

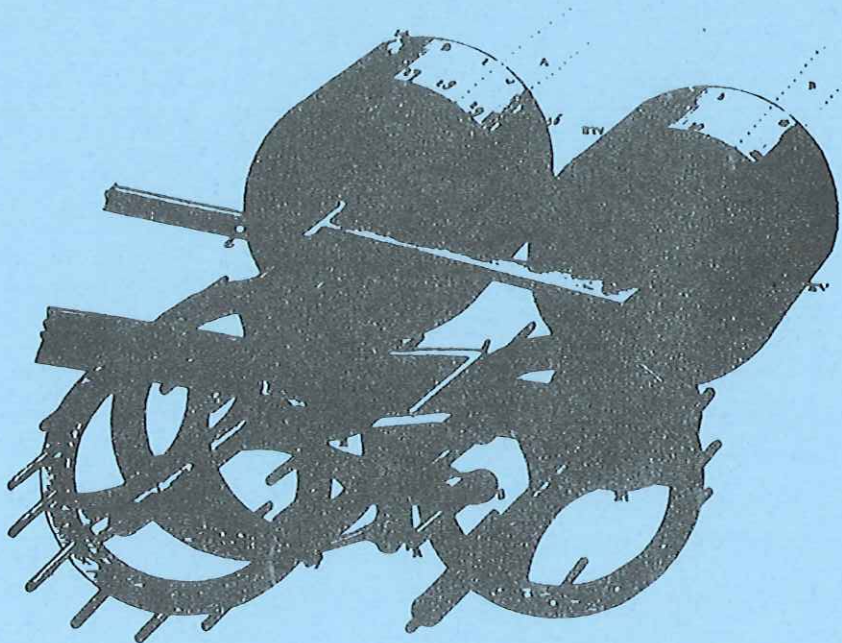
HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

OU

EPISTEMOLOGIE ?

Exposé de Pierre RAYMOND (PARIS)

---





Chaque expression sera suivie pour elle-même. Nous montrerons ainsi que la conception qu'on a de l'histoire joue sur la pratique qu'on a de l'épistémologie. C'est à dire que l'histoire est affaire de théorie, l'épistémologie d'intervention.

Quelques illustrations ponctuelles seront évoquées au fur et à mesure du développement.

## I - L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Ⓐ - A propos de l'histoire nous partirons d'un principe du matérialisme historique : aucune histoire d'un secteur de la société ne peut être comprise sans être articulée à l'histoire générale de la formation sociale. L'oeuvre de Marx, à propos de la société capitaliste, le montre bien : si l'on étudie seulement le secteur économique-social, sans référence aux secteurs politique et idéologiques, on ne parvient qu'aux lois selon lesquelles fonctionne un mécanisme, les lois de la production capitaliste, en l'occurrence, qui montrent comment ce type de production rencontre périodiquement des contradictions de plus en plus grandes, qui le secouent en crises de plus en plus violentes, et qui permettent, par la concentration, des réorganisations par un capital de plus en plus puissant. Le mécanisme des crises capitalistes est celui d'une perpétuation et non d'une révolution : "La production capitaliste tend sans cesse à dépasser ces limites qui lui sont immanentes, mais elle n'y parvient qu'en employant des moyens, qui, de nouveau, et à une échelle plus imposante, dressent devant elle la même banrière .

"... les limites entrent sans cesse en contradiction avec les méthodes de production que le capital ... le moyen entre perpétuellement en conflit avec la fin ....

"... le mode de production capitaliste ... représente ... une contradiction permanente (Le Capital, III, 1, Les contradictions internes de la loi de la baisse tendancielle du taux de profit, éd. sociales).

Les possibilités révolutionnaires n'apparaissent qu'avec l'articulation de ces crises dans l'ensemble social. Mais le caractère "inéluatable" d'une révolution n'est pas alors l'effet d'un mécanisme légal, il est celui d'une pratique révolutionnaire. Ce qu'indique le Manifeste, en faisant intervenir l'histoire générale. C'est à ce niveau seulement qu'il y a histoire, et dialectique réelle.

A propos de l'histoire des mathématiques il en va de même qu'à propos d'une histoire sectorielle : il n'y a d'histoire que par les articulations avec l'ensemble de l'histoire sociale. Le problème est donc celui des articulations.

Ce problème apparaît sur quelques exemples. Ainsi dans l'Antiquité gréco-romaine certaines questions théoriques furent posées par Archimède.

L'urgence théorique d'une solution semble immédiate. Et du reste, comme le souligne Alexandre Koyré (Etudes galiléennes) c'est un élève d'Archimède, Galilée, qui la fournira. Mais dans une autre société, vingt siècles plus tard. Koyré donne cela comme un fait inexplicable. Il s'agit d'un fait d'histoire en réalité : il n'y a d'urgence théorique que mise en place par des conditions sociales extra-théoriques. Ainsi le mathématicien Hilbert a passé dix-sept ans de sa vie à chercher des solutions à des problèmes de logique mathématique imposés en partie par des pré-supposés non mathématiques mais philosophiques. L'orientation de ses recherches mathématiques a dépendu de conditions extérieures à l'enchaînement seulement mathématique.

ⓑ- Qu'en est-il exactement de ce que nous avons appelé jusqu'ici le "secteur mathématique" dans une société ?

1.- Bien sûr on peut essayer de le repérer empiriquement sans faire le détour d'une définition. On y trouvera sans doute des théories exposées à l'usage de savants ou d'étudiants, des recherches en cours et plus difficiles à cerner dans leur matérialité, des utilisations par d'autres sciences, des ambitions d'applications directes à d'autres situations réelles, des diffusions plus ou moins vulgarisées, des exploitations à des fins philosophiques ou autres ... Mais, dans cette perspective d'inventaire, déjà, il convient d'être très attentif.

D'abord à ce qu'une théorie n'existe jamais à l'état de "pureté" scientifique, mais toujours diffusée dans des conditions données, pour un public donné. On peut même aller plus loin et envisager que le caractère textuel, la continuité textuelle d'une théorie scientifique n'existe en fait que par le montage d'une diffusion (jusque dans les Eléments de Bourbaki, XVII, p.6 - 7 : " La mathématique formalisée ne peut être écrite toute entière ; force est....de faire confiance au sens commun... abus de langage ... langage courant ... commentaires ... intuition ... rhétorique ..." ) qui fait intervenir des considérations extra-théoriques.

Ensuite, il convient de bien préciser le sens de chaque notion, comme celle de théorie, de recherches ... Ainsi, pour prendre l'exemple le plus simple, le plus sûr en apparence, la notion de méthode évoquée par un traité de mathématiques à l'usage de lycéens de Terminale n'est pas identique à ce qu'en dit en général un professeur de philosophie : celui-ci parlera sans doute d'accès argumenté à un résultat, de code qui permette de parvenir au but à coup sûr ; il écartera aussi bien les mécanismes non justifiés que les aléas d'une histoire effective. Mais, à propos de la solution d'une équation du 2ème degré, on trouve par exemple dans un manuel très courant de mathématiques :

" soit  $ax^2 + bx + c = 0$

Divisons les deux membres de cette équation par a ...

On recherche dans le premier membre le développement d'un carré, on le trouve en utilisant l'identité suivante ...".

Exemple simple où les conseils cartésiens du philosophe ne peuvent que dérouter l'apprenti mathématicien. Et les choses sont bien pires si le philosophe commence, comme il convient à un philosophe, à distinguer méthode, au sens de Descartes, et combinatoire ou esprit de système au sens de Leibniz. La pédagogie n'y trouve bien sûr pas son compte.

2.- Avant d'aborder les controverses qui touchent à la définition des mathématiques, restons un peu sur une de leurs propriétés importantes, qui a frappé Cavaillès et qui nous concerne ici puisqu'il s'agit de leur aspect négateur de l'histoire. Difficulté intéressante à cerner pour qui veut pratiquer l'histoire de cette discipline.

Cavaillès notait que les mathématiciens, plus particulièrement que d'autres savants, refusent de s'intéresser à l'histoire de leur discipline, comme s'il s'agissait d'un passé devenu étranger à leur recherches. Nous avons proposé (le passage au matérialisme) une explication à ce fait : pour la plupart des sciences, on peut distinguer sans grande difficulté le progrès des connaissances, tel que des théories en modifient ou en remplacent d'autres antérieures, du rapport de connaissance, qui met en liaison des concepts avec une réalité à connaître. Or il se trouve, dans le cas des mathématiques, que ces deux termes se mêlent étroitement : le progrès des connaissances se fait sans doute par rectification des théories antérieures, mais la connaissance mathématique a ceci de particulier qu'elle porte toujours d'un secteur théorique sur un autre, l'algèbre travaille sur la géométrie, la combinatoire sur l'algèbre ... , de sorte que la connaissance transforme en général l'antérieur en objet à étudier, le passé est de ce fait intégré au présent, c'est-à-dire nié comme passé.

Les exemples de ce processus où rectification et connaissance se confondent, sont très nombreux dans la chronique des mathématiques. Un des plus frappants est celui de l'Art de conjecturer de Jacques Bernoulli : la première partie de ce grand traité, publié sous le nom de cet auteur, est une réédition rectifiée par des remarques du traité du calcul dans les jeux de hasard de Huygens. De sorte que, par la présence du traité de Bernoulli, celui de Huygens a disparu dans le progrès de l'analyse combinatoire. Il est du reste notable qu'en mathématiques plus qu'ailleurs la réécriture des théories antérieures est coutumière, jusqu'à constituer un des aspects majeurs de cette discipline : qu'est-ce que "la géométrie euclidienne" ? non pas celle d'Euclide, mais un des innombrables remakes des Eléments d'origine, rarement consultés en fait, jamais par les élèves en tout cas. L'attitude de rejet du passé comme non mathématique par des mathématiciens va très loin : non seulement, par exemple, l'analyste actuel a du mal à considérer que le traité du marquis de l'Hospital est déjà une région du continent

analytique, mais chacun sait qu'une des formes fréquentes de la polémique entre mathématiciens contemporains consiste à dénier aux travaux des autres le titre de "mathématiques".

3.- A partir de ces constatations, les conflits traditionnels et actuels sur le statut scientifique des mathématiques sont plus aisés à comprendre. Nous ne ferons pas l'inventaire des doctrines qui se sont affrontées, nous essaierons seulement d'en dégager quelques grands types.

Pendant des siècles, tant que les mathématiques demeurèrent la seule science, ou, du moins, tant qu'aucune science expérimentale ne se développa, c'est-à-dire jusqu'au 17ème siècle à peu près, la doctrine principale, énoncée déjà par la philosophie platonicienne, fut celle d'une science qui portait sur des essences ou objets spirituels généraux. Le rapport de connaissance entre nos concepts et ces essences était réglé par la catégorie philosophique d'intuition intellectuelle. Lorsque la physique expérimentale commence à se développer sur les bases d'une physique mathématique galiléenne, la doctrine de l'intuition, fixée dès le départ du travail mathématique, devient bien pauvre pour caractériser une science au vu de ce qu'on aperçoit comme rapport expérimental nécessaire à chaque pas de la constitution de la théorie physique. Les philosophies de l'intuition disparaissent rapidement de la scène. Peu importe ici ce qui les remplace quant à la physique. Pour les mathématiques, une première doctrine tend déjà à s'y substituer dès Galilée : cette discipline donnerait à connaître l'armature du monde ("écrit en langage mathématique"), la seule science, celle de la nature, serait donc une lecture mathématique. Mais cette doctrine est vite interprétée en un autre sens, toujours en vigueur aujourd'hui : les mathématiques ne sont pas le langage de la nature, mais celui de la physique. Il ne s'agit donc plus d'une science, mais d'un instrument des sciences. Le prestige des mathématiques empêchait qu'on les tînt pour une sous-science, on les tînt donc pour une sur-science : le critère même de la "scientificité" des autres sciences. C'est ainsi qu'elles apparaissent dans les classifications chères à plusieurs philosophes du 19ème siècle, en particulier celle d'Auguste Comte. Les effets de cette doctrine, majoritaire aujourd'hui sous des formes variées, sont nombreux : d'abord une assimilation des mathématiques à une sorte de langage, mais la sorte la plus pure, univoque (alors que tout langage est équivoque) ; la complicité idéologique entre langage et mathématiques a des conséquences en logique mathématique et en linguistique ; conséquences rendues plus aiguës par le second effet : la réduction des mathématiques à un instrument qui a perdu tout rapport de connaissance avec la réalité pour ne devenir qu'un jeu formel démonstratif. On substitue alors au rapport expérimental une pauvreté philosophique, le rapport d'abstraction : les formes mathématiques seraient empiriquement abstraites de la

réalité, d'où la possibilité de les utiliser comme instrument pour la physique. Mais sans expérience, l'abstraction, elle, ne serait pas mathématique mais anté-mathématique. Conséquence par exemple pour la linguistique : la collaboration du formalisme à faire oublier l'aspect relationnel du langage (alors qu'il n'y a langage que par le rapport pratique de formes symboliques avec une réalité sociale, et non par le seul jeu de règles).

A cette doctrine, comme à celles qui précèdent, nous avons opposé celle des mathématiques comme science expérimentale : nous voulons dire par là que :

1° les mathématiques ne sont telles que par le travail d'un secteur intérieur (arithmétique, géométrie, algèbre, combinatoire ...) sur un autre, dans la réciprocité des fonctions.

2° Cette production de connaissances mathématiques, qui en fait une science, échappe à la gratuité par les rapports d'utilisation ( et non d'application ) que ses concepts entretiennent avec d'autres sciences, qui, elles, sont en relation avec une réalité non symbolique ; ce rapport entraîne toutes sortes de modifications (souvent peu soulignées) dans les concepts, et provoque des appels au travail mathématique.

3° Cette utilisation n'a rien à voir avec un rapport d'origine qui ferait que les concepts mathématiques seraient abstraits de la réalité ; leur origine effective relève d'une histoire tout à fait différente, où l'antérieur n'est pas d'abord la "réalité" d'où abstraire, mais des conceptions à transformer.

Nous avons développé cette doctrine ailleurs, nous reviendrons volontiers aux débats qu'elle engage, mais ici n'en est pas le lieu.

Ⓢ- Si l'on admet que les mathématiques sont bien une science, sans rapport avec de mythiques essences, encore faut-il, pour en faire l'histoire, indiquer en quoi peut bien consister de faire l'histoire d'une science, d'une activité scientifique, par différence avec celle d'une autre activité sociale.

Nous écarterons ici les difficultés d'ordre philosophique posées par la question : on ne peut faire l'histoire d'une réalité que si cette réalité n'échappe pas au devenir historique pour atteindre l'éternité. Or l'éternité du vrai, telle que la suppose l'idéalisme dès Platon, retire à l'histoire l'accès à une partie du domaine scientifique, qui, soit existe en permanence en dehors d'elle, soit émerge définitivement de l'histoire. Cette attitude consiste à séparer le découvreur, réduit à une subjectivité, et le trésor, objet éternel. Nous en verrons les effets dans l'oeuvre de Popper. Il nous suffit ici d'indiquer que la philosophie matérialiste peut éviter ce rejet partiel de l'histoire sans tomber dans le relativisme de la vérité.

Pour la question posée auparavant, on peut former des hypothèses générales, sur les types d'articulation qui lient les activités scientifiques aux autres activités sociales, et des hypothèses particulières sur le cas des mathématiques.

Hypothèses historiques générales sur les rapports de l'activité scientifique avec l'extérieur : autres sciences, techniques, publics, idéologies ... ; mais aussi sur les moyens et formes nécessaires à leur fonctionnement, contraignant pour leur fonctionnement : qu'il s'agisse des moyens matériels et idéologiques déployés à l'appui des "forces productives" scientifiques, et de leur distribution, ou des formes théoriques de leur fonctionnement. Les uns et les autres demandent des études nouvelles fondamentales en histoire des sciences. Nous avons commencé à nous y employer ailleurs, en particulier pour ce que nous avons justement nommé "les formes philosophiques de fonctionnement".

Hypothèses historiques particulières quant aux mathématiques : science originale dans la mesure où les symbolismes y entretiennent un double rapport avec :

1° D'autres symbolismes (rapport expérimental intersectoriel, donc intra-mathématique).

2° Des concepts appartenant à d'autres sciences, qui les mettent en relation avec une réalité naturelle, sociale ... Trois types exemplaires de problèmes nous retiendront ici :

- D'où vient l'apparence d'anticipations que les mathématiques fournissent parfois par rapport aux développements que connaîtront les autres sciences ? Comme si l'abstraction était prête avant l'approche de la réalité à laquelle elle conviendra. Les géométries de Riemann avant leur utilisation par la Relativité. Question qui demande d'évidence une étude historique attentive. Attentive à ne pas gommer le travail d'utilisation, ses effets modificateurs sur les concepts mathématiques, au profit du mythe de l'adéquation. A ne pas oublier l'idéologie au contraire physicienne où s'est produite l'oeuvre de Riemann.

Plusieurs histoires sont à constituer : une histoire des symbolismes mathématiques qui peut montrer dans quelles conditions divers symbolismes empruntés à divers secteurs sociaux ont été pris comme moyens ou au contraire comme objets par les mathématiques (exemple des difficultés de Pascal et de Fermat à dresser des tableaux pour les combinaisons). Une histoire des problématiques, qui peut montrer en fonction de quelles orientations de recherche divers éléments conceptuels ont été introduits, et que c'est la manière de poser les problèmes qui détermine les concepts et non l'espace organisé des théories



(l'insertion du langage infinitésimal dans la physique mathématique de Galilée en est un exemple). Une histoire des utilisations, qui peut montrer comment un concept est transformé par emprunt (excellent exemple fourni par Popper, dans la logique de la découverte scientifique, à propos de l'utilisation en physique des concepts mathématiques probabilistes).

- Pourquoi les mathématiques ont-elles entretenu un rapport privilégié avec la philosophie idéaliste jusqu'à Kant (qui lui-même réfléchit sur une physique a priori plaquée mathématiquement sur la physique newtonienne. Ne pas confondre à ce sujet le formel et l'a priori : la réflexion kantienne porte bien sur l'expérience physique, mais comme a priori) ? Nous nous sommes interrogé ailleurs sur cette liaison et ses raisons. D'autres interrogations sont aussi essentielles aujourd'hui sur les rapports privilégiés entre les mathématiques et la politique de discrimination (plutôt que de sélection) scolaire.

- Enfin les mathématiques ont vu depuis le début du 19ème siècle leur sort lié, plus ou moins autoritairement, avec celui de la logique mathématique. L'impérialisme de cette discipline, qui parle du point de vue mathématique sur la philosophie et du point de vue philosophique sur les mathématiques (et qui prétend coiffer bien d'autres choses encore, comme la linguistique ...) est un problème particulier. Nous nous en sommes soucié dans Matérialisme dialectique et logique par exemple.

## II.- L'EPISTEMOLOGIE

Ⓐ.- La définition même de l'épistémologie a provoqué et provoque des conflits. Plusieurs doctrines sont repérables actuellement. Les unes tirent l'épistémologie vers une théorie de la connaissance, d'autres vers la méthodologie, voire vers la logique, d'autres vers la philosophie des sciences, d'autres vers l'histoire des sciences, ... La liste n'est pas exhaustive. La prise de parti est donc inévitable, d'un point de vue philosophique cette fois-ci, puisque la référence même à une science (l'histoire ou la logique) est en discussion.

L'intérêt des positions soutenues par divers épistémologues français depuis le début du 20ème siècle n'est pas d'avoir exclu telle ou telle doctrine étrangère, mais d'avoir poursuivi le meilleur du travail de la philosophie classique quant aux recherches scientifiques. Ils n'ont pourtant pas eu le moyen de se donner comme philosophes, et leur soumission à différentes philosophies dominantes n'en a été que plus forte. Les oeuvres de Cavailles, de Koyré ou de Bachelard se signalent, à des titres divers, par leur refus d'être inféodées à l'impérialisme logique, leur intérêt pour l'histoire des recherches

plus que pour la méthodologie, leurs interventions, pour Cavallès et Bachelard, dans l'actualité scientifique. Cette mise au premier plan de l'histoire devant la méthodologie n'est toutefois pas allée sans ambiguïté : déjà Cavallès hésitait entre une philosophie dialectique de type hégélien et une ouverture au matérialisme historique ; Bachelard, en associant l'histoire des sciences et l'épistémologie, en rejetant le plus souvent la référence philosophique, a permis un projet ambigu comme celui d'une épistémologie historique, où l'on ne sait plus exactement ce qui est philosophique, ce qui est historique, et ce que c'est que l'épistémologie.

L'originalité de l'épistémologie ne peut sans doute bien apparaître qu'à partir d'une distinction entre les sciences prises comme objets, la science historique et la philosophie dont on se réclame. C'est-à-dire qu'à moins d'être un redoublement philosophique vague des sciences, ou une technique méthodologique que les sciences s'intègrent aujourd'hui, ou une histoire des sciences, qui appartient à l'histoire scientifique, l'épistémologie doit se déclarer comme de la philosophie qui intervient dans les recherches en cours. Intervention en des lieux à préciser. Au nom de finalités à préciser. De sorte que l'épistémologie ne soit plus cette entité mystérieuse, nouveau terme dont ne sait ce qu'il recouvre, mais seulement ce qu'il ne recouvre pas.

A partir des positions du matérialisme marxiste, on décide par exemple le primat des acquisitions de l'histoire scientifique sur l'intervention épistémologique, de même que la politique révolutionnaire requiert, d'une manière bien sûr à préciser, certains enseignements de la théorie du matérialisme historique. Mais l'épistémologie n'est pas plus de l'histoire que la politique n'en est. Les liens de l'histoire et de la politique ne sont pas ceux d'un modèle ni d'un exemple à répéter ou à suivre ; mais ceux de processus non achevés dont la suite présente exige la connaissance des commencements pour être menée rationnellement. De même l'épistémologie doit emprunter ses concepts, jusqu'à celui de science, de telle science, à l'histoire ; et l'histoire seule peut expliquer les récurrences épistémologiques ; mais les récurrences sont philosophiques et leur justification reste philosophique.

L'engagement épistémologique au niveau de l'histoire des sciences se faisant peut intervenir en des lieux très différents : au niveau de l'exposition des théories, des recherches, des utilisations par d'autres sciences, des applications éventuelles, de la diffusion (pédagogique ou non), des exploitations idéologiques ...

Cet engagement doit toujours rester soucieux de la spécificité de chacun de ces termes les uns par rapport aux autres : par exemple, dans le cas des mathématiques, le philosophe, en particulier, a intérêt à bien distinguer la réalité d'une doctrine mathématique comme l'intuitionnisme dans telle ou telle recherche et sa transcription philosophique, par les mathématiciens eux-

mêmes ; à ne pas croire donc avoir rejeté l'une quand il a réfuté l'autre. ce point est essentiel : rien n'indique a priori que l'utilité scientifique de formes de fonctionnement philosophiques corresponde à leur valeur idéologique extérieure. L'épistémologie ne peut juger que sur pièces. Il n'y a pas de méthode épistémologique particulière, mais il y a des jugements épistémologiques.

Mais l'épistémologie appartient d'autant plus au domaine philosophique qu'on a aperçu l'importance des formes philosophiques de fonctionnement dans les recherches scientifiques, et qu'on ne s'est pas seulement soucié de la matérialité et de la distribution des forces de production scientifiques. A titre d'exemple : les querelles pédagogique-politiques actuelles que les "mathématiques modernes" peuvent être éclairées de diverses lumières : psycho-pédagogique, politico-culturelle ... ; mais à partir du moment où des finalités politiques sont définies pour un enseignement, où l'accès aux recherches spécialisées n'exclut pas la culture mathématique sans finalité de recherches, où l'on distingue les nécessités d'une formation culturelle de celles d'une formation pour un chercheur, alors c'est le fonctionnement des recherches souhaitées ou de la culture souhaitée qui doit précéder la pédagogie. Car celle-ci, au cas surtout où elle s'alimente auprès d'une psychologie incertaine et conflictuelle, peut-elle éviter de renforcer la "nature" supposée de l'élève aux dépens des transformations de nature que suppose tout enseignement ? Comme disait Robert Escarpit à propos du dossier scolaire, si l'on enseigne à des muets, c'est pour les faire parler.

Mais il demeure clair que les positions épistémologiques sont partiales, car elles ne dépendent pas seulement d'une science, l'histoire, mais d'une philosophie, c'est-à-dire d'une partialité. Et encore faut-il ajouter, grâce à Marx, que l'histoire est une science particulière, différente des autres : elle ne peut être menée scientifiquement qu'à partir de la justesse de positions politiques, même si elle peut éclairer ensuite l'action politique.

ⓑ - La conception qu'on a de l'histoire comme science est donc essentielle pour la pratique qu'on a de l'épistémologie. Mais cela n'exclut pas le rapport inverse : cette pratique oriente en retour le travail de l'historien. Elle indique par exemple pourquoi les recherches mathématiques peuvent mettre obstacle à la formation historique du concept de science mathématique expérimentale.

Bien plus l'épistémologie est la source de l'histoire comme la politique révolutionnaire est celle du matérialisme historique. Ce que l'historien marxiste Pierre Vilar montre dans la Préface à La Catalogne dans l'Espagne moderne : c'est à partir des problèmes d'une politique actuelle que les fils historiques antérieurs doivent être rétrospectivement dégagés. L'histoire est rétrospective et non récurrente. La distinction intéressante est entre histoire morte (achevée) et histoire vivante (inachevée) et non entre histoire invalidée et histoire sanctionnée. Seule la politique ou l'épistémologie peuvent invalider ou sanctionner.

Ce type de lien entre conception de l'histoire et pratique épistémologique est illustré par les difficultés qu'offre l'oeuvre de Popper pour un partisan du matérialisme historique (cf. Matérialisme historique ou matérialisme biologique ? , de Pierre Raymond, article à paraître dans un ouvrage collectif sur Popper et le néopositivisme, éd. Maspero). Popper estime que l'épistémologie ne peut être qu'une logique des produits de la connaissance, car la production elle-même, historique, ne serait qu'affaire de subjectivité, donc de psychologie, celle du producteur. Or toute la tradition du matérialisme historique s'insurge contre cette distinction entre produit et producteur : dans l'Introduction à la Contribution à la critique de l'économie-politique, Marx montre clairement que le produit comme le producteur sont dans tous les cas des effets du processus de production ; et l'étude des modes de production est historique et non psychologique ni subjectiviste. De même l'épistémologie n'est pas contrainte à la méthodologie ou à la logique pour éviter la biographie des savants.

A distance des problèmes d'une histoire des sciences et d'une épistémologie, le matérialisme historique donne quelques indications pour tant à leur propos. Pourquoi par exemple s'agit-il de philosophie au carrefour de l'histoire et de la politique (de l'histoire des sciences et de l'épistémologie ? )

Parce que l'histoire ne détermine pas la politique (la recherche) présente, mais en permet une prévision probabilitaire, mais seule la politique se détermine. Il y a là toute la différence entre déterminisme scientifique et détermination idéologique. Et c'est dans cet écart que se situe par définition la philosophie.

Parce que la philosophie joue souvent le rôle de laboratoire des conceptions scientifiques (comme l'indique déjà Engels dans la Dialectique de la nature, "science de la nature et philosophie"), d'une manière plus ou moins implicite selon la correspondance entre formes de fonctionnement et recherches, ajouterons-nous. Après coup, malheureusement, on voit mieux en quoi les recherches de Hilbert par exemple quant à la théorie de la démonstration, les interprétations pessimistes du théorème de Gödel, l'impérialisme de la logique mathématique et son apparent technicisme anti-philosophique, sont affaire de philosophie.

Et comment appeler, sinon philosophie, le fonctionnement métaphysique, issu de Leibniz, d'une partie des recherches infinitésimales jusqu'à Euler ? L'avantage serait grand aussi de voir que la sensibilité de Newton à l'histoire inachevée du même calcul n'était pas le fait d'un pragmatisme empiriste de savant, mais d'un philosophe matérialiste (cf. Philosophie et calcul de l'infini).

MATHEMATIQUES ARABES  
ET INDIENNES  
DANS LE SECOND DEGRE

Maurice CAUSSE (IREM de POITIERS).

---

7		
8	0	
8	0	
3	0	
2	0	
4	0	
-----		
2	0	
6	0	
4	0	



MATHEMATIQUES ARABES ET INDIENNES DANS LE SECOND DEGRE

REFLEXIONS D'UN PROFESSEUR

M. CAUSSE

I.- Pour une Histoire des Mathématiques, il existe d'excellents ouvrages que nous ne chercherons pas à remplacer :

- 1) - Histoire générale des sciences ; R. TATON ; P.U.F. 1966  
La Science Arabe, ARNALDES, MASSIGNON, YOUSCHKEVITCH, t. I.441-525  
Bibliographie à la fin de l'article.
- 2) - Journal Asiatique, voir notamment, 1853, De L'algèbre chez les Arabes (SEDILLOT)  
1854, Les Notations Algébriques  
d'Al Qalaçadi et l'Algèbre d'Omar Khayyam (WOEPKE)  
1878 : l'Algèbre d'Al Kharismi et les méthodes indiennes et grecques. (RODET)
- 3) - History of Mathematics, E. SMITH (Dover, 1967)
- 4) - Les Mathématiques Arabes, Youschkevitch, Vrin 1976. Ce livre, appuyé notamment sur des textes retrouvés en Asie Centrale et publiés récemment en Union Soviétique, renouvelle sur plusieurs points l'état de la question.
- 5) - Dictionnaire Archéologique des techniques.
- 6) - ITHACA, Actes du X<sup>e</sup> Congrès d'Histoire des sciences, articles de  
E.S. Kennedy, Ramifications of the world year concept in Islamic Astrology, t.I, pp 23-46, et S.SEN, Study of Indeterminate Analysis in ancient India, t.I, p 493-499.
- 7) - Histoire des Sciences de St Augustin à Galilée, A.C. CROMBIE (P.U.F. 1959)
- 8) - Les Penseurs de l'Islam, CARRA DE VAUX, Paris 1926.
- 9) - Encyclopaedia of Religion and Ethies, Edinbourgds 1921, articles Atheism, Atomic Theory, (Indian et Muhammadan), Rosaries
- 10) - Revue ISIS
- 11) - Aldo Mieli, La Science Arabe.

L'intérêt des Mathématiques anciennes, pour l'enseignement, vient de ce que leur contenu correspond encore largement à celui des programmes secondaires, même si le fait a cessé d'être exact pour la géométrie. Ainsi nos techniques trop bien rodées ont-elles un jour mobilisé les grands esprits de l'humanité.

Comment ?

A l'élève entraîné à ne JAMAIS diviser par 0, dédions la poétique découverte du mathématicien indien Bhasbârâ (XII<sup>e</sup> siècle) : "exemple : dividende: 3, diviseur : 0, résultat : 3/0 . Cette quantité qui est infinie s'appelle "quotient par 0" ; elle n'éprouve pas de changement. Ni addition, ni soustraction, ne peut lui faire éprouver perte ou accroissement, pas plus qu'au "temps sans fin et sans déclin des séries d'existences." (Rodet, 2). On peut

en effet, en admettant qu'on suppose un sens arithmétique à l'opération, vérifier la propriété :  $x = a/0 = a/0 + b$ . Il n'est pas indifférent, de rattacher l'intuition de l'infini à l'idée de la transmigration des âmes chez les Hindous. Plus généralement, les idées mathématiques naissent dans un certain contexte philosophique, et le portrait que nous nous faisons de ce contexte philosophique est sérieusement altéré, si nous ignorons ce que la mathématique lui doit, ou lui a apporté.

II.- Tenants et aboutissants de l'équation du 2° degré.

A)  $x^2 + x = 3/4$ . Cette équation représente le premier problème de la tablette du British Museum n° 13.901, dont la rédaction remonte à la première moitié du second millénaire avant J.C. , traduite par F. Thureau-Dangin, textes Mathématiques Babyloniens : (réf. 5; article CALCUL)  
 "J'ai additionné la surface ( $x^2$ ) et le côté de mon carré ( $x$ ) :  $3/4$ .  
 "Tu poseras 1, l'unité ; tu fractionneras en deux, et tu croiseras ( $1/4$ ).  
 "Tu ajouteras à  $3/4 : 1$  ; c'est le carré de 1. Tu soustrairas  $1/2$ , que  
 "tu as croisé de  $1 : 1/2$  ; c'est le côté du carré".

Avec les notations actuelles, nous écririons, pour  $x^2 + b.x = c$  :

$$x = \sqrt{b^2/4 + c} - b$$

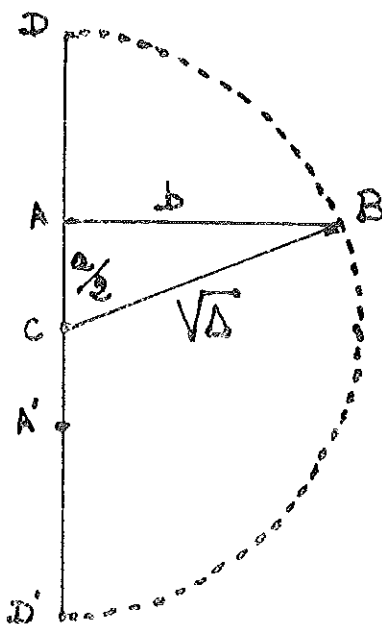
Dans d'autres textes, on soustrait les  $x$  des  $x^2$ .

B) Quel a été l'apport des Grecs ?

Essentiellement, de fournir une interprétation géométrique de la solution. En effet, l'objet mathématique ne reçoit l'existence "réelle" que si on peut le construire par la règle et le compas.

La construction d'Euclide revient à celle de  $\sqrt{\Delta}$  par le théorème de pythagore (T. Haath, A Manual of Greek mathematics, Dover, 1931, 1963, p. 103).

ex :  $x^2 = ax = b^2$  ;  $(x + a/2)^2 = b^2 + a^2/4$



$$AA' = a \quad ; \quad AC = \frac{a}{2} \quad ; \quad BC = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$$

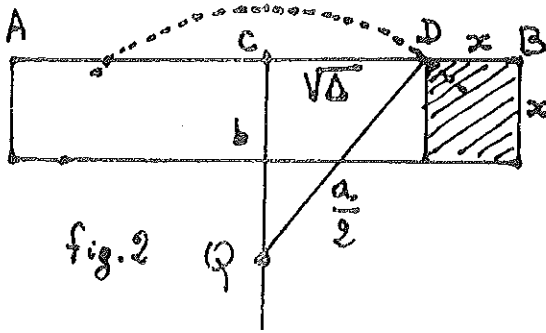
$AD = x$  ;  $AD'$  est la solution de l'équation  $x^2 - ax = b^2$

Il est clair que la solution elle-même du problème posé reste essentiellement algébrique ; la géométrie n'apporte pas une analyse de la solution, mais une construction du résultat. Il n'est pas envisagé de solution négative.

fig. 1



2° exemple :  $x^2 = b^2 = ax$



$AB = a ; CQ = b ; CB = QD = a/2$

$CD = \sqrt{a^2/4 - b^2} ; BD = x$

Le phénomène est ici plus net encore : si la construction géométrique jouait un rôle dans l'analyse du problème, on aurait vu qu'elle fournit deux solutions.

C) Les constructions d'Al Khowarizmi (780-850)

$x^2 + a.x = b^2$       ex :  $x^2 + 10.x = 39$

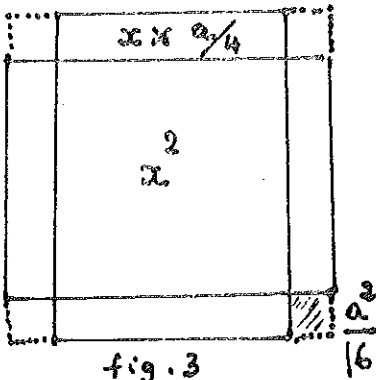


fig. 3

est 3.

A la surface carrée  $x^2$ , on accole sur chaque côté un rectangle de côté  $10/4$  ; il est clair qu'on obtient un carré incomplet, de côté  $(x + 10/2)$ , et qu'on le complètera en rajoutant quatre petits carrés de côté  $10/4$ .

La surface complète est donc :

$39 + 4.(25/4) = 64$

Le carré complet a donc pour côté 8, et on a  $x = 3$ . ET LA SURFACE INCONNUE est 9. sa racine

Ici, l'analyse géométrique a valeur de démonstration.

$x^2 = b^2 = a.x$       ex :  $x^2 + 21 = 10.x$

Si on enlève le carré  $x^2$  au rectangle de côtés  $x$  et  $10$ , la surface restante vaut  $21$ . Considérons le carré de côté  $5$  construit sur  $AC$ , et le carré de côté  $5 - x$  construit sur  $EF$ , soit  $EFKH$  ; les rectangles  $CDD'E$  et  $A'KHG$  sont égaux ; la surface  $AA'GHKEC$  est donc  $21$ , et celle du carré  $EFHK$  est  $25 - 21 = 4$ .

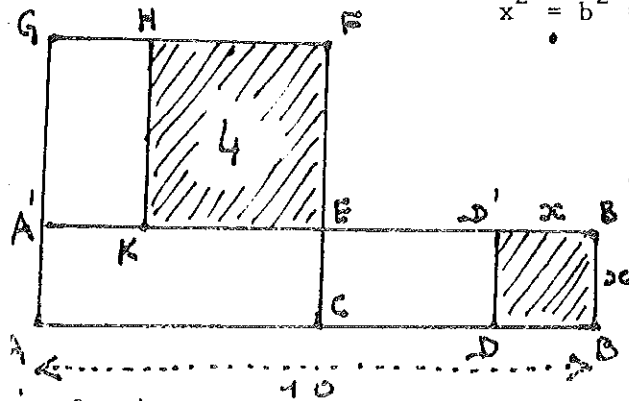


fig. 4

Il en résulte que le côté de ce carré est 2, donc  $x = 3$ .

Commentaire d'Al Khowarizmi : Voici la solution (de ce cas) :

"Tu divises en deux les racines (les  $x$ ) ; ce qui donne 5 ; multiplie -le  
 "par lui-même ; ce qui donne 25 ; retranche de là les 21 qu'on a mentionnés  
 "avec le carré ; il reste 4 ; prends la racine, qui est 2 ; et retranche de  
 "la moitié des  $x$  ; il reste 3 : c'est la racine du carré que tu désires, et  
 "le carré est 9. Si c'est ta volonté, ajoute cette racine (2) à la moitié des  
 "racines (5) ; cela donne 7 ; c'est la racine du carré que tu désires, et le  
 "carré est 49. S'il se présente à toi un problème qui te ramène à cette solu-

"tion, examine alors sa justesse par l'addition ; et si tu ne le peux pas avec celle-là, alors, par la soustraction, certainement, (tu l'obtiendras)."

L'auteur reconnaît ensuite le cas d'impossibilité et la racine double.

D) Lorsque nous comparons ce résultat avec ceux des Grecs, on observe d'abord la véritable analyse géométrique à l'aide des surfaces ; de là nous vient encore que nous désignons par le terme de "racine" non seulement le côté d'un carré de surface donnée, mais la solution d'une équation du second degré : l'expression complète est : la racine du carré inconnu.

C'est également la première fois qu'est prise en considération la possibilité d'une seconde racine, et il faut souligner ici un illogisme de la démarche scientifique : Alors que la construction grecque par le théorème de Pythagore donnait simplement les deux racines possibles, c'est le mathématicien arabe qui énonce cette possibilité, alors que sa démarche géométrique n'y conduit pas. On pourrait penser à la thèse des "Somnambules" d'A. Koestler, si celui-ci n'y exprimait pas un grand dédain pour la science arabe.

E) Les Indiens, Bhaskârâ, XII<sup>e</sup> siècle. (Lilavati)

La démarche reste purement algébrique. Pour la première fois apparaissent les deux solutions positives simultanées d'une équation :

Des singes s'amusaient : de la troupe bruyante,  
Un huitième au carré gambadait dans le bois.  
Douze criaient tous à la fois  
En haut de la colline verdoyante.  
Combien étaient-ils au total ?

$(x/8)^2 + 12 = x$  ; solutions : 48 et 16.

L. Rodet (ref. 2) donne un autre exemple de problème :

D'un essaim de mouches à miel  
Prends le carré, puis la racine.  
Dans un champ de jasmins cette troupe butine.  
Huit Neuvièmes du tout voltigent dans le ciel ;  
Une abeille solitaire  
Entend dans un lotus son mâle bourdonner ;  
Attiré par l'odeur, il s'était fait emprisonner.  
De combien est l'essaim, le saurais-tu, ma chère ?

Bhaskârâ prend ici l'inconnue auxiliaire telle que  $N = 2 \cdot x^2$  : d'où l'équation :  $2 \cdot x^2 = (8/9) \cdot 2x^2 + x + 2$ .

Lilavati, c'est la chère disciple, qu'un amour purement intellectuel attache à son vénéré maître.

Ni les Arabes, ni, contrairement à ce qu'on trouve écrit parfois,

les Indiens n'ont jamais à notre connaissance envisagé les solutions négatives de l'équation du second degré. L'apport nouveau d'Al Khowarizmi pourrait bien se rattacher au problème du déterminisme. Quand le calcul algébrique fournit deux solutions, la justesse de l'une est affaire de bon sens. Peut-être est-il imprudent de s'engager dans la spéculation philosophique. On ne connaît pas encore tous les documents, et il est certainement bizarre de penser qu'Omar Khayyam aura découvert que l'équation du troisième degré peut avoir deux solutions positives (XI<sup>e</sup> siècle) avant que le même phénomène ait été franchement reconnu et admis pour le second degré. Mais Al-Khayyam, même si l'on a édifié une mosquée près de son tombeau, est un athée :

"O toi qui dépends des 4 éléments et des 7 cieux, écrit-il,  
"Tu es bien embarrassé sous l'influence de ces 4 et de ces 7,  
"Bois du vin car, je te l'ai déjà dit mille fois,  
"tu n'as pas de retour à espérer ; une fois parti, on est bien  
parti"

(Mieli ; II, p. 112 d'après P. Salet, Omar  
Khayyam, savant et philosophe, 1927)

Autrement dit, je serais tenté de penser que c'est malgré le déterminisme religieux, accordé pour la science à celui des Grecs, que Omar Khayyam a donné certains de ses résultats importants. Quant à Al-Khowarizmi, il précise que ses préoccupations sont d'ordre pratique, partages d'héritages notamment ; ce pourquoi l'inconnue est la surface, le "bien" qui sera traduit en latin par "census". Or, dans l'Islam, les héritages sont fixés non par la volonté d'un testateur, mais par la loi divine : il ne peut y avoir qu'une seule solution.

Quoi qu'il en soit de ces considérations, les Indiens ont fourni une bonne collection de problèmes à plusieurs solutions, ou une infinité, n'étant peut-être pas retenus par les mêmes scrupules.

### III.- De l'indéterminisme dans les équations.

(voir S. SEN et E.S. Kennedy, ref. 6 ; GR. Kaye, ISIS,II, p.352; D. Smith, ISIS VI, p 319)

Les Indiens ont consciemment pris en considération des équations indéterminées. Les premiers exemples donnés par S. Sen, avec des problèmes de pavages indéterminés pour des constructions d'autels, ont surtout un intérêt documentaire parce qu'il n'apparaît pas de méthode générale. Mais, dès le V<sup>e</sup> siècle de notre ère, Aryabhata a étudié des équations en nombres entiers de la forme  $ax - by = c$ . En effet cette équation est liée, comme l'idée de



multiplication, avec le problème des courriers :

"Divisant, en marche opposée, la distance par la somme des vitesses ;  
"en marche concordante, la distance par leur différence, les deux quotients  
"sont les temps de rencontre des deux (mobiles) au passé et au futur"  
Ceci répond à la formule  $x/v = d/(v + v')$  et revient à dire qu' Aryabhata  
savait déjà tenir compte du double signe  $\pm$  et  $-$  au dénominateur.

(Ref 5 ; J. Auboyer, art. Calcul)

Remarquons que l'image cinématique, comme modèle intuitif de la  
multiplication (-). (-), est restée la seule jusqu'à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle,  
où arrivèrent enfin les lois de Coulomb en électricité et en magnétisme.  
C'est ce qui explique la formulation étonnante de D'Alembert, dans la célèbre  
Encyclopédie, antérieure aux lois de Coulomb : "Les règles des opérations  
"algébriques sur les quantités négatives sont admises généralement par tout  
"le monde, et reçues généralement comme exactes, quelque idée qu'on attache  
"d'ailleurs à ces quantités".(art. Négatif).

Or ces règles, y compris tous les cas de la multiplication, numérique  
et littérale - jusqu'au second degré -, se trouvent dans l'Algèbre d'Al-  
Khowarizmi.

On y lit en effet, entre autres règles :

wahad al-naqus fi wahad al-naqus wahad za'id :  $(-1) \cdot (-1) = + 1$

Ila shai'an fi ila shai'an mâla za'id :  $(-x) \cdot (-x) = + x^2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{الواحد الناقص في الواحد الناقص واحد زائد} \\ (-1) \cdot (-1) = (+1) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{إلا شيئاً في إلا شيئاً مال زائد} \\ (-x) \cdot (-x) = (+x^2) \end{array}}$$

Le pas qui n'est pas franchi, c'est de considérer l'être négatif en soi,  
comme chose représentable, intervenant comme facteur ou produit d'une  
multiplication. C'est beaucoup demander. Au-delà des calculs relatifs au  
mouvement uniforme, il fallait d'autres progrès. Tabit Ibn Qurra au X<sup>e</sup> siècle  
et Al-Biruni au XI<sup>e</sup> siècle ont préparé le cadre nécessaire, avec l'étude  
de la vitesse dans un mouvement non uniforme, du maximum ou minimum d'une  
grandeur variable.

B.- Le cadre nécessaire existait par contre en Inde, pour le compte,  
l'addition et la soustraction, donc les négatifs, dans les problèmes à plu-  
sieurs inconnues du premier degré. Le chapelet semble être une invention  
indienne (9,art. Rosaries). Il en existait de différentes couleurs, suivant

les dieux concernés, pour le compte des prières, ou des malédictions. Ces mêmes couleurs se retrouvent dans les problèmes à plusieurs inconnues, comme on le voit dans l'exemple suivant (3,t.II,p.434) :

5 rouges + 8 noirs + 6 bleus + 90 roupies = 7 rouges + 9 noirs + 6 bleus + 62roupies.

D'où : 2 rouges = (-1) noir + 1 bleu + 28 roupies.

Pour le second degré, une lettre initiale permettait de désigner le "rouge carré", etc.

Ce symbolisme n'a pas laissé de traces dans le calcul arabe, bien que ceux-ci aient emprunté aux Hindous l'usage du chapelet, 99 grains pour le compte des attributs de Dieu - sauf, peut-être, les deux noms donnés aux nombres purs dans une expression du second degré. On les désigne en effet par "dirhems" (grec : drachmes), équivalant aux "roupies" de l'Inde, et aussi par "uqud", du mot qui désigne le collier.

En ce qui concerne la désignation de l'inconnue, notre x, qui se prononce en espagnol "sh", est l'équivalent de cette lettre en arabe, désignant la "chose" dans cette langue. On connaît le "chouia", la petite chose. une deuxième inconnue auxiliaire, désignée "qasm", a permis à Omar Khayyam de traiter certains problèmes de géométrie plane conduisant à l'équation du second ou du 3° degré, en utilisant la théorie des proportions. Il ne semble pas qu'on soit allé au-delà.

#### V.- La transformation des équations. (Al Khowarizmi)

(Rodet ; 2.1878 ; Youschkevitch, 4, p. 36)

Les équations à solutions positives se ramènent à six cas :  $a.x^2 = b.x$  ;  $a.x^2 = c$  ;  $a.x = c$  ;  $a.x^2 + b.x = c$  ;  $a.x^2 + c = b.x$  ;  $a.x^2 = b.x + c$ . Toutes les quantités figurant dans ces équations étant positives.

Soit alors l'équation suivante :

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

On applique d'abord les règles de transformation des polynômes indiquées au paragraphe précédent : multiplications :

$$x^2 + (100 + x^2 - 20.x)$$

puis, finalement :  $2.x^2 + 100 - 20 x = 58$

On procède alors aux trois opérations :

Al - Jabr :  $2 x^2 + 100 = 58 + 20 x$  ; On ajoute aux deux membres les "manquants", c'est à dire les quantités retranchées.

Al - radd :  $x^2 + 50 = 29 + 10 x$  ; c'est la simplification, appelée aussi Al-hatt.

Al -muqabala :  $x^2 + 21 = 10x$  : c'est la réduction des termes semblables. En fait, dans les exercices pratiques, Al-Khowarizmi se contente de parler de muqabala : qâbel bînh<sup>(\*)</sup>ma ... et le reste suit. Nous n'agissons pas différemment, et ces trois opérations sont bien comprises comme le développement d'un même mécanisme. Dans la pratique, leur ensemble sera désigné par "l'Algèbre et la Muqabala", et finira par prendre, dans la progression de la mathématique, sa place entière aux côtés de l'Arithmétique, une place qu'elle va conserver à peu près, dans nos conceptions scolaires, jusqu'aux réformes de 1968.

#### B.- La place dans l'idée du savoir.

L'idée de fond, qui vient des Grecs et cherche son accord avec la religion, est qu'il y a une UNITE du savoir, un savoir sans contradictions, et qu'il est possible, par conséquent, d'en fournir une représentation cohérente, comme cadre naturel d'un enseignement.

Aristote le répartissait en quatre grandes branches (le quadrivium) : Logique, Sciences Théorétiques, Sciences pratiques (morale et politique), Sciences poétiques. La Mathématique est une section de la seconde branche, et se répartit en Arithmétique et géométrie. Il y aura des variations sur la place de telle ou telle discipline particulière dans ce tableau, notamment des sciences religieuses ; finalement, il prévaudra dans l'orthodoxie de l'Islam le sentiment que cette place mesurée à la religion dans le savoir est incompatible avec la vraie piété. Mais l'ensemble de l'héritage scientifique arabe s'insère dans une vision de ce tableau.

Pour Al-Farabi, fin du IX<sup>e</sup> siècle, les Mathématiques comportent : Arithmétique, Géométrie, Optique, Astronomie, Musique, Science des poids, Mécanique.

- Les Frères de la Pureté, X<sup>e</sup> siècle : Arithmétique, Géométrie, Astronomie, Musique.

- Al-Khowarizmi II (fin X<sup>e</sup> siècle) : Même tableau + Mécanique.

- Avicenne (début XI<sup>e</sup> siècle) : Arithmétique, géométrie, astronomie, musique, + une dizaine de sciences dérivées.

- Al-Chazali, XI<sup>e</sup> siècle : Arithmétique, géométrie, astronomie, musique.

Ce tableau, d'une constance remarquable, donne sa mesure au progrès accompli au XIV<sup>e</sup> siècle par Ibn Khaldoun :

Il y a deux grandes branches des Mathématiques :

a) Les sciences du nombre :-Arithmétique

-Science du calcul

-Algèbre et Muqabala

(\*) "Fais la muqabala entre les deux membres".

-Les transections commerciales

-Les partages des successions

b) Les sciences géométriques

-géométrie sphérique et conique

-arpentage

-optique

c) Astronomie

d) Musique

(Tout le tableau qui précède, d'après L. GARDET, Introduction à la Théologie Musulmane, VRIN, 1948) pp 102-124. Le plan d'Ibn Khaldoun suit exactement les préoccupations d'Al-Khowarizmi. C'est la pratique qui oriente la réflexion scientifique, AU CONTRAIRE D'ARISTOTE, pour qui elle est "théorétique" ; et il n'est pas improbable que ce point de vue ait permis de l'accréditer. "C'est Dieu qui a envoyé Mohammed, écrit Al-Khowarizmi au début de l'Algèbre, en un temps où il n'y avait pas de prophétie, où l'on reniait la vérité, et il a ouvert par lui les yeux des aveugles, sauva par lui ceux qui étaient perdus, élevé les petits, rassemblé les dispersés... Il y a toujours eu des savants, dans les temps et les peuples du passé, qui ont écrit des livres sur les sciences et les raisonnements de la philosophie, à l'intention des générations futures ... Lorsqu'un homme a trouvé le premier ce que personne n'avait découvert avant lui, ceux qui viennent après en héritent ; quand un homme commente ce qu'ont laissé les premiers et qui était obscur, il en rend le chemin aisé, et la compréhension facile. Et lorsqu'un homme a trouvé dans une partie du livre une erreur et ne le rejette pas, mais qu'il redresse et perfectionne la pensée de son ami, c'est une oeuvre utile, et il n'y a aucune vantardise de sa part..." Il a donc fait un livre abrégé et concis, pour les partages d'héritages, pour les canaux à creuser ...

Cependant qu'Omar Khayyam, hérétique et athée fieffé qui avait plus que d'autres son franc parler, considérait bel et bien, vers l'an mille, l'algèbre comme une spécialité : Il y avait, pour lui, des "algébristes" (Youschkevitch, p. 36 ; voir aussi, p.10-11, le récit de ses ennuis.

N'oublions pas que, pour l'Islam, la chose nouvelle, c'est très précisément l'hérésie. S'ils n'ont pas toujours évité par là les ennuis avec l'autorité, les savants de l'Islam ont assez bien réussi, dans l'ensemble à persuader l'histoire occidentale qu'ils n'avaient rien inventé de neuf.



C.- Signification du mot "Algèbre".

Cette question présente un intérêt pour l'enseignement, car si la thèse de Salomon Gandz est exacte, à savoir que le mot dériverait d'un terme assyre-babylonien en exprimant l'équilibre, l'égalité, on pourrait bien penser que l'idée sous-jacente à toute la théorie est une réflexion sur l'usage de la balance. En effet, le sens général de la racine jbr, dans les langues sémitiques, est celle de force.

D'autre part, chez Bhaskârâ, en Inde au XII<sup>o</sup> siècle, l'idée de l'égalité, tulya, dérive clairement de celle de balance, tula (Rodet, réf.2); or la balance à deux plateaux, en Inde, n'apparaît pas avant le VI<sup>o</sup> siècle, autrement dit, à peu de chose près, l'époque des premiers grands mathématiciens Indiens. La balance ancienne était semblable à la balance romaine. Par contre on trouve la balance actuelle à 2 plateaux sur l'obélisque d'Assurbanipal (7<sup>o</sup> siècle avant J-C) en Assyrie. ( 5, art : balance).

Reprenons maintenant les expressions de Bhaskârâ, d'après L. Rodet : " Appelant x la mesure de la quantité inconnue, on fera à l'aide de ce symbole ce qui est prescrit par l'énoncé ; puis on préparera adroitement deux membres en équilibre (tulya), en ajoutant, retranchant, multipliant ou divisant".

Il ne semble pas illégitime de conclure, de ces éléments divers, que la transformation des équations a procédé d'une réflexion sur l'usage de la balance à deux plateaux. Pour l'enseignement, il nous semblerait hautement pédagogique de fonder les différentes axiomatiques sur les usages d'instruments simples. Sans vouloir mêler tous les problèmes, cette méthode simplifierait la définition de la géométrie affine en 4<sup>o</sup> : l'usage précisément délimité d'un jeu de règles graduées astreintes au seul glissement sur elles-mêmes.

VI.- La symbolique algébrique.

C'est une invention des Arabes d'Occident. D'après un texte d'Ibn Khaldoun, XIV<sup>o</sup> s, elle pourrait remonter au mathématicien marocain Al-Banna. Malheureusement le traité d' Al-Banna auquel se réfère Ibn Khaldoun est perdu, Il est question de raisonnement "abstrait", sur les "lettres" (huruf); mais on peut hésiter sur le sens à donner à ces expressions. Youschkevitch (4,p.104) juge raisonnable d'y voir le signe d'un rôle précurseur.

En tout cas le mathématicien espagnol de Grenade Al-Qalaçadi (XV<sup>o</sup> s.) est arrivé à une expression très proche, pour le calcul algébrique, de notre intuition scolaire classique. (Wepke, ref. 2).

A.- Calcul des radicaux :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 & - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ الا } \frac{\sqrt{5}}{4} \\
 & - \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{3}{5}} \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 & \frac{\sqrt{6}}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left| \frac{\sqrt{6}}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \frac{\sqrt{6}}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & \sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = \sqrt{72}
 \end{aligned}$$

B.- Ecriture des polynômes et transformation des équations :

1)  $\frac{x^2}{6} - 5 \frac{x^2}{3}$

$\frac{x^2}{6} - 5 \frac{x^2}{3}$  : lire  $3x^2 + 5 - 6x$

2)  $\frac{x^2}{1} - 32 = 36 - 3 \frac{x^2}{3}$

$\frac{x^2}{1} - 32 = 36 - 3 \frac{x^2}{3}$  : lire  $3x^2 - 36 = 32x - x^2$

Transformation :

$\frac{x^2}{36} + 32 = 4 \frac{x^2}{4}$

$36 + 32 = 4$  lire  $4x^2 = 32x + 36$

C.- Ecriture d'une proportion :

$\frac{x}{84} = \frac{7}{12} = \frac{84}{x}$  lire :  $\frac{7}{12} = \frac{84}{x}$

Les trois séries d'exemples nous permettent de faire le point.

On peut dire qu'un commencement de structure algébrique, associé à l'emploi des radicaux et du signe d'égalité, apparaît à l'évidence. Il est même vraisemblable que notre symbole "radical" n'est autre, un peu déplacé, que l'initiale  $\sqrt{\phantom{x}}$  du mot arabe désignant la racine. Mais ce symbole n'a

visiblement pas encore un sens univoque. Nous avons vu, (VI,C) que le mot "racine" avait deux sens différents ; et nous avons expliqué comment il les avait pris et conservés dans notre langage actuel. Ces deux sens apparaissent dans les exemples A d'une part, C d'autre part. On voit enfin, en comparant B,2) et C, que le signe  $\neq$  peut avoir plusieurs sens.

Il n'y a pas encore à proprement parler de signe opératoire. Le symbole d'égalité, dans la transformation des équations, nous paraît finalement le plus élaboré.

Rappelons que notre signe d'égalité remonte au XVI<sup>e</sup> s. et s'appuie sur l'intuition des droites parallèles, choses on ne peut plus égales.

Cette discussion sur une symbolique en voie de formation nous paraît intéressante dans l'enseignement, non pas tellement pour faire l'histoire du calcul algébrique, mais pour comprendre la nature et la portée de telle autre symbolique en voie de formation, par exemple l'usage des quantificateurs. Le langage abrégé, sténographique, rend parfaitement compte du caractère "muet" des variables mises en relation. Puis apparaissent des règles d'emploi :

par exemple : si  $a - b = c$ , alors  $a = c + b$ , ce qui est l'opération précisément désignée par "Algèbre".

De même, les règles de transformation d'une proposition où figurent des quantificateurs, lorsqu'on en effectue la négation, donnent à ces symboles leur structure, et peuvent légitimer leur emploi systématique.

Il est évident que toutes nos remarques perdent leur objet, si on a donné de la soustraction une définition axiomatique a priori ...

#### VII.- Le Calcul Indien et Al-Khowarizmi.

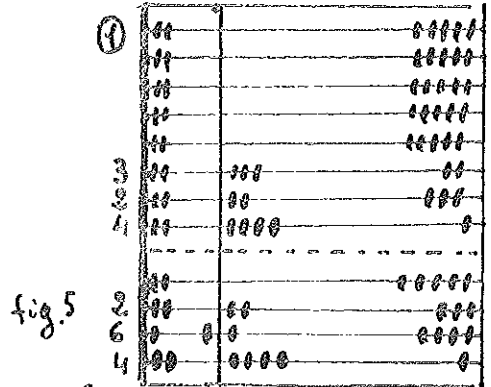
Nous n'insisterons pas sur les divers algorithmes de calcul possibles, et pratiqués à la suite des Arabes vers le XV<sup>e</sup> siècle. Mais il nous paraît intéressant de penser, et de dire, que la pratique du "Calcul indien", comme Al-Khowarizmi l'appelle, doit provenir d'une réflexion sur le boulier chinois, ou abaque. Comme le remarque D.E. Smith à propos de l'Arithmétique publiée à Trévise en 1477, elle est appelée "L'arte del abaccho" bien que l'usage de l'abaque ait été abandonné en Italie depuis longtemps au XV<sup>e</sup> siècle (10, t.VI,p.313).

Il est d'abord clair que la technique d'Al-Khowarizmi pour la multiplication s'adapte au boulier ; nous la suivons d'après le texte et l'exemple donnés par Karpinski (10, t. III,p. 401) :  $324 \times 264$  .

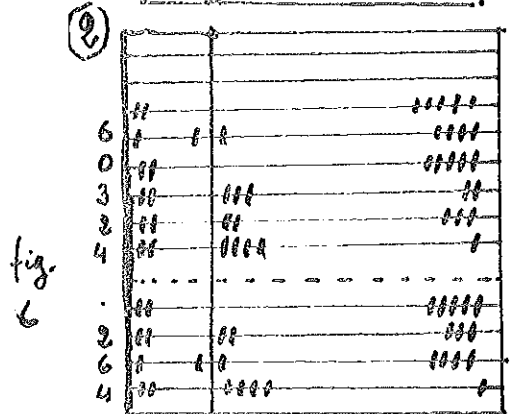
Soit 324 le multiplicande, et 264 le multiplicateur ; on multiplie d'abord 3 le nombre de centaines, par 264. A la dernière des multiplications partielles,  $3 \times 4$ , le 3 disparaît, et il est remplacé par le 2 de 12, la dizaine passant en retenue.

Cela fait, on passera à la multiplication des 2 dizaines de 324 par 264. Sur le papier, cela se traduira par le déplacement de 264 vers la droite, le 4 de 264 étant placé sous le multiplicande partiel 2.

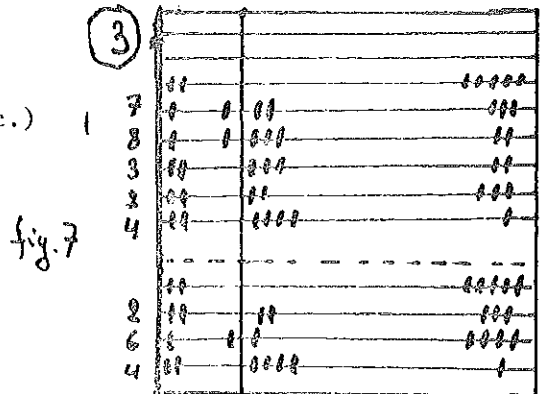
- 1) Si vis multiplicare unum numerum per alium, pone numerum qui vis multiplicare per suas differentias et numerum per quem volueris multiplicare per suas. Ita quod prima illius per quem multiplicare volueris sit sub ultima illius quem multiplicare volueris.



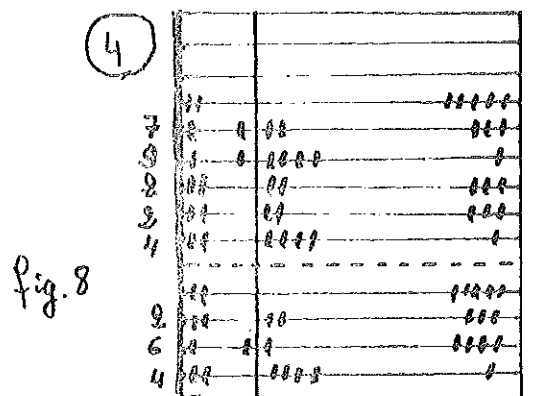
- 2) Deinde multiplica ultimam per ultimam et quod ex multiplicatione illa excreverit si infra decem fuerit scribe in loco illius per quem multiplicas. Si vero in decem excreverit scribe super eam figuram nichili et de decem fac unum in antea. Si autem ultra decem fuerit scribe ibi et de decem fac unum in antea. Si vero in duo decena vel in plura excreverit (etc.)



- 3) Deinde multiplica eandem per penultimam et quod ex multiplicatione illa excreverit si infra decem fuerit scribe super penultimam illius per quem multiplicas. Si vero in X vel ultra fac sicut de ultima ...



- 4) ... et ita multiplica illam ultimam per omnis



usque ad primam. Quando autem multiplicas ultimam per primam dele ultimam (...)

4bis) Deinde protrahe figuras illius per quem multiplicas ita quod prima illius sit sub penultima eius quem multiplicas (...)

5) ... et multiplicata illam penultimam quilibet qui per omnis figuras illius per quem aliquem multiplicas sicut predictum est usque ad primam

6) ...

7) ... et iterum dele illam penultimam (...)

8) 9) 10) ... et sic multiplica omnis figuras illius quod multiplicas per omnis illius per quem multiplicas.

4bis

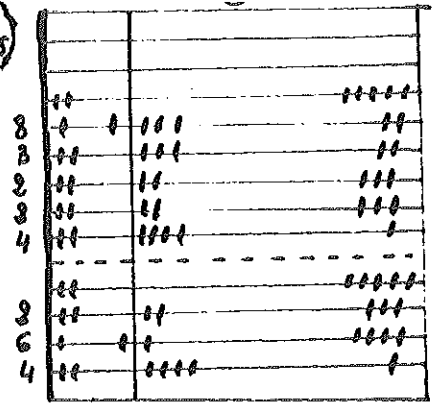


Fig. 9

5

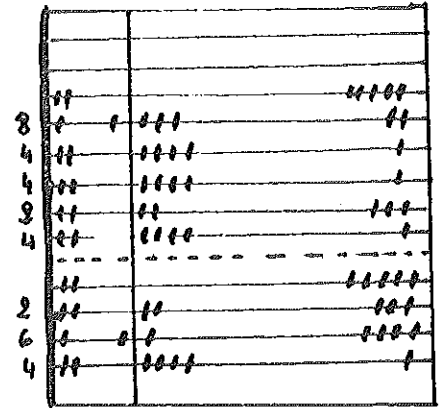


Fig. 10

7

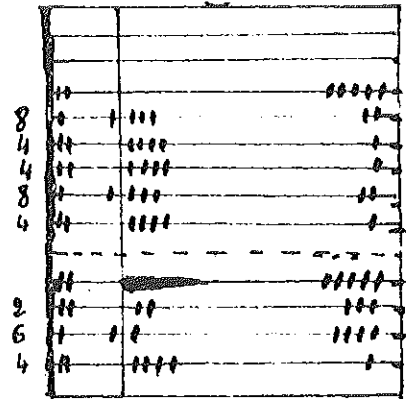


Fig. 11

8

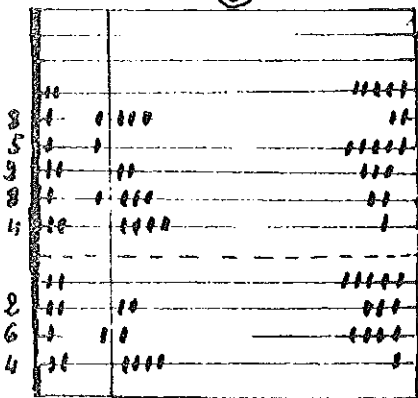


Fig. 12

9

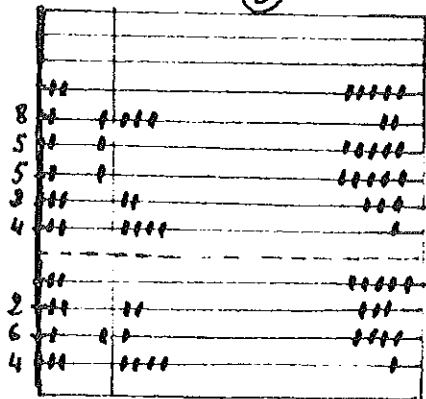


Fig. 13

10

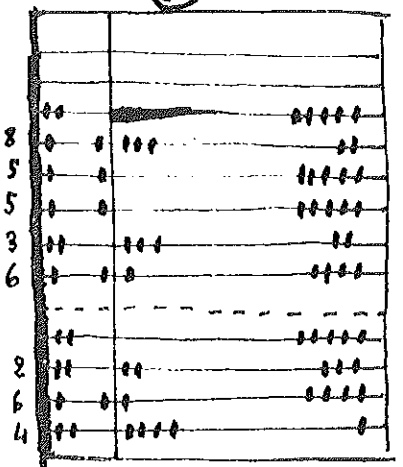


Fig. 14

La méthode indiquée pour la division se met aussi directement en oeuvre sur le boulier.

Notons encore qu'Al-Khowarizmi donne séparément, dans la liste des chiffres indiens, 1, 2, 3, 4 d'une part, et 5,6,7,8,9,0, d'autre part. Ce mode de calcul ne devait pas être très ancien en Inde ; en tout cas la méthode d'Aryabatta (+499) est différente, et ne paraît pas s'adapter au boulier. Par contre la méthode décrite dans le Tsi Kou Souan King, traité chinois du VII<sup>e</sup> siècle, est identique dans son principe à celle d'Al Khowarizmi (Schrumpf, ref. 5 art.Calcul).

R.Schrumpf indique enfin, dans l'article "Abaque", ref 5, qu'on ne trouve pas trace des bouliers (abaques) dans les traités mathématiques chinois antérieurs au VII<sup>e</sup> siècle.

Il faut insister sur le fait que la position d'un chiffre était utilisée bien avant les Indiens et les Chinois dans la pratique opératoire. Qu'il suffise de dix signes, la position faisant le reste, c'est ce que le boulier a permis aux Chinois et aux Indiens de découvrir.

Il est enfin remarquable que les Romains aient déjà connu l'abaque, de type très semblable, qui s'adapte en effet fort bien à leur système de numération. Mais, l'abaque étant utilisée par les gens de basse condition, ils ne l'ont pas exploitée au-delà de l'addition. On a rarement, en mathématiques, l'occasion de considérations à caractère social très pertinentes ...

#### VIII.- L'extension de la notion de nombre.

Voir ici Youschkevitch, ref 4, pp 84 ss.

P. 87 : "A l'instar des Anciens, al-Hayyâm (Omar Khayyam) entend par "nombre, au sens propre du terme, un ensemble d'unités indivisibles. Il soulève "en même temps la question du lien existant entre les notions,"  
"entre les notions de rapport et de nombre. Ce problème est, selon les termes "d'Al-Khayyam, de nature philosophique et de ce fait n'est pas étudié par les "géomètres : "Un rapport de grandeurs peut-il être par essence un nombre ou "est-il accompagné d'un nombre ou encore le rapport est-il lié à un nombre non "par nature, mais à l'aide de quelque chose d'extérieur, ou bien le rapport "est-il lié par nature à un nombre et n'a-t-il besoin de ce fait de rien "d'extérieur ?" Tout en laissant de côté l'aspect "philosophique" de la "question, al-Khayyam considère comme nécessaire d'introduire dans les ma-  
"thématiques une unité divisible et une nouvelle catégorie de nombres, qui  
"correspondent à des rapports quelconques de grandeurs. En démontrant la  
"première propriété des rapports composés, il choisit une certaine unité et  
"suppose que son rapport avec une grandeur auxiliaire G est égal au rapport de  
"A avec B. Cette grandeur G, dit-il, nous allons "la concevoir non comme une

"ligne, une surface, un corps ou un temps, mais comme une grandeur que  
"l'esprit abstrait de tout et qui appartient aux nombres, mais non aux nombres  
"absolus et véritables car le rapport de A à B peut souvent ne pas être mesu-  
"rable numériquement c'est-à-dire qu'on peut ne pas trouver deux nombres dont  
"le rapport soit égal à ce rapport". C'est ainsi, explique Al-Khayyam, que  
procèdent les calculateurs et les arpenteurs qui parlent de la moitié ou  
d'une autre partie d'une unité supposée indivisible ou d'une racine de cinq,  
ou de dix, etc. L'unité choisie est en tout cas divisible et "la grandeur"  
G, qui est une grandeur arbitraire, est considérée comme un nombre au "sens  
indiqué."

Ce texte est d'une importance extrême. Une fois encore, il  
montre comment la réflexion sur l'instrument pratique de travail, ici la  
chaîne d'arpenteur, conduit à la structure de raisonnement. C'est la manipu-  
lation des longueurs qui mène à la définition des réels.

D'autre part, à la découverte intellectuelle, il faut associer  
un réel courage moral. Sur deux points au moins, ce que dit Al-Khayyam heurte  
l'orthodoxie musulmane. La nouveauté, c'est l'hérésie ; l'introduction,  
pour la nécessité du travail humain, d'êtres nouveaux, sans l'intervention  
divine, est une hérésie caractérisée... ce pourquoi Al-Khayyam s'abstient de  
la discuter sur le plan philosophique. D'autre part l'atomisme et les indivi-  
sibles, depuis Ashari (X<sup>e</sup> siècle) ont caractère de doctrine officielle.

Sur ce point, je me dois d'ajouter qu'il a soulevé au Colloque  
Inter-IREM de CAEN une vive et intéressante controverse avec M.T. LEVY et  
Melle MIKOLJ de l'IREM de PARIS-NORD. Il est évident que le point de vue de  
Louis MASSIGNON (ref 1), sur lequel ils s'appuient, a et doit avoir une grande  
autorité, par sa connaissance incomparable de l'Islam et de la langue arabe.

"(Le) caractère de la langue arabe, écrit-il (I, p. 458) a eu  
"pour résultat d'infléchir les connaissances qu'elle exprimait dans le sens  
"d'une pensée analytique, atomistique, occasionaliste et apophtegmatique. Une  
"Une étude récente sur "l'involution sémantique du concept" (tadhmin), expose  
"comment les langues sémitiques tendent à la formulation abrégée et abstraite,  
"algébrisent" par contraste avec la géométrisation aryenne. En effet, la pensée  
"peut se projeter, avec son objet, dans l'espace, comme c'est le cas pour la  
"figuration pythagoricienne des nombres ; elle peut aussi se replier sur elle-  
"même, dans le temps qui lui est propre et y construire son objet (Cf. le  
"temps du schématisme kantien).

La langue arabe, qui favorise cette intériorisation de la  
pensée, était particulièrement apte à exprimer les sciences exactes et à les  
développer dans le sens qui a été historiquement celui du progrès des mathé-  
matiques : passage d'une arithmétique et d'une géométrie intuitives, presque

"contemplatives, qui préfigurent, chez Platon, la contemplation des natures  
"et des essences intelligibles, à une science des constructions algébriques,  
"où finissent par s'unifier arithmétique et géométrie ...

Que dire de ces érudites considérations ??? Les arabes n'ont pas algébrisé plus que les Grecs et les Indiens, Platon ne compte pas pour le présent problème. Les Arabes l'ont fort peu connu, par rapport à Aristote, Euclide, Archimède, Diophante. Il y a peu de rapports entre la poésie romantique anglaise, et l'article scientifique écrit par Japonais dans une revue américaine spécialisée; encore ~~ce~~ ce Japonais peut ~~être~~, rentré chez lui, écrire des poèmes, avec pinceau et kimono ... L'arabe a été langue internationale, et Al Khayyam écrivait ses poèmes en persan. Al Tusi a écrit son principal traité en persan, puis l'a traduit en arabe.

Melle Nikou et M. Lévy, pour approfondir cette discussion, m'ont signalé les réflexions de L. Gardet sur les "Ad'dad", les mots arabes pouvant avoir des significations contraires (exemple français : louer un appartement). De tels mots sont assez nombreux en arabe, et un type est pour nous particulièrement intéressant à cause de la "muqabala" d'Al-Khowarizmi, c'est le "muqabal" qui désigne la mise en opposition symétrique de deux termes, ou de deux concepts. Est-ce le mot qui a créé l'idée mathématique, ou l'usage de la balance qui a trouvé un mot bien adapté, ou la pratique algébrique déjà en usage qui a trouvé ainsi à se codifier. Le rapprochement est en tout cas légitime et évocateur, au même titre que celui de Bhaskara avec l'infini et la transmigration des âmes. Mais les exposés arabe et indien de l'algèbre sont trop proches pour que nous en tirions de trop grandes conclusions. (L'ambivalence dans la culture arabe. Anthropos 1967;pp. 121 s s).

Avec la langue arabe, L. Massignon et R. Arnaldez donnent aussi un rôle spécifique et positif à l'Islam. Ainsi, loc. cit. p. 523 :

"Après les invasions des Barbares, qui avaient assombri la  
"brillante civilisation gréco-romaine, l'Occident fut réchauffé par le rayonnement de cette autre civilisation méditerranéenne, qui avait su, pour exploiter les dons d'Allah, prendre le meilleur héritage grec, en le marquant d'un esprit nouveau qui doit beaucoup, d'une part à la grande pensée syncrétique et mystique de l'Iran, de l'autre au génie propre des Arabes et de l'Islam sunnite."

La science des savants musulmans s'exprimant en arabe est un fait historique auquel, actuellement encore, des historiens des Sciences connus ne rendent pas suffisamment justice. Voir, par exemple, KLINE, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford U.P. 1972). Mais si l'on donne



une place spécifique importante à la langue et à la religion dans le déterminisme de son éveil, il faut alors aussi expliquer son déclin. Sinon c'est faire litière du puissant désir de réforme qui anima certains penseurs musulmans à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, venus chercher même une partie de leur inspiration à Paris. Ainsi Jamal addin Al-Afghani, dont, écrit L. Gardet (Introduction à la Théologie Musulmane, p. 79), "la puissante figure de penseur prophétique domine toute la pensée religieuse musulmane moderne", a pu écrire : "A la vérité, "la religion musulmane a cherché à étouffer la science et à en arrêter les " progrès. Elle a réussi ainsi à enrayer le mouvement intellectuel ou philosophique " et à détourner les esprits de la recherche de la vérité scientifique. Pareille " tentative, si je ne me trompe, a été faite par la religion chrétienne, et les " chefs vénérés de l'Eglise Catholique n'ont point encore désarmé que je sache... " Il est permis de se demander comment la civilisation arabe, après avoir jeté " un si vif éclat sur le monde, s'est éteinte tout à coup ; comment ce flambeau " ne s'est pas rallumé depuis, et pourquoi le monde arabe reste toujours enseveli " dans de profondes ténèbres.

"Ici la responsabilité de la religion musulmane apparaît tout " entière. Il est clair que, partout où elle s'est établie, cette religion a " cherché à étouffer les sciences, et elle a été merveilleusement servie dans " ses desseins par le despotisme..." (Journal des Débats, vendredi 18 mai 1883 ; publié par A.-M. Goichon sur communication de L. Massignon dans son édition de la "Réfutation des Matérialistes, pp. 178-184).

Nous n'insisterons pas. S'il est vrai que ce flambeau s'est éteint vers le XV<sup>e</sup> siècle, il n'en résulte assurément pas qu'il n'ait point brillé, comme d'assez nombreux historiens des sciences l'ont peu ou prou écrit. L'Islam a pu représenter la liberté : "Man aslama fa-awlayka taharrou rachidan" Ceux qui se sont soumis à Dieu se sont libérés vraiment. (Coran, 72,14).

Mais enfin le milieu des philosophes, auquel les mathématiciens appartenaient, n'a pas réussi dans l'ensemble à faire authentifier ses apologies fondées sur le Coran. Voir encore L. Gardet; loc. cit. pp 320 ss. Ce qui est en cause, ce n'est pas L'Islam ; c'est la puissance répressive de l'Institution constituée en orthodoxie religieuse ... et aussi bien antireligieuse.

Je ne sais pas s'il existe un déterminisme linguistique ou religieux pour expliquer ou appuyer la démarche d'Omar Khayyam ; mais, en ce qui concerne la définition des réels, il s'agit d'un apport théorique. Les Grecs connaissaient les fractions continues, et la définition d'un rapport,

par précisément l'Algorithme d'Euclide :

$$a = bq + r, \quad r < b-1 \quad ; \quad a/b = q + r/b$$

$$b = r'q' + r', \quad r' < b-1 \quad ; \quad b/r = q' + r'/b$$

$$a/b = q + \frac{1}{q' + \frac{r'}{b}}$$

Lorsque le rapport est rationnel, la théorie du p.g.c.d. montre que l'opération s'arrête ; sinon elle se poursuit indéfiniment, et on ne connaît du nombre que des valeurs approchées fournies par les réduites. C'est ainsi qu'en 230 avant Jésus-Christ Apollonius donne pour  $\pi$  la valeur : 377/120, correspondant à

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{17}} \quad \text{pour la troisième réduite, qui s'exprime simplement dans le système sexagésimal :}$$

$$3,8', 30'' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$$

la valeur exacte 333/106 de la 3<sup>e</sup> réduite, correspond à  $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$

Les mathématiciens indiens Brahmagupta (7<sup>e</sup> siècle) et Bhaskâra (XII<sup>e</sup>) ont étudié l'équation connue sous le nom d'équation de Pell

$$D \cdot x^2 + 1 = y^2, \quad \text{et le second en donne la solution sous la forme :}$$

$$x_n = \sqrt{2n/D - n^2}, \quad y_n = \sqrt{D + n^2 - n^2} \quad n \text{ étant un entier convenablement choisi.}$$

(G.R.KAYE, 10, t.2, pp 336ss).

Dans ces conditions, l'apport d'Omar Khayyam est défini avec une grande précision par A. Youschkevitch (p. 85)

"Al-Hayyam élargit (...) la définition euclidienne de la relation : "plus grand que". (A/B et C/D étant définis par les suites de quotients partiels  $(q_0, p_1, \dots, q_m ; q'_0, q'_1, \dots, q'_m)$ ) D'après Al-Hayyam, on a  $A/B > C/D$  si, "lorsque  $q'_k = q_k$  pour  $k < m$ , les inégalités  $q_m < q'_m$  pour  $m$  impair et  $q_m > q'_m$  pour  $m$  pair sont satisfaites. Notons qu'Al-Hayyam étend aussi cette définition "au cas où un seul des deux rapports est incommensurable et l'autre commensurable " (c'est-à-dire lorsque la décomposition de ce dernier en fraction continue " s'arrête à un certain seuil) ; il donne ainsi un critère permettant de comparer " un nombre irrationnel avec un nombre rationnel.

"La définition de l'égalité des rapports, telle qu'al-Hayyam l'a donnée, est identique à certaines définitions données par ses prédécesseurs. La définition de l'inégalité des rapports, par contre, semble pouvoir lui être attribuée. De plus, al-Hayyam s'est particulièrement efforcé d'établir l'équivalence des deux théories : la sienne d'une part et celle d'Eudoxe et d'Euclide d'autre part. Dans toute une série de propositions, al-Hayyam démontre que des rapports qui sont égaux ou inégaux au sens d'Euclide, le sont aussi dans son sens et inversement". (Et il donne une place fondamentale, dans ses démonstrations, au principe de continuité).

Autrement dit, al-Khayyam a donné le premier exemple conscient d'extension d'un ensemble muni d'une certaine structure. Les rationnels sont un sous-corps du corps des réels. Il est aussi le premier à avoir compris la mathématique de l'inégalité.

Sans vouloir épuiser le débat philosophique, on peut encore ajouter que, si l'on cherche le mot "realis", d'où procède "réel", dans un dictionnaire latin classique, on ne l'y trouvera pas. Ce mot est un néologisme du XII<sup>e</sup> siècle, et se rattache au débat sur les "universaux". Un nombre est dit "réel" parce qu'il est pour nous davantage qu'un outil de calcul : il est vraiment une chose donnée par la nature. La nature nous donne les "réels" par les chaînes d'arpenteur ... étymologiquement, un "irrationnel" n'est pas "réel", un "négatif" n'est pas "réel", comme le montrent bien les bilans usuels des conférences sur le désarmement... Si le résultat est dit "négatif", c'est qu'il n'y a pas de résultat.

On peut ici esquisser une reconstitution épistémologique, et penser à la belle conclusion que G. Bachelard donnait, dans "Le nouvel esprit scientifique", à son étude de l'épistémologie non-cartésienne :

"Chacun peut revivre ces mutations spirituelles en se rappelant le trouble et l'émoi apportés par les nouvelles doctrines dans la culture personnelle : elles réclament tant d'efforts qu'elles ne paraissent point naturelles. Mais la nature naturante est à l'oeuvre jusque dans nos âmes ; un jour on s'aperçoit qu'on a compris. A quelle lumière reconnaît-on d'abord la valeur de ces synthèses subites ? A une clarté indicible qui met en notre raison sécurité et bonheur. Ce bonheur intellectuel est la marque première du progrès." (p.178)

On pourrait encore observer que, d'une certaine façon, G. Bachelard se mettait ici en contradiction avec certaines de ses thèses antérieures. Dans son livre sur "La formation de l'esprit scientifique", il consacrait un important chapitre à "l'obstacle substantialiste", à ce besoin qu'on avait autrefois, avant l'ère scientifique de l'humanité, de donner une substance intuitive,

naturelle, aux notions introduites dans les raisonnements. Nous voyons que cette tendance est de toujours. Un exemple très frappant, parce qu'encore récent, nous est fourni par les nombres "imaginaires". C'était le terme de Descartes, qui lui assura une belle longévité. Son remplacement par le terme de "complexes" correspond à une "substantification" incontestable dans les esprits.

IX.- Les calculs approchés.

Ici encore, l'ouvrage de référence est celui de M. Youschkevitch, et je n'ai rien d'original à apporter. Il nous apparaît qu'avec les idées d'Omar Khayyam une étape importante est franchie. Dans le cadre des programmes actuels du Second degré, nous pouvons concevoir quelques thèmes de problèmes ayant une histoire.

A.- L'Intégration

Entre la réflexion algébrique sur les surfaces d'Al-Khowarizmi et la définition numérique de grandeurs continues par Omar Khayyam, il faut faire une place à Thabit ben Qurrah (822-900). Ce n'est pas un musulman, mais un sabéen de Harran (ou Caran). Une bonne partie des résultats étaient déjà connus d'Archimède. Mais la méthode des intervalles inégaux est originale, ainsi que la progression des résultats partiels. (Youschkevitch, pp. 124ss).  
1° Sommations.

On se ramène évidemment toujours à une expression de la forme  $u_n = v_{n+1} - v_n$ . Mais le modèle graphique n'a pas perdu sa valeur pédagogique.

a)  $S_2 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

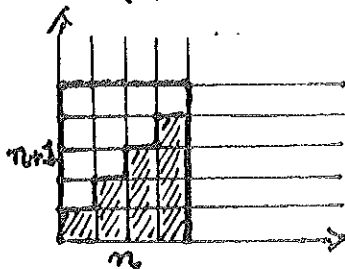
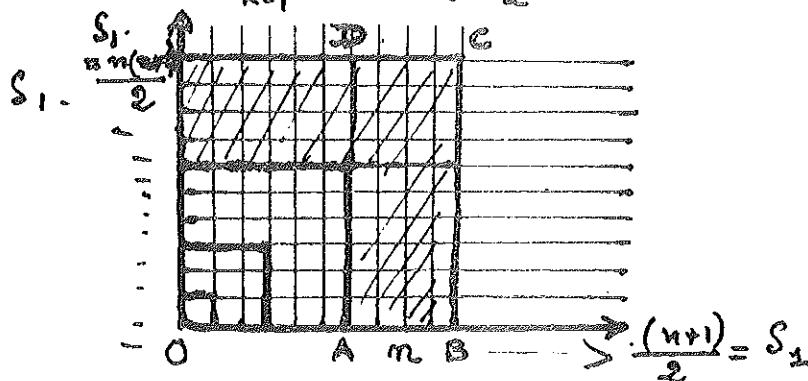


fig. 15.

b)  $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$



La surface du rectangle ABCD est  $n \cdot (n(n+1)/2)$  ; la réunion des rectangles ABCD et A'B'CD' a donc pour surface :  $2 \cdot n^2(n+1)/2 - n^2 = n^3$ .  
La formule de sommation en résulte.

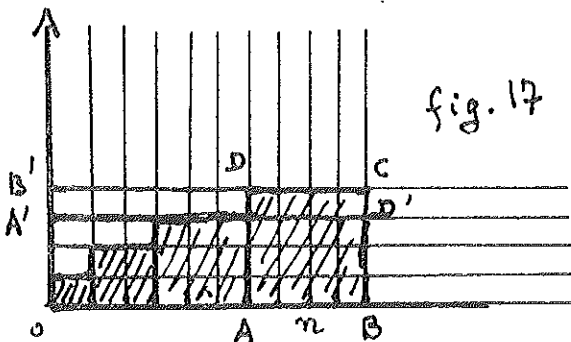
(Al-Karadji, contemporain d'Ibn Qurrah ; Youschkevitch, p. 63)  
une formule dérivée des précédentes est :

$$S_3 - S_1 = (n^3 - n) = (n + 1) n (n - 1)$$

Al Karadji reconnaît n'avoir pas réussi à donner de démonstration pour la formule relative à la somme des carrés. Le modèle géométrique nous permet d'en concevoir plusieurs. Mais avec Ibn al Haytham (Alhazen), d'une vingtaine d'années plus jeune, le principe d'une démonstration générale est trouvé : Soit à trouver  $S_n$ , on porte en abscisse  $S_{n-1}$  et  $n$  en ordonnée, la surface  $p \cdot S_{p-1}$  est une combinaison linéaire de  $S_1, S_2, \dots, S_{p-1}$ ,

$S_{p-1}$  Ibn al Haytham explicite les calculs complètement pour  $S_1, S_2, S_3, S_4$  est

donné pour la première fois, et il est probable que nous avons aussi la première démonstration véritable de  $S_2$ , dont l'expression était connue depuis Archimède : donc le premier cheminement complet vers l'intégration des surfaces et des volumes (cf. H. Suter, Die Abhandlung über die Ausmessung des paraboloides von Ibn al Haytham Bibliotheca Mathematica, 1912, P.292 sz).



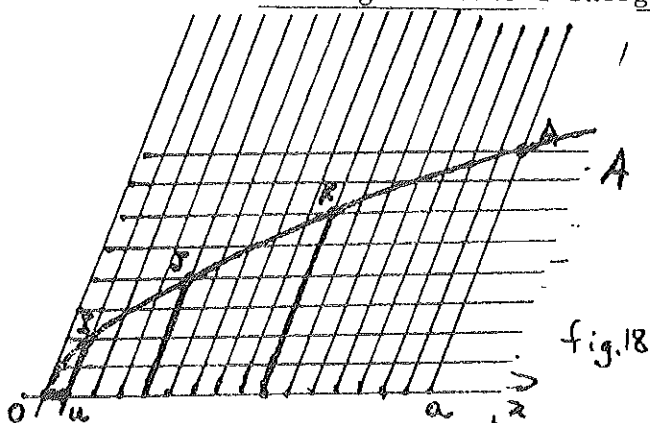
Dans la figure correspondant au calcul de  $S_2$ , la réunion du carré ABCD et du rectangle A'B'CD' a pour surface :  $n^2 + n(n-1)/2$  ; donc  $n \cdot n(n+1)/2 = 3 \cdot S_2 / 2 - S_1 / 2$ .

quoiqu'il en soit de cette acquisition, concernant  $S_2$ , Thabit Ibn Qurrah l'utilisait pour donner la somme des  $n$  premiers carrés impairs.

La somme des  $n$  premiers nombres impairs est :  $(2k-1) = n^2$

et celle des carrés correspondants :  $(2k-1)^2 = \frac{4n^3}{3} - \frac{n}{3}$

2°. Convergence vers l'intégrale.



Soit, d'après les équations d'Apollonius, en axes orthogonaux ou obliques, la parabole

$$y^2 = 4px$$

pour calculer la surface comprise entre la parabole ( $y$  positif),  $Ox$ , et l'abscisse  $a$ , Thabit Ibn Qurrah partage  $a$  en  $n^2$  parties

égales,  $u$  ; puis il considère les intervalles  $u, 3u, 5u \dots, (2n-1)u$  consécutifs. Les ordonnées sont alors proportionnelles à  $2, 4, 6, \dots$ . Soit alors  $s$  la surface du parallélogramme construit sur  $u$  et  $pu$ , la surface du polygone inscrit  $O I J K \dots$ .  $Aa$  est :

$$s(1 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2) = s.(4n^3/3 - n/3)$$

D'autre part la surface du parallélogramme  $OaAa'$  est  $s.2n^3 = S$

La surface cherchée est donc :

$$(2/3).S - S.(1/6n^2)$$

Dans sa proposition n° 14, Thabit Ibn Qurrah a préalablement démontré que, pour  $n$  suffisamment grand, ce rapport peut être rendu inférieur à tout rapport  $A/B$  fixé d'avance. Donc, proposition 18, la différence entre  $(2/3)S$  et la surface cherchée peut être rendue plus petite que toute surface fixée d'avance.

Quelques années plus tard, Ibn al Haytham suit la même démarche pour calculer le volume du paraboloïde.

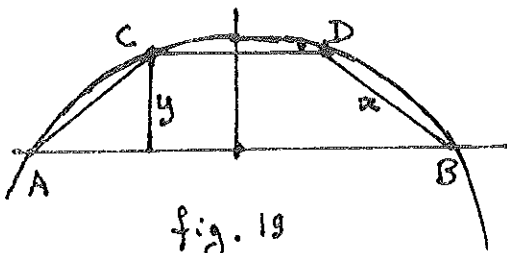
Il est donc clair qu'aux environs de l'an mille, la science arabe a bien pris conscience de la notion de limite, et de son application au calcul de l'intégrale définie.

### B.- Résolution approchée de certaines équations.

#### 1° Equation du 3° degré.

Omar Khayyam avouait que tous ses efforts pour résoudre numériquement ces équations étaient restés vains : "La démonstration de ces formes pour le cas où l'objet du problème est un nombre absolu, n'est possible ni pour nous, ni pour aucun de ceux qui sont passés maîtres en cette science. Peut-être qu'un de ceux qui viendront après nous la réalisera." (Youschkevitch, p.96).

Par des considérations de géométrie analytique, il démontrait que, dans certains cas, l'équation avait certainement une solution positive, et deux solutions positives dans certains autres cas. Ce problème était directement lié à celui de la trisection de l'angle :



$$AB = a \quad ; \quad AC = CD = DB = x$$

$$BC^2 - y^2 = \left(\frac{a+x}{2}\right)^2 \quad ; \quad x^2 - y^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 \quad ;$$

$$BC^2 - x^2 = ax \quad ; \quad BC^2 = ax + x^2 \text{ (théorème de Ptolémée)}$$

On a ensuite, appelant  $D$  le diamètre du cercle :

$$BC^2 = \frac{4x \cdot (D^2 - x^2)}{D^2}$$

D'où l'équation :  $x^3 - (3D^2/4).x + (D^2/4).a = 0$

Pour étudier ce problème, Omar Khayyam le ramène, dans le style d'Al-Khowarizmi pour le second degré, au type :  $x^3 + a = b.x$

Et il considère l'intersection de deux coniques :

- La parabole  $x^2 = y$ .
- L'hyperbole équilatère  $y^2 = x^2 - (a/b).x$

Il y aura sur la branche de droite (gauche pour Al-Khayyam, l'axe Ox étant pour lui orienté vers la gauche) 0 ou 2 solutions.

Il est clair qu'il en existe une voisine de  $(a/b)$  et légèrement supérieure, lorsque cette quantité est petite. Avec les notations de la trisection de l'angle, cette valeur approchée est  $a/3$ .

Al-Kasi, au XV<sup>e</sup> siècle, en donne un procédé de calcul par itération.

On pose  $x_1 = a/b$ , puis la suite définie par  $x_n = \frac{a + x^{3(n-1)}}{b}$

qui converge si, au voisinage de la racine,  $3.x^2/b$  est inférieur à une quantité fixe plus petite que 1.

Appliqué au problème de la trisection de l'angle, le procédé permet d'atteindre le sinue de 1 degré. On peut en effet déterminer les fonctions circulaires de 3 degrés, à partir de  $\pi/12$  et de  $\pi/10$ .

Un élève d'Al-Kasi a obtenu :

$$\sin.1^\circ = 0,017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 571$$

2° Equation dite de Kepler.

Le procédé de calcul par itération est ici bien antérieur à al-Kasi, et remonte au IX<sup>e</sup> siècle.

Soit à résoudre :  $t = \theta - e \sin \theta$

On pose  $\theta_0 = t$

$$\theta_n = t + e \sin \theta_{(n-1)}(t).$$

si e est petit, la suite converge rapidement.

C.- Le Calcul d'erreurs.

Al-Kasi a franchi une étape de plus, dans l'analyse du phénomène de convergence vers une limite. Il détermine en effet le nombre de côtés nécessaires au polygone régulier qui permettra d'obtenir la longueur d'une

circonférence de diamètre égal à 600.000 fois celui de la terre avec une erreur inférieure à un crin de cheval. Du point de vue théorique, le principe est analogue à celui que représente, dans l'intégration de la parabole, la proposition 14 de Thabit Ibn Qurrah. Mais il y a en plus toute la technique d'un génial calcul d'erreur.

Sans entrer dans les questions d'unités, disons que le crin de cheval correspond environ à 1/2 millimètre. On peut vérifier, en évaluant le tour de la terre à 40.000 km, que, sur un cercle 600.000 fois plus grand, l'angle de  $1^\circ/60^8$  correspond à 0,4 millimètre environ sur la circonférence. Pour l'homogénéité, prenons un rayon  $r$ , dont la valeur numérique sera 60, et posons la condition relative aux périmètres  $p$  et  $p'$  des polygones réguliers inscrit et circonscrit :

$$p' - p = r \cdot 60^{-9}$$

On a ensuite :

$$\frac{p'}{p} = \frac{r}{h} \qquad \frac{p' - p}{p} = \frac{r - h}{h} = \frac{s}{h}$$

à ce niveau, on peut écrire

$$p' - p \neq s \cdot \frac{C}{r}$$

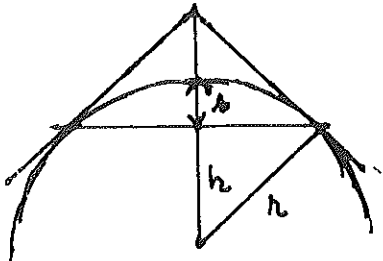


fig. 20

On voit en effet qu'Al-Kasi néglige les erreurs du second ordre ; de même il prend, pour le rapport  $C/r$ , les valeurs approchées d'Archimède, 6 par défaut et 44/7 par excès.

On a donc

$$s < \frac{r}{6 \times 60^9} \approx \frac{10}{60^9}$$

Une évaluation plus précise, un peu inconséquente, donne  $8 \cdot 60^{-9}$

Le demi-côté du polygone inscrit est alors très voisin du côté du polygone obtenu en boudlant le nombre des côtés ; on obtient dans ces conditions :

$$\frac{c^2}{4} = s \cdot 2r \quad ; \quad c \approx \frac{8 \cdot 8 \cdot 60}{10^9} = \frac{8}{60^4}$$

Al-Kasi détermine alors combien de fois il faut doubler le nombre des côtés du triangle équilatéral, pour obtenir, dans un cercle de rayon 60, un côté inférieur à la quantité indiquée.



Il trouve que le nombre de côtés doit être  $3.2^{28}$ . Nous pouvons ajouter que l'utilisation d'un calculateur programmable permet de suivre aisément ce raisonnement.

Ensuite, Al-Kasi cherche à évaluer avec quelle précision doivent être calculés les côtés successifs, pour obtenir la précision voulue au bout du  $28^{\circ}$  calcul de côtés. Il apparaît que son raisonnement n'est pas encore inattaquable ; mais Al-Kasi s'en tire en prenant une précision largement supérieure ( $1/60^{18}$  : 60-18 ...).

Ayant alors obtenu  $p$  et  $p'$ , et constaté que ces valeurs répondaient à la condition posée, il prend la demi-somme, et obtient la valeur de  $\pi$ , qu'il convertit en fraction décimale :

$$2\pi = 6,283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

... Et il affirme que cette valeur est beaucoup plus exacte que celle donnée par Archimède. (Youschkevitch, p.153 ss).

#### D.- La trigonométrie.

Il était intéressant il y a vingt ans, pour un professeur des classes terminales, particulièrement dans un Lycée franco-musulman en Algérie, de dire que toutes les formules de transformations trigonométriques ou d'autres équivalentes étaient connues aux environs de l'an Mille par des savants tels qu'Abu-l-Wafa ou Ibn Yunus ; de dire que tous les problèmes de résolution de triangles avaient été résolus au XIII<sup>e</sup> siècle par Nasir ed-din al-Tusi ; de dire encore, la Cosmographie figurant alors dans les programmes, quelques mots sur les résolutions de triangles sphériques. Nous ne savions pas alors, mais nous l'apprenons par A.P. Youschkevitch (p. 143), que notre souci de justice en matière de propriété scientifique pouvait se protéger contre tout soupçon de complaisance envers le chauvinisme de nos élèves : Al-Tusi lui-même souligne tout ce que la trigonométrie sphérique doit aux anciens, c'est-à-dire à Ptolémée.

Notre rupture complète avec la géométrie des grecs, et les progrès de la rigueur dans la définition des fonctions circulaires, sans parler de la suppression de la Cosmographie, effacent pour le moment de notre horizon ce large pan de la science arabe et indienne.

Il reste que l'astronomie fournit l'axe moral du développement mathématique arabe en direction de l'Analyse. Derrière tout les calculs approchés, on peut voir l'approximation croissante des fonctions circulaires. Au fond, ce sont les seules fonctions qui donnent à la science l'idée de fonction, les seules comportant l'idée de variable. La trame visible de tout ce travail, nous pouvons la voir dans la succession des tables trigonométriques et astronomiques toujours perfectionnées :



On a beaucoup parlé de "pédagogie de la redécouverte" ; l'histoire de la découverte vraie, avec ses curieux illogismes parfois, peut rendre leur visage humain à certaines théories qui paraissent nées comme Minerve du crâne de Jupiter, munies du casque et de la lance. Ces théories intéressent pourtant l'historien et le philosophe également, parfois aussi le linguiste. Certaines listes d'exercices de nos manuels n'ont pas de valeur culturelle ; mais le coup d'oeil comparatif sur les listes des tablettes cunéiformes en a une.

Nous avons négligé quelques discussions classiques.

En quoi peut-on parler de science ARABE ? Eh oui ... parmi les Arabes, il y a les Persans ; parmi les Musulmans, certains ne sont pas Musulmans. Que faire ? Songer simplement que, dans 8 siècles, on discutera ainsi des savants français qui publiaient en anglais....

Ceux-là même qui contestent l'existence d'une découverte proprement arabe affirment le rôle d'intermédiaire que la civilisation arabe a joué. Intermédiaires entre nations, intermédiaires entre le passé et le présent ; les experts scientifiques font partie des missions diplomatiques ; le sage et cruel Gengis Khan pille rationnellement les bibliothèques ... Al Tûsi sera le plus célèbre bénéficiaire de ce pillage ...

Cependant le professeur de Mathématiques, s'il n'est pas indifférent à ces questions, ne peut que les trouver très en dehors de son rayon d'action normal ; ne cherchons pas le "gadget". Il souhaite ici le relais de ses collègues historiens. D'ailleurs, alors que nous aimons des vérités stables, cette histoire évolue avec ce que nous apprenons des relations internationales ; la découverte de nombreux manuscrits contribue à cette évolution. (Voir par exemple : History of science, 1967, pp 40-58, Youschjevitch, "Recherches sur l'Histoire des Mathématiques au Moyen Age dans les pays d'Orient ; Bilans et perspectives). Bien plus qu'il y a vingt ans, il devient clair que, dans le courant international, l'acquis mathématique se conserve et se transmet d'un pays à l'autre.

Mais alors, pourquoi n'avoir pas parlé davantage de l'Inde, presque ~~rien~~ dit de la Chine ??? n'avoir rien dit, non plus, comme nous l'a fait remarquer T. LEVY à la rencontre Inter-Irem de Caen, de la Science Juive, et notamment de Lévy Ben Gershon (XIV°) ?

La ligne de ce travail a été fixée par nos programmes actuels des Lycées, comme peut-être la ligne d'Al-Khowarizmi fut fixée par les besoins des juristes calculant leurs héritages. Là est notre seule chance,

dans la France scolaire actuelle, de n'être pas tout à fait inutiles. Sauf quelques réflexions sur Omar Khayyam, nous en sommes restés à un aspect collectif et assez impersonnel de la progression scientifique. La science juive ne s'intègre pas aisément dans ce cadre. "L'Histoire Générale des Sciences" (ref I) consacre un article à part à la "Science hébraïque médiévale" (Is. Simon, pp.568-581) : pourquoi "hébraïque", comme si les auteurs étaient différents suivant qu'ils s'expriment en hébreu ou en arabe ? Pourquoi pas un chapitre sur la "Science Persane"? On voit pourquoi nous préférons nous arrêter sans trop chercher à nous justifier, même pas par une attitude comparable de A.P. Youschkevitch dans sa conférence citée quelques lignes plus haut. Nous souhaiterions que notre collègue, qui en a la compétence, puisse prochainement nous éclairer sur la Mathématique Juive, et aussi sur ce problème. Elle avait une importance, puisqu'au Moyen-Age un traducteur français considère Al Khowarizmi comme un mathématicien juif. Sans le suivre jusque-là, nous écouterons pourtant le conseil qu'il donne, après l'énoncé des épuisantes règles en cas de retenues pour la multiplication :

"Quant ch'auras fait, repren t'allaine...(ton souffle...)  
(EGRWaters, A thirteenth century algorithm in french verse, ISIS 1930, P45-84).

M. Causse, ancien professeur au Lycée France-musulman d'Alger-Ben Aknoun ; 1954-1962. A la mémoire de ses anciens élèves, vivants ou disparus.

6									
0									
3									
2									
4									
.	..								
2									
6									
4									