L'invention de la médiane

Denis Lanier, Jean Lejeune & Didier Trotoux,
IREM de Basse-Normandie,
irem@unicaen.fr

Des paramètres comme l'espérance de vie ou le salaire médian interviennent dans les débats les plus contemporains, comme celui sur la réforme des retraites. Il n'est pas toujours facile de se faire une idée sur leur pertinence : « À bas la dictature de la moyenne ! », écrivit un jour un directeur de l'INSEE [C], tandis que Stephen Jay Gould affirmait « La médiane ne dit pas tout » [Go].

Le groupe d'étude sur l'histoire des statistiques médicales, sous-ensemble du cercle de lecture en histoire des sciences de l'IREM de Basse-Normandie, s'intéresse à la naissance et à l'utilisation des concepts usuels de la statistique dans le champ de la médecine et de la santé publique. Nous rendons compte ailleurs dans ces actes d'un travail effectué sur l'œuvre de Jules Gavarret (1809-1890). Parallèlement à ce travail, nous avons été conduits à lire des textes de la même époque où est posée la question des paramètres centraux d'une série statistique : moyenne et médiane.

Par ailleurs, certaines sources classiques sur l'histoire des statistiques attribuent l'invention de la médiane au jésuite Boscovich, qui vivait au XVIII^e siècle. Qu'en est-il exactement ?

C'est l'objet de cet article de faire un peu de lumière sur ces questions.

1. – Les tables de mortalité

En 1840, le docteur Louis-René Villermé publie un *Tableau de l'État Physique et Moral des ouvriers employés dans les manufactures de coton, de laine et de soie* [V]. Ce travail aborde les modifications apportées à la santé publique par l'établissement des manufactures en Alsace. Il s'intéresse en particulier à la durée de vie des habitants de la ville de Mulhouse suivant leur profession, par exemple à l'espérance de vie des tondeurs de poils de lapins ! Voici la conclusion de Villermé :

> Si d'abord on réunit toutes ces tables de mortalité par professions, pour en construire une table générale, on trouve qu'à tous les âges de la vie, la mortalité est beaucoup plus forte, beaucoup plus rapide à Mulhouse, qu'elle ne l'est dans l'ensemble de la France, de la Belgique, de la Suède, du Danemark, de l'Allemagne, de la Suisse ou de l'Angleterre. C'est au

> point qu'à Mulhouse, d'après la manière d'évaluer la vie probable, la moitié des enfants n'accomplirait pas l'âge de huit ans (1), tandis que dans chacun des pays que je viens de nommer, pris en masse, ils parviennent à l'âge de vingt ans ou de vingt-cinq ans. Le terme moyen est environ treize ans et demi dans le département entier du Haut-Rhin, pour la période de 1814 à 1833 inclusivement, d'après la table encore manuscrite de M. Demonferrand [V, L. II, p.248].

La « vie probable » à la naissance semble désigner la médiane, que Villermé indique comme étant inférieure à huit ans. Un peu plus loin, il l'appelle « terme moyen » ! La note (1) est la suivante :

> Note (1). M. Achille Penot, professeur de chimie à Mulhouse, a fait des recherches et des calculs sur la durée probable et sur la durée moyenne de la vie dans cette ville, pour les seize années consécutives de 1812 à 1827 inclusivement. [...] Les résultats de ce travail sont les suivants :
> 1° À Mulhouse, la moitié des enfants n'atteint pas la dixième année.
> 2° La durée de la vie moyenne a beaucoup diminué à Mulhouse, pendant la période des observations. [...]
> Nous voyons ici la vie moyenne au-dessus de 25 ans avant 1821 et beaucoup au-dessous depuis lors, c'est-à-dire depuis le grand développement des manufactures de coton. Par conséquent, j'ai pu trouver, pour une époque plus récente, pendant laquelle les manufactures ont pris encore une nouvelle extension, la *vie probable* (ou l'âge qui sépare les décédés en deux moitiés égales, une plus jeune et l'autre plus âgée), de deux ans plus courte que M. Penot ne l'avait trouvée pour les seize années entières que comprennent mes recherches.

Trois ans après l'ouvrage de Villermé, Achille Penot décrit de manière très précise les deux types de calcul dans ses *Recherches statistiques sur Mulhouse* [Pe, p. 363-364 et 376-377] :

> Lorsque j'ai voulu connaître la vie moyenne à Mulhouse, j'ai suivi une marche très longue, il est vrai ; mais à mes yeux la seule certaine, surtout dans une ville où les éléments de la population varient sans cesse. Pour un espace de seize années consécutives, de 1812 à 1827, j'ai fait la somme des âges de toutes les personnes décédées, et je l'ai divisé par le nombre des décès. J'ai obtenu ainsi l'âge moyen auquel chacun est parvenu ; et j'ai trouvé 25 ans et 13 jours, pour les deux sexes réunis..
>
> On entend par vie probable à la naissance, l'âge auquel parviennent la moitié des enfants nés en même temps ; d'où il suit que la vie probable calculée pour un certain nombre d'individus, est l'âge auquel sont morts la première moitié de ces mêmes individus. [...] On voit par là qu'il faut bien se garder de confondre la vie probable avec la vie moyenne, toujours plus longue.

On peut remarquer que Penot opère un basculement entre la moyenne des âges des décédés d'une année donnée (calcul transversal) et la moyenne des âges de décès d'une cohorte d'individus nés la même année (calcul longitudinal) pour calculer la vie moyenne. En revanche la vie probable relève d'une vision longitudinale : il faut connaître l'évolution complète de la cohorte pour calculer la médiane.

Deux paramètres, la « vie moyenne » (espérance de vie) et la « vie probable » (la médiane) semblent donc coexister à cette époque. La différence entre les deux réside plus dans leur mode de calcul plus que dans leur usage, car l'un comme l'autre permettent de faire des comparaisons entre des populations différentes.

Cela va nous conduire à étudier l'histoire des tables de mortalité et des paramètres utilisés. L'idée de l'établissement d'une table de mortalité est d'étudier une population fictive d'individus tous nés en même temps et de voir comment elle évolue au cours du temps. On obtient alors des données qui décrivent pour cette cohorte les durées de vie des individus. En termes modernes, on obtient à l'arrivée une distribution statistique qui peut représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire donnant la durée de vie d'un individu. Sur cette série statistique, on peut faire des calculs de moyenne (espérance de vie) ou de médiane.

Edmund Halley

La première table de mortalité fut publiée par John Graunt en 1662. L'attribution de la paternité de ce travail, à Graunt ou à Petty, reste controversée [Le]. Graunt utilisait les bulletins de mortalité de Londres et donna une table, établie semble-t-il de façon théorique, de l'évolution d'une population de 100 individus. On y trouve les nombres de survivants tous les dix ans. Il n'y a pas de calcul de moyenne sur ces données. Les frères Huygens s'emparèrent de ces données (« la table anglaise ») pour discuter des questions d'espérance de vie, dans une correspondance privée. Cette correspondance, qui ne fut rendue publique qu'au début du XX^e^ siècle et n'eut donc aucune influence sur les contemporains, a été largement étudiée et commentée, y compris dans une publication inter-IREM [Pa]. C'est pourquoi nous avons choisi de nous intéresser plutôt à celui qui pour la première fois fit des calculs sur une table de mortalité et les publia. Il s'agit de l'astronome et géomètre Edmund Halley, qui fit paraître en 1693 une table de mortalité établie à partir des registres mortuaires de Breslau en Silésie. La population de cette ville lui paraissait plus stable que celle de Londres et plus suceptible de donner une table généralisable au genre humain. Le texte fut publié dans les *Philosophical Transactions* sous le titre *Une estimation de la mortalité du genre humain, d'après les anciennes Tables des Naissances et Sépultures de la ville de Breslau, suivie d'un essai pour* *l'établissement des rentes viagères*. Nous utilisons ici la traduction de Jacques Dupâquier qui a reproduit le texte intégral dans *L'invention de la table de mortalité* [Du]. Voici la présentation de la table par Halley [Du, p. 61-62] :

> J'ai dressé la table ci-dessous, dont les usages sont multiples et qui donne, de l'état et de la condition du Genre humain, une idée plus juste que tout ce qui existe maintenant à ma connaissance. Elle donne le nombre des personnes de tous âges dans la ville de Breslau, depuis la naissance jusqu'à l'extrême vieillesse et indique donc les risques de mortalité à chaque âge ; elle indique aussi comment faire une estimation certaine de la valeur des rentes viagères, ce qui n'a été fait que par évaluation imaginaire ; elle indique également les chances qu'il y a pour qu'une personne de tel âge vive jusqu'à tel autre âge ; et beaucoup d'autres choses encore comme je vais le montrer plus loin. Cette table donne le nombre des personnes vivant dans la classe d'âges correspondante, comme suit :

Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539	36	481
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523	38	463
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515	39	454
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427

Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.	Classes d'âge	Pers.
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49
45	397	52	324	59	252	66	182	73	109	80	41
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34
47	377	54	302	61	232	68	162	75	88	82	28
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20

Fig. 1 – Table de Halley

La population initiale est de 1 000 individus, mais on a maintenant une évolution annuelle de cette population. Parmi les usages que Halley donne de sa table, on trouve le suivant [Du, p. 63-64] :

> Troisième usage : si l'on s'inquiète de savoir à quel âge il est probable qu'une personne d'un âge quelconque meure, on peut aussitôt le savoir grâce à la table : car si on divise par deux le nombre des personnes vivantes à l'âge donné, on trouvera d'après la table, en quelle année ce nombre se trouve réduit de moitié par mortalité ; c'est cet âge qu'on peut parier qu'une personne d'un âge donné atteigne avant de mourir. Par exemple : pour une personne de 30 ans le nombre de personnes de cet âge est de 531 ; la moitié est de 265, lequel nombre se situe entre 57 et 58 ans ; si bien qu'un homme de 30 ans peut raisonnablement espérer vivre 27 ou 28 ans.

C'est donc la médiane qui apparaît la première dans la littérature comme paramètre central de la série. Cette table va avoir un très grand succès et être citée dans pratiquement tous les ouvrages des successeurs de Halley.

Antoine Deparcieux

Le personnage suivant de notre histoire est Antoine Deparcieux qui publie en 1746 un *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* suivi en 1760 d'une *Addition à l'Essai* … qui complète son travail. L'objectif de Deparcieux est d'arriver à un calcul raisonnable des montants des rentes viagères, motivation déjà présente chez Halley. Son travail est reconnu comme la première étude scientifique de la mortalité en France et ses données seront utilisées pour des calculs actuariels jusqu'à la fin du XIX[e] siècle. Deparcieux utilise le fait que le gouvernement a alors lancé des emprunts d'un genre un peu spécial : les tontines. Il s'agit d'émissions de rentes viagères par l'État, les souscripteurs étant regroupés en classe d'âges. Chaque année l'emprunteur reverse une somme globale à chaque classe. Celle-ci répartit la somme sur l'ensemble des survivants. Ces paiements sont effectués jusqu'au décès du dernier souscripteur d'une classe, ce qui éteint la dette de l'État vis-à-vis de cette classe. Il y a donc une grande différence avec la rente viagère pure qui s'arrête avec le décès du souscripteur. Il s'agit en fait d'une double loterie portant sur la durée de vie du souscripteur et sur celle des co-souscripteurs de la même classe. On touche le gros lot si on est le dernier vivant de sa classe d'âge. L'État verse une certaine somme chaque année à une classe donnée et c'est aux membres vivants de la classe de s'organiser pour savoir qui est toujours vivant dans la classe et calculer les sommes versées aux survivants. Il y a donc une auto-organisation des souscripteurs avec des syndics qui publient des listes de souscripteurs et des listes annuelles des décès. Ce sont ces listes que Deparcieux utilise pour établir sa table de mortalité : les registres établis pour les tontines de 1689 et 1696, en étudiant les décès jusqu'en 1742. Deparcieux explique en détail les méthodes utilisées pour construire ses tables. Il insiste en particulier sur les choix qu'il fait pour remplacer chaque classe d'amplitude cinq ans par un âge moyen : pour la première classe (celle des enfants de moins de cinq ans en 1689), il prend un âge moyen de 3 ans et non 2,5 à cause de la mortalité infantile. Mais dans les classes suivantes, il prend au contraire un âge moyen inférieur de 0,5 « en supposant que les souscripteurs (ou leurs parents) ont raisonné avant de souscrire » : il vaut mieux se trouver au début d'une classe qu'à la fin et Deparcieux essaie ainsi d'éviter un biais statistique. Deparcieux obtient ainsi pour une population très particulière (les rentiers !) la table de mortalité qui suit, sous le titre : « Ordre établi par l'Auteur sur les listes des Tontines de 1689, & 1696 ». Il s'agit d'un extrait de la table XIII de Deparcieux, dans laquelle la colonne des âges située en début de ligne n'est pas considérée comme faisant partie de la table. Nous suivons dans la suite l'usage de l'auteur dans la numérotation des colonnes.

Deparcieux donne une explication très précise du calcul conduisant à la dernière colonne du tableau : celle de la vie moyenne [De, *Essai*, p. 56].

> La troisième colonne de chaque ordre de mortalité, contient les vies moyennes des personnes de tous les âges. On entend ici par vie moyenne le nombre d'années que vivront encore, les unes portant les autres, les personnes de l'âge correspondant à cette vie moyenne .

Il revient sur cette définition dans son *Addition* de 1760, où il marque nettement la différence avec la vie probable [De, *Addition*, p. 27] :

> J'ai dit que j'entends par vie moyenne ou commune le nombre d'années qu'ont encore à vivre, les uns portant les autres, un nombre de personnes du même âge, & non le temps au bout duquel il sera mort la moitié des personnes auxquelles appartient la vie moyenne, comme l'ont cru quelques personnes.

Deparcieux donne deux formules pour calculer la vie moyenne à un âge donné. La première, "naturelle", est donnée sur l'exemple de la vie moyenne à 80 ans [De, *Essai*, p. 57]:

> Pour trouver la vie moyenne ou commune des 118 Rentiers de l'âge de 80 ans, multipliez le nombre de morts de chaque année depuis l'âge de 80 ans par le nombre des années qu'ils auront vécu depuis l'âge de 80 ans, jusqu'au dernier vivant. Si on suppose, comme on doit le faire, qu'ils meurent tous au milieu de l'année dans laquelle ils meurent, afin de prendre un milieu entre ceux qui meurent au commencement, & ceux qui meurent à la fin, on aura à multiplier 17 par 6 mois, 16 par un an & 6 mois, 14 par 2 ans & 6 mois, 12 par 3 ans & 6 mois, & ainsi de suite jusqu'au dernier. Ajoutez ensuite tous les produits ensemble ; la somme sera 553 ans, qui est le nombre des années que ces 118 personnes auront vécu

entr'elles depuis l'âge de 80 ans. Divisez la somme 553 par les 118 personnes ; le quotient 4 ans & 8 mois est la vie moyenne des personnes de 80 ans, ou ce qu'une personne de cet âge peut encore espérer vivre.

Ages	Morts de chaque âge	Personnes vivantes à chaque âge	Vies moïennes ans. mois	Ages	Morts de chaque âge	Personnes vivantes à chaque âge	Vies moïennes ans. mois	Ages	Morts de chaque âge	Personnes vivantes à chaque âge	Vies moïennes ans. mois
3	30	1000	47. 8	34	8	702	31. 6	65	15	395	11. 3
4	22	970	48. 1	35	8	694	30. 11	66	16	380	10. 8
5	18	948	48. 3	36	8	686	30. 3	67	17	364	10. 1
6	15	930	48. 2	37	7	678	29. 7	68	18	347	9. 7
7	13	915	48. 0	38	7	671	28. 11	69	19	329	9. 1
8	12	902	47. 8	39	7	664	28. 2	70	19	310	8. 8
9	10	890	47. 4	40	7	657	27. 6	71	20	291	8. 2
10	8	880	46. 10	41	7	650	26. 9	72	20	271	7. 9
11	6	872	46. 3	42	7	643	26. 1	73	20	251	7. 4
12	6	866	45. 8	43	7	636	25. 4	74	20	231	6. 11
13	6	860	44. 11	44	7	639	24. 7	75	19	211	6. 6
14	6	854	44. 2	45	7	622	23. 11	76	19	192	6. 1
15	6	848	43. 6	46	8	615	23. 2	77	19	173	5. 9
16	7	842	42. 10	47	8	607	22. 5	78	18	154	5. 4
17	7	835	42. 2	48	9	599	21. 9	79	18	136	5. 0
18	7	828	41. 6	49	9	590	21. 1	80	17	118	4. 8
19	7	821	40. 10	50	10	581	20. 5	81	16	101	4. 5
20	8	814	40. 3	51	11	571	19. 9	82	14	85	4. 1
21	8	806	39. 7	52	11	560	19. 1	83	12	71	3. 10
22	8	798	39. 0	53	11	549	18. 6	84	11	59	3. 6
23	8	790	38. 5	54	12	538	17. 10	85	10	48	3. 2
24	8	782	37. 9	55	12	526	17. 3	86	9	38	2. 11
25	8	774	37. 2	56	12	514	16. 8	87	7	29	2. 8
26	8	766	36. 7	57	13	502	16. 0	88	6	22	2. 4
27	8	758	35. 11	58	13	489	15. 5	89	5	16	2. 0
28	8	750	35. 4	59	13	476	14. 10	90	4	11	1. 9
29	8	742	34. 8	60	13	463	14. 3	91	3	7	1. 6
30	8	734	34. 1	61	13	450	13. 8	92	2	4	1. 3
31	8	726	33. 5	62	14	437	13. 0	93	1	2	1. 0
32	8	718	32. 10	63	14	423	12. 5	94	1	1	0. 6
33	8	710	32. 2	64	14	409	11. 10	95		0	0. 0

Fig. 2 – Table de Deparcieux

Le calcul montre que Deparcieux considère que les personnes décédées au cours d'une année ont vécu en moyenne six mois. Soit la formule pour la vie moyenne à l'âge x :

$$\mathrm{vm}(x) = \frac{\sum_{i \geq x} D(i) \times (i - x + 0{,}5)}{S(x)}.$$

où $S(x)$ donne le nombre de survivants à l'âge x (deuxième colonne) et $D(i)$ le nombre de décès entre l'année i et l'année $i + 1$ (première colonne). Deparcieux donne ensuite une seconde formule, moins évidente :

> On voit donc qu'on entend ici par vie moyenne le temps qu'ont encore à vivre les personnes d'un âge quelconque, non compris celui qu'elles ont déjà vécu. Il y a une autre manière de trouver la vie moyenne , qui est bien plus courte que la précédente, mais peut-être moins aisée à sentir : la voici. Ajoutez ensemble tous les nombres des personnes qui restent à chaque année, depuis & compris celui dont vous voulez avoir la vie moyenne, dans l'exemple ci-dessous, 118, 101, 85, 71, 59, &c. jusqu'au dernier vivant ; la somme sera 612 : divisez-la par le premier 118 de ceux que vous avez ajoutés, & dont vous voulez avoir la vie moyenne, le quotient sera 5 ans & 2 mois, d'où retranchant 6 mois, le reste 4 ans & 8 mois est la vie moyenne qu'on cherche, comme ci-devant. On retranche 6 mois du quotient, parce que par cette manière de compter, on les suppose tous mourir à la fin de l'année, au lieu qu'on doit les supposer tous mourir au milieu : on a donc compté 6 mois de trop une fois pour chacun, qui est ce qu'on ôte du quotient après la division [De, *Essai*, p. 58].

Autrement dit, avec les mêmes notations : $\mathrm{vm}(x) = \dfrac{\sum_{i \geq x} S(i)}{S(x)} - 0{,}5$.

La démonstration moderne utilise le fait que $D(i) = S(i) - (i - 1)$ et un changement d'indice dans les sommes. Aujourd'hui, on utilise plutôt la formule équivalente : $\mathrm{vm}(x) = \dfrac{\sum_{i \geq x+1} S(i)}{S(x)} + 0{,}5$.

L'idée importante de Deparcieux est de se servir de ce paramètre vie moyenne pour comparer des tables ou des populations : « Les vies moyennes sont ce qui m'a paru le plus commode pour faire promptement & sans aucun calcul, la comparaison des différents ordres de mortalité qu'on a établis ». Pour ce faire, il calcule pour ses propres tables mais aussi pour celles de ses prédécesseurs les vies moyennes à tous les âges (ou au moins tous les 5 ans). On a évalué qu'il avait ainsi calculé 291 vies moyennes. On peut comprendre la recherche et l'utilisation d'une autre formule ne comportant que des additions réutilisables et une division par rapport à la première formule. La comparaison peut ensuite être effectuée « sans calcul ». Deparcieux consacre pratiquement toute la suite de son ouvrage à ces comparaisons en insistant sur le fait que les tables concernent des populations d'origines différentes et de catégories sociales différentes. Il ne cherche pas à établir une loi générale de mortalité valable pour toute l'humanité, mais étudie une population bien déterminée dans l'espace et le temps. Deparcieux est ainsi le premier à avoir pensé l'idée d'une mortalité différentielle suivant le lieu, la catégorie sociale ou le sexe.

Johann Heinrich Lambert

La dernière étape de ce parcours sur les tables de mortalité est consacrée au mathématicien alsacien Johann Heinrich Lambert pour ses *Contributions Mathématiques à l'Étude de la Mortalité et de la Nuptialité* publiées en 1765 et 1772 . Lambert est aussi connu pour ses travaux géométriques et perspectivistes. Il traite d'ailleurs des questions de mortalité d'un point de vue de géomètre et pas du tout d'un point de vue de statisticien. Contrairement à Deparcieux, Lambert ne s'intéresse pas à la manière de recueillir des données fiables. Il a pour objectif que les données soient suffisamment lissées pour montrer une belle courbe et une structure mathématique forte sous-jacente. Lambert étudie ainsi à deux reprises l'éventuelle équation comportant des fonctions usuelles qui rendrait compte de la courbe des survivants.

Lambert reprend des données antérieures interpolées pour avoir des entrées tous les ans de 0 à 103 ans. Sa table comporte sept colonnes comme on peut le voir sur la page suivante, qui reproduit l'édition originale en allemand. La première colonne donne l'année, la deuxième le nombre de décès pendant cette année, la troisième donne le nombre de survivants sur les 10 000 nouveaux nés. Dans la quatrième colonne figure les sommes des vivants (cumul à partir du dernier âge et non du premier) dont on a vu chez Deparcieux l'intérêt pour le calcul de la vie moyenne. La cinquième colonne indique sur combien de chaque âge un individu meurt chaque année : c'est le quotient des colonnes numérotées trois et deux.

Enfin les sixième et septième colonnes donnent respectivement les âges moyens et probables. Lambert utilise d'ailleurs la même expression vie moyenne pour les deux. La vie moyenne est obtenue par quotient des colonnes numérotées quatre et trois. Lambert attribue le mode de calcul de la vie probable à Halley et celui de la vie moyenne à Deparcieux. Lambert explique sur des exemples que les deux calculs répondent à des problèmes différents. La vie probable est utile pour les calculs de probabilité et les paris, la vie moyenne pour les calculs de rentes et de tontines. Mais le géomètre reprend le dessus et Lambert abandonne les remarques statistiques pour poser le problème général de l'égalité éventuelle des deux paramètres.

Zum §. 24. der Anmerkungen über die Sterblichkeit.

Alter Jahre.	Jährlich sterbende.	Lebende.	Summe der Lebenden.	Es stirbt einer von	Mittlere Alter.	Alter, wo die Hälfte gestorben.
0	2610	10000	295022	4	29,5	22,6
1	610	7390	285022	12	40,2	40,5
2	340	6780	277632	20	42,1	44,4
3	233	6440	270852	27	45,0	46,7
4	169	6207	264412	37	46,7	48,3
5	140	6038	258205	43	47,7	49,5
6	116	5898	252167	51	48,5	50,2
7	96	5782	246269	60	49,6	51,0
8	80	5686	240487	71	50,3	51,6
9	68	5606	234801	82	50,9	52,0
10	58	5538	229195	95	51,4	52,4
11	50	5480	223657	110	51,8	52,8
12	45	5430	218177	121	52,2	53,1
13	42	5385	212747	128	52,5	53,3
14	39	5343	207362	137	52,8	53,6
15	37	5304	202019	143	53,1	53,8
16	35	5267	196715	151	53,3	54,0
17	33	5232	191448	159	53,6	54,2
18	36	5199	186216	144	53,8	54,4
19	39	5163	181017	132	54,1	54,6
20	43	5124	175854	119	54,3	54,8
21	48	5081	170730	106	54,6	55,1
22	54	5033	165649	93	54,5	55,3
23	58	4979	160616	86	55,2	55,6
24	62	4921	155637	79	55,6	55 9
25	65	4859	150716	75	56,0	56,3
26	67	4794	145857	72	56,4	56,7
27	69	4727	141063	69	56,8	57,0
28	70	4658	136336	67	57,3	57,4
29	71	4588	131678	65	57,7	57,8
30	72	4517	127090	63	58,1	58,1
31	74	4445	122573	60	58,6	58,5
32	75	4371	118128	58	59,0	58,9
33	77	4296	113757	56	59,5	59,3
34	79	4219	109461	54	59,9	59,7
35	80	4140	105242	52	60,4	60,1
36	80	4060	101102	51	60,9	60,5
37	81	3980	97042	49	61,4	60,9
38	81	3899	93062	48	61,9	61,3
39	80	3818	89163	48	62,4	61,7
40	80	3738	85345	47	62,8	62,1
41	79	3658	81607	46	63,3	62,5
42	78	3579	77949	45	63,8	62,9
43	77	3501	74370	45	64,2	63,2
44	76	3424	70869	45	64,7	63,6
45	75	3348	67445	44	65,1	64,0
46	75	3273	64097	44	65,5	64,3
47	76	3198	60924	42	66,0	64,7
48	77	3122	57626	41	66,4	65,0
49	78	3045	54504	39	66,9	65,4
50	80	2967	51459	37	67,3	65,8
51	82	2887	48492	35	67,8	66,2
52	84	2805	45605	33	68,2	66,6
53	86	2721	42800	32	68,7	67,0
54	88	2635	40079	30	69,2	67,5
55	90	2547	37444	28	69,7	67,9
55	90	2547	37444	28	69,7	67,9
56	92	2457	34897	27	70,2	68,4
57	94	2365	32440	25	70,7	68,9
58	96	2271	30075	24	71,2	69,4
59	98	2175	27804	22	71,8	70,0
60	100	2077	25629	21	72,3	70,6
61	101	1977	23552	20	72,9	71,2
62	103	1876	21575	18	73,5	71,9
63	105	1773	19699	17	74,1	72,4
64	104	1668	17926	16	74,7	73,1
65	102	1564	16258	15	75,4	73,7
66	99	1462	14694	15	76,0	74,4
67	95	1363	13232	14	76,7	75,1
68	92	1268	11869	14	77,4	75,7
69	88	1176	10601	13	78,0	76,3
70	85	1088	9425	13	78,7	76,9
71	82	1003	8337	12	79,4	77,5
72	80	921	7334	12	80,0	78,1
73	79	841	6413	11	80,6	78,7
74	77	762	5572	10	81,3	79,3
75	75	685	4810	9	82,0	79,9
76	73	610	4125	8	82,7	80,6
77	70	537	3515	8	83,5	81,3
78	66	467	2978	7	84,3	82,0
79	62	401	2511	6	85,2	82,8
80	56	339	2110	6	86,2	83,6
81	50	283	1771	6	87,2	84,5
82	43	233	1488	5	88,4	85,7
83	35	190	1255	5	89,6	87,4
84	25	155	1065	6	90,8	89,3
85	18	130	910	7	92,0	90,9
86	13	112	780	9	92,9	92,0
87	10	99	668	10	93,7	92,8
88	9	89	569	10	94,4	93,6
89	9	80	480	9	95,0	94,1
90	8	72	400	9	95,5	94,7
91	8	64	328	8	96,1	95,3
92	8	56	264	7	96,7	95,9
93	7	48	208	7	97,3	96,5
94	7	41	160	6	97,9	97,1
95	7	34	119	5	98,5	97,7
96	6	27	85	4	99,2	98,3
97	6	21	58	3	99,8	98,9
98	5	15	37	3	100,5	99,5
99	4	10	22	2	101,2	100,3
100	3	6	12	2	102,0	101,0
101	1	3	6	2	103,0	102,5
102	1	2	3	2	103,5	103,0
103		1	1		104,0	

Fig. 3 – Table de Lambert

Lambert semble d'abord penser que les deux paramètres devraient être égaux et que les écarts viendraient des approximations utilisées dans les calculs.

Les citations qui suivent proviennent de l'édition en français de l'œuvre de Lambert [Lam, p. 43-47]. Nous les accompagnons de quelques commentaires.

§ 36

> On pourrait d'ailleurs penser que les nombres de la sixième et de la septième colonne devraient entièrement concorder. La sixième donne la durée moyenne de la vie de toutes les personnes qui ont ensemble un même âge. La septième, elle, indique l'âge probable de chacune de ces personnes en particulier, pour autant que celui-ci est déterminé par la moitié d'entre elles qui ont disparu. Il semble que ces deux déterminations devraient concorder, et si la différence dans la première année n'était pas très grande, on pourrait aisément conclure que les très petites différences des autres années proviennent tout simplement de ce que les observations dont les tables sont tirées souffrent de quelques petites inexactitudes parce qu'elles ne s'étendent pas sur un aussi grand espace de temps, etc.

Mais il faut voir cela de plus près :

§ 37

> Mais cette conclusion ne va pas bien. Or, il vaut la peine de voir d'où proviennent les différences entre les deux colonnes et pourquoi, s'il doit y en avoir, elles ne sont pas plus grandes ; je vais donc poursuivre un peu cette recherche.

§ 38

> Je suppose donc premièrement que les deux dernières colonnes doivent entièrement concorder ; la question se pose de savoir jusqu'à quel point on peut alors déterminer la loi de la mortalité ?

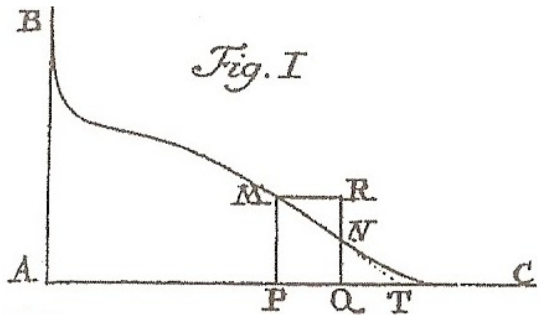


Fig. 4 – Figure I extraite de la planche hors-texte (Tab. XVI) de [Lam, p. 142].

> On représente les années d'âge par les abscisses AP, AQ, AC, et les ordonnées AB, PM, QN doivent indiquer combien d'entre les nouveaux-nés vivent encore à chaque âge. Ainsi sont représentés les nombres de la troisième colonne. Prenons maintenant un âge quelconque AP qui correspond à un nombre PM de survivants. Puis soit AQ l'âge où la moitié

de ces derniers sont encore en vie ; QN est donc égal à ½ PM ; AQ est donc l'âge probable de chacun de ceux qui atteignent l'âge AP, et, pour chaque année AP, les AQ seront les nombres d'années indiqués dans la septième colonne.

Ainsi on cherche d'abord « la loi de mortalité », autrement dit la courbe telle que la moyenne et la médiane soient toujours égales à tous les âges. Sur les abscisses, on a les âges comme AP ; l'ordonnée correspondante sur la courbe PM est le nombre de survivants à l'âge AP. On construit Q de manière à ce que son ordonnée QN soit la moitié de PM. AQ est l'âge où la moitié de ces survivants sont encore en vie, donc la vie probable de la septième colonne. Et PQ donne la durée de vie probable à l'âge AP.

§ 39

Au contraire, on trouve l'âge moyen en divisant la surface PCM par PM et en ajoutant AP au quotient. Comme AQ doit aussi être l'âge moyen, il suffit de compléter le rectangle PMRQ dont la surface sera égale à la surface PCM.

En effet $\frac{\mathrm{PCM}}{\mathrm{PM}} = \mathrm{PQ}$ et $\frac{\mathrm{PMRQ}}{\mathrm{PM}} = \mathrm{PQ}$ donc PCM = PMRQ.

Pour l'âge moyen, on divise la somme des vivants cumulée depuis la fin par le nombre de survivants, ce que Lambert traduit habilement par l'aire sous la courbe PCM divisée par PM. Ainsi $\frac{\mathrm{PCM}}{\mathrm{PM}} + \mathrm{AP}$ est l'âge moyen de décès, donc la durée de vie moyenne de la colonne 6. La durée de vie moyenne restante à l'âge AP est alors $\frac{\mathrm{PCM}}{\mathrm{PM}}$. L'égalité des vies moyenne et probable se traduit par l'égalité $\frac{\mathrm{PCM}}{\mathrm{PM}} = \mathrm{PQ}$. Et comme le rectangle PMRQ est égal à PM × PQ, il vient : PCM = PMRQ. En retirant la partie commune PMNQ, on pourrait ajouter : QCN = MNR.

§ 40

Posons maintenant

PC = x QC = ξ

PM = y QN = ½ y

Et pour la courbe en général $x = ay^n + by^m + \text{etc.}$

donc on a $\mathrm{PCM} = \int y\,dx = \frac{n}{1+n} a y^{n+1} + \frac{m}{1+m} b y^{m+1} + \text{etc.}$

donc $\frac{\mathrm{PCM}}{\mathrm{PM}} = \frac{n}{1+n} a y^n + \frac{m}{1+m} b y^m + \text{etc.} = \mathrm{PQ}.$

Il y a ici un peu d'algèbre, puisqu'on suppose que la fonction qui donne x l'âge en fonction de y nombre de survivants est du type polynôme. Le calcul se fait en remarquant que : $\int y\,dx = \int x\,dy$.

§ 41

Ensuite $\xi = a\left(\frac{1}{2}\right)^n y^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^m y^m$ + etc.

donc $x - \xi = a\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)y^n + b\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right)y^m$ + etc. = PQ.

§ 42

De ces deux valeurs de PQ, il suit

$$\frac{n}{1+n}ay^n + \frac{m}{1+m}by^m + \text{etc.} = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)ay^n + \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right)by^m + \text{etc.}$$

Les membres correspondants peuvent ici être comparés, et comme ils ont la même forme, nous prendrons le premier.

Nous avons donc $\frac{n}{1+n} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{[n]}$.

D'où suit $2^n = 1 + n$.

Cette égalité ne donne pour n que deux valeurs réelles, à savoir

$n = 0$,

$n = 1$.

En gardant les deux, on trouve seulement $x = a + by$ et c'est pourquoi BMNC devrait être une droite. Elle ne l'est cependant pas, et ainsi il ne s'ensuit pas que l'âge moyen et l'âge probable concordent entièrement.

On identifie les termes en y^n ; on a $n = 0$ ou 1, et la courbe serait droite, ce qui n'est pas le cas. D'où la conclusion attendue.

Ces textes montrent que la moyenne et la médiane sont donc bien identifiées et distinguées dès le milieu du dix-huitième siècle. Alors pourquoi la médiane est-elle réputée avoir été inventée un peu plus tard par Boscovich ?

2. – Boscovich et la médiane

On attribue souvent à Boscovich l' "invention"ou la "première utilisation" de la médiane. Citons par exemple J.-J. Droesbeke & P. Tassi : « Remarquons encore que la médiane voit naître son intérêt à la même époque, en 1757, sous la plume de Roger Joseph Boscovich » [Dr & T, p. 10]. Yadolah Dodge écrit : « L'introduction de la moyenne arithmétique pondérée en tant que telle, est due à R. Cotes en 1712. Et les prémices de la médiane viennent en 1748 suite aux propositions similaires d'Euler et Mayer sur le moyen de diviser les observations d'un ensemble de données, en deux parties égales. La véritable méthode de la médiane sera présentée par Boscovich en 1757. » [Do, p. 68]. Nous allons préciser le contexte dans lequel Boscovich utilisa une médiane : la résolution d'un problème d'ajustement pour déterminer la forme de la Terre.

Roger Joseph Boscovich

Roger Joseph Boscovich (1711-1787) naquit à Dubrovnik. Il y suivit des études dans le collège jésuite de la ville et, dans sa quinzième année, partit compléter sa formation au Collège romain. Il y fut nommé professeur de mathématiques dès 1740, avant même d'avoir terminé sa formation théologique. Il fut ordonné prêtre en 1744. Entre 1735 et 1744, il publia une vingtaine d'articles de mathématiques, d'astronomie et de physique.

La figure de la Terre

Un problème classique qui intéressait les savants du XVIII^e^ siècle était celui de la figure de la Terre, c'est-à-dire sa forme, et plus précisément, l'étude de sa déformation par rapport à la sphère. Newton, dans ses *Principia*, partant du principe que la pesanteur primitive venait de l'attraction de toutes les parties du globe, trouvait que la Terre était un sphéroïde elliptique aplati aux pôles. À l'opposé, Dominique Cassini, directeur de l'Observatoire de Paris, se basant sur la diminution des longueurs des degrés de méridien du sud au nord de la France, défendait l'idée que la Terre était aplatie à l'équateur, c'est-à-dire qu'elle était un sphéroïde elliptique allongé.

Deux méthodes étaient employées afin de déterminer lequel de ces deux points de vue était correct : les expériences sur l'allongement ou le raccourcissement du pendule battant la seconde et les mesures des arcs de méridiens. Ces deux méthodes présentaient des difficultés mathématiques semblables pour trancher entre l'hypothèse "aplatie" et l'hypothèse "allongée".

Nous porterons notre attention dans la suite sur la deuxième méthode : l'idée consistait à mesurer la longueur d'un arc de méridien d'un degré de latitude en plusieurs endroits. Pour obtenir ces mesures, il fallait faire une triangulation du terrain et mesurer les angles entre des points remarquables.

La mesure d'une base rectiligne permettait alors d'obtenir une mesure du degré de méridien. On pensait que si l'on obtenait une mesure d'un degré près de l'équateur plus courte que celle d'un degré près du pôle, alors la forme de la Terre serait aplatie et que la différence entre les deux mesures pourrait servir à mesurer cet aplatissement. De 1735 à 1754, l'Académie des Sciences entreprit quatre mesures d'arc de méridiens à des latitudes diverses (Laponie, Équateur, Pérou, Paris) afin de déterminer la forme de la Terre et son aplatissement exprimé en termes d'ellipticité (définie comme le rapport de la différence des demi-axes de l'ellipse au demi grand axe).

En 1750, le pape Benoît XIV voulut apporter sa contribution à ce projet et chargea Boscovich et le jésuite anglais Christopher Maire de réaliser une mesure du méridien près de Rome et de réaliser une nouvelle carte des États Pontificaux. Leur expédition dura jusqu'en 1753 et un rapport (*De Litteraria Expeditione…*) fut publié en latin en 1755. Une traduction française en fut publiée à Paris en 1770 sous le titre *Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Église, entrepris par l'Ordre et sous les auspices du pape Benoît XIV, pour mesurer deux degrés de méridien, et corriger la carte de l'État ecclésiastique.*

Le rapport de l'expédition de Boscovich et Maire

Cet ouvrage d'environ cinq cents pages est constitué de cinq opuscules ou livres. Le premier livre, qui est une introduction historique et physique au voyage dans l'État de l'Église a été écrit par Boscovich. Le second et le troisième livre ont été rédigés par le père Maire : ils contiennent la détermination de la mesure de la valeur du degré de méridien à partir de leurs observations et le détail de la correction de la carte géographique des États du Pape. Les deux derniers livres ont été écrits par Boscovich : le quatrième traite de la description et de l'usage des instruments qui ont servi lors du voyage et le cinquième contient la détermination de la figure de la Terre par l'équilibre et la mesure des degrés. Nous étudierons particulièrement la note ajoutée à la fin du livre V (p. 501-512) pour donner des éclaircissements sur le texte qui prend en compte les mesures de degrés de méridien faites en Autriche, Moravie, Stirie, Hongrie, Piémont et Amérique septentrionale : Boscovich y expose la façon de déterminer l'ellipticité de la Terre à partir des mesures de différents degrés.

Détermination de la figure de la Terre (première méthode)

Boscovich cherchait à déterminer la figure de la Terre à partir de mesures de « degrés », c'est-à-dire de longueurs d'un degré d'arc de méridien, mesurés à différentes latitudes. Il faisait l'hypothèse d'une figure elliptique de la Terre pour des raisons d'équilibre qu'il développe dans le livre V. Pour des petits arcs d'une figure elliptique, la relation $y = a + b\sin^2(\lambda)$, où y désigne la longueur de l'arc et λ la latitude, était connue pour être une approximation satisfaisante, le paramètre a pouvant être interprété comme étant la longueur du degré de méridien à l'équateur et b comme excès de la valeur du degré de méridien au pôle par rapport à celui de l'équateur. On pouvait ensuite calculer l'ellipticité avec la relation $\frac{1}{ellipticit\acute{e}} = \frac{3a}{b}$ [M, p. 127-130].

La relation $y = a + b\sin^2(\lambda)$ qui se traduit par une proportionnalité des différences des longueurs des degrés avec les différences des carrés des sinus des latitudes peut aussi être interprétée en une proportionnalité des différences des longueurs des degrés avec les différences des sinus verses des latitudes doubles à cause de l'égalité : $\frac{1}{2}$sin verse $(2\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\lambda)) = \sin^2(\lambda)$, le sinus verse désignant l'excès du rayon sur le cosinus.

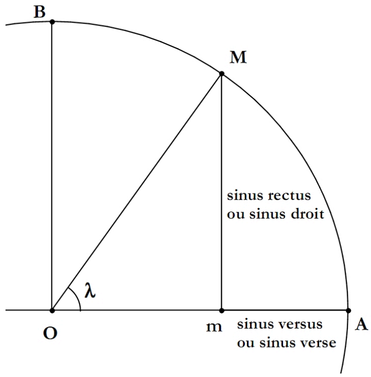


Fig.5 – Définition graphique des sinus "droit" et "verse"

Le but de Boscovich était donc de déterminer les valeurs *a* et *b* permettant d'obtenir un ajustement de y en $x = \frac{1}{2}$sin verse (2λ) de la forme $y = a + bx$ pour les *n* observations (x_i, y_i).

Dans une première approche du problème, Boscovich avait cherché à déterminer l'ellipticité de la manière suivante. À partir d'une table de cinq observations de degrés de méridiens (latitude et mesure du degré de méridien), il avait calculé les coefficients *a* et *b* et l'ellipticité de la Terre en prenant de toutes les façons possibles deux parmi ces cinq observations.

> 301. Je proposerai donc deux tables : la première [Fig. 6] a sept colonnes dont la première contient par ordre les noms des degrés ; la seconde, leur latitude ; la troisième, la moitié du sinus verse d'une latitude double ; la quatrième, le nombre de toises de chaque degré ; la cinquième leur excès sur le premier degré dont la latitude = 0 ; la sixième, ce même excès calculé dans l'hypothèse d'une proportionnalité avec les sinus verses ; la septième, l'erreur ou la différence de l'excès calculé à l'excès observé. Cette première table nous donnera le moyen de construire la seconde [Fig. 7] qui n'a que trois colonnes ; dont la première contient les rangs des degrés combinés ; la seconde, l'excès qu'on en conclut pour un degré sous le pôle sur un degré proche de l'équateur ; la troisième, la fraction que donne le tiers de cet excès divisé par le premier degré, c'est-à-dire l'ellipticité. L'excès du degré de M. l'Abbé de la Caille sur le nôtre, prouve l'allongement de la figure. C'est pour cela que dans la seconde table j'ai marqué du signe négatif sa différence & son ellipticité comparée à celle de nôtre degré, & que j'ai donné le même signe à son erreur dans la première table que voici.
> 302. Dans la dernière colonne de cette table on voit de combien les degrés intermédiaires s'écartent de la raison doublée des sinus des latitudes

doubles, supposé que le premier & le dernier soient justes. La différence calculée du troisième et du quatrième degré étant positive, celle du second est négative. Quand même il arriverait quelque léger changement dans le premier & le dernier degré, le second ne s'éloignerait pas sensiblement de ce rapport. Il n'en est pas ainsi du troisième & du quatrième : la différence est déjà trop sensible pour qu'on puisse les concilier avec la raison doublée. Voyons maintenant dans la seconde table l'excès du dernier degré sur le premier provenant de la comparaison des degrés pris deux à deux, & l'ellipticité qui en résulte [B & M, L. V, art. 301-302, p. 480].

DÉGRÉ.	Latitude.	$\frac{1}{2}$ sin. vers. pour un ray. de 10000.	Nombre de toises.	Différence au premier dégré.	Différence calculée.	Erreur.
De Quito . . .	0°. 0′	0	56751	0	0	0
Du Cap de B. E.	33 . 18	2987	57037	286	240	—46
De Rome . . .	42 . 59	4648	56979	228	372	144
De Paris . . .	49 . 23	5762	57074	323	461	138
De Lapponie .	66 . 19	8386	57422	671	671	0 (1)

Fig. 6 – [B & M, art. 301, p. 482]

Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle sur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.	Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle sur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.
1 . 5	800	$\frac{1}{213}$	2 . 4	133	$\frac{1}{128}$
2 . 5	713	$\frac{1}{239}$	3 . 4	853	$\frac{1}{200}$
3 . 5	1185	$\frac{1}{144}$	1 . 3	491	$\frac{1}{347}$
4 . 5	1327	$\frac{1}{128}$	2 . 3	—350	$-\frac{1}{486}$
1 . 4	542	$\frac{1}{314}$	1 . 2	957	$\frac{1}{78}$

Fig. 7 – [B & M, art. 302, p. 483]

Commentaires sur la première table (Fig. 6)

Le degré de Quito a été calculé à partir des mesures faites lors de l'expédition au Pérou en 1735 par La Condamine, Bouguer et Godin. Le degré du Cap de Bonne Espérance est celui mesuré par l'Abbé de La Caille en 1750. Le degré de Rome est celui calculé à partir des mesures entre Rome et Rimini par Maire et Boscovich de 1750 à 1752. Le degré de Laponie a été calculé à partir des mesures faites lors de l'expédition en Laponie en 1736 (Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, Outhier[1]). L'arc de méridien mesuré en 1670 entre Paris et Amiens par l'abbé Picard avait donné une mesure de 57060

1 Réginald Outhier était chanoine de la cathédrale de Bayeux et membre de l'Académie royale de Caen.

toises. Une correction fut apporté par des académiciens en 1740 qui portèrent sa mesure à 57074 toises.

Exemple de calcul pour le degré de Rome (3e ligne de la table 1).

2e colonne : $\lambda = 42° \ 59'$

3e colonne : $\frac{1}{2}$ sin verse $(2\lambda) = \sin^2(\lambda) = 0{,}46483$, soit 4 648 toises pour un rayon de 10 000 toises.

4e colonne : la mesure du degré de méridien est 56 979 toises.

5e colonne : 56 979 – 56 751 = 228 toises.

6e colonne : en supposant qu'il y ait proportionnalité avec les sinus verses, $\frac{4\,648}{8\,386} \times 671 = 371{,}9$, arrondis à 372 toises.

7e colonne : écart 372 – 228 = 144 toises.

On remarquera que la valeur de la 2e ligne et 3e colonne devrait être de 3 014 car $\sin^2(33° \ 18') = 0{,}3014$.

DÉGRÉ.	Latitude.	½ sin. vers. pour un ray. de 10000.	Nombre de toises.	Différence au premier dégré.	Différence calculée.	Erreur.
De Quito . . .	0°. 0′	0	56751	0	0	0
Du Cap de B. E.	33 . 18	2987	57037	286	240	—46
De Rome . . .	42 . 59	4648	56979	228	372	144
De Paris . . .	49 . 23	5762	57074	323	461	138
De Lapponie .	66 . 19	8386	57422	671	671	0 (1)

Fig. 6 – Première table, *op. cit.* (*supra*, p. 403)

Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle sur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.	Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle sur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.
1 . 5	800	$\frac{1}{213}$	2 . 4	133	$\frac{1}{128}$
2 . 5	713	$\frac{1}{239}$	3 . 4	853	$\frac{1}{200}$
3 . 5	1185	$\frac{1}{144}$	1 . 3	491	$\frac{1}{347}$
4 . 5	1327	$\frac{1}{128}$	2 . 3	—350	$-\frac{1}{486}$
1 . 4	542	$\frac{1}{314}$	1 . 2	957	$\frac{1}{78}$

Fig. 7 – Deuxième table *op. cit.* (*supra*, p. 403)

Commentaires sur la deuxième table (Fig. 7)

Il s'agit de déterminer les coefficients a et b de la relation $y = a + b \sin^2(\lambda)$ à partir des deux points considérés et d'en déduire l'ellipticité à l'aide de la formule $\frac{1}{\textit{ellipticité}} = \frac{3a}{b}$. La deuxième colonne de la table 2 contient les différentes valeurs du coefficient *b*. Si l'on fait les calculs à partir des valeurs de la table 1, on obtient les valeurs de la table 2, sauf pour trois paires de points. Pour les points 1 et 4, on trouve 561 au lieu de 542 pour l'excès du degré au pôle sur le degré à l'équateur, et par suite une ellipticité de 1/303 au lieu de 1/314. Pour les points 2 et 4 et les points 1 et 2, le calcul de l'excès du degré au pôle sur le degré à l'équateur donne la même valeur que la table de Boscovich. En revanche, l'ellipticité n'est pas la même : 1/1286 au lieu de 1/128 dans le premier cas et 1/178 au lieu de 1/78 dans le second. On peut légitimement penser qu'il s'agit dans ces deux cas d'une erreur d'impression (non signalée dans les errata). Boscovich commente cette table 2 [B & M, art. 303] :

> Or on voit par cette table quelle est l'irrégularité des degrés, puisqu'ils donnent des combinaisons si différentes. Si l'on prend un milieu entre ces dix combinaisons, le tiers de l'excès moyen sera 222, qui donne pour ellipticité 1/155. Mais si on rejette la sixième et la neuvième qui sont si différentes des autres, & dont les degrés sont peu éloignés entre eux, le milieu sera 286, & l'ellipticité 1/198. Mais ce milieu même diffère encore beaucoup de plusieurs d'entre ces huit déterminations [B & M, L. V, p. 483].

Le calcul de la valeur moyenne des excès donne en effet 665,1 mais cette valeur correspond à une ellipticité d'environ 1/255 et non 1/155 (cette erreur est signalée dans la liste des errata p. 526). En revanche, en ne prenant pas en compte les sixième et neuvième valeurs, on obtient bien 286 pour le tiers de l'excès moyen et 1/198 pour l'ellipticité. Ce résultat ne satisfaisait pas Boscovich, car les ellipticités calculées à partir des paires de points différaient beaucoup de cette valeur moyenne et, par conséquent, ces mesures de degrés ne pouvaient pas se concilier avec l'hypothèse newtonienne.

Détermination de la figure de la Terre (deuxième méthode)

C'est pourquoi Boscovitch décida de poursuivre ses recherches sur la détermination de l'ellipticité de Terre après la publication en 1755 du *De Litteraria Expeditione*… Il publia en 1757 le résumé d'un travail sur une nouvelle méthode de détermination de l'ellipticité de la Terre dans les *Actes de l'Institut de Bologne*, article qui fut repris et développé en 1760 dans les *Supplémens de la Philosophie en vers latins* publié à Rome par Benedict Stay. Cet article figure aussi dans la traduction française du traité de Maire et Boscovich publiée en 1770. Prévu pour être mis en note de l'article 303 du livre V, il a été reporté, à cause de sa longueur, à la fin de ce livre aux pages 501-512 et en constitue les articles 385 à 397.

Boscovich y présente une nouvelle méthode de calcul de l'ellipticité de la Terre à partir des cinq mêmes observations. Il propose deux nouvelles conditions pour déterminer la meilleure droite de régression et donne un algorithme géométrique de résolution illustré par une figure. Boscovich énonce le problème qu'il cherchait à résoudre de la façon suivante :

> Étant donné un certain nombre de degrés, trouver la correction qu'il faut faire à chacun d'eux, en observant ces trois conditions : la première, que leurs différences soient proportionnelles aux différences des sinus verses d'une latitude double : la seconde, que la somme des corrections positives soit égale à la somme des corrections négatives : la troisième que la somme de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit la moindre possible, pour le cas où les deux premières conditions soient remplies.

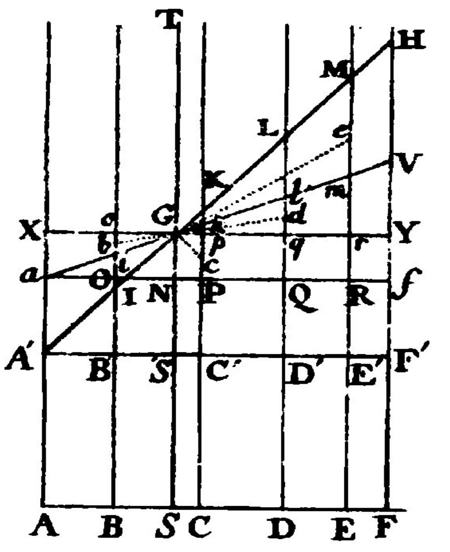
Pourquoi ces conditions ?

Première condition : comme nous l'avons vu, le but de Boscovich était de déterminer a et b pour trouver un ajustement de y en $x = \frac{1}{2}$ sin verse (2λ) de la forme $y = a + bx$ pour les n observations (x_i, y_i).

Deuxième condition : elle est justifiée par le fait que les observateurs ont pu faire des erreurs de mesure par excès ou par défaut qui se compensent. Les coefficients a et b de la droite d'ajustement de y en x doivent donc vérifier : $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right) = 0$, ce qui peut s'écrire aussi : $\bar{y} - a - b\bar{x} = 0$ où $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ sont les moyennes arithmétiques des valeurs observées de x et y. En d'autres termes, la droite d'ajustement doit passer par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage des n observations (x_i, y_i).

Troisième condition : elle consiste à chercher parmi les droites précédentes (c'est-à-dire celles qui vérifient la deuxième condition) celle qui minimise $\sum_{i=1}^{n}\left|y_i - a - bx_i\right|$. En remplaçant a par $\bar{y} - b\bar{x}$ dans l'expression précédente, à déterminer b tel que : $\sum_{i=1}^{n}\left|\left(y_i - \bar{y}\right) - b\left(x_i - \bar{x}\right)\right|$ = minimum.

Boscovitch donne alors un algorithme géométrique permettant de déterminer ce minimum. Il place dans un diagramme rectangulaire les cinq points a, b, c, d, e d'abscisse les demi-sinus verses (AA, AB, AC, AD, AE) et d'ordonnée les degrés (Aa, Bb, Cc, Dd, Ee) [B & M, art. 387]. La première condition revient à déterminer une droite ajustant les 5 points placés précédemment, comme la droite A'H [B & M, art. 388]. La deuxième condition revient à faire passer cette droite par G, point moyen des cinq points [B & M, art. 389]. Pour le calcul des coordonnées de G, Boscovich s'appuie sur le schéma suivant [B & M, art. 392] :



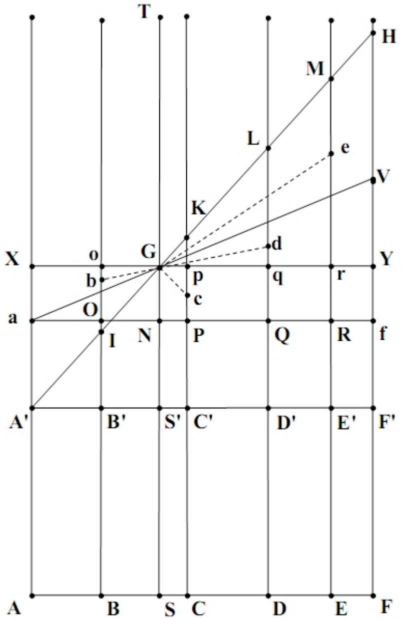


Fig. 8 – Fig. 7 de la planche I dans [B & M, art. 392], refaite ci-contre

Pour satisfaire la troisième condition, il imagine une droite mobile partant de la position verticale SGT tournant dans le sens horaire autour de G. Il suffit de noter l'ordre dans lequel les points sont rencontrés par cette droite et de faire la somme des corrections AS, BS, CS, DS et ES correspondant à ces points. Lorsque cette somme devient supérieure à la moitié de la somme totale des corrections, la droite obtenue vérifie la troisième condition [B & M, art. 390-391].

Il propose alors la règle suivante [B & M, art. 393] :

> divisez pour chaque point la différence de son sinus verse au sinus verse AS par la différence du degré qui y répond, au degré SG ; & que les quotients des points qui se trouvent dans deux angles opposés au sommet, considérés ensemble, soient rangés par ordre, en commençant par les plus petits ; qu'ensuite on range aussi les quotients des autres points, placés dans les autres angles, en commençant par les plus grands. C'est dans cet ordre que la droite mobile atteindra tous ces points, si elle commence à se mouvoir dans les deux premiers angles ; & ce serait le contraire si elle commençait à se mouvoir dans les deux derniers.

Dans la suite, Boscovich détaille les calculs pour les cinq points de la table 1 [B & M, art. 395-397]. Tout d'abord, il détermine le centre de gravité G de ces points. AA, AB, AC, AD et AE sont les valeurs de la troisième colonne (demi-sinus verse d'une latitude double pour un rayon de 10 000 toises), à savoir 0, 2 987, 4 648, 5 762 et 8 386. Puis AS = x est la moyenne de ces cinq valeurs : il obtient AS = 4 356,6.

A*a*, B*b*, C*c*, D*d* et E*e* sont les valeurs qui figurent dans la quatrième colonne (nombre de toises de chacun des degrés), 56 751, 57 037, 56 979, 57 074 et 57 422. SG = *y* est la moyenne de ces 5 valeurs.

$$\text{NG} = \frac{286+228+323+671}{5} = 301{,}6.$$

Par conséquent, SG = Aa + NG = 57 052,6.

Puis il calcule les "distances" de ces cinq points aux droites SGT et XGY. Les distances des points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* à la droite verticale SGT s'obtiennent en retranchant à *a*N les valeurs de la troisième colonne.

*a*N = 4 356,6 ; ON = 1 369,6 ; PN = – 291,4 ;
QN = – 1 405,4 ; RN = – 4 029,4.

Les distances des points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* à la droite horizontale XGY s'obtiennent en retranchant à NG les valeurs de la cinquième colonne.

*a*X = 301,6 ; *bo* = 15,6 ; *cp* = 73,6 ; *dq* = – 21,4 ; *er* = – 369,4.

En étudiant les signes de ces quantités, il peut déterminer que *a*, *b*, *d*, *e* sont dans les quadrants SGX ou TGY (points de première espèce, c'est-à-dire appartenant au premier ou au troisième quadrant) et *c* dans TGX ou SGY (point de seconde espèce, c'est-à-dire appartenant au deuxième ou au quatrième quadrant). Boscovich divise ensuite, pour chacun des points *a*, *b*, *d*, *e*, la distance de ce point à la droite SGT par sa distance à XGY.

Cela donne pour *a* : $\frac{a\text{N}}{a\text{X}} = \frac{4\,356{,}6}{301{,}6} = 14{,}4$, pour *b* : $\frac{\text{ON}}{bo} = \frac{1\,369{,}6}{15{,}6} = 87{,}8$,

pour *d* : $\frac{\text{QN}}{dq} = \frac{-1\,405{,}4}{-21{,}4} = 65{,}7$, pour *e* : $\frac{\text{RN}}{er} = \frac{-4\,029{,}4}{-369{,}4} = 10{,}9$.

Il classe ces valeurs dans l'ordre croissant : 11, 14, 66, 88 correspondant à *e, a*, *b*, *d*, ce qui revient à ordonner les pentes des droites G*a*, G*b*, G*d* et G*e* par ordre décroissant. Il en déduit qu'une droite mobile partant de la position SGT et tournant vers la droite rencontrera successivement les points *e, a*, *d*, *b* et enfin le point *c*. Il lui reste à déterminer en quel point la somme des corrections tant positives que négatives est minimum, c'est-à-dire quand la somme des corrections des points pris dans cet ordre cesse d'être inférieure à la somme totale des corrections comme il l'indique (art. 391) :

> 391. Or les différences ou changements de chaque correction, répondant aux divers changements de position de la droite mobile, seront proportionnels aux distances AS, BS, CS, DS, ES, soit qu'ils soient des accroissements ou des diminutions. Car ces différences ou changements seront des bases de triangles semblables, & dont le sommet sera en G, & ces bases seront comprises entre deux positions des droites GA', GI, GK, GL, GM ; par conséquent elles seront en raison de ces droites ; c'est-à-dire, par la propriété des parallèles, en raison de AS, BS, CS, DS, ES. C'est pourquoi si l'on observe en quel ordre la droite mobile doit atteindre les

> points a, b, c, d, e, & qu'on ajoute ensemble dans le même ordre celles des droites AS, BS, CS, DS, ES qui répondent à ces points ; tandis que cette somme sera moindre que la moitié de la somme de toutes ces droites prises ensemble, ou moindre que la somme de celles qui sont de part et d'autre du point S (car les deux sommes prises l'une à droite, l'autre à gauche de ce point, sont égales entre elles) ; la somme des différences relatives aux corrections croissantes, sera encore moindre que celle des décroissantes ; la somme de toutes les corrections ira encore en diminuant, & cette somme sera la moindre possible, quand la somme de celles des droites AS, BS, CS, DS, ES qui ont un rapport aux points déjà rencontrés par la droite mobile, cessera d'être moindre que la moitié de la somme de toutes ces droites, ou que la somme de celles qui sont de part ou d'autre du point S.

La demi-somme des distances de tous les points à la droite SGT vaut 4 356,6 + 1 369,6 = 5 726,2. La distance du premier point *e* à la droite SGT vaut 4 029,4 ce qui est moindre que 5 726,2. Si on lui ajoute celle du point suivant *a*, on obtient 4 029,4 + 4 356,6 = 8 386 qui surpasse 5 726,2. Ainsi le minimum cherché est atteint quand la droite mobile coïncide avec la droite *a*GV. Si l'on fait tourner la droite mobile dans l'autre sens, les points sont rencontrés dans l'ordre inverse à savoir : *c*, *b*, *d*, *a*, *e* et l'on trouve, de manière analogue, que la position pour le minimum est celle de la droite *a*GV.

Il reste à calculer l'ellipticité correspondant à ce minimum.

À l'aide de l'égalité $\frac{a\mathrm{N}}{\mathrm{NG}} = \frac{af}{f\mathrm{V}}$, il détermine fV = 692,3. Cette valeur est le coefficient directeur de la droite qui réalise le minimum recherché. La droite d'ajustement *a*GV a pour équation : $y = 56\,751 + 692{,}3 \sin^2(\lambda)$. Pour obtenir l'ellipticité, il suffit alors de diviser le degré de *a* (56 751) par le tiers de cette valeur et d'ajouter 2 (art. 350). Il obtient : $\frac{3 \times 56\,751}{692{,}3} = 246$ et l'ellipticité vaut 1/248.

Il peut aussi corriger les autres degrés à l'aide de la droite d'ajustement. Il obtient pour *b* : 56 957,8 soit une erreur de – 79,2 ; pour *c* : 57 072,8 soit une erreur de 93,8 ; pour *d* : 57 149,9 soit une erreur de 75,9 ; pour *e* : 57 331,6 soit une erreur de – 90,4.

Il applique ensuite sa méthode à une table de neuf observations obtenue en complétant les cinq premières par quatre autres mais la nouvelle ellipticité obtenue, même si elle est plus faible que la précédente, ne le satisfait pas car elle reste trop grande et n'est pas cohérente avec l'hypothèse d'un noyau de gravitation sphérique. Dans la fin de la note, il reprend sans succès les calculs en éliminant l'observation du degré du Cap de Bonne Espérance (seule faite en latitude Sud) qui lui semble trop entachée d'erreurs et n'obtient l'ellipticité « souhaitée », 1/355, qu'en utilisant des observations faites en Autriche et

Hongrie par le Pr. Liesganig dont il a eu connaissance juste avant la mise sous presse.

Et la médiane dans tout cela ?

Si nous sommes obligés de constater en suivant le texte ligne à ligne que les calculs sont exacts, le concept de médiane est loin de sauter aux yeux ! En effet, la propriété de la médiane que l'on peut "retrouver" dans ce texte est la suivante : la médiane d'une série de valeurs est une valeur qui minimise la somme des écarts absolus.

Médiane (x_1, …, x_n) = x minimisant $\sum_{i=1}^{n}|x_i - x|$ (voir encadré suivant).

Prenons, par exemple, les 5 valeurs 0.8, 2.2, 3.7, 6.5, 7.8.

Notons $f(x) = \sum_{i=1}^{5}|x_i - x|$.

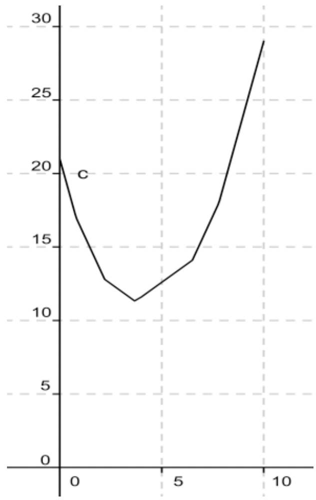
Le graphe de f est représenté à droite.

La fonction f est une fonction affine par morceaux, décroissante d'abord puis croissante ensuite, qui atteint son minimum en $x = 3{,}7$.

Dans le cas d'un nombre pair de $2n$ valeurs rangées par ordre croissant, la fonction f est constante et minimale sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$.

Toute valeur de cet intervalle est une médiane.

On choisit souvent, par convention, pour valeur de la médiane, la quantité : $\dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$.



Reprenons, en utilisant des notation modernes, l'algorithme présenté par Boscovich, en notant $b_i = \dfrac{y_i - \bar{y}}{x_i - \bar{x}}$ et $w_i = |x_i - \bar{x}|$.

Minimiser $\sum_{i=1}^{n}\left|(y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x})\right|$ revient à déterminer b minimisant $S(b)$ défini par $S(b) = \sum_{i=1}^{n} w_i |b_i - b|$. La fonction S est une fonction affine par morceaux avec une pente dépendant de la position de b parmi les b_i. Soient $b_{(i)}$ les nombres b_i rangés par ordre décroissant et $w_{(i)}$ les coefficients associés.

Pour b tel que $b_{(j+1)} < b < b_{(j)}$, $j = 1, \ldots, n-1$, la pente vaut :

$$\frac{S(b_{(j+1)}) - S(b_{(j)})}{b_{(j+1)} - b_{(j)}} = \sum_{i=(j+1)}^{n} w_{(i)} - \sum_{i=1}^{(j)} w_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{(i)} - 2\sum_{i=1}^{(j)} w_{(i)} .$$

Le minimum de S(b) est donc obtenu pour $b = b_{(k)}$, où k est déterminé par l'inégalité : $\sum_{i=(k+1)}^{n} w_{(i)} - \sum_{i=1}^{(k)} w_{(i)} \leq 0 < \sum_{i=(k)}^{n} w_{(i)} - \sum_{i=1}^{(k-1)} w_{(i)}$,

ou de manière équivalente à : $\sum_{i=1}^{(k-1)} w_{(i)} < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_{(i)} \leq \sum_{i=1}^{(k)} w_{(i)}$.

L'entier k cherché est donc le plus petit entier vérifiant : $\sum_{i=1}^{(k)} w_{(i)} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_{(i)}$.

La valeur $b_{(k)}$ peut ainsi être interprétée comme médiane des valeurs b_i, pondérées par les poids w_i.

Comme nous l'avons montré plus haut, c'est dans le cadre d'un problème d'ajustement que Boscovich fait intervenir la notion de médiane. Il cherche à déterminer une valeur qui résume les coefficients directeurs des droites et, plutôt que de choisir la moyenne arithmétique, il décide de déterminer cette valeur de façon à ce qu'elle minimise la somme des écarts absolus. Il propose une procédure géométrique et mécanique pour déterminer ce minimum. Dans un mémoire de 1789 intitulé *Sur les degrés mesurés des méridiens et sur les longueurs observées du pendule*, Laplace cite cette méthode : « M. Boscovich a donné pour cet objet une méthode ingénieuse, qui est exposée à la fin de l'édition française de son Voyage astronomique et géographique ; mais comme il l'a inutilement compliquée de la considération des figures, je vais la présenter ici sous la forme analytique la plus simple. » et il propose d'y substituer une méthode analytique plus proche de l'exposé moderne du paragraphe précédent.

Par la suite, la méthode de Boscovich sera délaissée au profit de la méthode des moindres carrés exposée par Legendre en 1806 dans ses *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* et par Gauss en 1809 dans sa *Theoria motus corporum coelestium*… Gauss y fait mention à l'article 186 de cet ouvrage :

> Laplace a fait usage, pour la solution des équations linéaires, dont le nombre est plus grand que le nombre des inconnues, d'un autre principe qui avait été proposé par le célèbre Boscovich, et qui est que les différences mêmes, mais toutes prises positivement, donnent une somme minimum. On peut facilement démontrer que le système des valeurs des inconnues qui est déduit de ce seul principe, doit nécessairement satisfaire exactement à un nombre d'équations des proposées égal à celui des inconnues, de manière que les autres équations doivent seulement être considérées en tant qu'elles peuvent aider à déterminer le choix … [Ga].

Conclusion

La préoccupation de Boscovich était en fait de trouver une estimation, au sens statistique qu'on lui donne aujourd'hui, d'un paramètre certain mais inconnu à partir de l'observation de plusieurs couples de valeurs. L'estimation proposée utilise une technique de calcul (à savoir la minimisation d'une somme des valeurs absolues des écarts) qui est analogue à celle qui est aujourd'hui utilisée pour calculer l'estimation de la médiane d'une loi de probabilité à partir d'une série de données. C'est sans doute pour cette raison que Boscovich est qualifié d'inventeur de la médiane. Mais cette estimation, dans son objectif premier, semble bien éloignée des paramètres utilisés par Halley, Deparcieux, Villermé, Penot, Lambert, … qui devaient permettre de comparer des populations, ou de faire des prévisions quant à la durée de vie de classes d'âge déterminés.

Il n'est pas évident que ces savants aient perçu les paramètres proposés, que ce soit la vie moyenne ou la vie probable, comme des estimations, donc ayant des écarts avec les paramètres certains mais inconnus caractérisant la ou les populations étudiées. C'est l'apport de Jules Gavarret en épidémiologie de s'être interrogé (à propos d'autres données) sur ces écarts et d'en avoir tiré comme conclusion qu'il ne suffisait pas d'observer une différence entre la valeur numérique des paramètres estimés pour en conclure de façon certaine à une différence entre les populations.

Les paramètres proposés dans le cadre du travail sur la mortalité utilisent les fréquences des données regroupées en classes. L'estimation de Boscovich utilise l'ensemble des données. Dans le cas où on adopte le point de vue "estimation de paramètres", il est connu que l'estimation utilisant l'ensemble des données est beaucoup plus précise que celle où les données sont regroupées en classes. Pendant des années, l'enseignement des statistiques a connu le calcul de paramètres (moyenne, médiane) uniquement à partir de données regroupées en classes, faute de moyens de calculs sur un grand nombre de données. Du point de vue de l'estimation, Boscovich semble donc être plus "moderne" que Halley et Deparcieux. Mais il a effectué ces calculs sur un nombre limité de données et il est difficile d'envisager sa méthode, à son époque, sur un nombre de données aussi important que celui des données de Halley et Deparcieux, données où le regroupement en classes s'imposait pour pouvoir faire le moindre calcul. Ceci montre encore une fois l'importance des moyens de calculs à une époque donnée pour l'avancée des découvertes.

Aujourd'hui, quand le choix entre médiane et moyenne est proposé pour caractériser une population, la préférence va souvent à la médiane car elle est beaucoup plus "robuste" que la moyenne, c'est-à-dire que l'existence de valeurs "aberrantes" ou "extrêmes" modifie beaucoup moins la valeur de la médiane que la moyenne. Par exemple, dans une société très inégalitaire, avec des revenus astronomiques pour une minorité et une majorité de petits ou moyens revenus, le revenu moyen n'est pas représentatif de la réalité de la population alors que le revenu médian l'est beaucoup plus. Il ne semble pas que ce soit ce genre de préoccupation qui ait poussé en faveur de la moyenne ou de la médiane pour les auteurs étudiés ici. Boscovich a abouti à un calcul "analogue" à celui de la médiane parce qu'il a cherché à minimiser la somme des valeurs absolues d'écarts et non la somme des carrés des valeurs absolues d'écarts. Halley et Deparcieux étaient en présence de données de durée de vie où peu de "valeurs aberrantes" existaient. Il n'en aurait sans doute pas été de même avec une population mourrant majoritairement très jeune et comportant cependant quelques centenaires !

A la fin de ce parcours au long de quelques étapes de l'histoire de deux paramètres centraux d'une série statistique, on peut avancer les commentaires suivants.

D'abord, les outils et concepts mathématiques sont forgés par leurs inventeurs à cause des problèmes qu'ils ont à résoudre et des moyens techniques à leur disposition. Ce ne sera bien sûr pas une surprise pour les pratiquants de l'histoire des sciences, mais il est clair que les notions de moyenne et de médiane se sont construites au cours du temps à partir d'ébauches imparfaites avant d'être rigoureusement définies et formulées.

Ensuite, la transmission en histoire des sciences comporte bien des ratés et des scories. On en a vu ici un bel exemple avec l' "invention de la médiane par le moine serbe Boscovich". Comme souvent, la réalité est moins romantique, mais peut-être plus passionnante. L'absence de circulation initiale entre les différents domaines d'intervention de la médiane posent de nouvelles questions historiques que nous n'avons pas encore abordées et qui incitent à la poursuite de cette enquête.

Enfin, il nous semble remarquable que, de nos jours, des scientifiques en soient encore à polémiquer sur les bienfaits ou les méfaits supposés de la moyenne ou de la médiane. Est-ce que cela ne révèle pas l'absence de maîtrise collective de l'héritage des statisticiens d'hier ? Est-ce que cette non-maîtrise ne serait pas à l'origine de l'absence de transmission et de circulation des savoirs en statistiques, comme on peut le voir en épidémiologie ?

Bibliographie

[A] Jean le Rond D'ALEMBERT, *Encyclopédie*, article *Figure de la Terre*, 1756.

[B & M] Roger Joseph BOSCOVICH & Christopher MAIRE, *Voyage astronomique et géographique dans l'État de L'Église etc.*, Paris, 1770.

[C] Jean-Claude COTIS, *Entretien avec C. Guélaud*, *in : Le Monde*, mercredi 18 novembre 2009.

[De] Antoine DEPARCIEUX, *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine (1746), Addition à l'Essai (1760)*, INED, 2003.

[Do] Yadolah DODGE, *Premiers pas en statistique*, Springer-Verlag, 2006.

[Dr & T] Jean-Jacques DROESBEKE et Philippe TASSI, *Histoire de la Statistique*, Que sais-je ?, PUF, 1997.

[Du] Jacques DUPÂQUIER, *L'invention de la table de mortalité*, PUF, 1996.

[E] Churchill EISENHART, *Boscovich and the Combination of Observations,* Studies in his Life and Work, ed. L. L. Whyte, London, 1961, p. 200-212. Republié dans *Studies in the History of the Statistics and Probability*, Kendall, Plackett, ed. Griffin, 1977, p. 88-100.

[Ga] Carl Friedrich. GAUSS, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum*, Hamburg, 1809, traduction française par Edmond DUBOIS, Paris : A. Bertrand, 1864.

[Go] Stephen Jay GOULD, « The Median isn't the Message », *Discover*, juin 1985, p. 40-42 ; trad. fr. *La médiane ne dit pas tout*, *Convergence*, vol. XI, n° 2, 2006.

[Ha] Anders HALD, *A History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713-1935*, Springer, 2007, p. 50-52.

[Hi] Elizabeth HILL, « Roger Boscovitch – a Biographical Essay », *in : Roger Joseph Boscovich SJ, Studies in His Life and Work*, L. L. Whyte ed., Londres : G. Allen and Unwin, 1961, p. 17-101.

[K] Roger KOENKER, *Quantile regression*, Cambridge University Press, 2005, chap. 1.

[Lam] Johann Heinrich LAMBERT, *Contributions mathématiques à l'étude de la mortalité et de la nuptialité (1765 et 1772)*, INED, 2006.

[Lap] Pierre Simon de LAPLACE, « Sur les degrés mesurés des méridiens et sur les longueurs observées du pendule », 1789, *Oeuvres Complètes*, t. 11, Paris, 1895, p. 493-516.

[Le] Hervé LE BRAS, *Naissance de la mortalité*, Paris : Gallimard, Le Seuil, 2000.

[M] Pierre Louis Moreau de MAUPERTUIS, *La figure de la Terre*, Paris, 1738.

[Pa] Bernard PARZYSZ, « Le joueur et le banquier : sur une correspondance des frères Huygens », *in :* É. Barbin & J.-P. Lamarche (coord.), *Histoires de probabilités et de statistiques*, Ellipses, 2004, p. 77-90.

[Pe] Achille PENOT, *Recherches statistiques sur Mulhouse* in *Bulletin de la Société industrielle de* Mulhouse, 1843.

[S] Oscar B. SHEYNIN, « R. J. Boscovich's work on probability », *Archive for History of Exact Sciences* 7, 1973, p. 306-324.

[V] Louis-René VILLERMÉ, *Tableau de l'État Physique et Moral des ouvriers employés dans les manufactures de coton, de laine et de soie*, 1840.