# Les partis chez Pascal et Fermat

Dans une lettre du 29 juillet 1654, Pascal propose à Fermat le problème suivant. Deux joueurs jouent en 3 points, chacun a misé 32 pistoles. Comment partager la mise à un moment quelconque du jeu ?

Nous pouvons résoudre ce problème en distinguant les cas suivant le nombre de points manquant à chaque joueur.

Appelons A et B les deux joueurs et supposons qu'il manque un point à A et deux points à B, état que nous noterons [1, 2].

## Méthode de Pascal.

Si A gagne le point suivant, il gagne la partie et emporte les 64 pistoles mises en jeu et s'il perd, le jeu passe à l'état [2, 2] auquel cas les deux joueurs doivent se répartir la mise à égalité.
Dans le premier cas, A remporte 64 pistoles et dans le second cas, 32 pistoles. Il convient de lui attribuer 32 pistoles qu'il est sûr de gagner et la moitié des 32 pistoles qu'il a une chance sur deux de gagner, c'est-à-dire $32+\frac{32}{2}=48$ pistoles et d'attribuer 16 pistoles à B.

Si nous sommes à l'état [1, 3], il manque un point à A et trois points à B. Si A gagne le point suivant, il gagne la partie et emporte les 64 pistoles mises en jeu et s'il perd, le jeu passe à l'état [1, 2] auquel correspond le partage (48, 16) calculé précédemment. En utilisant la règle précédente, A recevra 48 pistoles qu'il est sûr de gagner et la moitié des 16 pistoles qu'il a une chance sur deux de gagner, c'est-à-dire $48+\frac{16}{2}=56$ pistoles et B recevra 8 pistoles.

Enfin, à l'état [2, 3], une victoire de A conduit à l'état [1, 3] et une défaite de A à l'état [2,2]. A recevra 32 pistoles qu'il est sûr de gagner et la moitié des 56 – 32 = 24 pistoles qu'il a une chance sur deux de gagner, c'est-à-dire $32+\frac{24}{2}=44$ pistoles et B recevra 20 pistoles.
On voit se construire un processus de récurrence qui permet de déterminer le partage dans le cas général.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

| Nombre de points manquants à A →<br>Nombre de points manquants à B<br>↓ | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | (32, 32) | (44, 20) | (56, 8) | (64, 0) |
| 2 | (20, 44) | (32, 32) | (48, 16) | (64, 0) |
| 1 | (8, 56) | (16, 48) | (32, 32) | (64, 0) |
| 0 | (0, 64) | (0, 64) | (0, 64) | |

**Méthode de Fermat.**

Le jeu se terminera au bout de 5 points au maximum.
Si nous sommes dans l'état [1, 2], 3 points ont été joués et 2 points sont nécessaires au maximum pour terminer le jeu et on peut étudier tous les fins de jeu possibles.

| Vainqueur du $4^{\text{ème}}$ point | Vainqueur du $5^{\text{ème}}$ point | Résultat final |
|---|---|---|
| A | A | A gagne |
| A | B | A gagne |
| B | A | A gagne |
| B | B | B gagne |

On voit que 3 cas sur 4 sont favorables à A, on lui accorde donc les $\frac{3}{4}$ de la mise et $\frac{1}{4}$ de la mise à B. Le partage correspondant est (48, 16).

Si nous sommes dans l'état [1, 3], 2 points ont été joués et 3 points sont nécessaires au maximum pour terminer le jeu et on peut étudier tous les fins de jeu possibles.

| Vainqueur du $3^{\text{ème}}$ point | Vainqueur du $4^{\text{ème}}$ point | Vainqueur du $5^{\text{ème}}$ point | Résultat final |
|---|---|---|---|
| A | A | A | A gagne |
| A | A | B | A gagne |
| A | B | A | A gagne |
| A | B | B | A gagne |
| B | A | A | A gagne |
| B | A | B | A gagne |
| B | B | A | A gagne |
| B | B | B | B gagne |

On voit, dans ce cas, que 7 cas sur 8 sont favorables à A, on lui accorde donc les $\frac{7}{8}$ de la mise et $\frac{1}{8}$ de la mise à B. Le partage correspondant est (56, 8).

À l'état [2, 3], en construisant un tableau du même type, on s'aperçoit que sur les seize fins de jeu potentielles, 11 sont favorables à A et 5 le sont à B. A obtiendra les $\frac{11}{16}$ de la mise soit 44 pistoles et B les $\frac{5}{16}$ de la mise, soit 20 pistoles.
Les deux méthodes conduisent aux mêmes résultats, ce qui permet à Pascal d'écrire dans sa lettre à Fermat : « Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris ».

## La formule générale de Pascal

Dans son *Usage du Triangle Arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties*, Pascal pose et résout le problème suivant :

Étant proposés deux joueurs, à chacun des quels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le triangle arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun.

Appelons A et B les deux joueurs et supposons qu'il manque $p$ parties à A et $q$ parties à B. Le jeu sera terminé au bout d'au plus $p + q - 1$ parties.

On peut coder chaque fin de jeu par un mot de longueur ($p + q - 1$) constitué des lettres « A » et « B » (A indiquant une victoire du joueur A et B une victoire du joueur B). Il y en a $2^{p+q-1}$ en tout.

Les fins de jeu qui donnent la victoire à A correspondent aux mots comportant au moins $p$ fois la lettre « A », c'est-à-dire $p$, $p + 1$, …, $p + q - 1$.

Il y en a : $$\binom{p+q-1}{p}+\binom{p+q-1}{p+1}+\cdots+\binom{p+q-1}{p+q-1}=\sum_{k=0}^{q-1}\binom{p+q-1}{p+k}.$$
C'est la somme des $q$ derniers coefficients de la $(p + q)^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal.

Les fins de jeu favorables à B correspondent aux mots comportant au moins $q$ fois la lettre « B », c'est-à-dire $q$, $q + 1$, …, $q + p - 1$. Il y en a :

$$\binom{p+q-1}{q}+\binom{p+q-1}{q+1}+\cdots+\binom{p+q-1}{p+q-1}=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+q-1}{q+k}=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+q-1}{p+q-1-(q+k)},$$

soit encore : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+q-1}{p-1-k}=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+q-1}{k}$.

C'est la somme des $p$ premiers coefficients de la $(p + q)^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal.

Les deux joueurs doivent donc se partager la mise dans le rapport de ces deux nombres.

Si $m$ est la mise totale, A recevra $\dfrac{\sum_{k=0}^{q-1}\binom{p+q-1}{p+k}}{2^{p+q-1}}m$ et B recevra $\dfrac{\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+q-1}{k}}{2^{p+q-1}}m$.

* * * * *