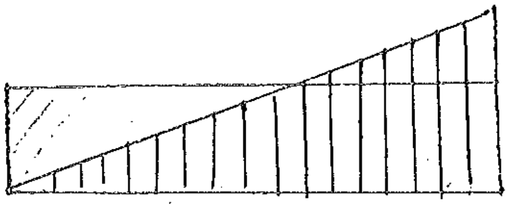
> "de combien est la vitesse d'un corps qui tombe, nous pourrons le conjecturer sans erreur par la qualité et la quantité du choc" (p. 1[illegible], trad. retouchée, texte: "Quanto sia la velocità d'un grave cadente, lo potremo noi senza errore conietturare dalla qualità e quantità della percossa").

Pour atteindre une réalité aussi fuyante que la vitesse, plusieurs chemins valent mieux qu'un.

§ 4. Le théorème du degré moyen.

Dans toute son étude de la chute des corps, Galilée ne manipule pas directement des vitesses variables, il utilise un artifice pour ramener les mouvements uniformément accélérés à des mouvements uniformes. Cet artifice, c'est le théorème du degré moyen, découvert au 14e siècle (par les philosophes de Merton College à Oxford et Nicole Oresme à Paris): une grandeur intensive uniformément variée, entre deux degrés extrêmes, produit le même "résultat" global qu'une grandeur intensive uniforme, dont le degré constant serait égal au degré moyen de la précédente.

Les médiévaux concevaient cette équivalence pour toutes sortes de variations: une flamme dont l'intensité varierait uniformément entre deux extrêmes produirait, en un temps donné, les mêmes effets qu'une flamme d'intensité moyenne constante. Nicole Oresme représente graphiquement ce résultat par l'égalité de deux surfaces:



Les applications de ce théorème étaient très variées, parfois à la limite de l'absurde. Galilée pour sa part s'en tient au mouvement accéléré: un mobile qui part du repos et accélère uniformément parcourra le même espace, en un temps donné, qu'un autre mobile en mouvement uniforme, et de vitesse égale à la moitié de la vitesse finale du mobile accéléré. La démonstration de Galilée est assez scabreuse: il considère "toutes" les vitesses successivement possédées par le mobile, représentées par des segments croissants, et étudie alors la surface constituée par la totalité de ces segments (p. 1[illegible]-140). Grâce à ce théorème, l'étude d'un mouvement accéléré est ramenée au cas plus simple, celui du mouvement uniforme.

§ 5 Une confusion de Galilée.

En un passage pourtant, Galilée raisonne directement sur des vitesses variant à chaque instant, et il s'embrouille horriblement, en appliquant à la vitesse intentanée ce qui ne vaut que pour la vitesse uniforme. Il cherche à démontrer que la vitesse ne peut pas être proportionnelle à l'espace parcouru, ainsi qu'il l'avait cru lui-même autrefois (p. 136). Le raisonnement me semble être le suivant: - si les vitesses sont d'autant plus grandes que le trajet est ~~est~~ plus long, alors les trajets seront tous effectués dans le même temps (mais cela n'est vrai que pour des vitesses uniformes, chacune sur un segment distinct)

- or ici les vitesses seraient d'autant plus grandes que l'on est loin du point de départ (cette fois il s'agit de vitesses instantanées, en différents points d'une même droite);

- donc les différents points du parcours seraient tous atteints en même temps, ce qui est impossible.

La prétendue réfutation de Galilée repose sur une confusion entre vitesse uniforme et vitesse instantanée.

Certains historiens ont pris la défense de Galilée (Fermat contre Gassendi; Peirce contre Mach; Bernard Cohen il y a 20 ans). Le raisonnement de Galilée, pour ceux qui le jugent acceptable, reviendrait à dire que l'équation $\frac{ds}{dt} = k \cdot s$ n'a pas de solution non nulle, si l'on a posé, pour $t=0$, $s=0$. Une chose est sûre, Galilée écrit des formules impossible à admettre dans notre perspective actuelle: il parle de "<u>la vitesse</u> avec laquelle le mobile a traversé la distance de quatre coudées", comme si l'on pouvait parler de <u>la</u> vitesse sur une portion finie du parcours, après avoir posé que la vitesse varie en chaque point. Peut-être a-t-il cru pouvoir appliquer son théorème du degré moyen dans le cas où la vitesse varie en fonction de l'espace.

II LES COURBES MECANIQUES.

§ 6 . L'héritage de l'Antiquité.

Notre univers technique nous a habitués à raisonner constamment en termes de vitesse intantanée, aussi sommes nous surpris de constater que Galilée est aussi mal à l'aise. Au 17e siècle, il s'agit vraiment d'objets nouveaux, que les "philosophes de la nature" doivent apprendre à manipuler, et l'on pourrait considérer que l'intervalle de temps séparant Galilée de Newton correspond à peu près à cet apprentissage.

L'héritage scientifique de l'Antiquité ne comportait rien de semblable, à une exception près, comme on le verra. La mathématique grecque ne s'occupait que d'objets immobiles, contemplés dans une sorte d'univers des idées. Chez Euclide il n'y a pas de mouvement, à part l'opération rituelle parfaitement fictive qui consiste à amener deux figures en coïncidence. On ne dit même jamais "Construisons telle chose...", mais "Soit construite..." D'une manière générale la science antique n'est pas une science du mouvement. Pour Platon ou Aristote, il ne peut y avoir une science authentique qui porterait sur les objets changeants d'ici-bas.

Pourtant la tradition mathématique classique, ou du moins un courant particulier et marginal de cette tradition, a fourni à Galilée de quoi alimenter ses méthodes de raisonnement. Il l'explique lui-même, au début de son exposé sur le mouvement accéléré, en termes assez nets, mais peu compréhensibles pour un lecteur d'aujourd'hui:

"et il convient en premier lieu de trouver et de développer une définition qui convienne exactement au mouvement accéléré qu'utilise la nature. Rien en effet ne s'opposerait à ce que l'on invente arbitrairement une certaine sorte de mouvement [latio = transport], et qu'ensuite on étudie les propriétés qui découlent d'un tel mouvement (ainsi ceux qui ont imaginé les hélices ou les conchoïdes comme des lignes engendrées par certains mouvements, quoique la nature n'en fasse pas usage, ont fait merveille en démontrant les caractéristiques de ces lignes à partir de leur définition posée initialement) pourtant, puisque la nature se sert d'une certaine sorte d'accélération pour la descente des corps lourds, ce sont les propriétés de ces corps que nous avons décidé d'étudier"... (Discorsi p. 130, trad. modifiée)

Précisons d'abord qu'à l'époque le mot latin hélix désigne la spirale, et même la spirale d'Archimède, la seule connue. Quel lien peut-il y avoir entre l'étude de la chute et celle des spirales et des conchoïdes ? Galilée semble dire: parmi toutes les compositions de mouvements que les mathématiciens peuvent imaginer, je restreindrai mon intérêt à celle qui convient pour décrire la chute des corps (ou plus exactement: à celle que la nature utilise réellement pour faire tomber les corps). On se demande alors : où diable Galilée voit-il une composition de mouvements dans la descente d'un corps pesant ? Cette question-là est sans réponse. Mais on peut y substituer cette autre: pourquoi Galilée replace-t-il ses recherches dans ce contexte ?

§ 7 . La spirale d'Archimède.

Pour comprendre les références qu'invoque Galilée, il est bon de connaître la définition de la spirale par son créateur, Archimède. La courbe est engendrée par un double mouvement, rotation d'une demi-droite autour de son origine, et translation d'un point sur cette demi-droite à partir de l'origine. Voici la traduction mot à mot du texte d'Archimède:

"lorsqu'une droite tourne également-vite [isotacheôs] dans un plan, une de ses extrêmités demeurant fixe, et revient à nouveau d'où elle est partie, et que, la droite étant dans sa révolution, un point est transporté également-vite sur la droite à partir de l'extrêmité immobile, alors ce point décrira [grapsei] une spirale dans le plan ..."

(Des Spirales, éd Belles-Lettres, p.11 et31)

Cette définition présente plusieurs aspects originaux: d'abord il est question de mouvement dans un texte mathématique, ce qui est exceptionnel pour l'Antiquité classique. La courbe n'est pas considérée comme existant de toute éternité, et découverte par l'oeil mental du mathématicien contemplatif, elle est au contraire engendrée par le point qui la décrit en se déplaçant. Archimède fait intervenir la vitesse du mouvement, avec le mot "également-vite".

Cette notion de vitesse égale est précisée dans la première proposition du même livre Des Spirales , où Archimède démontre la propriété fondamentale du mouvement rectiligne uniforme:

"Si un point parcourt une ligne en étant porté également-vite par rapport à lui-même, et qu'on prend sur cette ligne deux segments, ceux-ci auront le même rapport l'un à l'autre que les temps dans lesquels le point parcourt ces segments."

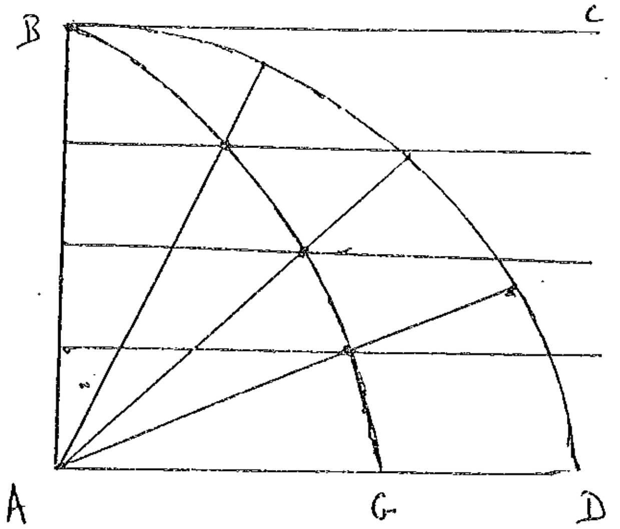
(ib. p. 13)

Ce théorème servira ensuite à démontrer certaines propriétés de la spirale (notamment les propositions 12, 14 et 15 qui font intervenir le temps de parcours). Ce traité d'Archimède constitue ainsi un des rares points d'ancrage pour la cinématique de l'époque moderne. Galilée reprend presque textuellement cette première proposition des Spirales, avec la démonstration correspondante (par les proportions), au début de la troisième journée des Discorsi (p. 126-127), comme base de son étude sur le mouvement uniforme.

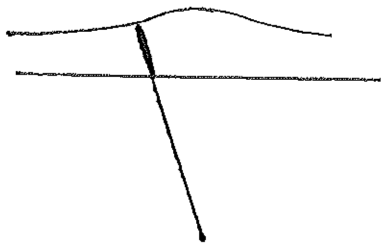
§ 8 . Autres courbes mécaniques.

Cette manière d'engendrer des lignes par la composition de mouvements n'est pas propre aux spirales. Les Anciens connaissaient des lignes analogues, utiles pour la solution de certains problèmes désespérés (quadrature du cercle, duplication du cube, trisection de l'angle); on les appelait "courbes mécaniques". Les problèmes résolus par ces courbes ne l'étaient que d'une manière approximative et imparfaite. En somme ce n'était pas une solution véritable, comme celle que l'on aurait souhaité obtenir avec la règle et le compas (problèmes plans) ou à la rigueur en employant des coniques (problèmes solides).

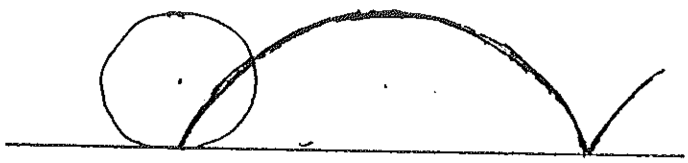
La plus célèbre de ces courbes mécaniques est la quadratrice, destinée à carrer le cercle, et permettant aussi de couper un angle en autant de parties que l'on veut. Elle se décrit ainsi (Pappus IV, in Heath, Greek Maths I, 226): pendant que le rayon du cercle se meut uniformément, balayant le quart de cercle de AB vers AD, la ligne horizontale BC descend uniformément vers AD, jusqu'à coïncider avec elle. Les deux mouvements doivent se faire dans le même temps, et les intersections du rayon et de la ligne sont les points de la courbe. § On démontre alors que AB est à AG comme 1 à 2π.



La conchoïde appartient au même groupe, elle servait à la trisection de l'angle. Cette fois le temps n'intervient plus directement, mais la construction est plus nettement "mécanique" encore: à partir d'un"pôle", on fait tourner une droite portant un segment coulissant de longueur constante ("diastéma","écart"), ce segment reposant toujours sur une droite fixe ("kanon") où il glisse.



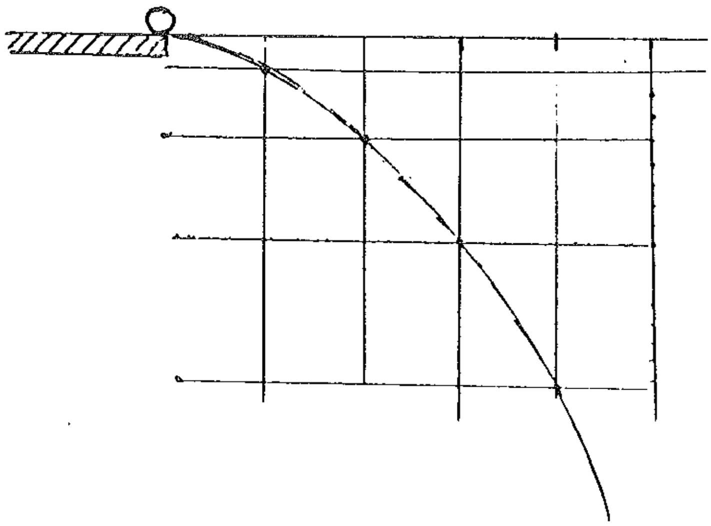
Le 17e siècle va s'intéresser avec passion à ces courbes. L'intérêt s'était déjà réveillé avec Viète (voir les propositions sur la quadratrice, éd 1646 p; 365-367). Le stock des courbes mécaniques va même s'enrichir considérablement: Galilée, puis Mersenne inventent la cycloïde (qu'on appelle aussi roulette ou trochoïde), la courbe que décrit un point d'une circonférence qui roulerait sans glisser sur une droite. Pascal imagine la courbe nommée limaçon, Roberval décrit la première sinusoïdale (la "compagne de la roulette") au cours de son étude de la cycloïde.



Même les coniques sont étudiées à l'aide des mouvements qui peuvent les engendrer. Les travaux les plus complets à ce sujet sont ceux des hollandais van Schooten (1646) et De Witt (1661) qui nomment ce procédé la "description organique des courbes".

§ 9 . Le mouvement des projectiles

Ce mode de raisonnement est illustré à merveille par la démonstration de Galilée sur la trajectoire parabolique des projectiles (Discorsi, quatrième journée, p. 203-209) : supposons qu'un corps pesant quitte son support selon un mouvement horizontal; il sera alors soumis à la pesanteur, et animé par conséquent d'un deuxième mouvement, cette fois vertical et accéléré. Pendant que le mobile est mû uniformément vers la droite et parcourt une longueur horizontale proportionnelle au temps, il parcourt vers le bas une distance proportionnelle au carré du temps (Théorème du mouvement accéléré). La parabole est le lieu des points qui satisfont les deux équations à la fois: $x = k.t$ et $y = K.t^2$, elle est définie en fonction du temps pris comme paramètre commun (ce jargon et ces équations sont bien sûr absents du texte de Galilée).



Cette thèse ainsi"démontrée" n'est pas une proposition de physique expérimentale : il ne s'agit pas de constater par des mesures et des approximations que la trajectoire des projectiles a telle ou telle allure . Les discussions continueront d'ailleurs assez longtemps après Galilée, pour savoir dans quelle mesure les projectiles physiques s'écartent de cette trajectoire.

Galilée compose deux mouvements abstraits, parfaitement définis et réglés, et montre que le résultat vérifie les propriétés mathématiques de la parabole. Ce n'est pourtant pas non plus de la pure mathématique : la démonstration de Galilée repose sur certaines thèses physiques, par exemple sur l'idée que des mouvements différents peuvent se composer dans un même mobile sans se détruire ni se gêner (on peut considérer ce principe comme un corollaire du principe d'inertèe).

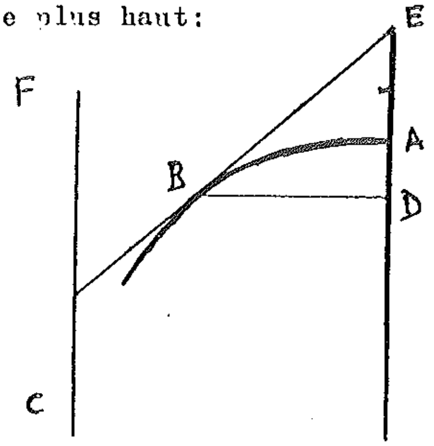
§ 10 . La cinématique de Torricelli.

Cette géométrie du mouvement occupe la ligne de crête entre le versant mathématique et le versant physique. Galilée a emprunté aux mathématiques des Anciens les théorèmes sur la parabole, pour les appliquer aux mouvements des projectiles. Ce processus de fécondation réciproque continue avec les disciples de Galilée: Torriccelli imagine des projectiles nouveaux, inconnus et impossibles, simplement pour décrire cinématiquement des courbes plus complexes:

> "Soit un mobile, poussé horizontalement sur un plan 'F, et venant à tomber, de telle façon qu'il possède alors deux impetus (= deux élans, deux mouvements),
> -l'un uniforme et horizontal en direction de FC
> - l'autre descendant et accéléré en raison quadratique (= la vitesse croît comme le carré du temps);
> je dis qu'il se produira ainsi une parabole cubique."
>
> (Opere 1919, I, II, p. 310)

L'échange se fait cette fois dans l'autre sens: non plus de la géométrie vers la physique, mais à l'inverse. Torriccelli crée des êtres mathématiques nouveaux simplement en généralisant les résultats de Galilée sur les projectiles.

La considération du mouvement n'est nullement un simple auxiliaire imaginatif, un échafaudage très vite inutile: c'est en supposant que sa courbe est réellement décrite par un projectile physique, que Torriccelli trouve un moyen élégant et rapide pour déterminer les tangentes. Voici comment il procède dans le cas de la cubique décrite plus haut:



"Qu'on prenne ED égal à la longueur DA multipliée par l'exposant de la parabole, donc trois fois DA dans le cas présent, et la ligne qui joint EB sera la tangente.

En effet, le point mobile B qui décrit la parabole possède deux impetus lorsqu'il est dans la position B:
-un impetus horizontal dirigé selon la tangente AF
-un impetus perpendiculaire selon le diamètre AD;
et on cherche le rapport de ces deux impetus de la façon suivante: l'impetus horizontal, pendant le temps de la chute, a parcouru l'espace DB, et de son côté l'impetus perpendiculaire, selon ce qui a été dit, parcourrait, pendant la durée de la chute, s'il se conservait toujours égal, un espace triple de la chute AD; par conséquent le mouvement ou la direction du point B, qui ~~sont~~ est composé de deux vitesses qui sont l'une à l'autre comme BD à BE, se fera le long de la ligne BE." (Opere, I, II, p. 311)

Lorsqu'il expose son procédé pour tracer les tangentes, Torricelli suppose admises certaines propriétés physiques du mouvement: il faut sous entendre que la tangente est la direction instantanée du mouvement du point mobile, et que cette direction peut être déterminée en construisant le parallélogramme des vitesses.

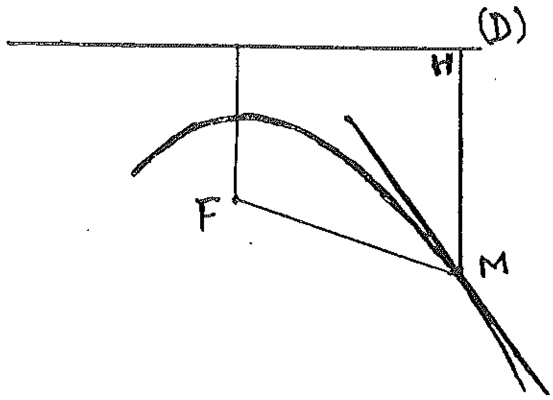
§ 11 . Roberval et les tangentes.

Durant ces années 1640, le français Roberval enseigne une méthode identique pour tracer les tangentes. L'ouvrage imprimé (en 1693 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences) porte le titre: Observations sur la composition des mouvements et le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes. L'exposé est plus méthodique et plus détaillé que celui de Torricelli, il comporte des justifications explicites:

> "Axiome ou principe d'invention:
>
> La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là" (p. 24)
>
> "Règle générale:
>
> Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe."(p.25)

Roberval applique cette méthode à 13 courbes différentes (coniques, diverses sortes de conchoïdes, limaçon, spirale, quadratrice, cissoïde, roulette, compagne de la roulette). Je m'en tiendrai à deux exemples, la parabole et la spirale.

Pour étudier la parabole, Roberval a recours à la définition par foyer et directrice : tout point est à distance égale du point F et de la droite (D).



Le point M a donc deux mouvements, celui de la droite HM et celui de FM. Et lorsque M se déplace, HM et FM s'accroissent également. On peut alors considérer "que le mouvement du point décrivant la parabole est composé de deux mouvements droits égaux" (p. 26). Par conséquent la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH}$ est aussi la tangente en M.

Une justification complète du procédé dépasse les moyens mathématiques de Roberval. De quel droit avoir négligé la rotation de FM, et le déplacement latéral de HM ? Roberval déclare simplement qu'il était "plus facile" de procéder comme il l'a fait (p. 27).

La tangente à la spirale est déterminée d'une manière analogue, sans détour ni calcul: le point qui décrit la spirale se déplace uniformément sur la demi-droite et circulairement avec la révolution de la demi-droite. Selon le mouvement de translation uniforme, il parcourt à chaque tour une distance égale, qu'on peut prendre pour mesure de sa vitesse rectiligne. Comment maintenant mesurer son mouvement circulaire, puisqu'il se mouvra d'autant plus vite qu'il est plus loin de l'origine ? Il suffit de considérer le cercle correspondant à la position du point:

Lorsqu'il expose son procédé pour tracer les tangentes, Torricelli suppose admises certaines propriétés physiques du mouvement: il faut sous entendre que la tangente est la direction instantanée du mouvement du point mobile, et que cette direction peut être déterminée en construisant le parallélogramme des vitesses.

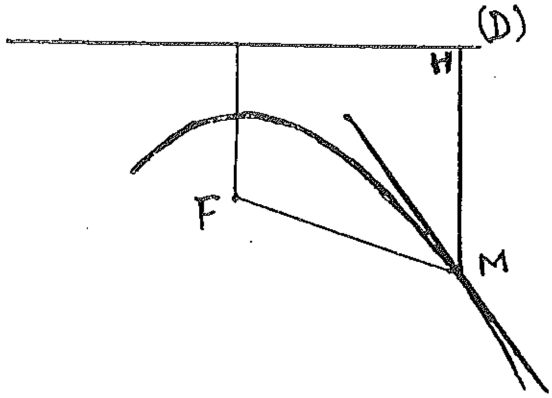
§ 11 . Roberval et les tangentes.

Durant ces années 1640, le français Roberval enseigne une méthode identique pour tracer les tangentes. L'ouvrage imprimé (en 1693 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences) porte le titre: Observations sur la composition des mouvements et le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes. L'exposé est plus méthodique et plus détaillé que celui de Torricelli, il comporte des justifications explicites:

> "Axiome ou principe d'invention:
>
> La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là" (p. 24)
>
> "Règle générale:
>
> Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe."(p.25)

Roberval applique cette méthode à 13 courbes différentes (coniques, diverses sortes de conchoïdes, limaçon, spirale, quadratrice, cissoïde, roulette, compagne de la roulette). Je m'en tiendrai à deux exemples, la parabole et la spirale.

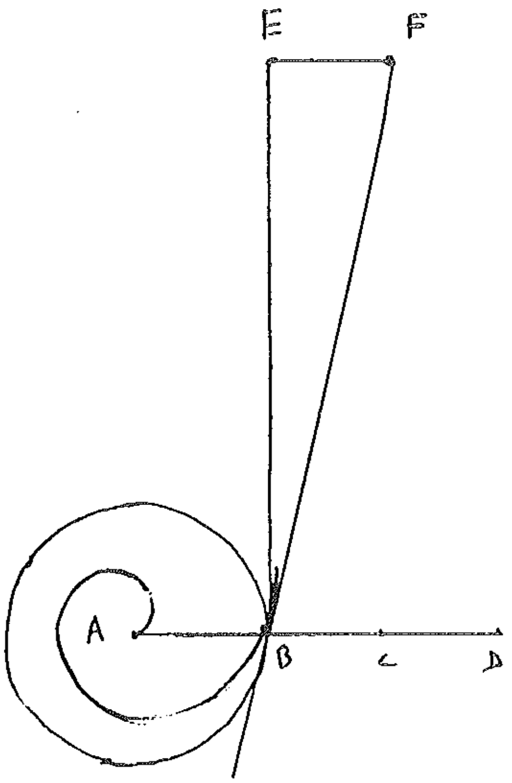
Pour étudier la parabole, Roberval a recours à la définition par foyer et directrice : tout point est à distance égale du point F et de la droite (D).



Le point M a donc deux mouvements, celui de la droite HM et celui de FM. Et lorsque M se déplace, HM et FM s'accroissent également. On peut alors considérer "que le mouvement du point décrivant la parabole est composé de deux mouvements droits égaux" (p. 26). Par conséquent la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH}$ est aussi la tangente en M.

Une justification complète du procédé dépasse les moyens mathématiques de Roberval. De quel droit avoir négligé la rotation de FM, et le déplacement latéral de HM ? Roberval déclare simplement qu'il était "plus facile" de procéder comme il l'a fait (p. 27).

La tangente à la spirale est déterminée d'une manière analogue, sans détour ni calcul: le point qui décrit la spirale se déplace unifotmément sur la demi-droite et circulairement avec la révolution de la demi-droite. Selon le mouvement de translation uniforme, il parcourt à chaque tour une distance égale, qu'on peut prendre pour mesure de sa vitesse rectiligne. Comment maintenant mesurer son mouvement circulaire, puisqu'il se mouvra d'autant plus vite qu'il est plus loin de l'origine ? Il suffit de considérer le cercle correspondant à la position du point:



"en B le mouvement est tel que s'il en eût toujours eu un circulaire égal depuis A jusqu'en B, il aurait décrit une circonférence dont AB est le rayon pendant le temps d'une révolution" (p. 52). Donc, si le segment constant AB sert à mesurer le déplacement rectiligne, la circonférence centrée en A et de rayon AB mesurera le déplacement circulaire caractéristique du point proposé. Pour avoir la tangente, il suffit alors de construire le parallélogramme des vitesses: on trace en B un segment BE perpendiculaire de longueur égale à la circonférence, et au bout de ce segment, en E, un segment EF égal au segment AB et parallèle à la demi-droite AD. BF sera la tangente cherchée.

Le procédé suppose qu'on sache tracer un segment rectiligne égal à une circonférence. Précisément Archimède utilisait la spirale dans l'autre sens: la tangente à la spirale lui permettait de calculer la longueur de la circonférence (Des Spirales, prop. 18). Le problème est alors: comment Archimède détermine-t-il la tangente ? (Certains pensent qu'il aurait utilisé lui aussi un procédé d'invention cinématique).

Il faut un certain doigté pour appliquer la méthode de Roberval, comme on l'a vu pour la parabole. Le cas de la quadratrice est assez embrouillé, par exemple: il ne faut pas choisir n'importe quels mouvements générateurs. Ceux qui voudront utiliser ces techniques sans discernement, sans un certain flair, risquent des erreurs. Céla est même arrivé à un jeune homme qui ne manquait pourtant pas de flair, Isaac Newton (voir Math. Papers of I. Newton, p. 373-380, un manuscrit de 1665).

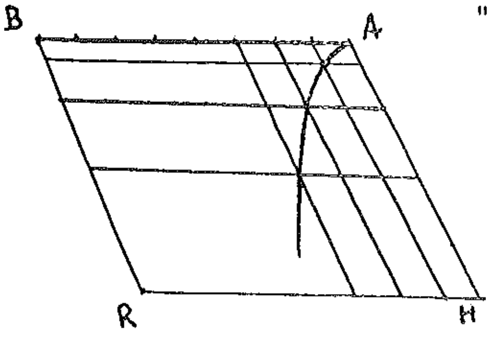
III LA PURETE CARTESIENNE.

§ 12 . Une courbe mécanique chez Descartes.

La Géométrie de Descartes est en rupture complète avec le courant que je viens d'évoquer. Descartes rejette les courbes mécaniques, et toute la géométrie purement cinématique, au nom d'une conception rigoureuse des mathématiques.

Il faut d'abord reconnaître qu'il savait s'en servir s'il le fallait, et avec beaucoup d'adresse, comme en témoigne sa solution au problème posé par Florimond de Beaune (lettre du 20 février 1639). Il s'agit de déterminer une courbe en connaissant certaines conditions que doit satisfaire la tangente (en termes d'aujourd'hui, l'équation est $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{a}$, c'est historiquement la première étude d'une équation différentielle).

Descartes montre d'abord comment on peut encadrer les points de la courbe cherchée entre des intersections successives de tangentes, ce qui rend possible une approximation indéfinie par des séries. Puis Descartes indique comment on pourrait effectuer une description géométrique de la courbe en utilisant deux déplacements, le premier uniforme, le second à vitesse variable:



"pour décrire exactement cette courbe AVX, il faut mouvoir deux lignes droites en telle sorte que, l'une étant appliquée sur la ligne AH et l'autre sur AB, elles commencent à se mouvoir en même temps également vite, AH vers BR et AB vers RH; et que celle qui se meut de AH vers BR retienne toujours la même vitesse, mais que l'autre, qui descend de BA parallèle à RH, augmente la sienne en telle proportion que, si elle a un degré de vitesse en commençant, elle en ait 8/7 lorsque la première a parcouru la huitième partie de la ligne AB, et 3/6 ou 4/3 lorsque la première a parcouru le quart de AB [...] et ainsi à l'infini; et l'intersection de ces deux lignes droites décrira exactement la courbe AVX, qui aura les propriétés demandées. Mais je crois que ces deux mouvements sont tellement incommensu(ra)bles, qu'ils ne peuvent être réglés exactement l'un par l'autre; et ainsi que cette ligne est du nombre de celles que j'ai rejetées de ma Géométrie, comme n'étant que mécanique;..."

§ 13 . Quelles sortes de mouvements sont admises dans La Géométrie.

En effet, au début du livre II de La Géométrie, Descartes avait rejeté hors de la géométrie (c'est à dire des mathématiques proprement dites), "la spirale, la quadratrice et autres semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux Méchaniques" (édition de 1637, p. 317).

Pourtant il n'exclut pas le mouvement lui-même, puisqu'il déclare:

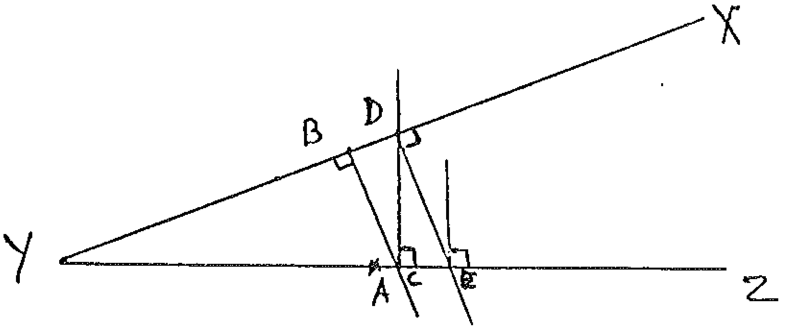
> "il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres".
> (p. 316)

Une courbe "géométrique" peut donc, tout autant qu'une courbe "mécanique", être décrite par une combinaison de mouvements. La seule différence est que dans le premier cas les mouvements sont en relation directe les uns avec les autres, ils se règlent mutuellement, et cela permet une "mesure". Les mouvements qui engendrent une courbe "mécanique" sont au contraire "incommensurables" entre eux:

> "considérant la géométrie comme une science qui enseigne généralement à connaître les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer

> être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent; car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure."

L'exemple que donne Descartes, deux pages plus loin (p. 318), permet de comprendre ce qu'il entend par des "mouvements qui s'entresuivent", se règlent l'un l'autre de proche en proche, et rendent possible la détermination d'une mesure. On imagine un instrument idéal, une sorte de compas articulé dont les branches YZ et YX peuvent s'écarter à volonté. Les distances YA et YB sont égales et constantes. En B est fixée à angle droit une équerre de longueur indéfinie, qui vient buter contre le point mobile C et le faire glisser vers Z lorsqu'on ouvre le compas. Le point C en coulissant sur YZ entraîne une autre équerre, qui à son tour agit sur le point D et le fait coulisser vers X, etc...



Chaque mouvement dépend du précédent, tous sont rattachés de proche en proche au mouvement d'ouverture du compas. Cette dépendance permet une "mesure" des mouvements les uns par les autres. Considérons par exemple la courbe engendrée par les positions successives du point D. On a toujours, par les similitudes des triangles, $\frac{YD}{YC} = \frac{YC}{YB}$; d'autre part YB est constant (c'est si l'on veut l'unité de mesure). Le point D satisfait donc à l'équation $YD = YB.YC^2$, ou $y = k.x^2$. (On pourrait facilement obtenir l'équation en repère dit cartésien, avec ED au lieu de ED)

Dans le cas d'une courbe purement mécanique au contraire, les mouvements ne sont pas réglés l'un par l'autre, il est impossible de mesurer la position d'un point mobile par son rapport au déplacement d'un autre ~~p~~point. Pour décrire une quadratrice par exemple, on emploie deux mouvements entièrement indépendants; les lignes mobiles ne sont soumises qu'à une condition commune: parcourir une certaine distance dans le même intervalle de temps. En termes modernes, il est impossible d'éliminer le paramètre commun aux deux déplacements, pour essayer d'obtenir une équation algébrique. Le temps est ainsi le seul lien des deux mouvements.

§ 14 . Le projet cartésien d'un classement des problèmes.

L'intérêt de cette distinction apparaît mieux encore, si l'on se réfère au projet d'ensemble de Descartes. Son ambition n'est pas d'enrichir les mathématiques par des courbes ou des théorèmes nouveaux (il le fait d'ailleurs aussi, mais en passant). Il désire avant tout résoudre méthodiquement les problèmes, tous les problèmes que la science peut ~~s~~offrir, et cela exige d'abord un classement, une mise en ordre, une hiérarchisation des problèmes eux-mêmes. Le texte le plus clair remonte à la jeunesse de Descartes, c'est une lettre à Beeckmann du 26 mars 1619:

> "Au vrai, pour te découvrir clairement le desein que je projette, ce n'est pas l'Ars Brevis de Lulle que je désire apporter, mais une science entièrement nouvelle, grâce à laquelle puissent se résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité, aussi bien continue que discrète. Mais chacune selon sa propre nature: en effet, tout comme en Arithmétique certains problèmes se résolvent par des nombres rationnels, d'autres par des nombres irrationnels, d'autres enfin peuvent seulement être imaginés, ~~ils~~ et échappent à toute solution; de même dans le domaine

de la quantité continue, j'espère le prouver, certains problèmes peuvent se résoudre uniquement avec des lignes droites et des cercles [= à la règle et au compas]; d'autres encore ne peuvent se résoudre, sinon à l'aide d'autres lignes courbes engendrées par un mouvement unique et décrites avec des compas d'une nouvelle sorte, non moins déterminés ni moins géométriques, que les compas ordinaire dont on décrit les cercles; enfin d'autres problèmes ne peuvent se résoudre à moins qu'on n'utilise des courbes engendrées par deux mouvements différents non subordonnés l'un à l'autre, et de telles courbes sont purement imaginaires, comme la ligne quadratrice suffisamment répandue. Et j'estime qu'on ne peut rien imaginer qui ne puisse se résoudre par les lignes dont je parle; mais j'espère arriver à démontrer quelles sortes de questions peuvent se résoudre de telle ou telle manière et non de telle autre: de sorte qu'il ne reste alors presque plus rien à trouver en géométrie."

Pour faire avancer les connaissances humaines, il est capital de bien distinguer les différents ordres des problèmes, classés "selon leur nature". Cette distinction s'effectue assez facilement et naturellement pour tout ce qui relève du nombre (les problèmes sont soit rationnels, soit irrationnels, soit impossibles). Par contre les problèmes qui traitent de réalités continues n'ont pas encore été hiérarchisés aussi clairement. Descartes se propose de le faire. Alors les solutions viendront presque d'elles-mêmes, chacune selon sa nature. Lorsque ces solutions existent, bien sûr. Mais précisément le classement projeté par Descartes évitera toute illusion sur des solutions prétendues, correspondant à des problèmes impossiblles . Ainsi la quadratrice offre une apparence de solution pour une question insoluble, et ceux qui s'occupent de telles choses sont dans l'illusion.

§ 15 . Qu'est-ce qu'une courbe pour Descartes ?

Ce projet méthodique a pour conséquence, en mathématiques, la priorité donnée au traitement algébrique. Descartes n'étudie pas les courbes pour elles-mêmes, comme des réalités spatiales. Une courbe est pour lui un "lieu" géométrique, l'ensemble des solution d'une équation.

Cela apparaît dans la composition du livre premier de La Géométrie : on commence par les solutions d'équations à une inconnue, du premier degré, puis du second degré, et chaque fois il est indiqué comment construire géométriquement les solutions (les segments représentant les solutions). Ensuite on passe aux équations à deux inconnues, et les solutions ne sont plus alors des segments isolés, mais des couples de valeur, dont la totalité constitue une ligne:

> "à cause qu'il y a toujours une infinité de divers points qui peuvent satisfaire à ce qui est ici demandé, il est aussi requis de connaître et de tracer la ligne dans laquelle ils doivent tous se trouver..." (p. 307)

L'objet premier de cette géométrie, c'est donc la représentation des solutions de problèmes algébriques. A tel type d'équation correspond tel type de construction.

D'autre part l'éventail des expressions algébriques autorisées a été défini par avance dans les premières lignes de La Géométrie: Descartes n'admet que les 4 opérations de l'arithmétique usuelle, il y ajoute l'extraction de racine, qui est "une espèce de division" (p. 297) ; pas question de passage au sinus, ou au logarithme. La correspondance entre algèbre et géométrie est ainsi fondée d'une manière stricte. Ce point de vue si contraignant est aussi extrêmement fécond, on peut y voir le début de la géométrie algébrique d'aujourd'hui, selon laquelle une courbe est le lieu des zéros d'un polynome à plusieurs variables.

IV LES FLUXIONS NEWTONIENNES ET LA PLACE DU TEMPS.

§ 16 . La définition des logarithmes par la vitesse.

La Géométrie de Descartes délimite strictement le domaine des mathématiques. C'est ce qui en fait la fécondité et aussi la faiblesse. Descartes s'est posé en législateur, en censeur, mais ses prétentions seront vite débordées par le développement des problèmes et des procédés.

L'exemple des logarithmes est très instructif à cet égard. Voilà le type même des êtres mathématiques que *La Géométrie* rejette dans les ténèbres extérieures. Les logarithmes existent depuis Napier (1614) et Kepler (1624), pourtant Descartes ne les mentionne jamais. A vrai dire, pour lui comme pour tous ses contemporains, les logarithmes sont des nombres tabulaires, c'est à dire des nombres approchés que l'on calcule par des procédures très laborieuses, et leur intérêt se réduit à l'utilité pratique : les astronomes en ont besoin dans leurs calculs, pour substituer des additions à des multiplications trop fastidieuses. Rien à voir par conséquent avec la mathématique noble.

Mais au cours du siècle les logarithmes acquièrent leurs lettres de noblesse. Le moment décisif se situe peu avant 1650, lorsque Grégoire de Saint Vincent et son élève Sarasa découvrent que le logarithme mesure la surface délimitée par une courbe algébrique bien connue, l'hyperbole. Descartes lui-même avait reconnu implicitement l'importance des logarithmes en proposant sa solution au problème de de Beaune (cf. § 12): le procédé utilisé est en effet très semblable à celui dont Napier s'est servi pour inventer et définir ses logarithmes , il est probable que Descartes s'en est inspiré.

La création des logarithmes s'est faite dans le même contexte que les travaux de Galilée ou Roberval : il s'agit encore d'une mathématique du mouvement. Le problème à résoudre est le suivant : on veut faire correspondre une progression géométrique (par exemple de base 10, ce qui n'est pas le cas chez Napier) et une progression arithmétique

1/100	1/10	1	10	100	1000
-2	-1	0	1	2	3

L'intérêt pratique vient de ce que la progression du haut se fait par multiplication, et celle du bas par addition. Mais le but ne sera atteint que si l'on peut considérer les deux progressions comme des réalités continues, qui gardent un sens pour les valeurs situées entre les nombres que l'on a écrits. Il faut pouvoir trouver par interpolation quelle valeur de la suite arithmétique correspond à une valeur quelconque dans l'autre suite. (Que 3 soit le logarithme de 1000 n'est pas très intéressant, par contre on aimerait savoir à quel nombre en bas correspond 687 en haut.)

C'est sur ce point que la représentation du mouvement semble avoir été utile à Napier. Il imagine des déplacements continus sur deux droites parallèles, selon un mouvement uniforme sur la première ligne et avec une vitesse décroissante sur la seconde ligne. La vitesse variable est proportionnelle à la distance restant à parcourir. (On remarquera que c'est presque la loi de mouvement que Galilée déclarera impossible 15 ans plus tard.) De cette manière l'espace parcouru sur la première ligne sera le logarithme de l'espace parcouru sur l'autre ligne (mouvement décéléré)

Ce procédé de Napier, et les raisonnements qu'il y joint, présentent plusieurs originalités. D'abord la manipulation des vitesses instantanées se fait avec aisance (sans aucune définition bien sûr). D'autre part Napier utilise des mouvements à vitesses variables, mais sans mettre les mouvements en contact, sans leur faire décrire une courbe commune. Ce qui est commun aux deux mouvements, c'est seulement leur contemporanéité, qui permet de calculer le rapport des déplacements à un instant donné. Sous cet aspect la conception de préfigure celle de Newton dans le calcul des fluxions.

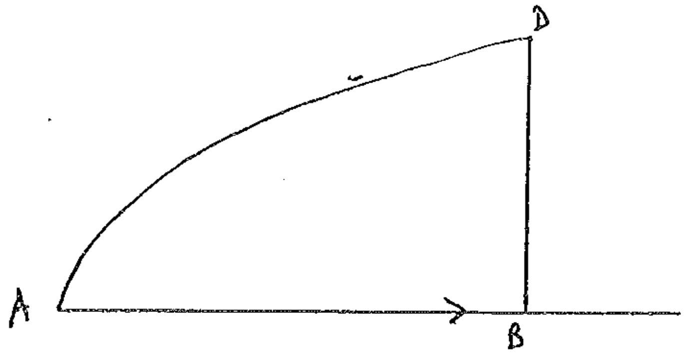
§ 17 . Le mouvement qui déplace les lignes.

Dans ses premiers travaux, Newton utilise en effet le même schéma que Napier. Il imagine deux déplacements sur deux lignes horizontales parallèles, et il cherche à exprimer la relation des vitesses, connaissant les déplacements effectués dans le même temps; ou inversement, les espaces parcourus connaissant les vitesses. Si la relation entre les espaces est donnée par une équation, il s'agit de trouver l'équation qui donnera le rapport des vitesses, et inversement. (Cf Math. Papers, Ip. 343 et suiv.;p. 385-6; Méthode des Fluxions, p. 45 de la trad. Buffon).

Les courbes et surfaces seront conçues sur le même mode: le lieu de mouvements à différentes vitesses. Une figure de la Méthode des Fluxions est une réalité qui bouge et s'anime, il faut arriver à "voir" l'engendrement des lignes et des surfaces par le déplacement des points et des segments. Newton le déclare explicitement:

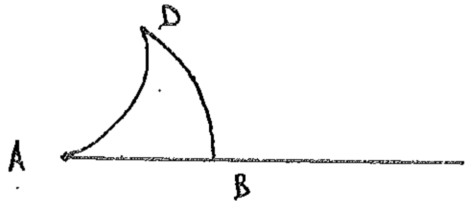
> "je considère les quantités comme engendrées par une augmentation continue, à la manière de l'espace qu'un mobile décrit dans sa course." (Fluxions, trad.p.21, texte latin dans Math Papers, III p. 72)

Une figure géométrique est une sorte de mécanisme où le mouvement se transmet selon les articulations de la figure. Les lignes et surfaces sont engendrées au sens propre par des déplacements. Le schéma le plus général et le plus simple est celui-ci

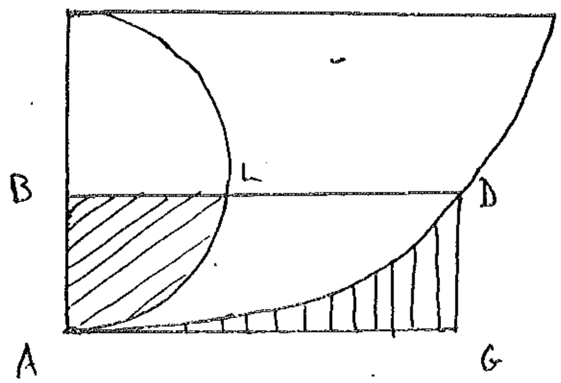


Sur une ligne horizontale, un point mobile se déplace à partir de l'extrêmité gauche A, il entraîne dans son mouvement un segment vertical BD de longueur variable ; l'extrêmité D du segment engendre la courbe, et le balayage crée la surface. (Newton nomme AB la "base", et BD "l'ordonnée" ou "appliquée").

Il existe des combinaisons plus raffinées. Ainsi la spirale est engendrée par le gonflement continu d'un cercle centré en A et le déplacement d'un point sur la circonférence de ce cercle. L'accroissement du cercle est mesuré par le déplacement du point B sur la base, comme ci-dessus par conséquent, mais cette fois le mouvement sur la base engendre l'expansion d'un cercle.



La cycloïde est engendrée par un mécanisme complexe, où le déplacement fondamental est un balayage de bas en haut. La base est donc verticale cette fois. Lorsque le point B monte, il entraîne dans son mouvement la droite BLD, et par suite aussi le segment DG. Les surfaces ABD, ADG, et ABL (surface du cercle générateur) s'accroissent en fonction des balayages respectifs des segments. Newton prouve que l'accroissement de la surface ABL est à tout instant égal à l'accroissement de la surface ADG. La cycloïde entière est donc égale au rectangle complet, de côtés $2R$ et $2\pi R$, dont on retranche la surface égale à celle du cercle générateur, en tout $4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2$ (trad. p. 91; Papers p. 204)



Parmi les mouvements des divers éléments de la figure, Newton choisit un mouvement de référence, en général le déplacement du point B sur la "base". Les autres sont calculés en fonction de celui-là. La dépendance des mouvements est inscrite sur la figure: l'impulsion se transmet de proche en proche selon les articulations particulières du mécanisme choisi. Dans certains cas, la dépendance pourra être exprimée par une relation algébrique, et l'on retrouve alors comme cas particuliers les courbes "géométriques" de Descartes.

Le calcul se résume à deux opérations fondamentales : connaissant la proportion entre les déplacements, trouver la prortion entre les vitesses, et inversement passer des vitesses aux déplacements. Newton parle plus volontiers de "fluxion" et de "fluente", mais sans exclusive, il écrit même parfois "fluxio sive velocitas", "la fluxion, ou si vous préférez, la vitesse", il parle aussi du "taux d'écoulement"("fluendi ratio") d'une quantité. Chaque fluente (la ligne x, la surface y) a ainsi sa fluxion (notée $\dot{x}$, $\dot{y}$ dans les derniers textes de Newton).

§ 13 . La place fondamentale du temps.

En plusieurs endroits, Newton a recours à un infinitésimal, noté " o " (un petit o couché, à ne pas confondre avec le zéro), qui est l'élément fondamental de tout accroissement. Il s'agit en quelque sorte d'une particule atomique de temps. L'écoulement minimum de toute grandeur se calculera alors en multipliant la vitesse de cette grandeur par l'élément o : $\dot{x}.o$, $\dot{y}.o$ seront les accroissements infiniment petits de x et y . C'est donc le petit o qui fournit toute l'impulsion, il suffit de l'introduire dans une figure ou une relation algébrique pour les mettre en mouvement, et déterminer ainsi les "accroissements contemporains" des quantités en jeu.

Le rôle primordial appartient donc au temps : toutes les grandeurs sont fonctions du temps. En ce sens la relation entre la fluxion d'une quantité et la fluxion de la base ne peut être confondue avec notre dérivée : le déplacement du point mobile sur la base est lui-même fonction du temps, il a lui aussi sa fluxion par rapport au temps. La quantité x n'est pas une variable indépendante, c'est une fluente au même titre que les autres , dont la fluxion sera $\dot{x}$ et l'accroissement minimum $\dot{x}.o$. Ce que Newton calcule, ce ne sont donc jamais des dérivées, mais des rapports entre vitesses : $\dot{y}/\dot{x}$. Parfois d'ailleurs, il sera utile de considérer que le déplacement du point sur la base est à son tour fonction d'un autre déplacement sur une autre base : Newton se sert de cette transformation cinématique pour calculer certaines intégrales délicates (qui pour nous aboutiraient à des logarithmes) en les ramenant à des intégrales plus simples qui leur serviront d'unité.

Bien qu'il n'y ait pad de variable indépendante inscrite sur la figure, pourtant Newton se rapproche, dans les faits, de notre manière de voir : il pose le plus souvent que la fluxion de la base est 1 . Le mouvement du point B sur AB est considéré comme uniforme, et c'est en fonction de lui que tous les autres mouvement sont déterminés. En notation newtonienne:
$\dot{x} = 1$, et donc en fin de compte $\dot{x}.o = o$, c'est à dire que l'infinitésimal devient l'accroissement minimum de x. Considérée du point de vue du fotmalisme mathématique, cette convention revient ainsi à faire de x la variable indépendante.

Mais ce choix d'un mouvement de référence a des justifications très profondes qu'il importe de saisir:

> "Parce que nous ne possédons aucune estimation du temps, sinon en tant qu'il est représenté et mesuré par l'intermédiaire d'un mouvement local uniforme, et parce que d'autre part des quantités ne peuvent être mises en rapport que si elles sont de même genre, et si la vitesse de leur accroissement ou décroissement est aussi de même genre, pour cette

raison je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au temps pris formellement, mais, parmi les quantités proposées qui sont de même genre, je supposerai que l'une s'accroît selon une fluxion uniforme, et je rapporterai toutes les autres quantités à celle-là comme si elle était le temps lui-même, si bien que le nom de temps peut à bon droit lui être attribué par analogie."

(Papers 72; Buffon traduit très mal)

Parce que le temps ne peut se figurer directement, une des variations tiendra la place du temps. Le mathématicien est satisfait: le paramètre temps peut désormais disparaître des calculs, il suffit de choisir une variable qui le représente. Dès lors on peut même considérer que le rapport de $\dot{y}$ à $\dot{x}$ est bien une dérivée en notre sens: la variation de x n'est plus fonction du temps, x devient la variable de base dont dépendent les autres.

Mais l'explication de Newton n'est pas seulement faite pour faciliter les opérations formelles. Newton n'oublie pas qu'il parle du temps et du mouvement, il garde un souci ontologique ou métaphysique : le temps n'est pas une grandeur qui puisse être mise au même rang que les autres. Nous n'en avons que des mesures toujours approchées. Référées au temps absolu, toutes nos horloges sont fausses, et pourtant il faut bien pratiquer des mesures. C'est ce qui se passe dans le calcul des fluxions comme dans l'astronomie: ~~faute de pouvoir~~ ne pouvant appréhender le temps lui-même, nous choisissons une fluente qui servira de référence, faute de mieux.

Le temps en effet n'est pas présent dans les choses de la nature ou sur les figures du mathématicien, mais il est sous-jacent à toutes, c'est lui qui construit et défait toute réalité. Les formes sont la trace passagère d'une activité plus profonde. Dieu lui-même se rend sensible par son action incessante, car "il dure d'éternité en éternité, il est présent d'infini en infini, il régit toutes choses, ... et en existant toujours et partout il constitue la durée et l'espace"...(Newton, Principia, scolie général)

Newton, lecteur assidu de Boehme et des cabbalistes, avait fini par penser que l'attraction universelle était une manifestation physique de l'omniprésence divine. On risquerait de raplatir trop facilement les travaux de Newton : il y a toutes raisons de penser que le mouvement qu'il a insufflé aux êtres mathématiques n'était pas un simple excitant pour l'imagination. Il aurait voulu que son oeuvre fût toute entière à la gloire de celui en qui "la totalité des choses sont contenues et reçoivent leur mouvement" (Principia, scolie général). Aussi, lorsque Newton attribue au temps un "genre d'être" qui le distingue des autres variations, il faut voir là une prise de position d'ordre métaphysique ou théologique : la réalité du temps, à la fois tout puissant et en retrait, accessible seulement "par analogie", manifeste certainement pour Newton la domination et l'inaccessibilité divines.

Quelques indications bibliographiques:

- concernant Galilée.

Les Discorsi ont été traduits tout récemment:

Galilée, Discours et démonstrations concernant deux sciences nouvelles, traduits par M. Clavelin, éditions Armand Colin, Paris 1970.

On trouvera le texte original (en italien avec de longs passages en latin) dans l'Edizione Nazionale, ou dans Discorsi intorno a due nove scienze, a cura di Carugo e Geymonat, Torino, 1958.

Les deux principales études en français sont:

A. Koyré, Etudes Galiléennes, éd. Hermann, Paris 1966 (ou 1939)

M. Clavelin, La Philosophie naturelle de Galilée, éd. Armand Colin, Paris, 1968.

- concernant les grandeurs intensives:

Les études les plus importantes sont celles de Anneliese Maier sur la scolastique du 14e siècle (5 livres parus à Rome, en allemand, de 1949 à 1958, et un article en français sur Nicole Oresme, dans la Revue des Sciences Philosophiques et Théologiques, année 1948). On trouvera un résumé en anglais dans E.J. Dijksterhuis, The mechanization of the world-picture, Oxford Univ. Press 1961.

La discussion médiévale sur les grandeurs intensives s'est greffée sur un passage d'un manuel de théologie, le Livre des Sentences de Pierre Lombard (I,distinctio 17 "de missione spiritus sancti",n°7 ; édition Migne, Patrologie Latine, colonnes 56-57).Le commentaire de cette distinction 17 s'enflera progressivement jusqu'au 17e siècle. (Voir un exemple dans l'article de A. Combes. L'intensité des formes d'après Jean de Ripa, Archives d'Histoire Doctrinale et Littéraire du Moyen Age. 1971).

Pour une discussion plus récente, on peut recourir à une communication au récent Colloque Lambert de Mulhouse (Septembre 1977): Claude Debru,Nature et Mathématisation des grandeurs intensives (surtout chez J.H. Lambert et E. Kant) à paraître dans les Actes du Colloque Lambert.

- concernant Torricelli et Roberval:

Torricelli Opere, 3 volumes en 4 tomes, Faënza, 1919.

Roberval, Divers Ouvrages, dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. éd. 1693, rééd. 1730.

Il existe une thèse inédite de Kokiti Hara sur la méthode de Roberval pour les tangentes (Bibliothèque de la Sorbonne).

- concernant les mathématiques de Descartes:

La Géométrie est éditée à la suite du Discours de la Méthode dans le vol. VI de l'édition Adam-Tannery. Une édition très commode a été réalisée aux États Unis: fac-similé de l'original français (1637) avec traduction et notes en anglais en face

The Geometry of René Descartes translated by . Latham and . Smith, Dover Books, New-York. Le livre le plus récent sur le sujet, malheureusement assez contestable, est celui de J. Vuillemin, Mathématiques et Métaphysique chez Descartes, P.U.F., Paris, 1960. Il vaut mieux aller voir en bibliothèque le vieux livre excellent de G. Milhaud, Descartes Savant, éditions Félix Alcan, Paris 1921.

- concernant Newton:

La grande édition des écrits mathématiques de Newton est bientôt achevée: The mathematical papers of Isaac Newton, edited by Derek T. Whiteside, 8 volumes (seul le dernier n'est pas encore paru, à ma connaissance). Dans les pages qui précèdent j'ai utilisé le volume I, qui contient les manuscrits de jeunesse, et le volume III, où se trouve le texte original (latin, avec traduction anglaise en face) de la Méthode des Fluxions et des Séries infinies. Ce dernier ouvrage est disponible actuellement dans la vieille traduction faite par Buffon au 18e siècle (réédition Albert Blanchard, Paris).

- en général:

Les Eléments d'Histoire des Mathématiques de Bourbaki contiennent quelques pages sur le sujet évoqué ci-dessus, sous le titre "la cinématique", dans la partie consacrée au calcul infinitésimal.

Le même D.T. Whiteside qui édite les écrits de Newton avait fait paraître, il y a quelques années, sa thèse sur l'ensemble des mathématiques ~~xxxxxxxxxx~~ de cette période (en gros de Descartes à Newton):

Derek T. Whiteside, Patterns of mathematical thought in the later 17th century, Archive for the History of exact Sciences, Springer Verlag, Berlin, volume I, pages 179-388.