NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE LEMOINE

Sur une question de probabilité

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 118-126.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__118_1>

SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉ;

PAR M. ÉMILE LEMOINE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit un triangle ABC; *par un point* O, *pris au hasard à l'intérieur de* ABC, *on mène une parallèle à*

BC	*qui coupe*	AC	*en*	A_c	*et*	AB	*en* A_b,
CA	»	BA	*en*	B_a	*et*	BC	*en* B_c,
AB	»	CB	*en*	C_b	*et*	CA	*en* C_a.

Quelle est la probabilité que l'on puisse former :

1° *Un triangle;*

2° *Un triangle acutangle, avec les trois droites* OA_c, OB_a, OC_b.

Désignons OC_b par ξ, OA_c par η, OB_a par ζ.

Pour que l'on puisse former un triangle avec ces trois droites, il faut que l'on ait

$$\xi < \eta + \zeta,$$
$$\eta < \xi + \zeta,$$
$$\zeta < \eta + \xi;$$

désignons par x et y les coordonnées de O, CB étant pris pour axe des x, CA pour axe des y, il est facile de voir que l'on a

$$\xi = \frac{cy}{b},$$
$$\eta = x,$$
$$\zeta = \frac{ab - bx - ay}{a}.$$

Si l'on considère : 1° le lieu des points pour lesquels on a

$$\xi = \eta + \zeta,$$

on trouve la droite

$$\frac{cy}{b} = x + \frac{ab - bx - ay}{a};$$

2° le lieu des points pour lesquels on a

$$\eta = \xi + \zeta,$$

on trouve la droite

$$x = \frac{cy}{b} + \frac{ab - bx - ay}{a};$$

3° le lieu des points pour lesquels on a

$$\zeta = \xi + \eta,$$

on trouve la droite

$$\frac{ab - bx - ay}{a} = x + \frac{cy}{b};$$

ou

$$(1) \qquad \frac{x}{\frac{ab}{b-a}} + \frac{y}{\frac{b^2}{c+b}} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{x}{\frac{ab}{a+b}} + \frac{y}{\frac{b^2}{b-c}} = 1,$$

$$(3) \qquad \frac{x}{\frac{ab}{a+b}} + \frac{y}{\frac{b^2}{b+c}} = 1;$$

(2) et (3) se coupent sur CB en A', et l'on a

$$CA' = \frac{ab}{a+b}, \quad A'B = \frac{a^2}{a+b};$$

(1) et (3) se coupent sur CA en B′, et l'on a

$$CB' = \frac{b^2}{c+b}, \quad B'A = \frac{bc}{c+b};$$

(1) et (2) se coupent sur AB en C′, et l'on a

$$BC' = \frac{ac}{a+c}, \quad C'A = \frac{c^2}{a+c}.$$

Remarquons en passant que les trois droites AA′, BB′, CC′ se coupent en un même point O′ dont les coordonnées sont

$$x = \frac{abc}{ab+cb+ac},$$
$$y = \frac{ab^2}{ab+cb+ac};$$

pour ce point O′, on a

$$\xi = \eta = \zeta :$$

c'est le point étudié par M. Jérabek (voir *Mathesis*, 1re année, p. 191).

Les trois lieux dérivés des égalités

$$\xi = \eta + \zeta, \quad \eta = \xi + \zeta, \quad \zeta = \eta + \xi$$

forment donc par leurs intersections le triangle A′B′C′ inscrit dans ABC et, comme chacun d'eux, $\xi = \eta + \zeta$ par exemple, sépare les points du plan pour lesquels on a

$$\xi > \eta + \zeta$$

de ceux pour lesquels on a

$$\xi < \eta + \zeta,$$

il est évident que, pour tous les points intérieurs au triangle A′B′C′, on a

$$\xi < \eta + \zeta,$$
$$\eta < \xi + \zeta,$$
$$\zeta < \eta + \xi.$$

c'est-à-dire que pour ces points on peut former un triangle avec ξ, η, ζ, et la probabilité cherchée sera

$$\frac{\text{aire}\,A'B'C'}{\text{aire}\,ABC}$$

ou

$$\frac{S - CA'B' - BA'C' - AB'C'}{S};$$

mais

$$AB'C' = S\,\frac{c^2}{(c+b)(c+a)},$$

$$BA'C' = S\,\frac{a^2}{(a+c)(a+b)},$$

$$CA'B' = S\,\frac{b^2}{(a+b)(c+b)};$$

donc la probabilité est

$$\frac{2\,abc}{(b+c)(a+c)(a+b)}.$$

Si l'on s'était proposé de trouver la probabilité pour que l'on puisse former un triangle avec OB_c, OC_a, OA_b, on aurait trouvé le même résultat et l'on aurait eu à considérer un triangle $A_1B_1C_1$ inscrit dans ABC et tel que les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au second point étudié par M. Jérabek (voir *loc. cit.*).

Voici une autre solution de la même question.

Il est facile d'établir que, pour tout point du triangle ABC, on a entre les droites ξ, η, ζ la relation

$$(1) \qquad ab\xi + bc\eta + ac\zeta = abc.$$

Cela posé, considérons trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; le plan dont l'équation est représentée par (1) coupera $O\xi$ en A_2, $O\eta$ en B_2, $O\zeta$ en C_2, et l'on aura

$$OA_2 = c, \quad OC_2 = b, \quad OB_2 = a.$$

Les trois plans

$$\xi = \eta + \zeta,$$
$$\eta = \xi + \zeta,$$
$$\zeta = \xi + \eta$$

se couperont deux à deux en A'_1 sur B_2C_2, B'_1 sur A_2C_2, C'_1 sur A_2B_2, tels que

OA'_1	est la bissectrice de	C_2OB_2,
OB'_1	»	A_2OC_2,
OC'_1	»	B_2OA_2,

et, pour tous les points situés à l'intérieur de $A'_1\,B'_1\,C'_1$, on aura

$$\xi < \eta + \zeta,$$
$$\eta < \zeta + \xi.$$
$$\zeta < \xi + \eta.$$

Or, comme à un point de l'intérieur du triangle donné ABC donnant les droites ξ, η, ζ correspond un seul point de l'intérieur de $A_2B_2C_2$ ayant pour coordonnées ξ, η, ζ et réciproquement, la probabilité cherchée sera évidemment

$$\frac{\text{aire}\, A'_1\,B'_1\,C'_1}{\text{aire}\, A_2\,B_2\,C_2}:$$

il est inutile de développer les calculs.

Remarque. — On peut prendre ξ, η, ζ avec la relation

$$ab\xi + bc\eta + ac\zeta = abc,$$

ou ξ_1, η_1, ζ_1, avec la relation

$$ac\xi_1 + ba\eta_1 + cb\zeta_1 = abc,$$

pour coordonnées d'un point du plan du triangle ABC; comme de plus on a

$$\xi = \frac{cy}{b}, \qquad \xi_1 = y.$$

$$\eta = x, \qquad \eta_1 = \frac{cx}{a},$$

$$\zeta = \frac{ab - bx - ay}{a}; \quad \zeta_1 = \frac{ab - bx - ay}{b},$$

il en résulte que toute relation entre ξ, η, ζ ou ξ_1, η_1, ζ_1 donne une relation du même degré entre x et y.

Ainsi les lieux des points tels que

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.},$$

tels que

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = \text{const.},$$

tels que

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

etc., sont des coniques; tels que

$$\xi + \eta + \zeta = \text{const.},$$

$$\xi + \eta + \zeta + \xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = \text{const.},$$

etc., sont des droites.

Il en résulte encore que, pour tout point du plan de ABC, on a

$$\xi\eta\zeta = \xi_1\eta_1\zeta_1.$$

Remarquons aussi que l'on retrouve facilement ainsi le point pour lequel les six points A_c, A_b, B_a, B_c, C_b, C_a sont sur une même circonférence, point que nous avons démontré (voir *Nouvelles Annales*, p. 365, 3°; 1873) être le centre des médianes antiparallèles, en exprimant que l'on a

$$\xi\eta_1 = \zeta\xi_1 = \eta\zeta_1;$$

on trouve que cette valeur commune est

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Citons enfin le théorème suivant que l'on obtient en cherchant le point pour lequel on a

$$\xi\xi_1 = \eta\eta_1 = \zeta\zeta_1.$$

Si l'on divise chaque côté d'un triangle en deux segments proportionnels aux racines carrées des côtés adjacents et que l'on joigne ce point au sommet opposé, *la ligne droite obtenue passe par le point tel que le produit des deux distances de ce point à un côté, distances comptées parallèlement aux deux autres côtés, est constant.*

Occupons-nous de la seconde partie de l'énoncé : pour que le triangle formé avec ξ, η, ζ soit rectangle, il faut que l'on ait

$$\begin{gathered}\xi^2 < \eta^2 + \zeta^2, \\ \eta^2 < \xi^2 + \zeta^2, \\ \zeta^2 < \xi^2 + \eta^2.\end{gathered}$$

Considérons l'équation

$$\zeta^2 = \xi^2 + \eta^2$$

ou, en coordonnées trilinéaires,

$$\frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{\gamma^2}{a^2};$$

elle représente une conique qui coupe CB en A′ et y est tangente à la droite AA′, qui coupe CA en B′ et y est tangente à la droite BB′, et il est facile de voir qu'une même branche de courbe (dans le cas où la courbe est une hyperbole) passe en A′ et en B′ : cette conique sépare les points du plan pour lesquels on a

$$\xi^2 > \eta^2 + \zeta^2$$

de ceux pour lesquels on a

$$\xi^2 < \eta^2 + \zeta^2.$$

On verrait de même que $\eta^2 = \xi^2 + \zeta^2$ représente une conique qui coupe CB en A′, BA en C′ et est tangente en ces points aux droites AA′, CC′, ..., de sorte qu'il y a un triangle curviligne ayant pour sommets A′, B′, C′ et pour côtés trois arcs de coniques tangentes entre elles deux à deux en ces sommets. On voit que, pour tous les points situés à l'intérieur de ce triangle curviligne, le triangle formé avec les droites ξ, η, ζ est acutangle.

La surface de ce triangle curviligne est égale à la surface du triangle rectiligne $A'B'C'$ diminuée des trois segments compris entre les côtés de $A'B'C'$ et les coniques dont les côtés sont des cordes : elle peut donc être facilement calculée.

Pour résoudre la même question en employant la seconde solution, on remarquerait que les trois cônes

$$\xi^2 = \eta^2 + \zeta^2, \quad \eta^2 = \zeta^2 + \xi^2, \quad \zeta^2 = \xi^2 + \eta^2$$

déterminent sur $A_2B_2C_2$ un triangle curviligne $A'_1B'_1C'_1$ dont les côtés, intersections des cônes avec le plan $A_2B_2C_2$, sont tangents entre eux deux à deux en A'_1, B'_1, C'_1, ...

En résumé :

1° La probabilité de pouvoir former un triangle avec ξ, η, ζ est

$$\frac{\text{aire du triangle rectiligne } A'B'C'}{\text{aire de } ABC}$$
$$= \frac{\text{aire du triangle rectiligne } A'_1B'_1C'_1}{\text{aire de } A_2B_2C_2}$$
$$= \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)};$$

2° La probabilité d'avoir un triangle acutangle est

$$\frac{\text{aire du triangle curviligne } A'B'C'}{\text{aire de } ABC}$$
$$= \frac{\text{aire du triangle curviligne } A'_1B'_1C'_1}{\text{aire de } A_2B_2C_2};$$

3° La probabilité, si l'on a un triangle, qu'il soit acutangle est

$$\frac{\text{aire du triangle curviligne } A'B'C'}{\text{aire du triangle rectiligne } A'B'C'}$$
$$= \frac{\text{aire du triangle curviligne } A'_1B'_1C'_1}{\text{aire du triangle rectiligne } A'_1B'_1C'_1}.$$

Lorsque ABC est équilatéral, on trouve pour ces trois probabilités les nombres

$$\frac{1}{4}, \quad \log 8 - 2 = 0,0794415\ldots, \quad 4(\log 8 - 2) = 0,297766\ldots,$$

et il est facile de voir que, dans ce cas particulier, le problème revient au problème déjà traité (voir *Bulletin de la Société mathématique,* 1^re^ année, p. 39; 11^e^ année, p. 13) :

On brise une barre en trois morceaux, quelle est la probabilité que l'on puisse, avec ces trois morceaux, former : 1° un triangle, 2° un triangle acutangle.