BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Quelques questions de probabilités résolues géométriquement

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 13-25.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__13_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Quelques questions de probabilités résolues géométriquement; par M. E. Lemoine.

(Séance du 3 novembre 1882.)

J'ai donné à la Société mathématique, l'année de sa fondation, un petit problème de probabilités qui a eu ensuite le grand honneur d'attirer l'attention de plusieurs mathématiciens. MM. Halphen et Jordan en ont ici même, successivement, donné des généralisations ; divers géomètres s'en sont occupés dans la *Correspondance mathématique* de M. Catalan, dans les *Nouvelles Annales,* dans le Journal *Mathesis* et enfin M. Lalanne dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* C'est après la lecture de ce dernier travail que j'ai eu l'idée des développements qui vont suivre. L'énoncé du problème primitif était celui-ci : *On casse au hasard une barre en trois morceaux, quelle est la probabilité pour que l'on puisse former un triangle avec ces trois morceaux?*

I.

On prend au hasard un point M *dans l'intérieur d'un triangle quelconque* ABC, *quelle est la probabilité pour que, si* *de ce point on abaisse des perpendiculaires* MA_1, MB_1, MC_1, *sur les trois côtés :*

1° *On puisse former un triangle avec* MA_1, MB_1, MC_1;

2° *Pour que l'on puisse former un triangle qui n'ait que des angles aigus?*

Occupons-nous de la première partie.

Soient A′, B′, C′ les pieds des bissectrices intérieures sur les trois côtés, si l'on joint A′B′, B′C′, C′A′, il est facile de voir que, pour tout point M de l'intérieur du triangle A′B′C′, on a

$$\begin{aligned} MA_1 &< MB_1 + MC_1, \\ MB_1 &< MA_1 + MC_1, \\ MC_1 &< MA_1 + MB_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on peut former un triangle avec MA_1, MB_1, MC_1; car, pour tout point M situé entre B′C′ et BC, on a

$$MA_1 < MB_1 + MC_1;$$

pour tout point M situé sur B′C′ et BC,

$$MA_1 = MB_1 = MC_1;$$

pour tout point M situé entre B′C′ et A,

$$MA_1 > MB_1 + MC_1;$$

de même pour les deux autres droites B′A′ et A′C′, etc.

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\text{surf. A}'\text{B}'\text{C}'}{\text{surf. ABC}};$$

en faisant le calcul, on trouve

$$\text{(A)} \qquad \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Occupons-nous de la deuxième partie du problème.

Si nous appelons α, β, γ les distances MA_1, MB_1, MC_1 du point M aux trois côtés, ces distances sont les coordonnées de M par rapport au triangle de référence ABC.

Considérons la conique dont l'équation est

$$\text{(1)} \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2;$$

elle séparera les points du plan pour lesquels on aura

$$\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2$$

de ceux pour lesquels on aura

$$\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2.$$

On voit immédiatement que cette conique coupe le côté CB aux pieds des bissectrices intérieures et extérieures de A et *y* est tangente à ces bissectrices, on voit de même qu'elle coupe le côté CA aux pieds des bissectrices intérieures et extérieures de l'angle B et qu'elle y est tangente à ces bissectrices.

Enfin elle a pour centre le pôle de AB par rapport au cercle circonscrit.

On ferait des observations analogues sur les coniques dont les équations sont

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 \tag{2}$$

et

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \tag{3}$$

qui sont tangentes deux à deux aux points A′, B′, C′ et tangentes en ces points aux bissectrices AA′, BB′, CC′. Pour tout point du triangle curviligne A′B′C′ compris entre elles, le triangle formé avec MA_1, MB_1, MC_1 n'aura que des angles aigus. Appelons :

S_a la surface du segment compris entre la courbe $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ et la droite B′C′;

S_b la surface du segment compris entre la courbe $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ et la droite A′C′;

S_c la surface du segment compris entre la courbe $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ et la droite A′B′.

La probabilité cherchée sera

$$\frac{\text{surf. A}'\text{B}'\text{C}' - S_a - S_b - S_c}{\text{surf. ABC}}$$

et la probabilité pour que, si l'on a un triangle, ce triangle soit acutangle est

$$\frac{S_a + S_b + S_c}{\text{surf. A}'\text{B}'\text{C}'}.$$

Supposons que ABC soit tel que l'on ait

$$c > b > a,$$

et considérons la conique (1) :

Elle sera une hyperbole si $c^2 < a^2 + b^2$ ou si $\widehat{ACB}$ est aigu;

Elle sera une parabole si $c^2 = a^2 + b^2$ ou si $\widehat{ACB}$ est droit;

Elle sera une ellipse si $c^2 > a^2 + b^2$ ou si $\widehat{ACB}$ est obtus.

D'après notre hypothèse,

$$c > b > a,$$

les courbes (2) et (3) seront toujours des hyperboles; il n'y aura donc, pour faire le calcul, que trois cas à examiner :

$\widehat{ACB}$ est aigu, S_a, S_b, S_c sont des segments d'hyperbole;

$\widehat{ACB}$ est droit, S_a, S_b sont des segments d'hyperbole, S_c est un segment de parabole;

$\widehat{ACB}$ est obtus, S_a, S_b sont des segments d'hyperbole, S_c est un segment d'ellipse.

Le calcul de ces aires, dans le cas général, est très facile, mais un peu long. S_c par exemple, dans le cas de $C < 90°$, en désignant par S l'aire de ABC, est

$$\frac{S.ab}{(a+c)(b+c)}$$
$$-\frac{\sin C}{a^2-c^2}\int_0^{\frac{ab}{b+c}}\left[ab(a-x)-c\sqrt{x^2(a^2+b^2-c^2)-2ab^2x+a^2b^2}\right]dx;$$

l'intégration effectuée, on aura S_b et S_a par des permutations de lettres, etc.

Examinons seulement le cas particulier où ABC est équilatéral; on a, dans ce cas,

$$MA_1 + MB_1 + MC_1 = \text{const.},$$

et il est facile de voir que les problèmes 1° et 2° reviennent à ceux-ci.

On donne une barre que l'on casse au hasard en trois morceaux :

1° *Quelle est la probabilité pour que l'on puisse former un triangle avec ces trois morceaux?*

C'est le problème primitif. La formule (A) donne bien $\frac{1}{4}$.

2° *Quelle est la probabilité pour que l'on puisse former un triangle acutangle avec ces trois morceaux?*

Comme on a

$$S_a = S_b = S_c$$

la probabilité est

$$\frac{\text{surf.}\, A'B'C' - 3\,S_c}{\text{surf.}\, ABC}.$$

S_c est facile à calculer directement; car, si l'on prend CB et CA respectivement pour axe des x et des y, (1) devient

$$xy - a(x+y) + \frac{a^2}{2} = 0$$

et

$$S_c = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{a}{2}} y\,dx - \frac{1}{4}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

d'où

$$S_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4} - \log 2\right),$$

et la probabilité est

$$\log 8 - 2 = 0{,}0794415\ldots.$$

Nous allons indiquer une autre méthode pour le problème 1°.

Prenons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et construisons le plan dont l'équation est

$$ax + by + cz = 2\,S,$$

a, b, c, S étant les côtés et la surface du triangle ABC. Ce plan coupe les trois axes respectivement aux points A″, B″, C″. Les coordonnées d'un point de l'intérieur du triangle A″B″C″ représentent les distances d'un point de l'intérieur du triangle ABC aux trois côtés de ce triangle, et à chaque point de A″B″C″ ne correspond qu'un point de ABC et réciproquement.

Cela posé, considérons les trois plans

$$x + y = z,$$
$$x + z = y,$$
$$y + z = x,$$

qui passent par les bissectrices des angles des axes; soient A'_1, B'_1, C'_1 les points où les bissectrices de zOy, xOz, yOx coupent $B''C''$, $A''C''$, $B''A''$.

Il est facile de voir que, pour tout point situé dans l'intérieur du trièdre $OA'_1B'_1C'_1$, on a

$$x + y < z,$$
$$z + x < y,$$
$$y + z < x.$$

Par suite, pour tout point situé à l'intérieur du triangle $A'_1B'_1C'_1$, on pourra faire un triangle avec les coordonnées de ce point.

La probabilité cherchée d'avoir un triangle avec les trois distances MA_1, MB_1, MC_1 *est donc*

$$\frac{\text{surface du triangle } A'_1B'_1C'_1}{\text{surface du triangle } A''B''C''} \cdots$$

Si l'on remarque maintenant que, pour tous les points intérieurs au cône de révolution $z^2 = x^2 + y^2$, on a

$$z^2 > x^2 + y^2,$$

pour tous ceux intérieurs au cône $y^2 = x^2 + z^2$, on a

$$y^2 > x^2 + z^2;$$

pour tous ceux intérieurs au cône $x^2 = y^2 + z^2$, on a

$$x^2 > y^2 + z^2,$$

que ces trois cônes sont tangents entre eux, deux à deux, le long des arêtes OA'_1, OB'_1, OC'_1, on voit qu'ils coupent le plan $A''B''C''$, suivant trois coniques tangentes, deux à deux, en A'_1, B'_1, C'_1 et que, pour tout point situé à l'intérieur du triangle curviligne $A'_1B'_1C'_1$ formé par ces trois coniques, on a

$$x^2 < y^2 + z^2,$$
$$y^2 < x^2 + z^2,$$
$$z^2 < x^2 + y^2,$$

c'est-à-dire que le triangle formé avec x, y, z sera acutangle.

La probabilité d'avoir un triangle acutangle avec les trois distances MA_1, MB_1, MC_1 est donc

$$\frac{\text{surface du triangle curviligne } A'_1 B'_1 C'_1}{\text{surface du triangle } A'' B'' C''} \cdots$$

Au cours de cette étude, j'ai remarqué le théorème suivant, facile à démontrer :

Théorème. — *Dans tout triangle* ABC, *les quatre bissectrices de deux angles* A *et* B, *par exemple, sont tangentes à la parabole qui a* AB *pour directrice et* C *pour foyer; les points de contact sont sur la perpendiculaire menée en* C *au côté qui joint ce point et le sommet d'où part la bissectrice sur laquelle on cherche le point de contact.*

Remarquons que les considérations qui précèdent peuvent constituer une méthode assez générale et qu'on pourrait traiter d'une façon analogue la question suivante :

II.

On a trois quantités liées par la relation $\varphi(x, y, z) = 0$, *quelle est la probabilité que, en prenant au hasard les quantités* x, y, z, *on ait en même temps*

$$\psi_1(x, y, z) > 0,$$
$$\psi_2(x, y, z) > 0,$$
$$\psi_3(x, y, z) > 0.$$

En effet, soit A l'aire de la surface $\varphi(x, y, z) = 0$, ou de la portion de cette surface qui convient, dans tous les cas possibles compatibles avec l'énoncé du problème particulier que l'on considère; soit B l'aire de la portion de surface qu'interceptent sur $\varphi(x, y, z) = 0$ les trois surfaces $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$, ou la portion de cette aire qui convient à tous les cas favorables.

La probabilité cherchée sera $\frac{A}{B}$.

III.

Un triangle ABC *a pour périmètre* $2p$; *déterminer ses côtés de façon que la probabilité que l'on puisse former un triangle avec les distances à ses trois côtés d'un point de son intérieur pris au hasard soit la plus grande possible.*

Nous savons [(*voir* I, formule (A)] que cette probabilité est

$$\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Supposons que α soit la valeur cherchée, du côté BC, dans le cas du maximum; on aura

$$b+c=2p-\alpha,$$

d'où

$$c=2p-\alpha-b;$$

il faut déterminer b par la condition que

$$\frac{2\alpha b(2p-\alpha-b)}{(\alpha+b)(2p-1)(2p-\alpha)}$$

soit maximum ou

$$\frac{b(2p-\alpha-b)}{2p\alpha+b(2p-\alpha-b)},$$

en ne nous occupant pas du facteur constant $\frac{2\alpha}{2p-\alpha}$.

b et $2p-\alpha-b$ sont toujours positifs, ainsi que $2p\alpha$; posons donc

$$b(2p-\alpha-b)=\mathrm{X},$$
$$2p\alpha=\mathrm{K}^2;$$

il faudra trouver le maximum de

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{K}^2+\mathrm{X}}, \quad \text{dont la dérivée} \quad \frac{\mathrm{K}^2}{(\mathrm{K}^2+\mathrm{X})^2},$$

est toujours positive; la fonction croît donc avec X et il suffit de trouver le maximum de X ou de

$$b(2p-\alpha-b),$$

qui a lieu quand

$$b=2p-\alpha-b \quad \text{ou} \quad b=\frac{2p-\alpha}{2}$$

et, par suite,

$$c = b = \frac{2p - \alpha}{2}.$$

Si l'on avait considéré la valeur β du côté AC, dans le cas du maximum, on trouverait de même qu'il faut que $BC = AB$, ce qui implique $AB = AC = BC$, c'est-à-dire que le triangle ABC doit être équilatéral. Comme la probabilité est alors $\frac{1}{4}$, on peut remarquer que l'on a ainsi une démonstration de l'inégalité

$$8abc < (a+b)(b+c)(a+c).$$

IV.

Étant donnée une barre RS *de longueur* L, *on la coupe au hasard en trois morceaux* x, y, z; *quelle est la probabilité pour que l'on ait*

$$ax + by + cz < M^2;$$

a, b, c, M *étant des quantités positives données?*

x est le morceau contenant le point R et z le morceau contenant le point S.

Sur trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz prenons

$$OA' = \frac{M^2}{a},$$

$$OB' = \frac{M^2}{b},$$

$$OC' = \frac{M^2}{c},$$

et considérons le plan $A'B'C'$ dont l'équation est

$$ax + by + cz = M^2;$$

prenons ensuite

$$O\alpha = O\beta = O\gamma = L,$$

et considérons le plan $\alpha\beta\gamma$ dont l'équation est

$$x + y + z = L;$$

pour tout point du plan $\alpha\beta\gamma$ à l'intérieur du triangle $\alpha\beta\gamma$, on a

$$x + y + z = L,$$

et les coordonnées de ce point donnent d'une seule façon tous les cas possibles de division de RS. Pour tous les points de l'espace situés du même côté du plan A'B'C' que O, on a

$$ax + by + cz - M^2 < 0;$$

pour tous les points situés de l'autre côté, on a

$$ax + by + cz - M^2 > 0.$$

La probabilité P cherchée est donc le rapport de la partie de l'aire de $\alpha\beta\gamma$ située au-dessous de A'B'C' à l'aire de $\alpha\beta\gamma$.

Nous n'avons maintenant qu'à examiner les huit cas suivants :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} L > OA', \\ L > OB', \\ L > OC'; \end{array}\right. (3)\left\{\begin{array}{l} L > OA', \\ L < OB', \\ L < OC'; \end{array}\right. (5)\left\{\begin{array}{l} L > OA', \\ L > OB', \\ L < OC'; \end{array}\right. (7)\left\{\begin{array}{l} L > OA', \\ L < OB', \\ L > OC'; \end{array}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} L < OA', \\ L < OB', \\ L < OC'; \end{array}\right. (4)\left\{\begin{array}{l} L < OA', \\ L > OB', \\ L > OC'; \end{array}\right. (6)\left\{\begin{array}{l} L < OA', \\ L < OB', \\ L > OC'; \end{array}\right. (8)\left\{\begin{array}{l} L < OA', \\ L > OB', \\ L < OC'. \end{array}\right.$$

Pour le premier cas, on a $P = 0$, puisque le triangle $\alpha\beta\gamma$ est entièrement au-dessus de A'B'C'; pour le deuxième cas, on a $P = 1$, puisque le triangle $\alpha\beta\gamma$ est entièrement au-dessous de A'B'C'; pour le troisième cas, $\alpha\gamma$ coupe C'A' en N, $\alpha\beta$ coupe A'B' en M : la probabilité est

$$\frac{\text{surface de NM}\beta\gamma}{\text{surface de }\alpha\beta\gamma}$$

ou, par un calcul facile : pour (3),

$$P = 1 - \frac{(M^2 - aL)^2}{L^2(c-a)(b-a)}.$$

Pour les cas (6) et (8) dans lesquels, comme dans le cas (3), deux des longueurs OA', OB', OC' sont plus grandes que L, on trouverait : pour (6),

$$P = 1 - \frac{(M^2 - cL)^2}{L^2(a-c)(b-c)},$$

et pour (8),

$$P = 1 - \frac{(M^2 - bL)^2}{L^2(a-b)(c-b)}.$$

Considérons le cas (4) où deux des longueurs OA', OB', OC' sont plus petites que L; on aurait facilement pour ce cas

$$P = \frac{(M^2 - aL)^2}{L^2(c-a)(b-a)}.$$

Dans les cas (5) et (7), on aurait, par suite : pour le premier,

$$P = \frac{(M^2 - cL)^2}{L^2(a-c)(b-c)},$$

et pour le second,

$$P = \frac{(M^2 - bL)^2}{L^2(a-b)(c-b)}.$$

V.

On jette dans l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC *un point* M *pris au hasard : quelle est la probabilité que le triangle formé avec les droites* AM, BM, CM *soit acutangle?*

Soit a la longueur du côté du triangle.

1° On pourra toujours former un triangle avec AM, BM, CM si M est dans l'intérieur du triangle; car, si l'on circonscrit une circonférence à ABC, les distances d'un point quelconque de la circonférence aux trois sommets sont telles que l'une d'elles est la somme des deux autres et, pour tout point intérieur à cette circonférence, une quelconque de ces distances est plus petite que la somme des deux autres, c'est-à-dire que l'on peut construire un triangle avec elles.

2° Le lieu des points, tels que

$$\overline{CM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{MB}^2,$$

est une circonférence de rayon a, qui passe en A et en B, et y est tangente aux bissectrices des angles A et B; en prenant les lieux analogues, tels que

$$\overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 \quad \text{et} \quad \overline{AM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2,$$

on aura trois circonférences tangentes deux à deux en A, B, C et tangentes en ces points aux bissectrices; elles laisseront entre elles un espace formant un triangle curviligne de surface S′, tel que, si M est dans l'intérieur de ce triangle curviligne, le triangle formé avec les lignes AM, BM, CM n'aura que des angles aigus si M est en dehors de ce triangle curviligne; le triangle formé avec AM, BM, CM sera obtusangle.

La probabilité cherchée est donc $\frac{S'}{S}$, mais on voit facilement que

$$S' = a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$P = \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\sqrt{3} - 2\pi}{\sqrt{3}} = 4 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 0,3718\ldots.$$

On résoudrait par des méthodes aussi simples une série de questions comme celles-ci :

On casse une barre RS *de longueur* L *en trois morceaux* x *(contenant* R*),* y *et* z *(contenant* S*), quelle est la probabilité pour que* $a, b, c,$ M *étant des quantités données, on ait*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 < M^3, \quad \text{cas de} \quad a = b = c.$$

On prend au hasard un point M *sur une sphère rapportée à trois axes rectangulaires passant par son centre, quelle est la probabilité que les trois coordonnées de ce point puissent former :*

1° *Un triangle;*
2° *Un triangle acutangle.*

On prend au hasard un point dans l'intérieur d'un triangle; par ce point, on mène des parallèles aux trois côtés, parallèles limitées aux côtés du triangle. Soit x, y, z *les longueurs de ces parallèles, quelle est la probabilité :*

1° *Que* x, y, z *puissent former un triangle;*
2° *Que* x, y, z *puissent former un triangle acutangle;*
3° *Que l'on ait*

$$mx + ny + pz < T^2,$$

$m, n, p,$ T *étant des quantités données.*

On coupe au hasard en deux morceaux RT, TS, *que j'appelle* x *et* k, *une barre* RS; *puis en deux morceaux* TV, VS, *que j'appelle y et z, le morceau* $TS = k$; *quelle est la probabilité :*

1° *Que l'on puisse former un triangle avec* x, y, z;

2° *Que l'on puisse former un triangle acutangle avec* x, y, z;

3° *Que l'on ait*

$$ax + by + cz < M^2,$$

a, b, c, M *étant des quantités données,* etc.?

Je suppose qu'en employant les conventions de la Géométrie à n dimensions, on étendrait cette méthode à un nombre de variables autre que 2 et 3.