

LE MIROIR DES MATHS



UNICAEN
université de Caen
Basse-Normandie



MIR
Université de Caen
Basse-Normandie



IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : 02 31 56 73 60 - Fax. : 02 31 56 73 20
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO ONZE : avril 2013

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

Livres publiés ou recommandés par l'IREM de Basse-Normandie.

Nos groupes de recherche publient de nombreux livres intéressant l'enseignement des mathématiques. Voici quelques titres parus, que vous pouvez commander par simple mail à irem@unicaen.fr :

- D. Salles R. Rodriguez - *Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle*, Format A4, Nombre de pages : Exemplaire en français : 36 ; Exemplaire en espagnol : 36 N° ISBN 978-2-902498-07-9 , 2011, Prix : 4,5 € chaque brochure en couleurs, 8 € les deux, frais d'envoi : 3 €
- D. Salles R. Rodriguez - Deuxième édition de "*Practicar la geometría*" – de las acciones directamente experimentables a sus formalizaciones matemáticas, 2013, ISBN 978-2-902498-04-8, format A4, 108 pages prix 7 €
- *Philippe de La Hire (1640-1718), entre Architecture et Sciences*. Cet ouvrage vous est proposé par notre collègue Jean Pierre Le Goff qui y signe un article : « *La théorie des coniques & l'architecture au XVIIe siècle* » ISBN : 978-2-7084-0942-2 – www.editions-picard.com

Chaque commande est accompagnée d'un livre cadeau sur un thème voisin !

A venir :

Le colloque inter-IREM Epistémologie de Marseille (24-25 mai 2013) au cours duquel trois membres de notre IREM présenteront des exposés.

Le colloque inter-IREM de Lyon (24-25 mai 2013) – La réforme des programmes du lycée : et alors ?

Repères IREM *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

Sommaire du numéro 90 – Janvier 2013

- **Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?**
Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Anne-Cécile Mathé et Régis Leclercq
- **Point de vue : Faut-il enseigner le raisonnement mathématique de manière formelle ?**
Henri Lombardi, Irem de Besançon
- **Enseigner les compétences langagières indispensables à l'activité mathématique**
Karine Millon-Faure, Université d'Aix-Marseille et ENS Lyon
- **Le prix du lait**
Jean-Paul Mercier, Irem de Poitiers
- **Les mathématiques de l'ingénieur, le point de vue de professeurs de grandes écoles**
Charles Chandler, Laboratoire EDA

Sommaire du Numéro 91 – Avril 2013

- **Éloge de l'algèbre**
Jean-Pierre Friedelmeyer, Irem de Strasbourg
- **Pratiques pédagogiques de problèmes ouverts dans le collège grec**
Georgios Kosyvas, Lycée expérimental Varvakeio, Athènes
- **Quelques précautions autour de l'intervalle de confiance de la Seconde à la Terminale**
Véronique Cerclé, Irem de Montpellier
- **L'usage des TICE en formation continue des enseignants au Maroc**
Ahmed Lablidi, Brahim Nachit, Abdelmajid Abourriche, Mohammed Talbi
- **Karl Marx et le calcul infinitésimal**
Pascal Serman

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par <http://www.univ-IREM.fr/> puis cliquez sur REPERES (dans bandeau gauche vertical), ensuite sur CONSULTATION. (Les nombres en rouge indiquent qu'au moins un article de ce numéro a été mis intégralement en ligne ; les nombres en vert indiquent que tous les articles de ce numéro sont intégralement en ligne)

Pour soumettre des articles au comité de rédaction de Repères IREM, contacter : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Pour vous abonner à Repères IREM ou acheter séparément des numéros, contacter :

TOPIQUES Éditions, 22, rue Charles-Martel, 54000 NANCY, France

Téléphone & télécopie : 03 83 27 06 99 , adresse électronique : topiqueseditions@dbmail.com

Prix d'un abonnement (4 numéros par an) : Métropole : Établissements, 46 euros ; Particuliers, 35 euros

DOM-TOM ou Étranger (par avion) : Établissements, 55 euros ; Particuliers, 44 euros

Prix au numéro : 13 euros + frais d'expédition si envoi par avion.



Éditorial.

Dans ce numéro 11 du *Miroir des maths*, Jean-Pierre Le Goff nous parle de l'induction, à propos du problème dit « du cercle de Moser » et nous présente une suite qui commence par 1, 2, 4, 8, 16 sans continuer de la manière que l'on pourrait ingénument induire. Ensuite, dans « À la rencontre de la croix et du pentagone célestes », Danielle Salles-Legac et Ruben Rodriguez Herrera nous font découvrir une croix et un pentagone étoilé célestes, riches de nombreuses propriétés géométriques et reliés au nombre d'or. Enfin, Éric Trotoux présente une étude portant sur l'approximation de $n!$ et la formule de Stirling, dans le cadre limité du nouveau programme en vigueur en TS depuis la rentrée 2012, formule de Stirling que nous devons autrefois utiliser quand nos vieilles calculatrices refusaient catégoriquement de calculer $n!$ au delà de $n = 69$.

Depuis la parution de notre dernier numéro, l'IREM et le cercle d'histoire des mathématiques a inauguré un nouveau cycle de (cir)conférences. Les deux premières (cir)conférences ont eu lieu les vendredis 7 décembre et 22 mars : En décembre, Didier Bessot, animateur du groupe "Histoire des Maths", a exposé un problème de géométrie étudié par Philippe de la Hire (1640 – 1718) concernant les cônes à base conique. En Mars, Denis Lanier a fait une conférence sur la régularité des structures observées sur la fleur de tournesol. Après l'exposition de quelques éléments historiques sur l'interprétation de ces phénomènes et, à l'occasion d'un travail avec des élèves sur le développement de la fleur de tournesol, il

posé quelques questions informatiques et pédagogiques à propos d'une simulation simplifiée de cette phyllo-taxie spiralée. Une reprise de cette conférence avec ses documents attachés se trouve mise en ligne sur notre site.

Mars a aussi été marqué par la semaine des mathématiques : cela a été l'occasion de présenter dans le cadre du thème « Maths pour la Planète Terre » une activité avec des élèves du lycée Malherbe et en collaboration avec leur professeur d'histoire-géographie Brigitte Lamy sur le thème : « Pleut-il plus en Basse-Normandie ? ». Levons tout de suite une ambiguïté : il ne s'agissait pas de comparer la pluviométrie à celles d'autres régions de France (tout le monde sait bien qu'il ne pleut pas plus en Basse-Normandie qu'ailleurs !), mais d'étudier si la pluviométrie avait évolué au cours de ces cinquante dernières années.

Les préparatifs du 40^e anniversaire de l'IREM de Basse-Normandie ont commencé. Bien que la date et le lieu n'aient pas encore été arrêtés de manière définitive à l'heure où j'écris cet éditorial, la commémoration devrait normalement se dérouler les vendredi 4 et samedi 5 octobre 2013 à Caen. Cet événement sera ouvert à tous les professeurs de l'académie. Un comité d'organisation dirigé par François Couchot (directeur de l'IREM pendant 11 ans) et un comité scientifique ont été créés. Nous ne manquerons pas de vous tenir informé du programme sur notre site.

Je souhaite à tous une lecture agréable.

Gilles Damamme
Directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Bibliographie relative à l'article de Jean-Pierre Le Goff sur "Induction ... cercle de Moser" pp. 4-12

Cramer, Gabriel. *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*. Genève, Chez les frères Cramer & Cl. Philibert, 1750.

Deledicq, André. & Missenard, D. « À la Recherche des Régions perdues », in : *Math. & Malices* n°22. Paris : ACL-Éditions, été 1995, pp. 22-23.

Euler, Leonhard. "Elementa Doctrinae Solidorum", pp. 109-140 in : *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 4 (1752/1753), Saint-Petersbourg, 1758.

—. "Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Haeris Planis Inclusa Sunt Praedita", in : *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 4 (1752/1753), Saint-Petersbourg, 1758, pp. 140-160.

Moser, Leo. "On the danger of induction", *Mathematics Magazine*, n°23, 1949, p. 109.

Moser, William, Oscar, Jules & Leroy, M. Kelly. « On the number of ordinary lines determined by n points », in : *Canadian Journal of Mathematics*, n°10, fév. 1958, pp. 210-219.

Vandermonde, Alexandre-Théophile. "Mémoire sur la Résolution des Équations. Par M. Vandermonde", pp. 365-416 in : *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MDCCLXXI (1771). Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie*. Paris, 1774.

—. "Mémoire sur l'Élimination. Par M. Vandermonde", pp. 516-532 + 1 pl. (p. 532) in : *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MDCCLXXII (1772) Seconde Partie. Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie*. Paris, 1776. .

Sur le vice et les vertus... de l'induction Le problème dit "du cercle de Moser"

Avant-propos en forme d'avertissement au lecteur

Cet article a pour origine un couple de conférences prononcées au Théâtre du Rond-Point à Paris en 2011 – année consacrée aux Monstres, au Rond-Point –, dans le cadre d'un cycle de l'université populaire de Caen/Basse-Normandie "décentralisée"¹. Le cycle et son thème ont donné lieu à publication, aux éditions Autrement, d'un l'ouvrage collectif² dans lequel l'article rédigé pour rendre compte de 3h de conférences très illustrées, et intitulé "Quand la raison vacille : démon(s)trer l'incongru" se compose de deux volets :

1°) j'y traite de la question des monstres et de leur représentation dans les ouvrages "scientifiques" à figures avant l'ère moderne et à la Renaissance, et j'y tente de mettre en évidence que la "monstration" relève d'un double mouvement de la pensée rationnelle et de la pensée analogique, puis

2°) j'y pose la question des monstres en mathématiques – laquelle s'est d'ailleurs souvent contentée de "montrer" : le mot existe dans la littérature ancienne –, et de l'outil forgé par les géomètres, pour "dé-montrer" les objets nouveaux de cette science, souvent apparus

comme incongrus de prime abord, en démontrant qu'ils s'avèrent moins étranges qu'il n'y paraît, par exemple en en donnant une représentation en accord avec l'édifice antérieurement établi.

Dans ce contexte, il fut question, en particulier, de définir ce qu'est la pensée déductive par opposition avec l'induction, qui n'est au fond qu'une étape de la pensée heuristique et de ce que les Anciens nommaient l'analyse. En effet le "raisonnement par induction" nécessite la méfiance lorsque la recherche de la vérité se content de l'évidence des cas particuliers s'agissant d'une assertion qui porte sur un grand nombre, et surtout un nombre infini d'occurrences : le passage du particulier à l'universel, suppose démonstration, et c'est même là que commencent les mathématiques pour certains auteurs. Cette partie de l'exposé n'ayant donné lieu qu'à quelques lignes dans l'article, une note renvoie à ce développement que l'on peut trouver, outre dans la présente livraison du Miroir, sur le site de l'IREM de Basse-Normandie et sur le site de l'upcbn.

De l'induction

Qu'est-ce que l'induction, par "opposition" à la déduction, qui préside au raisonnement euclidien ? Un exemple bien connu des mathématiciens permet de comprendre la chose : ils l'ont "inventé" comme une sorte de contre-exemple à une idée reçue, qui est que lorsque l'on connaît une suite (finie) de données numériques, ou plutôt quand on en connaît un nombre "assez grand" pour en tirer une loi générale qui semble vouloir se poursuivre "indéfiniment", on pourrait conclure à la "vérité" de cette loi pour le "phénomène observé".

On trouve cela parfois dans des magazines qui nous proposent, souvent l'été sur la plage, de tester nos capacités logiques : « Si je vous dis, 1, 2, 4, 8, 16, saurez-vous me dire le terme de cette suite de nombres, qui s'ensuit logiquement ? ». LA – j'insiste sur LA – réponse qui vient à l'esprit, est – d'aucuns diront "tout naturellement" – est : 32 (auquel succéderait 64, etc.).

Or il s'avère, dans cet exemple, que nous sommes "victimes" d'un fait acquis, ou plutôt d'un automatisme de pensée lié quasi-ataviquement au fait que la duplication – le fait de multiplier par 2 – est l'un des premiers opérateurs "naturels" pour rendre compte de la croissance, en l'occurrence d'une croissance multiplicative.

À tel point que l'histoire du sage jouant aux échecs avec son souverain et demandant pour récompense d'une victoire éventuelle tout le riz que l'on pourrait mettre sur l'échiquier en commençant par un grain sur la première des $8 \times 8 = 64$ cases, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite, EN MULTIPLIANT PAR DEUX LE NOMBRE DE GRAINS D'UNE CASE À LA SUIVANTE, est connue de toute antiquité dans un grand nombre de civilisations. Deux ou trois millénaires avant notre ère, les Babyloniens (voire peut-être les Sumériens), savaient "sommer" le nombre de grains de riz ainsi obtenus, puisqu'ils connaissaient la formule, que nous écrivons de nos jours : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ (avec 64 termes), ce que nous écrivons, avec la notation exponentielle (c'est-à-dire avec des exposants) :

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$, ce qui, par parenthèse, représente entre 460 et 600 milliards de tonnes de riz (non cuit...) si l'on suppose qu'un gramme de riz contient entre 30 et 40 grains, selon l'espèce.

Il faut cependant mettre l'accent dans cette histoire de jeu d'échecs, sur le fait que le mode de reproduction des termes de la suite est imposé (en lettres capitales, ci-dessus, pour souligner l'importance d'une telle règle

¹ Le 27 janvier 2011 : Quand la raison vacille I – Les monstres côté jardins, et le 17 mars 2011 : Quand la raison vacille II – Démon(s)trer l'incongru.

² Collectif (upcbn, Michel Onfray, dir.). Le canari du nazi. Essais sur la monstruosité. Paris : Autrement, 2012.

dite “de récurrence” ou “d’hérédité”) : c’est la duplication d’un terme à l’autre. Si une telle règle n’est pas explicitée, le test de votre magazine devient en fait sans objet : n’importe quel nombre peut faire suite à 1, 2, 4, 8, 16, et il y a, en toute rigueur, une infinité de réponses possibles, même si l’on se cantonne à une suite de nombres entiers.

Le contre exemple le plus frappant, consiste à décider que le “bon” nombre serait – au hasard – ... 31 ; ce qui, bien sûr, ne préjuge, en rien de plus que précédemment dès lors que la règle n’est toujours pas énoncée, de celui qui s’en suivrait (62 ?, 63 ? ou bien 61 ?).

Le lecteur trouvera ici, un développement de nature mathématique lui permettant d’approfondir cette question cruciale. Il y verra qu’en tout état de cause, induire n’est pas démontrer. Le géomètre est souvent amené à chercher la solution d’un problème que l’on peut exprimer en ces termes : « quelle est la loi générale éventuelle d’un phénomène observé, dont je n’ai pu dénombrer qu’un nombre fini de valeurs numériques lors d’un processus dont la variabilité relève de l’incrément par une unité ? ». Pour parvenir à ses fins, le dit géomètre procède le plus souvent par inductions successives, et ne sacrifie à la rigueur qu’au moment de faire la preuve que la suite qu’il a construite, – c’est-à-dire dont il a donné les premiers termes (un seul suffit, à ce stade) et la loi d’engendrement ou d’hérédité, qu’il connaît ou qu’il a obtenue par “analyse”, est la réponse au problème posé, ou même, s’il s’agit d’un phénomène observé dont on ne connaît pas la loi, qu’il existe un modèle, arithmétique ou géométrique, de cette situation qui produit la suite et qu’elle est en adéquation avec le problème posé. C’est en somme la preuve que dans la pratique et n’en déplaise à ceux qui en tiennent pour l’exposé synthétique qu’Euclide a rendu nécessaire a posteriori pour ordonner les connaissances acquises³, les problèmes ont précédé les théorèmes : les problèmes ont été posés et sont restés “ouverts” avant qu’on en trouve la solution.

Notons, pour en finir avec l’idée que l’atavisme de la duplication serait “naturel”, que l’exemple donné ici et précisé plus loin fait usage de figures où des lignes joignent des points d’une circonférence et que ces figures de réseaux ressemblent “assez” au type de “cartes” tressées de roseaux ou de joncs par certaines tribus de navigateurs sur radeaux de l’océan pacifique, “assez” en toute hypothèse pour imaginer une fiction qui ferait de ce problème un très vieux problème d’une autre civilisation dont les premières traces mathématiques se-

raient la suite 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, etc., que nous venons d’évoquer et que ce qu’on appelle le « cercle de Moser » tente de réifier à grands traits.

Pour simplifier ce premier développement, qui montre qu’il y a loin de l’intuition à la preuve, retenons que la démarche du mathématicien est semi-erratique : il se laisse volontiers aller à l’induction, mais sous contrôle : il sait qu’elle est trompeuse et connaît ses fallacies ; et lorsque l’analyse d’un problème le conduit à une voie plausible, il ne parle pas de théorème, mais de “conjecture”, qu’il va falloir confirmer (ou infirmer). Parfois c’est la communauté, attentive à la rigueur d’une preuve, et donc au faux-pas éventuel (le paralogisme), qui relève une erreur de raisonnement et renvoie le découvreur à ses chères études. Et on a pu voir les plus grands noms de la mathématique, cent fois sur le métier remettre leur ouvrage avant de trouver la voie, de corriger l’erreur, mais aussi parfois de se trouver dans l’impasse ; on a même vu des entêtés persister dans l’erreur sans comprendre la justesse des objections émises, ni même parfois qu’on ait pu oser les émettre. . .

Il ne sera pas dit que cet aperçu sera dénué de toute monstration de ce qu’est une dé-monstration, et nous allons entrer dans un exercice de style dont le mathématicien a le secret lorsqu’il se fait pédagogue : il invente des “exceptions” comme le grammairien, des “faux-amis” comme le linguiste, des monstres comme le logicien qui veut lutter contre le “bon sens”, le “sens commun” ou le “préjugé”, des “contre-exemples” pour éviter les généralisations abusives ; ici le géomètre se nomme W. O. J. Moser⁴, et il nous a concocté un objet inattendu qu’il va s’agir de démontrer.

Il se trouve en effet qu’une construction de nature géométrique et assez élémentaire produit une suite dont les premiers termes sont : 1, 2, 4, 8, 16, 31.

Prenons une courbe fermée, par exemple un cercle (ce qui ne change rien au résultat du processus engagé, dès lors que l’on n’y accepte pas de points doubles : le lacet se referme sans entrelacs). Plaçons des points sur la circonférence et joignons les deux par deux de toutes les façons possibles, par des lignes que nous supposerons droites pour l’instant : ces “cordes” délimitent à l’intérieur du cercle un certain nombre de “régions” que nous aimerions dénombrer : il est bien entendu que le géomètre souffre de ce genre de TOC, que lui suggère sa longue pratique de voir des problèmes partout, contrairement à d’aucuns qui prétendent avoir réponse à tout.

³ S’il faut louer les vertus de l’exposé hypothético-déductif du dit Euclide, nécessaire à un moment donné de l’histoire, il faut souligner qu’il n’a pas manqué de proposer, par exemple dans ses Données, des problèmes à résoudre à l’aide de la kyrielle de théorèmes qu’il énonce et établit, et de problèmes-clés qu’il résout dans ses Éléments.

⁴ Il s’agit du mathématicien William Oscar Jules Moser (1927-2009), frère cadet de Leo Moser (1921-1970) mathématicien lui aussi, duquel il dit qu’il lui doit son intérêt pour cette discipline et le donne pour son “premier mentor”. Leo Moser avait d’ailleurs écrit un article sur les dangers de l’induction : “On the danger of induction” (1949). Le problème du “cercle de [W.] Moser” se trouve dans la seconde de ses propres publications, rédigée en collaboration avec Leroy M. Kelly : “On the number of ordinary lines determined by n points”, et date de 1958. Cette communication fut remarquée par A. Dirac, qui écrira : « Cet article intéressera certainement une large catégorie de lecteurs, en raison de la généralité et de l’importance des problèmes considérés, mais aussi de la nature élémentaire et de la grande ingéniosité des méthodes utilisées ».

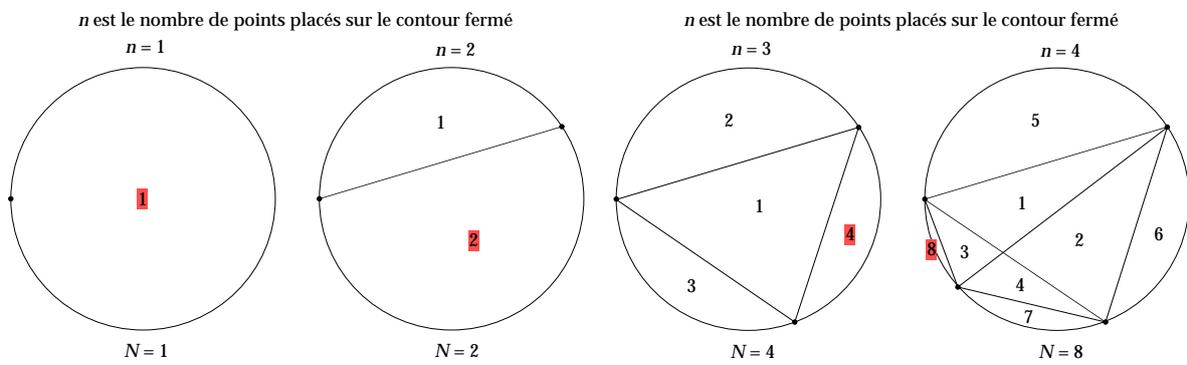
Sur le nombre de lignes quelconques déterminées par n points...

Il est "naturel" – selon René, notre philosophe national qui a (ré)inventé l'analyse des Anciens, au point de parler de sa Géométrie (1637) comme d'une Nouvelle Analyse – d'aller du plus simple au plus complexe ; si je place un point sur le cercle – ce que nous appellerons le rang 1 –, ne pouvant tracer aucune ligne de ce point vers d'autres qui n'existent pas, le cercle ne contient qu'une région : son disque intérieur ; nous dirons qu'au rang 1, le premier terme de la suite que nous construisons est 1.

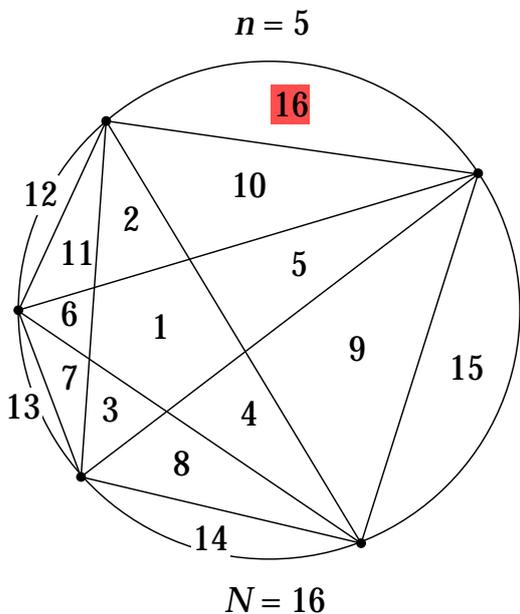
Si je place deux points, une seule corde pourra être tracée, délimitant deux régions ; au rang 2, le second terme de la suite est 2 ; avec trois points, ce sont trois cordes que l'on trace et quatre régions que l'on délimite (l'intérieur du triangle et les trois segments de cercles –

segmenter veut dire découper des morceaux – délimités par ses trois côtés avec les arcs de cercle qu'ils sous-tendent) : au rang 3, le nombre requis est 4.

Quelques tracés vous convaincront sans problème qu'au rang 4, le quadrilatère obtenu (un carré, par exemple) et ses deux diagonales déterminent 4 segments hors du carré et quatre triangles à l'intérieur : ce qui fera 8 régions pour le nombre requis ; passons au pentagone, ou plutôt au pentacle, cette figure intégrant les cinq lignes joignant deux points non consécutifs en plus de ses côtés, dessinant ainsi une étoile à cinq branches de mêmes sommets que le pentagone : un numérotage exhaustif des régions obtenues permet d'affirmer que leur nombre est 16.



n est le nombre de points placés sur le contour fermé



Récapitulons :

n =	N =
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	?
...	...
n	N = f(n) ?

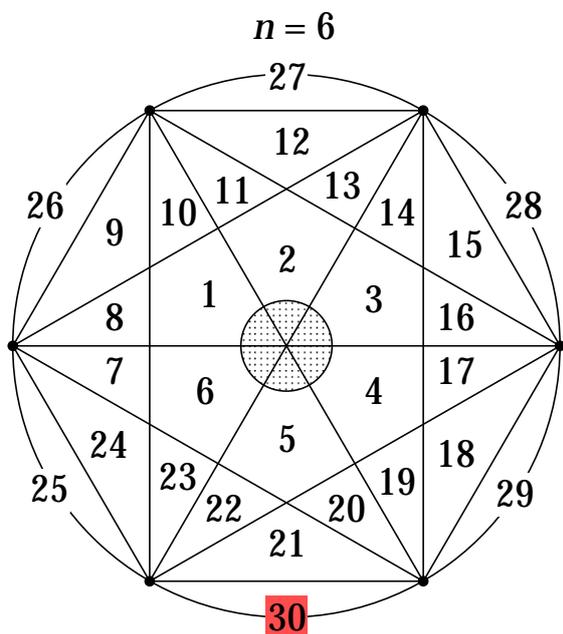
N est le nombre de zones obtenues après avoir joint les points 2 par 2 ; on induirait volontiers, après récapitulation, que N est une puissance de 2

C'est alors que les choses se gâtent un peu. Si la facilité vous a poussé à dessiner des polygones régu-

liers, vous dessinerez un hexagone régulier, formé de six triangles équilatéraux, ayant pour sommet commun

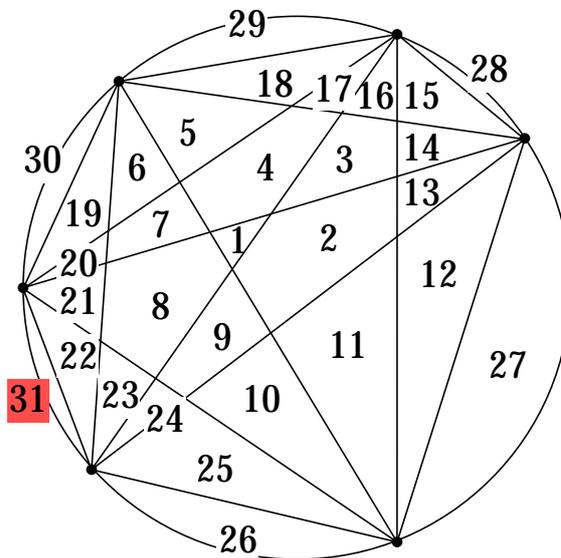
le centre du cercle, et complété de 6 lignes joignant deux points non consécutifs et non diamétralement opposés : ces lignes couperont les six triangles équilatéraux en

quatre parties, qui feront ainsi 24 régions intérieures à l'hexagone, qui ajoutées aux 6 segments de cercle extérieurs, donneront ... 30 régions.



$N = 30$!!!!!

$n = 6$, sous la condition (C)



N (maximal) = 31 !!!!!

On remarque que si l'on dispose les points régulièrement, certaines lignes de jonction se coupent par trois, ce qui diminue le nombre N de zones d'une unité (une zone se trouvant réduite à un point). Serait-ce l'explication de notre déconvenue ? Essayons l'irrégularité et posons la condition (C) : aucune ligne de jonction ne doit passer par un point d'intersection de deux autres ; au besoin, on tracera des lignes courbes pour éviter un tel accident...

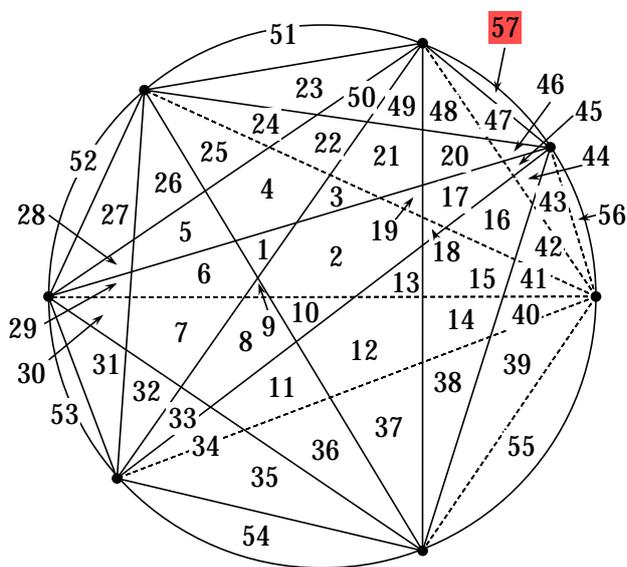
À vouloir simplifier la question par l'usage des polygones réguliers, et à défaut d'avoir précisé les conditions du régionnement, nous venons de passer à côté du nombre requis. Car à y regarder de plus près, au rang 6, nous sommes tombés, pour la première fois, sur une région fantôme, qui peut y être ou ne pas y être : en effet, trois des lignes tracées se rencontrent en un point, le centre du cercle, au lieu de se croiser "au hasard", preuve que notre problème est mal posé, si tant est que notre objectif est de "trouver" 32 puisque telle est notre intuition initiale. Tel que nous l'avons abordé, nous aurions dû dire : disposant des points sur un cercle de façon à former un polygone régulier, combien de régions obtiendrons-nous en les joignant 2 par 2 ? Mais si nous voulons que le "certain nombre de régions" requis soit "maximal", il faut alors ajouter la clause suivante, que nous nommerons (C) : disposant des points de façon que trois lignes les joignant ne se coupent jamais en un même point ; ou encore : si une ligne droite joignant deux points passe en un point d'intersection de deux autres, il faut l'incurver – éventuellement localement pour éviter le passage par ce point de concours préexistant – pour qu'elle détermine une, et une seule région supplémentaire, non réduite à un point ; alors, au

rang 6, le nombre de régions augmente d'une unité, et vaut 31, mais pas plus, puisqu'incurvant l'un des diamètres de la figure précédente, la ligne courbe obtenue coupera deux autres diamètres pour former un petit triangle supplémentaire : comptez et recomptez, c'est bien 31 et non 32.

Mais alors, qu'en est-il de l'heptagone, régulier ou non, dès lors que la clause (C) est entendue ? C'est là que le géomètre rompt le pacte euclidien : pour trouver une éventuelle formule répondant à la question – à savoir, une expression générale qui donnerait le nombre maximal N de régions lorsque l'on a disposé n points sur le cercle sous la clause (C) – l'homme de l'art va tenter de "deviner" le suivant connaissant les précédents, avec l'arrière-pensée implicite que cette formule est accessible puisque le mode de construction semble obéir à une loi de croissance dont la récurrence est sensible : chaque fois qu'une droite rencontre un segment de droite d'un réseau, il va doubler les deux régions dont ce segment est une frontière. Notons que le mathématicien préférera noter ce nombre N sous la forme "fonctionnelle" $f(n)$ ou "indicielle" u_n , puisque la valeur de N change au fil des valeurs successives de l'entier n .

Et pour $n = 7$? Trouverait-on $N = 63$? ou 2 fois 31 moins 1, soit 61 ?

$n = 7$, sous la condition (C)



63 ? 61 ? Que nenni !
 $N(\text{maximal}) = 57$!!!!!

Récapitulons :

$n =$	$N =$	$\Delta_1 N =$	$\Delta_2 N =$	$\Delta_3 N =$
1	1			
2	2	1		
3	4	2	1	1
4	8	4	2	2
5	16	8	4	3
6	31	15	7	4
7	57	26	11	5 ?
8	99 ?	42 ?	16 ?	
...	...			
n	$N = ?$			

Il y a un accès direct à la solution par cette façon de raisonner, que nous ne développerons pas immédiatement, préférant une voie d'induction pure, qui consiste à se dire que le développement d'une suite de nombres peut être "mesuré" par les écarts entre ses termes. Par exemple, la suite dite "des puissances de 2", à savoir $20 = 1, 21 = 2, 22 = 4, 23 = 8, 24 = 16, 25 = 32, 26 = 64$, etc. obtenue par duplication, est telle que les différences entre deux termes consécutifs suivent la même loi : $2 - 1 = 1, 4 - 2 = 2, 8 - 4 = 4, 16 - 8 = 8, 32 - 16 = 16$, etc. C'est une propriété bien connue des suites géométriques (on dit aussi des lois exponentielles) que leurs différences finies sont aussi géométriques (au même titre, et c'est important de le noter pour rendre sensible le passage des différences finies aux différences infiniment petites qui est l'une des intuitions majeures du Grand Siècle, que les dérivées ou différentielles des fonctions exponentielles sont elles-mêmes exponentielles).

Le réflexe du géomètre est donc de calculer les différences finies "premières" :

$$\Delta_1[f(2) - f(1)] = 2 - 1 = 1, \Delta_1[f(3) - f(2)] = 4 - 2 = 2, \Delta_1[f(4) - f(3)] = 8 - 4 = 4, \Delta_1[f(5) - f(4)] = 16 - 8 = 8, \Delta_1[f(6) - f(5)] = 31 - 16 = 15, \text{ etc. (si tant est que l'on ait déterminé la suite des valeurs au delà de } n = 6);$$

puis ne voyant pas de régularité suffisante dans la suite $1, 2, 4, 8, 15, \dots ?$, d'en calculer les différences finies (dites secondes pour la suite initiale) :

$$\Delta_2[3, 1] = [f(3) - f(2)] - [f(2) - f(1)] = f(3) - 2f(2) + f(1) = 2 - 1 = 1, \Delta_2[4, 2] = [f(4) - f(3)] - [f(3) - f(2)] = f(4) - 2f(3) + f(2) =$$

$$4 - 2 = 2, \Delta_2[5, 3] = [f(5) - f(4)] - [f(4) - f(3)] = f(5) - 2f(4) + f(3) = 8 - 4 = 4, \Delta_2[6, 4] = [f(6) - f(5)] - [f(5) - f(4)] = f(6) - 2f(5) + f(4) = 15 - 8 = 7, \text{ etc. ;}$$

et, sans barguigner, de réitérer, pour obtenir les différences troisièmes :

$$\Delta_3[4, 1] = \Delta_2[4, 2] - \Delta_2[3, 1] = 2 - 1 = 1, \Delta_3[5, 2] = \Delta_2[5, 3] - \Delta_2[4, 2] = 4 - 2 = 2, \Delta_3[6, 3] = \Delta_2[6, 4] - \Delta_2[5, 3] = 7 - 4 = 3, \text{ etc.}$$

et découvrir alors, devant ses yeux émerveillés le début de la suite $1, 2, 3$, des nombres entiers naturels, la plus simple des suites arithmétiques, dont les différences finies sont constantes : "émerveillés ? oui mais pas ébahis, car une suite de trois nombres dont on induit une loi générale sans précaution, c'est peut-être trop beau pour être "vrai", c'est-à-dire "général" dans le contexte. Une longue pratique met alors la puce à l'oreille à l'homme de l'art : si la suite des différences troisièmes se poursuit selon une loi arithmétique, il sait que la formule sera polynomiale de degré 4 : en effet, ce qui se passe pour les différences finies ressortit à ce qui se passe pour les différentielles ou dérivées : de même que la dérivée n -ième d'une fonction polynomiale de degré n est constante, ou encore que sa dérivée $(n - 1)$ -ième est arithmétique et que sa dérivée $(n + 1)$ -ième est nulle, les différences finies d'ordre n des valeurs prises par un polynôme de degré n pour des valeurs de sa variable en progression arithmétique sont égales entre elles. Une analogie peu orthodoxe - d'où les guillemets qui encadrent les points délicats de cette analogie, ceux qui ne supportent pas la simple monstration, et suppose-

raient de la démonstration – mais assez prégnante pour être soulignée ici, consiste à remarquer que le développement en série infinie⁵ de la fonction exponentielle, en fait un polynôme “de degré infini”, dont la dérivée terme à terme “jusqu’à l’infini” se trouve “être le même” développement que celui de l’exponentielle, ce qui se traduit par le résultat – connu⁶ pour l’exponentielle de base e – que la fonction $f(x) = e^x$ est sa propre dérivée.

Pour que cette façon de subodorer (le géomètre fait feu de tous les sens) la formule cherchée n’apparaisse pas comme un tour de passe-passe – d’autant que l’induction ne prouve en rien que c’est la bonne –, je dois à la vérité de préciser que l’homme de l’art d’un autre temps aurait très probablement compté sur pièces les nombres requis aux rangs 7 et 8 : il aurait trouvé, avec du temps et du soin, qu’au rang sept, 57 est le nombre de régions, et au rang huit, 99. Fort de cela, la suite des premières différences s’allonge : 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42 ; celle des différences secondes aussi : 1, 2, 4, 7, 11, 16 ; ce qui donne 1, 2, 3, 4, 5 pour différences troisièmes. Ce qui aurait renforcé sa conviction d’être proche du but... tout en n’ayant toujours rien prouvé !

Resterait alors à ce géomètre, qui aurait retenu la leçon de Gabriel Cramer (1704-1752) et de ses formules pour résoudre les systèmes de n équations à n inconnues, à dire que, le polynôme cherché, de la forme $a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4$ ayant cinq coefficients inconnus (changement de registre, changement de requis... : a, b, c, d, e sont les nouvelles inconnues), il lui suffirait de résoudre le système :

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 8, f(5) = 16$, sans même faire usage de $f(6) = 31$, – ce qui ne manque pas de sel, puisque c’est cette valeur qui nous a détourné de l’emblématique progression géométrique des puissances de 2 –, pour trouver la formule (toujours hypothétique) donnant les nombres requis pour toute valeur de n . Autrement dit, dans le domaine fini des fonctions polynomiales, la suite 1, 2, 4, 8, 16, ... se poursuivrait en quelque sorte “plus naturellement” par 31 que par 32... ce qui n’est pas le moins surprenant.

Le système s’écrit (avec un e “inconnu” qui n’a pas la signification numérique de base du logarithme népérien : c’est un art bien connu, voire pervers, du calculateur algébriste pour se piéger lui-même) :

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 1 \\ a + 2b + 4c + 8d + 16e &= 2 \\ a + 3b + 9c + 27d + 81e &= 4 \\ a + 4b + 16c + 64d + 256e &= 8 \\ a + 5b + 25c + 125d + 625e &= 16 \end{aligned}$$

On résout ce système linéaire “par les méthodes habituelles” : par combinaisons d’équations, par la méthode dite “du pivot de Gauss”, par la méthode des déterminants, qui généralise l’emploi des formules de Cramer

⁵ Le développement en question s’écrit : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

⁶ Autrement dit : $\frac{d}{dx}(e^x) = 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n \times (n-1)!} + \dots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^x$.

⁷ Ces systèmes, leurs déterminants et matrices, sont dits de Vandermonde. Une matrice de Vandermonde est de la forme générale : $[\alpha_i^{j-1}]_{(1 \leq i \leq \nu, 1 \leq j \leq \nu)}$. Et son déterminant vaut : $\prod_{1 \leq i < j \leq \nu} (\alpha_j - \alpha_i)$.

(méthode praticable pour n “petit” car elle nécessite, en principe, le calcul de $n + 1$ déterminants), ou, pour qui a entendu parler des déterminants de Vandermonde⁷, par une méthode propre à ce genre de systèmes, liés aux valeurs des diverses puissances d’une variable d’un polynôme, systèmes dont les coefficients sont alors des progressions géométriques.

En l’espèce, l’un quelconque de ces modes de résolution donne : $a = 1, b = -3/4, c = 23/24, d = -1/4, e = 1/24$, ce qui conduit à cette formule :

$$f(n) = \frac{(24 - 18n + 23n^2 - 6n^3 + n^4)}{24}$$

Reste à montrer que cette formule répond bien au problème. Car jusque là, tout n’est que “conjectures”, et chaque un (qui, prévenu en vaut deux) se doute maintenant que celles-ci constituent un lieu où l’on se perd facilement... L’induction a permis au géomètre d’espérer que le phénomène étudié ait une solution formulable et de mettre en évidence une formule qui lui permettrait peut-être de “prévoir” (d’anticiper sur la connaissance) d’autres résultats par voie de calcul direct, à savoir par application d’une formule ; la construction, poursuivie aux rangs suivants, confirmera ces résultats comme avérés, ce qui renforcera sa conviction que sa “conjecture” est assez bien vue : c’est-à-dire qu’avant d’aller plus loin, sauf s’il est sûr des calculs qui l’ont mené à la formule, il vérifiera qu’avec elle, $f(6) = 31$, que $f(7) = 57$ et que $f(8) = 99$, résultats qui correspondent aux valeurs dénombrées sur les figures ad hoc ; peut-être même, s’il est prudent, calculera-t-il $f(9)$, et, le trouvant égal à 163, comptera-t-il les régions déterminées dans la configuration à 9 points sur le cercle : si ces calculs et dénombrements venaient à le décevoir, ils infirmeraient cette conjecture, ce qui réduirait ses efforts à néant. Notons, pour l’ironie de la chose, que s’il allait jusqu’au rang 10, il aurait un moment d’émoi, puisqu’il trouverait 256, qui est... une puissance de 2, à savoir : $28 = 256$, mais qui n’est pas le “ $29 = 512$ ” qui résulterait de la conjecture $f(n) = 2n - 1$, que l’on aurait induite de $f(6) = 32 = 25$ et qui nous donnerait $f(10) = 29 = 512$!

La démonstration (une preuve obtenue par déduction) reste cependant à faire ; la connaissance d’une formule potentiellement efficace ne suffit pas : l’universalité de son efficacité ou encore sa valeur de vérité, doit être prouvée en toute généralité et non pas seulement éprouvée par quelques cas particuliers, si nombreux soient-ils : c’est-à-dire vérifiée quelle que soit la valeur de n , ou encore “jusqu’à l’infini”. Et c’est là la partie “rigoureuse” requise depuis la période des mathématiques hellénistiques, pour ce qui est de l’Europe.

Plusieurs voies sont possibles, parmi lesquelles deux viennent à l’esprit immédiatement ; 1°) une preuve directe : le processus de construction des régions permet

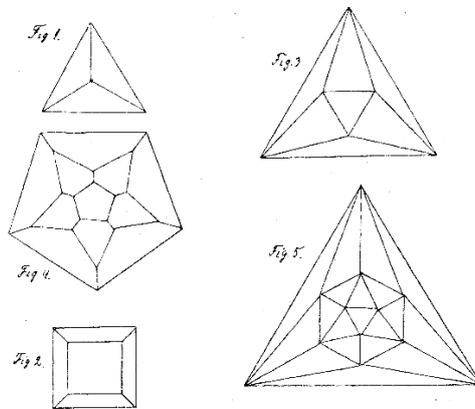
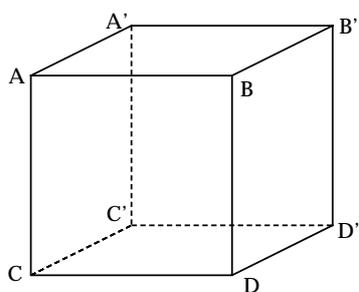
leur dénombrement par un comptage rationnel, puis la construction et la vérification de la dite formule ; 2°) une démonstration dite "par récurrence", mode supérieur de l'induction, dont le principe a été élaboré par Blaise Pascal (1623-1662) dans son traité du Triangle arithmétique (1654) qui porte son nom : le fameux Triangle de Pascal⁸.

1°) La preuve "directe", qui ne suppose pas nécessairement tout le travail qui précède puisqu'elle va conduire à la formule sans en connaître la forme a priori, consiste en ceci : n est le nombre de points situés sur le contour (le donné) ; $R(n)$ est le nombre de régions (le requis). On utilisera en outre : $C(n)$, le nombre de cordes supposées rectilignes tracées pour former le réseau sous la clause (CI) ; $P(n)$, le nombre total de points du réseau, à savoir les n points de la circonférence, plus les points "intérieurs" obtenus par intersection de deux cordes issues de 4 points distincts du contour ; $L(n)$, le nombre de "lignes élémentaires" du réseau, c'est-à-dire, 1°), des segments rectilignes de cordes, reliant deux des points "consécutifs" du réseau, à savoir : ne comportant aucun autre point intérieur entre leurs extrémités, parmi lesquels, 2°), les cordes-segments reliant deux points consécutifs du contour déterminant les régions mixtilignes de la carte, mais aussi 3°) les arcs de cercles (curvilignes) reliant deux points consécutifs du contour et formant ces mêmes zones mixtilignes avec les

cordes-segments du type 2. On peut définir tout point intérieur du réseau comme étant le point d'aboutissement de quatre lignes élémentaires du premier type.

Une formule générale, établie par Euler (elle porte son nom) et concernant initialement les polyèdres (Descartes l'avait formulée dans un texte consacré aux corps solides, et elle ne sera démontrée rigoureusement que par Cauchy au XIX^{ème} siècle), nous dit que les nombres A d'arêtes, F de faces, S de sommets d'un polyèdre, vérifient : $F - A + S = 2$. Transposée, par le même Euler, pour les cartes planes et leur réseau de frontières (celui de notre problème par exemple)⁹, on obtient $F = R(n) + 1$ (car l'extérieur de la courbe fermée représente une "face" du polyèdre dont la carte est une représentation plane : la face "arrière" d'un cube, par exemple, comme on le voit sur la figure suivante), $A = L(n)$ et $S = P(n)$, et cela donne : $R(n) + 1 - L(n) + P(n) = 2$, soit encore : $R(n) = L(n) - P(n) + 1$.

À gauche : figure d'un cube obtenue par projection "ou par aplatissement" : chacune des 5 zones intérieures au cercle représente l'une des cinq faces ABCD, ABB'A', BCC'B', CDD'C' et DAA'D' du cube, et l'étendue hors du cercle représente sa face arrière, A'B'C'D'. À droite : le même traitement appliqué aux cinq polyèdres réguliers, ou corps platoniciens, qui font l'objet de l'attention de Descartes, puis de la démonstration d'Euler, complétée par Cauchy.



Calculons $P(n)$:

Chaque choix de quatre points de la circonférence définit de façon unique un point d'intersection de deux cordes (les diagonales du quadrilatère complet que l'on obtient en joignant les quatre points deux à deux). A contrario, tout point d'intersection de deux cordes, que nous avons appelé "point intérieur" correspond à un ensemble unique de quatre points, c'est-à-dire qu'il n'est

pas situé sur trois cordes, selon la clause (CI) pour définir le problème sans ambiguïté.

En sorte que nous trouvons un nombre total de points intérieurs du réseau égal au nombre de choix de 4 points parmi n , ce qui s'appelle une combinaison ; celle-ci se note $\binom{n}{4}$, et vaut :

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{(4!) \times (n-4)!}$$

où $n!$ est la notation de la "factorielle de n ", c'est-à-

⁸ Pascal n'a "fait que" (excusez du peu...) formuler des propriétés des coefficients du développement du binôme, connues en Europe dès la Renaissance, et "son" Triangle... est connu, par exemple des Chinois, depuis belle lurette.

⁹ Le cas des polyèdres entre dans la question plus générale des graphes et de leurs nœuds de la manière suivante : on "aplatit" le polyèdre dans un plan, par une projection classique bien choisie ou par une autre déformation (nommée homéomorphisme) qui ne conduit pas à confondre, dans la représentation produite, deux sommets (devenus des nœuds) et n'introduit pas de nœuds supplémentaires apparents par intersection des apparences des arêtes, devenues des liens rectilignes ou curvilignes entre les nœuds. Ces questions ont produit ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie des graphes.

dire du produit de tous les nombres entiers de 1 à n .

En simplifiant ce rapport par $(n-4)!$, on obtient :

$$\binom{n}{4} = [n(n-1)(n-2)(n-3)]/(4!).$$

Et comme $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$,

$$\binom{n}{4} = [n(n-1)(n-2)(n-3)]/24.$$

Et par conséquent, en ajoutant les points de la circonférence :

$$P(n) = n + \binom{n}{4} = n + [n(n-1)(n-2)(n-3)]/24.$$

D'autre part, de chacun des n points de la circonférence partent $(n-1)$ cordes donc autant de lignes élémentaires rectilignes s'arrêtant à la corde qui joint les deux points du dit contour qui encadrent chacun des points de ce même contour, ce qui en fait $n(n-1)$. On notera qu'il faudrait diviser par 2 le nombre $n(n-1)$ pour connaître le nombre $C(n)$ des cordes puisqu'en dénombrant ainsi la totalité des cordes du réseau, chaque corde a été comptée deux fois ; $n(n-1)/2$ est en fait la combinaison qui exprime le choix de 2 points parmi n , ce qui fait bien $\binom{n}{2}$ cordes ; mais qu'en revanche, pour les lignes élémentaires, il en va différemment : n de ces cordes produisent une seule ligne élémentaire, ce sont les côtés du polygone convexe, mais les autres cordes, dont le nombre est égal à $[n(n-1)/2] - n = n(n-3)/2$, produisent deux lignes élémentaires qui joignent un point du contour et un point intérieur. Il y aura donc $n(n-3)$ lignes élémentaires joignant un point du contour et un point intérieur.

De chacun des points "intérieurs" partent 4 segments, ce qui en fait $4 \times \binom{n}{4}$ parmi eux, sont comptés deux fois les segments reliant deux points intérieurs, et ne sont comptés qu'une fois les segments reliant un point intérieur et un point du contour ; si donc on ajoute les segments élémentaires joignant un point intérieur et un point du contour calculé précédemment et deux fois le nombre des côtés du polygone, toutes les lignes rectilignes élémentaires seront comptées deux fois dans la somme suivante :

$4 \times \binom{n}{4} + n(n-3) + 2n = 4 \times \binom{n}{4} + n(n-1)$, qu'il faut diviser par 2 pour avoir la somme de lignes élémentaires ; on obtient : $2 \times \binom{n}{4} + \binom{n}{2}$.

En ajoutant enfin les n lignes élémentaires que constituent les arcs de cercle reliant deux points consécutifs de la circonférence, on obtient le nombre total de "lignes élémentaires", $L(n)$:

$$L(n) = 2 \times \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + n.$$

Reportant dans la formule d'Euler, on obtient :

$$R(n) = L(n) - P(n) + 1 = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n - n - \binom{n}{4} + 1 = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

Avec $\binom{n}{4} = [n(n-1)(n-2)(n-3)]/24$, et

$\binom{n}{2} = n(n-1)/2$, on obtient :

$$R(n) = [n(n-1)(n-2)(n-3)]/24 + n(n-1)/2 + 1 = [n(n-1)(n-2)(n-3) + 12n(n-1) + 24]/24 = (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)/24. \text{ C. Q. F. D.}$$

C. Q. F. D.¹⁰ On notera qu'ici, s'agissant d'un problème de construction (d'une formule), on aurait plutôt écrit : C. Q. F. F., i. e.¹¹ : Ce qu'il fallait faire, mention finale des problèmes résolus, C. Q. F. D. étant la mention finale des théorèmes. Ce problème devient un théorème dès lors que l'on énoncerait la chose ainsi :

Le nombre N de régions découpées sous la clause (Cl) [qui rend ce nombre maximal] dans un cercle par les cordes joignant n points de sa circonférence, 2 par 2, est égal à¹² :

$$\frac{(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)}{24}.$$

Il convient de remarquer que la formule, écrite avec les combinaisons, explique la confusion des premiers termes de cette suite de valeurs d'un polynôme précis avec ceux de la progression géométrique de raison 2 et de premier terme 1 ; en effet, on sait (et sinon, on n'en meurt pas), depuis Pascal (au moins...), que : $\binom{n}{4} = \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{3}$, que de même $\binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}$, et que $\binom{n-1}{0} = 1$.

Donc $R(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$ peut s'écrire :

$$R(n) = \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}.$$

Par conséquent, $R(1) = \binom{0}{0} = 1$,

$$R(2) = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 1 + 1 = 2,$$

$$R(3) = \binom{2}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 1 + 2 + 1 = 4,$$

$$R(4) = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{3}{1} + \binom{3}{0} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8,$$

$$R(5) = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} + \binom{4}{0} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16,$$

ce qui résulte d'une propriété bien connue¹³ – et repérée par Pascal – des "coefficients du développement du binôme $(a+b)^n$ – dit un peu abusivement de Newton¹⁴ –, à savoir : La somme des coefficients binomiaux de $(a+b)^n$ est égale à 2^n . À ceci près qu'ici, les choses s'arrêtent au rang 6 : en effet :

$$R(6) = \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1} + \binom{5}{0} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31,$$

car "il manque" $\binom{5}{5} = 1$, pour faire 32,

$$R(7) = \binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} + \binom{6}{0} = 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 57,$$

car "il manque" $\binom{6}{6} + \binom{6}{5} = 1 + 6 = 7$ pour faire 64, et ainsi de suite.

¹⁰ Il s'agit de l'acronyme de la phrase : Ce qu'il fallait démontrer ; dans le latin savant des premiers temps : Q. E. D. (Quod erat demonstrandum). Le latin comme langue scientifique a perdu jusqu'au XIX^e siècle et au-delà : c'était la langue véhiculaire et académique de l'Europe savante, et les soutenances de thèse, par exemple, se sont faites en latin en Allemagne, quelle que soit la discipline, jusqu'au début du XX^e siècle.

¹¹ Ce qui signifie : "id est" c'est-à-dire... "c'est-à-dire".

¹² Les valeurs données par cette formule pour $n = 1$ à 41 sont successivement : 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, 256, 386, 562, 794, 1093, 1471, 1941, 2517, 3214, 4048, 5036, 6196, 7547, 9109, 10903, 12951, 15276, 17902, 20854, 24158, 27841, 31931, 36457, 41449, 46938, 52956, 59536, 66712, 74519, 82993, 92171, 102091. Au rang $n = 1000$: $f(n) = 41417624251$.

¹³ Faisant $a = b = 1$ dans les développements ci-dessous de $(a+b)$, $(a+b)^2$, etc., $(a+b)^n$, on fait "abstraction" de ce qui s'y trouve entre parenthèses et qui vaut 1, et on obtient :

$1(a) + 1(b) = 2$; $1(a^2) + 2(ab) + 1(b^2) = 4$; $1(a^3) + 3(a^2b) + 3(ab^2) + 1(b^3) = 8$; ... ; et plus généralement : $(a+b)^n = 2^n$.

¹⁴ L'appellation "binôme de Newton" tient au mérite suivant, bien réel et qu'il partage avec John Wallis, William Brouncker et Nicolas Mercator : il a étendu le développement des polynômes, aux puissances fractionnaires et négatives, dans le cadre nouveau des développements illimités des expressions algébriques comportant des fractions et des racines n -ièmes.

Avec cette formule, qu'elle soit combinatoire ou polynomiale, on a maintenant un énoncé synthétique (à partir d'un problème qu'il a fallu auparavant résoudre pour le formuler); l'énoncé est devenu purement formel, et devient réutilisable puisqu'établi sans contestation possible. Il reste que la part la plus exaltante du travail a consisté à chercher la formule soit par induction à valider, soit par dénombrement direct des éléments au rang n et usage de récurrences implicites parce qu'unaniment reconnues comme vérités établies. La leçon est peut-être à retenir pour que la plaisir de faire des mathématiques demeure : le moment de la recherche – et donc des problèmes – est sans doute le plus motivant, quelles que soient les épines qui bordent la voie. Celui de l'application des théorèmes fera de notre discipline une belle au bois dormant pour le plus grand nombre ; et qui se soucie, de nos jours, d'aller embrasser une belle endormie dans un roncier ?

Dernière remarque, avant que d'aborder une autre forme de démonstration : cette preuve peut faire accroire que l'on a esquivé l'infini : que nenni ! On l'a escamoté, en usant d'un théorème (la relation de Descartes-Euler) énoncé sans démonstration... puisqu'elle est avérée depuis des lustres ; il y a toujours nécessité à passer du particulier au général dans une étape de la preuve, à ceci près que cette étape se cache ici dans un énoncé sans démonstration mais universellement admis et qui relève, lui, de processus à l'infini pour sa généralisation. En outre, la connaissance de formules telles que celles permettant le calcul des combinaisons ou $\binom{n}{4}$ même $\binom{n}{2}$ relève de preuves faites par récurrence (c'est l'un des objets dont traite Pascal dans le traité évoqué supra). L'enchaînement des raisons, en mathématiques, relève aussi d'une histoire à l'œuvre.

Il existe des voies bien plus rapides que celles que nous avons empruntées, pour démontrer la conjecture ; notre propos n'était pas d'optimiser "notre" démonstration – ah ! la concision et/ou la simplicité tant appréciées d'un argumentaire – ou d'esthétiser – ah ! l'élégance et/ou la beauté tant vantée de certaines démonstrations –, mais plutôt d'indiquer "les voies" de la découverte, et d'éviter la synthèse qui ne rend pas compte de l'élaboration de ces voies, ni du long, voire erratique, procès de leur production. Certes la simplicité et la concision, voire la beauté, d'une démonstration sont à estimer et à rechercher, ne serait-ce que "pour le plaisir" ; mais y a-t-il plaisir intellectuel sans compréhension ou révélation du sens de l'intellection et de ses objets ? Il n'est sans doute pas indifférent que l'on puisse parler de plai-

sir des sens et du plaisir du sens.

2°) La démonstration par récurrence de la conjecture sur la formule $R(n)$, induite préalablement, consisterait à supposer que cette formule $R(n)$ soit vraie pour les n premiers rangs pour un entier n fini quelconque, comme elle l'est jusqu'au rang 7 (8 ou 9), et à démontrer qu'elle est "héréditaire" : c'est-à-dire que l'introduction d'un $(n + 1)$ -ième point sur la circonférence conduit à fabriquer un nombre de régions supplémentaire qui s'avère être exactement la différence entre :

$$R_{(n+1)} = \frac{[(n+1)^4 - 6(n+1)^3 + 23(n+1)^2 - 18(n+1) + 24]}{24}$$

et

$$R(n) = \frac{[n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24]}{24}$$

c'est-à-dire :

$$R(n+1) - R(n) = \frac{[n(n^2 - 3n + 8)]}{6}$$

Il n'était pas écrit que vous sortiriez de cet article sans pensum(s) :

1°) Mais de quelles voies rapides, simples ou tout simplement belles, nous parle-t-on en cette occurrence ?

Cherchez donc ces voies royales ; vous en trouverez même sur la toile, qui ne sont d'ailleurs pas toutes exemptes de défauts. Il n'y a rien à gagner : le plaisir n'a pas de prix...

2°) Et comment achever la démonstration par la récurrence esquissée à l'instant ?

À vous de jouer pour compter les régions apparues d'une étape quelconque à la suivante... Rien à perdre, si vous comptez bien...

3°) Question(s) ouverte(s) – pour ma part, du moins – : peut-on imaginer un problème "élémentaire" qui conduirait à une suite commençant par : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63... On aura compris que la réponse est oui, quant à trouver un polynôme produisant ces nombres comme sept premiers termes, mais que la construction d'un problème connaissant une telle réponse (une formule polynomiale) voire même connaissant une série finie relevant d'une formule inconnue, relève de voies inductives ou intuitives autrement plus "problématiques" que le très joli exemple du cercle de Moser, croisé très probablement par son auteur lors de l'exploration, dans le domaine de la combinatoire, du nombre de nœuds d'un réseau. Pendant que vous y serez, pourquoi ne pas vous interroger sur le problème général :

a) de quel polynôme $P(x)$ les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., $2(n-1)$, $2n-1$ constituent-ils les $n+1$ valeurs obtenues pour les entiers x de 0 à n ?

b) peut-on imaginer un problème... ?

À suivre dans un prochain numéro : quelques solutions synthétiques du problème de Moser.

Bibliographie sommaire des ouvrages consultés visible en page 3, sous l'éditorial.

(N.B. Le prochain article proposera une bibliographie plus complète, avec des articles, des ouvrages et des URL pour aller plus loin.)

Jean-Pierre Le Goff,

IREM de Basse-Normandie & université populaire de Caen Basse-Normandie, Caen, septembre 2012.

À la rencontre de la croix et du pentagone célestes (I) Activités de découverte pour les élèves de troisième et du lycée

Résumé : nous vous présentons de nouveaux résultats et activités autour d'un très ancien sujet : le "Nombre d'Or". Quand nous étudions les différentes constructions des "Rectangles d'or", il est intéressant d'observer la succession de leurs diagonales. Les figures montrent l'existence d'un pentagone non régulier mais réellement esthétique auquel nous nous sommes intéressés, ainsi que certaines croix formées par les diagonales de rectangles d'or successifs. Nous les avons appelés : "Pentagone Céleste" et "Croix Céleste" en référence à la Croix du Sud, visible dans le ciel de l'hémisphère Sud où est né l'un de nous : Ruben Rodriguez. Nous calculons les valeurs algébriques exactes (avec des radicaux) des lignes trigonométriques des angles des pentagones célestes ainsi que la mesure de leurs côtés. Nous prouvons que les branches des « Croix Célestes » ont beaucoup de propriétés des suites de Fibonacci généralisées. Nous proposons ainsi des activités de niveaux variés qui peuvent être présentées tant aux élèves du lycée qu'aux élèves-professeurs de l'Université.

Abstract : we present below new results and activities about a very ancient subject : the Golden Number. When constructions of Golden Rectangles are studied, it is natural to observe the succession of their diagonals. The figures show the existence of an exciting pentagon, not regular but really esthetic. We have named it "the Celestial Pentagon" in memory of the South Cross visible in the sky of the south hemisphere where Ruben Rodriguez is born. It is well known that many connections between Fibonacci sequences and the succession of the Golden Rectangles exist. We give the exact algebraical measure of the trigonometric lines of the angles of the celestial pentagon, then we prove that the branches of what we call the "Celestial Cross" have many fine properties similar to the Fibonacci sequences ones. These activities are of different levels of difficulty and can be presented to future teachers as well as to seventeen years old students.

Resumen : les presentamos nuevos resultados y actividades alrededor de un muy antiguo tema; el "Numero de Oro". Cuando estudiamos diferentes construcciones del rectángulo de oro es natural de observar la sucesión de sus diagonales. Las figuras muestran un muy interesante pentágono que no es regular pero realmente estético y nos interesó, y, también la Cruz que forman las diagonales de dos Rectángulos de Oro sucesivos. Lo hemos llamado el "Pentágono Celeste" recuerdo a la Cruz del Sur que se vé en el cielo del sur-hemisferio donde nació Ruben Rodriguez. Es bien conocido que hay muchas conexiones entre las series de Fibonacci y las sucesiones de los rectángulos de oro. Calculamos el valor algébrico de las líneas trigonométricas de los ángulos de los pentágonos celestes y de sus lados. Probamos que las ramas de lo que llamamos la "Cruz Celeste" tienen muchas propiedades de las series de Fibonacci. Estas diferentes actividades son de dificultades variadas, entonces pueden ser propuestas a los estudiantes hasta el final del liceo superior, y también a los estudiantes profesores de la Universidad.

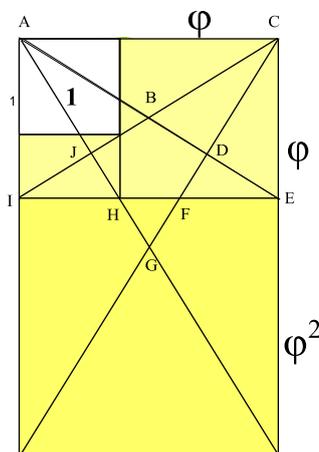
I – INTRODUCTION

Le nombre d'or et ses acolytes : rectangle d'or, pentagone régulier et autres suites de Fibonacci n'ont pas fini de vider les encriers comme le montrent par exemple les quatre articles « Activités autour du nombre d'or » mis en ligne récemment par l'un de nous à la demande du rectorat de l'académie de Caen.¹ Dans cet article nous vous présentons des thèmes d'activités autour de propriétés découvertes par Ruben Rodriguez-Herrera à cette occasion en espérant qu'ils amusent les élèves et inspirent le professeur.

Cet article sera suivi d'un second de Jean-Pierre Le Goff présentant un aspect historique et surtout heuristique de ce « nouvel être géométrique ».

Nous vous montrons donc dans ces deux articles comment des aspects remarquables d'une notion peuvent passer inaperçus pendant... plus de 2000 ans !

Rappelons tout d'abord comment on trace de façon itérative des rectangles d'or pour construire une « spirale rectangulaire ».



Il suffit tout d'abord d'adjoindre au premier rectangle d'or (en jaune pâle) de côtés 1 et φ^{-1} un carré de côté 1. On obtient un rectangle d'or de côtés de mesures 1 et φ , car $\varphi^{-1} = \varphi - 1$, ensuite un rectangle de côtés φ et φ^2 ; en effet, à cause de l'équation caractéristique de φ , on a :

$$\varphi^2 = \varphi + 1.$$

Nous avons ainsi dessiné les trois premiers rectangles d'or afin qu'apparaisse le début de la spirale rectangulaire formée par les diagonales des carrés successifs. Il est intéressant de remarquer que ces diagonales mesurent respectivement :

$$\sqrt{2}; \sqrt{2}\varphi; \sqrt{2}\varphi^2.$$

Qu'en est-il des diagonales des rectangles d'or ?

¹ Autour du nombre d'or, site de l'IREM de Basse-Normandie, section Relations internationales.

Le nombre d'or n'en finit pas d'exercer sa fascination tant chez les mathématiciens que les philosophes et les architectes, parfois d'ailleurs de façon peu crédible. Nous nous contenterons ici de vous proposer quelques remarques et calculs à propos d'un pentagone non régulier mais très particulier que nous appellerons « pentagone céleste » qui apparaît naturellement lorsque l'on effectue des constructions de rectangles d'or. Ce pentagone est créé (voir figure ci-dessus) lorsque l'on trace de façon itérative des rectangles d'or pour construire une « spirale rectangulaire ».

Supposons que nous sachions construire un rectangle d'or de côtés de mesure 1 et φ où φ désigne le nombre d'or : $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Les nombreuses mé-

thodes à la règle et au compas, par pliages, etc. sont bien connues, voyez par exemple les articles cités plus haut.

Il est facile de construire à partir d'un rectangle d'or de côtés de mesure 1 et φ , le rectangle d'or « suivant » de côtés de mesures φ et φ^2 . Rappelons l'équation vérifiée par φ :

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \text{ dont on déduit } \varphi^{-1} = \varphi - 1$$

Dans la figure suivante nous avons fait apparaître un rectangle d'or supplémentaire et hachuré un pentagone non régulier formé par les diagonales successives des rectangles d'or. Certaines de celles-ci sont portées par une même droite à cause de la proportionnalité des côtés successifs des rectangles d'or (voyez les articles déjà cités).

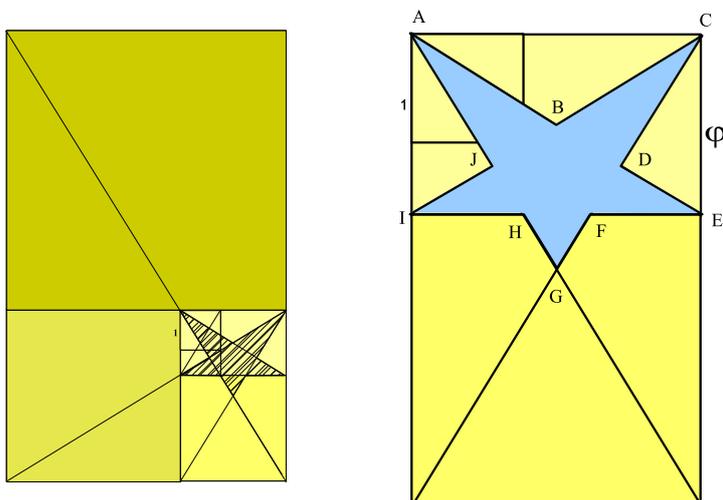


Figure générale montrant les diagonales portées par une même droite, cette propriété pourra être prouvée en classe avec l'aide du professeur. Le carré noté 1 est le premier carré, de côté 1, qui permet de construire le rectangle d'or de côtés 1 et φ .

Figure agrandie : le pentagone étoilé céleste a pour sommets ACEGI et pour contour : ABCDEFGHIJA.

De nombreux calculs de niveaux variés peuvent être effectués sur ce pentagone, nous vous proposons pour un niveau « plus facile » le calcul de ses angles, puis un autre « plus difficile » le calcul des lignes trigonométriques de ces angles sous forme algébrique (i.e. avec des radicaux) ensuite le calcul de ses côtés puis le calcul

de son ellipse circonscrite. Le professeur pourra ainsi juger de ce « jusqu'où les élèves pourront aller » selon leur niveau et il est conseillé de proposer les activités en travail par sous-groupes. Pour les plus grands nous introduirons la notion de « Croix Céleste » et nous étudierons ses rapports avec le nombre d'or.

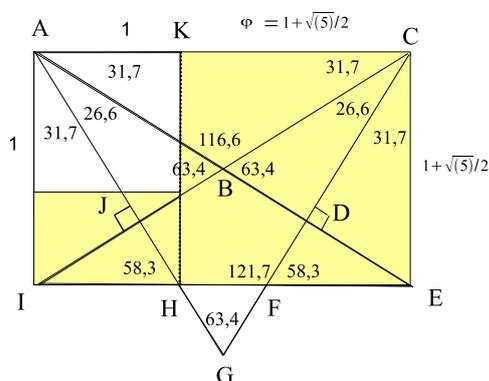
II – Calcul des mesures des angles du pentagone étoilé céleste (difficulté moyenne)

La figure suivante présente quelques propriétés observables et calculables de ce pentagone étoilé céleste.

Nous pouvons demander aux élèves de vérifier si la calculatrice donne ces résultats au dixième de degré près. La perpendicularité de certaines diagonales des rectangles d'or successifs nous permet de proposer **une construction simple du pentagone étoilé céleste (difficulté moyenne)** :

- Construire par pliages ou à la règle et au compas un rectangle d'or ACEI ;
- Tracer ses deux diagonales [IC] et [AE] qui se rencontrent en B ;
- Mener par A et C les droites perpendiculaires à ces deux diagonales qui se rencontrent en G ;

Alors le pentagone étoilé ABCEFGHIJ est céleste.



Par définition du nombre d'or les triangles qui forment les rectangles d'or successifs ont leurs côtés proportionnels et certaines diagonales ont même support. Les triangles AIH, HKA, CEF, IEC, IAC sont donc semblables et **les diagonales [AG] et [IC] sont orthogonales ainsi que [CG] et [AE]**. Nous reviendrons dans les paragraphes suivants sur cette propriété remarquable.

Nous en déduisons les valeurs des angles :

- les angles \widehat{IAH} , \widehat{EAC} , \widehat{ACI} , \widehat{FCE} , \widehat{GAI} , \widehat{GCE} sont égaux et ont pour mesure $31,7^\circ$ au dixième de degré près
- les angles \widehat{AHE} et \widehat{FCI} sont égaux et ont pour mesure $90 - 2(31,7) = 26,6$; l'angle dans le triangle ABC a pour mesure : $180 - 2(31,7) = 116,6$
- l'angle \widehat{GAC} , a pour mesure $31,7 + 26,6 = 58,3$ donc l'angle \widehat{AGC} dans le triangle AGC a pour mesure : $180 - 2(58,3) = 63,4^\circ$.

III – Calcul des lignes trigonométriques exactes des angles du pentagone étoilé céleste pour les élèves du lycée

Calculons tout d'abord les longueurs des diagonales du rectangles d'or AKHI.

$$\text{Nous avons : } AH^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,9$$

Donc, dans le triangle rectangle AIH nous avons :

$$\begin{aligned} \sin^2 31,7 &= \frac{1}{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{5 + \sqrt{5}} = \frac{2(5 - \sqrt{5})}{10} \text{ et } \sin 31,7 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \\ \cos^2 31,7 &= \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{20} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{20} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \text{ et} \\ \cos 31,7 &= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}. \\ \tan^2 31,7 &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{10}{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})^2}{20}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}(5 - \sqrt{5})}{20} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ et} \\ \tan 31,7 &= \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}. \end{aligned}$$

Les angles de $31,7^\circ$ et $58,3^\circ$ étant complémentaires, le sinus de l'un est respectivement le cosinus de l'autre, la tangente de l'un est la cotangente de l'autre.

L'angle de $63,4^\circ$ est double de $31,7^\circ$, appliquons la formule de duplication des sinus et cosinus :

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \Rightarrow \sin 63,4 = 2 \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} = \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \Rightarrow \cos 63,4 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} - \frac{5 - \sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } \tan 63,4 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5}{\sqrt{5}} = 2. \end{aligned}$$

Nous remarquons que la tangente de l'angle de $63,4^\circ$ est un nombre entier, pouvons-nous retrouver ce résultat à l'aide de la tangente d'un angle double d'un angle donné ?

On a : $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \Rightarrow \tan 63,4 = \frac{2\varphi^{-1}}{1 - \varphi^{-2}}$ rappelons que $\varphi^2 = m c + 1$ donc $\frac{\varphi}{\varphi^2 - 1} = 1$

Multiplions cette expression par φ^{-2} on obtient : $\frac{\varphi^{-1}}{1 - \varphi^{-2}} = 1$, donc $\tan 63,4 = 2$.

L'angle de $116,6^\circ$ étant supplémentaire de celui de $63,4^\circ$ nous en déduisons facilement ses lignes trigonométriques.

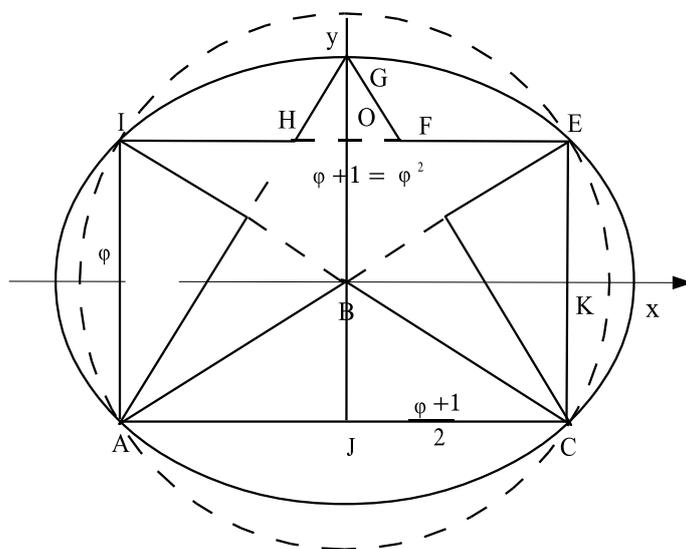
Angle en degrés	Sinus	Cosinus	Tangente
31,7	$\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \simeq 0,53$	$\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \simeq 0,85$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi^{-1}$
58,3	$\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \simeq 0,85$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \simeq 0,53$	$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$
63,4	$\frac{2\sqrt{5}}{5} \simeq 0,89$	$\frac{\sqrt{5}}{5} \simeq 0,45$	$\frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5}{\sqrt{5}} = 2$
116,6	$\frac{2\sqrt{5}}{5} \simeq 0,89$	$-\frac{\sqrt{5}}{5} \simeq -0,45$	-2

IV – Calcul de l'équation de l'ellipse circonscrite au pentagone céleste pour le lycée

Le pentagone étoilé céleste étant construit à partir du rectangle ACEI auquel on a adjoint un triangle isocèle HFG, il admet une ellipse circonscrite d'équation assez aisée à calculer, nous proposons donc ce calcul aux élèves du familiarisés avec la notion d'ellipse.

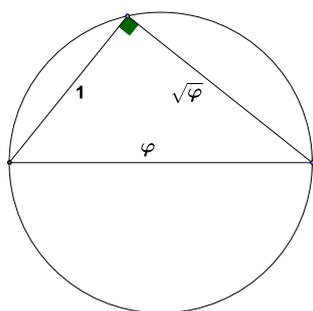
Intuitivement le rectangle ACEI admet un cercle

(tracé en pointillés) circonscrit, de centre B point de concours des diagonales du rectangle. Ce cercle peut être « aplati » verticalement selon l'axe [By] afin de passer par le point G, on obtient alors l'ellipse circonscrite au pentagone.



Nous avons placé nos axes selon les axes orthogonaux passant par le centre du rectangle d'or de côtés φ et φ^2 donc l'équation générale de l'ellipse est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Le demi grand axe est a et le demi petit axe est $b = BG = \frac{\varphi + 1}{2} = \frac{\varphi^2}{2}$; L'ellipse passe par E de coordonnées : $x = \frac{\varphi^2}{2}$ et $y = \frac{\varphi}{2}$ donc $\frac{\varphi^2}{4a^2} + \frac{\varphi^2}{4\varphi^4} = 1$ soit $\frac{\varphi^2}{4a^2} = \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi}$. On a donc $4a^2 = \varphi^5$ et l'équation de l'ellipse

est $\frac{4x^2}{\varphi^5} + \frac{4y^2}{\varphi^4} = 1$. Donc le demi grand axe a vaut $\frac{\sqrt{\varphi^5}}{2} = b\sqrt{\varphi}$. L'aplatissement du cercle de centre B et de rayon $\frac{\sqrt{\varphi^5}}{2}$ pour obtenir l'ellipse est donc : $\sqrt{\varphi}$. Les deux foyers de l'ellipse ont pour abscisses c et $-c$ avec $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{\varphi^5}{4} - \frac{\varphi^4}{4} = \frac{\varphi^3}{4} (\varphi^2 - \varphi) = \frac{\varphi^3}{4}$ et il vient $c = \frac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2}$.



Remarque : Nous voyons apparaître ici la longueur $\sqrt{\varphi}$ et, bien sûr nous posons une question, récurrente dans nos activités : cette longueur est-elle constructible à la règle et au compas ?

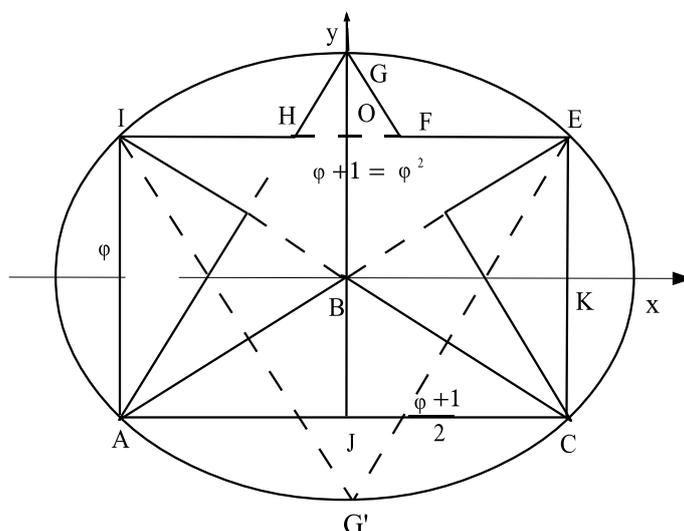
La réponse est « oui » comme le montre la figure ci-contre, à condition toutefois que l'on définisse une longueur unité.

Nous construisons un cercle de diamètre φ , nous reportons à partir de l'extrémité de celui-ci une corde de longueur 1 alors le troisième côté du triangle rectangle ainsi défini a pour longueur : $\sqrt{\varphi^2 - 1} = \sqrt{\varphi}$

Pour les élèves **moins familiarisés avec la notion d'ellipse** nous pouvons proposer une autre approche « intuitive » (nous mettons ce mot entre guillemets car chacun sait que l'intuition mathématique ne se développe qu'avec une longue pratique, nous devrions peut-être utiliser le mot « imagée ») du problème précédent. Nous proposerons ensuite un **calcul détaillé à partir de l'équation générale de l'ellipse, toujours pour les plus grands.**

Une autre façon d'aborder la recherche de l'équation de l'ellipse circonscrite peut consister à construire, comme cela est fréquent en géométrie un **complément de figure** qui va nous aider dans le raisonnement. En

effet, chaque personne travaillant sur le pentagone céleste remarque que son enveloppe convexe ACEGI ressemble à une maison avec un toit. Le pentagone céleste est entouré du rectangle ACEI auquel on ajoute un triangle AGF. Ce petit triangle ôte la symétrie du rectangle, ce qui est gênant lorsque l'on recherche l'équation de l'ellipse. Nous proposons donc de compléter le pentagone en traçant le triangle IG'E symétrique du triangle AGC. **Nous obtenons maintenant un hexagone non régulier mais admettant deux axes de symétrie [Bx] et [By].** Par un effet de symétrie de la figure l'ellipse circonscrite au pentagone céleste sera aussi circonscrite à l'hexagone.



L'équation générale de l'ellipse est de la forme : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Nous remarquons tout d'abord que la figure est maintenant symétrique par rapport aux deux axes. Donc y est invariant lorsque l'on transforme x en $-x$ et x est invariant lorsque l'on transforme y en $-y$: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$; faisons $x \rightarrow -x$: $ax^2 - bxy + cy^2 - dx + ey + f = 0$. Par addition membre à membre, il vient :

$2ax^2 + 2cy^2 + 2ey + 2f = 0$ d'où $ax^2 + cy^2 + ey + f = 0$. Alors $y \rightarrow -y$ donne : $ax^2 + cy^2 - ey + f = 0$; Par différence membre à membre, il vient : $e = 0$. L'équation simplifiée de l'ellipse est $ax^2 + cy^2 + f = 0$.

Écrivons que l'ellipse recherchée passe par le point G de coordonnées $(0, (\varphi+1)/2)$: $c[(\varphi+1)/2]^2 + f = 0$. Donc $f = -c[(\varphi+1)/2]^2$.

Écrivons que l'ellipse recherchée passe par le point E de coordonnées $((\varphi + 1)/2, \varphi/2)$.

$(a/4)(\varphi + 1)^2 + (c/4)\varphi^2 = (c/4)(\varphi + 1)^2$; ou encore $(a/4)\varphi^4 + (c/4)\varphi^2 = (c/4)\varphi^4$; simplifions cette expression par $\varphi^2/4$; il vient $a\varphi^2 + c = c\varphi^2$ donc $a\varphi^2 = c(\varphi^2 - 1) = c\varphi$ et $c = a\varphi$.

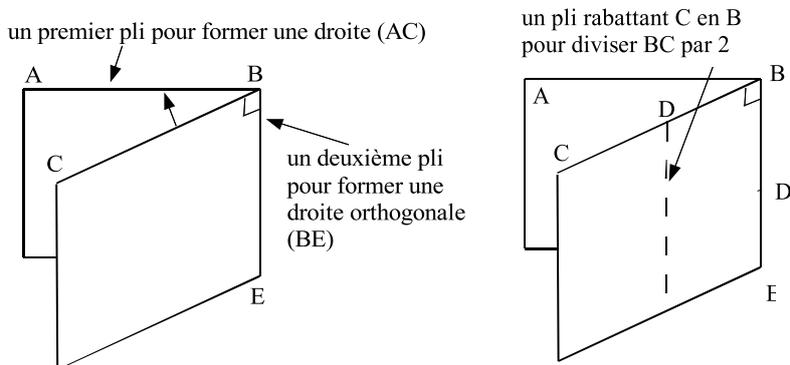
L'équation de l'ellipse devient $ax^2 + a\varphi y^2 = a\varphi^5/4$

puis en simplifiant par $(a \neq 0)$, $4x^2 + 4\varphi y^2 = \varphi^5$. Soit encore $\frac{4x^2}{\varphi^5} + \frac{4y^2}{\varphi^4} = 1$, ce que nous avons calculé dans le paragraphe précédent.

Les calculs du paragraphe III nous permettent d'obtenir une construction très simple par pliage de l'angle de $63,4^\circ$ qui est donc **l'angle aigu formé par les diagonales de tous les rectangles d'or**.

V – Construction par pliage des rectangles d'or dont la longueur des diagonales est connue, variante à la règle et au compas pour la classe de seconde

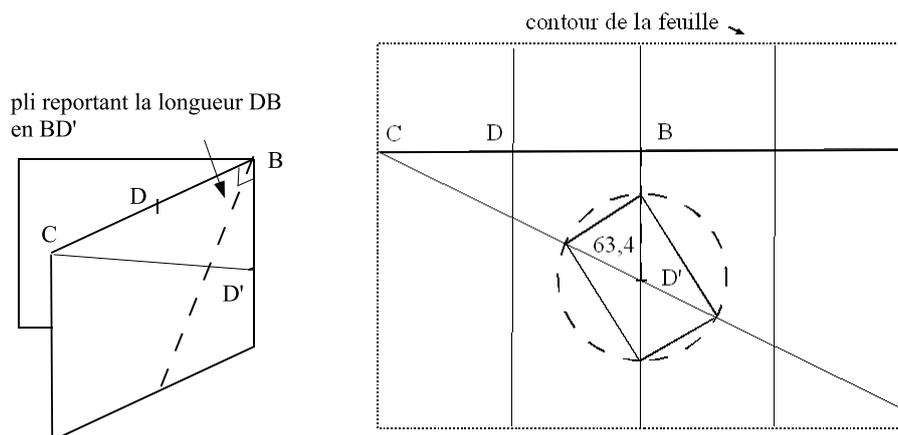
Nous proposons aux élèves de construire par la technique habituelle deux plis perpendiculaires :



Nous reportons ensuite la longueur DB le long de [BE] à partir de B par le pli en pointillés.

Alors l'angle a pour mesure $63,4^\circ$, nous demandons aux élèves de vérifier leur construction avec le rapporteur. Ensuite nous leur demandons d'ouvrir la feuille et

de marquer la droite (CD') par un pli. Nous demandons alors aux élèves de montrer que tout cercle centré en D' rencontre les droites (CD') et $(D'B)$ aux sommets d'un rectangle d'or.



Il est possible d'effectuer cette construction à la règle et au compas en demandant aux élèves de construire un rectangle d'or dont la mesure des diagonales est imposée; voici une suggestion de texte pour les classes de seconde, pour le calcul effectif de la tangente de l'angle $63,4^\circ$ que nous avons exposé plus haut. Nous le proposerons aussi aux classes de première et terminale.

Exercice (difficulté moyenne)

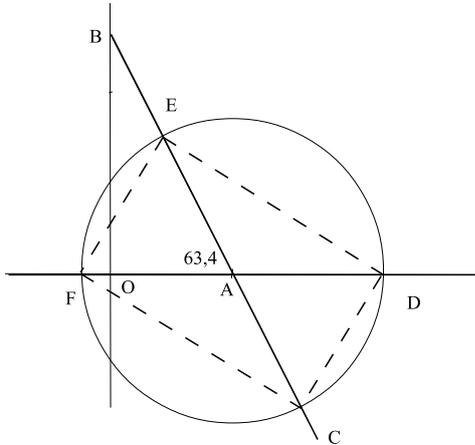
Construire un rectangle d'or avec votre construction préférée : pliage ou règle et compas.

Vérifier avec la calculatrice que l'angle formé par les diagonales du rectangle d'or mesure $63,4^\circ$ au dixième de degré près.

Vérifier avec la calculatrice que la tangente de l'angle de $63,4^\circ$ est 2 au dixième près, en déduire une construction

simple d'un tel angle à la règle graduée et à l'équerre. On suppose connue la longueur des diagonales d'un rec-

tangle d'or, par exemple 10 cm, construire ce rectangle d'or à l'aide du compas.



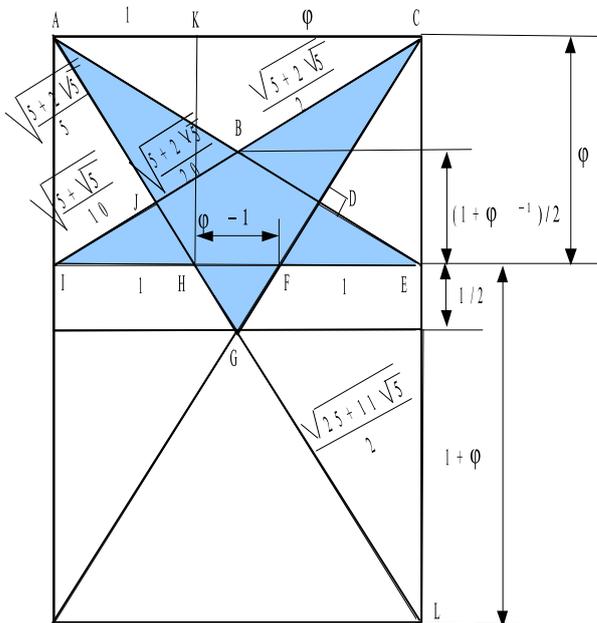
Solution

Construction de l'angle de 63,4° : tracer deux droites orthogonales qui se croisent en O, reporter à partir de O, sur l'une une longueur par exemple 4 cm d'extrémité A, sur l'autre la longueur double soit 8 cm d'extrémité B, alors l'angle \widehat{OAB} mesure 63,4°, le vérifier avec le rapporteur. Tracer le cercle de centre A et de diamètre 10 cm qui rencontre la droite (OA) en D et F et la droite (AB) en C et E alors le rectangle CDEF est le rectangle d'or recherché.

V – Calcul des mesures des côtés et hauteurs du pentagone étoilé céleste pour le lycée

Pour commencer le travail nous effectuons des calculs pour obtenir les longueurs des différentes branches du pentagone céleste en fonction de φ .

Nous calculons tout d'abord la diagonale [IC] du rectangle d'or ACEI de côtés φ et $\varphi+1$ puis la demi diagonale BC.



$$IC^2 = \varphi^2 + (\varphi + 1)^2 = 2\varphi^2 + 2\varphi + 1 \text{ or } \varphi^2 = \varphi + 1 \text{ donc } IC^2 = 3 + 4\varphi \text{ et } IC = \sqrt{3 + 4\varphi}$$

et $BC = \frac{\sqrt{3 + 4\varphi}}{2}$. Nous avons remarqué que le triangle AJB égal au triangle CDB est rectangle, notons a le petit côté de l'angle droit, alors le grand côté de l'angle droit mesure $2a$ (calcul du paragraphe précédent). Dans le triangle AJB nous avons donc : $a^2 + (2a)^2 = \frac{3 + 4\varphi}{4}$ d'où

$$a^2 = \frac{3 + 4\varphi}{20} \text{ puis } a = \sqrt{\frac{3 + 4\varphi}{20}}$$

$$IJ = IB - JB = \frac{\sqrt{3 + 4\varphi}}{2} - \sqrt{\frac{3 + 4\varphi}{20}}$$

$$IJ = \frac{(\sqrt{3 + 4\varphi})(5 - \sqrt{5})}{10}$$

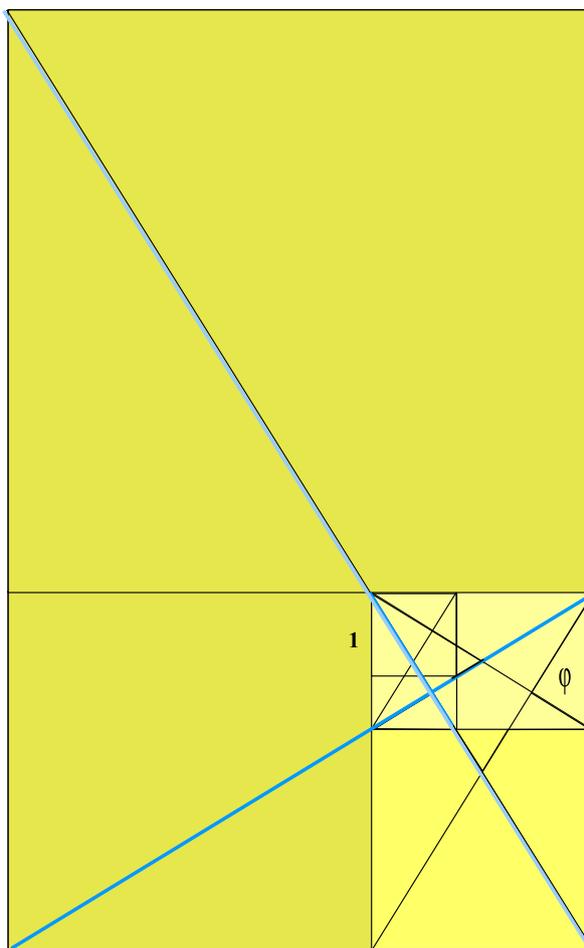
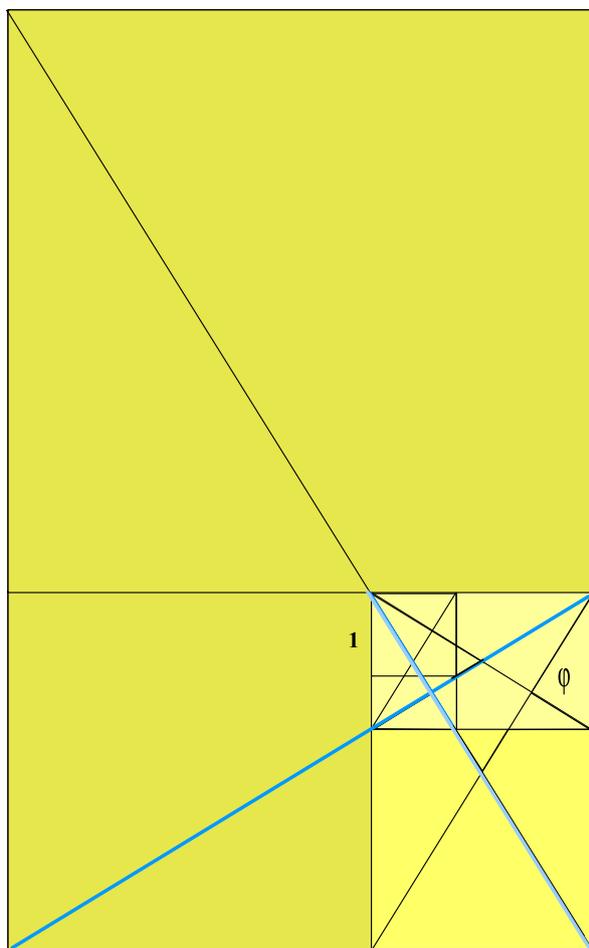
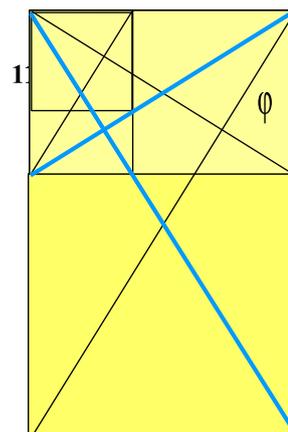
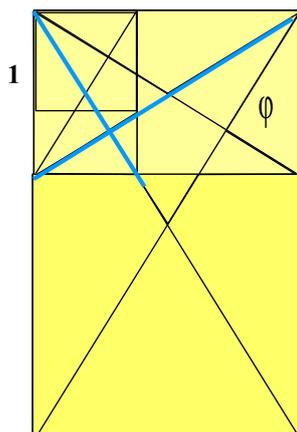
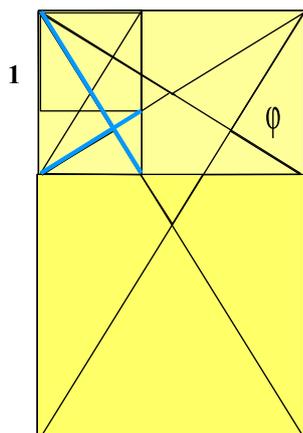
Le point G étant l'intersection des diagonales du grand rectangle d'or ACLM de côtés $1 + \varphi$ et $1 + 2\varphi$, la hauteur du triangle isocèle HGF est $\frac{(1 + 2\varphi)}{2} - \varphi = \frac{1}{2}$. La hauteur du triangle isocèle HBF est $\frac{(1 + \varphi^{-1})}{2} = \frac{\varphi}{2}$,

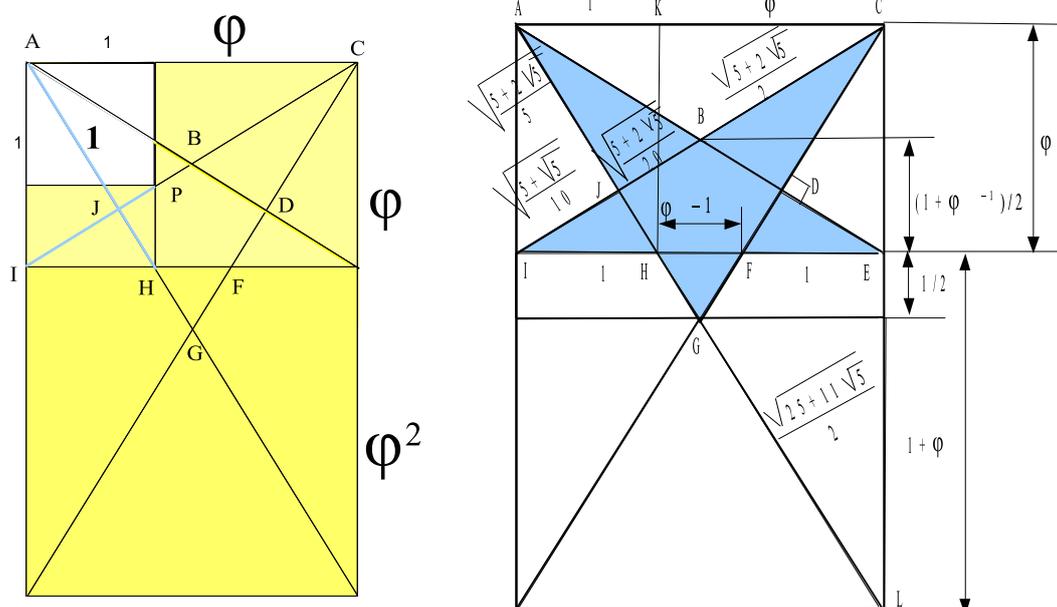
sa base HF mesure $1 + \varphi - 2 = \varphi - 1$. Pour terminer nous vous proposons de calculer les valeurs algébriques que nous avons indiquées sur la figure. Nous revenons sur ces valeurs par raisonnement géométrique dans le paragraphe suivant à propos des propriétés de la croix céleste.

VI – Définition de la croix céleste et étude de ses propriétés (découvertes par l'un d'entre nous : Ruben Rodriguez Herrera)

Nous vous avons fait remarquer que les triangles CDB et AJB sont rectangles, il en est de même, bien sûr dans les constructions successives des rectangles d'or dont les côtés sont tous respectivement proportionnels.

Nous mettons en évidence dans les figures suivantes les « **croix célestes** » formées par deux branches orthogonales de deux rectangles d'or successifs dont nous allons calculer les propriétés.





Observons les branches de la première croix céleste : [JP]; [JH]; [IJ]; [JA]. Ce sont les petits côtés de triangles rectangles d'hypoténuses, φ^{-1} , 1, φ en croissant. Ils sont semblables par la propriété des rectangles d'or, leurs angles correspondants sont donc égaux, la tangente de l'angle de mesure $58,3^\circ$ au dixième de degré près est φ . Les calculs du paragraphe précédent sont assez ingrats aussi nous allons vous proposer un raisonnement géométrique qui vous démontrera une fois de plus combien la géométrie euclidienne peut être élégante. Appelons a la mesure du plus petit côté JP du plus petit tri-

angle rectangle HJP. L'autre côté JH a donc pour mesure $a\varphi$. Le triangle suivant, d'hypoténuse 1 a pour côtés JH et JI, ce dernier de mesure $a\varphi^2$. Pour des raisons similaires le côté JA du triangle suivant mesure $a\varphi^3$. Récapitulons : $JP = a$; $JH = a\varphi$; $JI = a\varphi^2$; $JA = a\varphi^3$. Nous constatons que $JI = JH + JP$ à cause de la propriété de φ : $\varphi^2 = \varphi + 1$ ainsi que : $JA = JH + JI$.

Plus généralement :

Propriété 1 - Les mesures des branches successives distinctes des croix célestes forment une suite géométrique de raison φ .

VII - Suite des rectangles d'or construits à partir des bras de la croix céleste pour le lycée

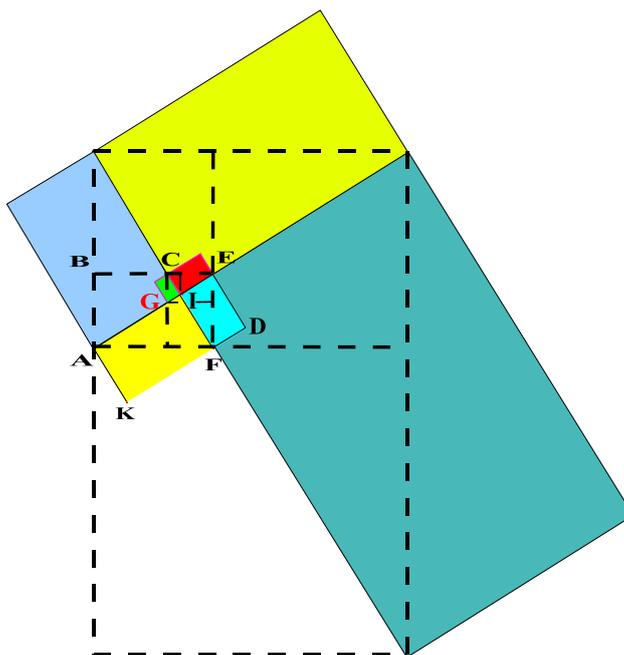
Nous vous proposons cette suite d'activités qui peuvent paraître à certains lecteurs avertis « élémentaires » car leurs résultats sont « un peu » prévisibles. Ces activités étant, a priori destinées aux élèves de troisième du collège et de lycée elles pourront être proposées avec profit nous semble-t-il aux élèves professeurs de l'université.

Nous vous rappelons que, pour que les élèves construisent bien leurs psychomorphismes² autour d'une notion, il est nécessaire d'aborder celle-ci suivant des

directions différentes afin de renforcer et préciser leur image mentale.

Puisque la suite des bras des croix célestes est géométrique de raison φ il est intéressant d'observer les rectangles d'or successifs construits sur ces bras. Remarquons qu'il a deux façons de construire la suite des croix célestes, puisque, dans le pentagone céleste, deux couples de côtés se coupent à angle droit. Pour simplifier nous choisissons de **construire les croix célestes successives autour du point I des figures précédentes.**

²Pour la notion de « Psychomorphisme » on pourra consulter les articles en ligne sur le site de l'IREM de Basse-Normandie par Ruben RODRIGUEZ HERRERA, voir la bibliographie.



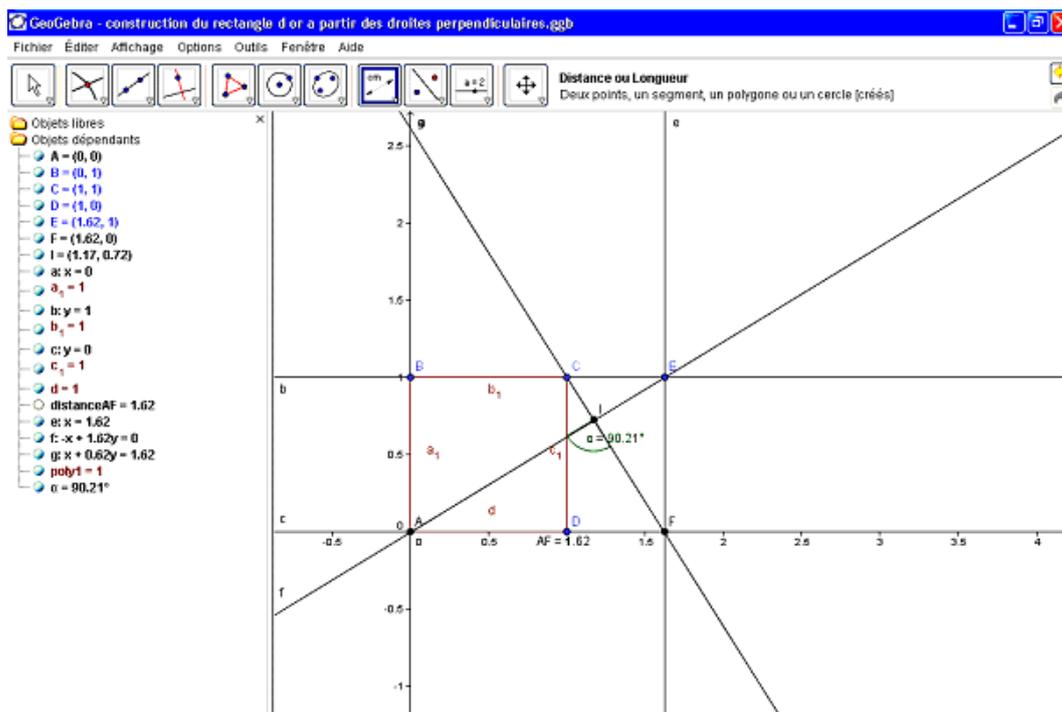
VIII - Une construction du rectangle d'or et la croix céleste à l'aide de GEOGEBRA

1) On trace un carré ABCD de côtés de longueur 1, (avec la fonction distance du logiciel), puis on lui adjoint un rectangle extérieur CDFE, tel que le point F soit sur la droite (AD) et le point E sur la droite (BC)

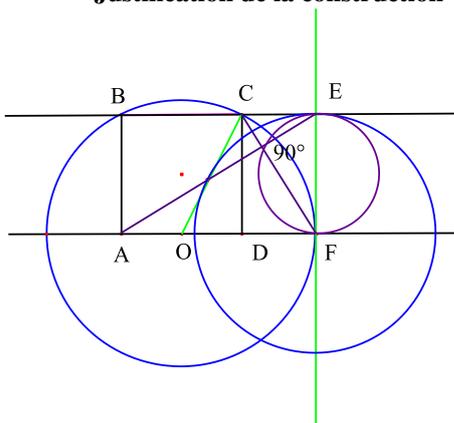
2) On trace les droites (AE) et (CF) qui se coupent en I, puis on fait mesurer par le logiciel l'un des angles en I

3) On déplace le point F, (toujours sur la droite (AD)) et on s'arrête quand l'angle en I est de 90° avec la meilleure précision possible.

4) Avec la fonction distance du logiciel on constate que la distance AF est une approximation du nombre d'or, c'est-à-dire 1,62 au centième près.



Justification de la construction



Puisque, par construction, les segments $[AE]$ et $[CF]$ sont orthogonaux, les triangles AEF et CFE sont semblables ainsi que les rectangles $ABEF$ et $CEFD$.

On a donc la proportion suivante :

$$(AD + DF) / AB = CD / DF.$$

Choisissons la longueur du côté du carré $ABCD$ pour unité de mesure : $AD=1$; on a : $(1+DF)/1 = 1/DF$. Posons $DF = x$ où x est un réel positif. On a l'équation dans \mathbb{R}^{+*} :

$$(1 + x) = 1/x. \text{ Équivalente à } x^2 + x - 1 = 0 \text{ dont la solution est } x = (-1 + \sqrt{5})/2 = \varphi^{-1}.$$

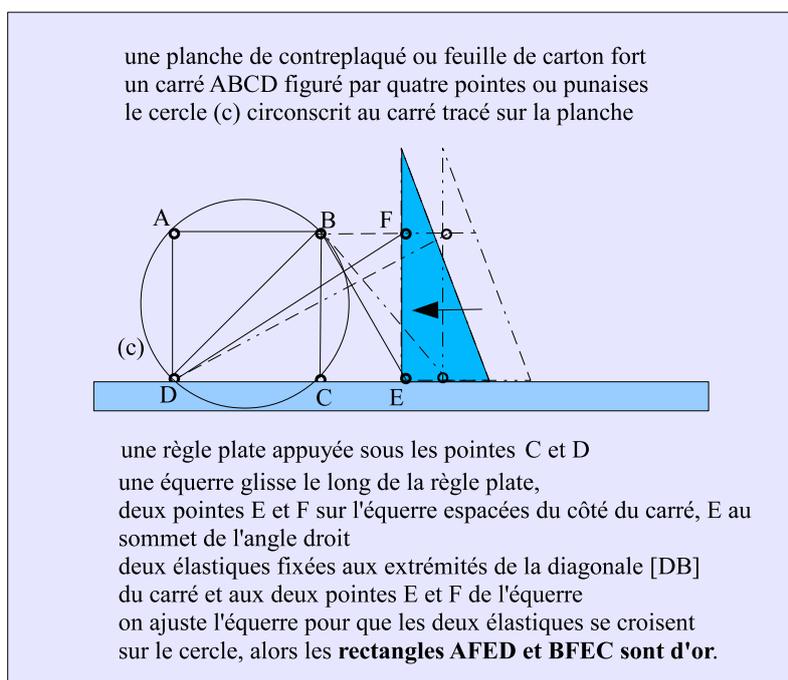
Le rectangle $ABEF$ est d'or.

Propriété 4 - Si l'on prolonge deux côtés opposés d'un carré $ABCD$ par un rectangle $CDEF$, pour que $CDEF$ soit un rectangle d'or, il suffit que les diagonales respectives $[AE]$ et $[CF]$ des rectangles $ABEF$ et $CDEF$ soient orthogonales.

Réalisation sous forme de bricolage pour le collège :
Matériel – une planche de contre-plaqué, quelques pointes, une règle plate, une équerre, un compas des bra-

celets élastiques (par groupes d'au moins trois élèves).

Commentaire : comme dans toutes ces expériences de construction géométrique, nous sommes confrontés au problème de l'approximation : épaisseur des traits, diamètre des pointes, positionnement incertain de la règle plate, incertitude de la position de l'intersection des deux élastiques sur le cercle qui peuvent troubler l'élève.



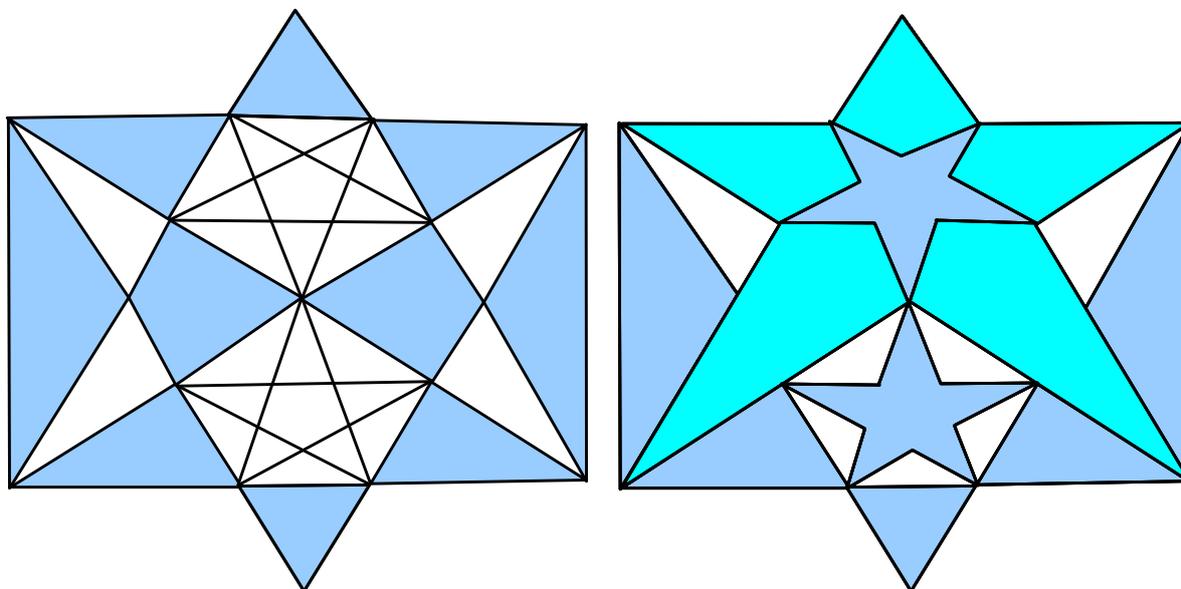
Il est donc bon de souligner aux élèves qu'une fois de plus ce n'est pas parce que « cela marche » que nous sommes satisfaits, il est possible que notre « petit rectangle d'or » ne donne pas une très bonne approximation de $\varphi - 1$ (si nous supposons le carré de côté unitaire) mais il s'agit de réaliser physiquement une investigation mathématique, nous faisons un travail d'ingénieur, qui devra par exemple, affiner ses ajustements pour répondre à des normes de précision.

Nous faisons ici le travail réciproque du précédent où nous constatons que Geogebra nous délivrait une mesure de φ acceptable et ensuite, nous justifions la validité de la construction.

Dans la vie industrielle il est plus fréquent de réfléchir à une technique, puis de la réaliser au mieux, mais, à l'école, il ne faut pas priver l'élève de la devinette : « Pourquoi ça marche ? »

Pour terminer nous vous proposons une mosaïque construite à partir de l'hexagone introduit dans le calcul de l'ellipse circonscrite au pentagone céleste au paragraphe IV. Cette mosaïque fait apparaître deux nouveaux pentagones, qui semblent des pentagones réguliers vus dans une autre perspective, aussi nous propo-

sons à votre sagacité le petit problème suivant : existe-t-il une transformation simple ayant pour objet le pentagone céleste et pour image ce nouveau petit pentagone ? Nous vous proposons de commencer par étudier la croissance des côtés du petit pentagone en utilisant les calculs et propriétés démontrés précédemment.



Pour poursuivre l'étude de ces curieux objets géométriques nous vous invitons à lire dans un prochain « Miroir des Maths » l'article suivant de Jean-Pierre Le Goff :

« À la rencontre du pentagone céleste (II) » qui vous emmènera dans le monde fascinant de la perspective ...

Bibliographie

Rodriguez Herrera Ruben *Activités variées autour du nombre d'or pour la classe de troisième*, quatre articles en ligne sur le site de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie Caen <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

Rodriguez Herrera Ruben - Salles-Legac Danielle « *Les symétriseurs* » in *Le miroir des mathématiques* (n°6) Décembre 2010. Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

Rodriguez Herrera Ruben *L'enseignement des fractions basé sur la loi de la correspondance morphique ("psychomorphisme") de deux systèmes dans la formation des connaissances*, en ligne sur le site de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie page "Relations internationales" <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

Salles-Legac Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Activités variées de constructions géométriques de la parabole, prolongements à l'ellipse* (en espagnol et en français). Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2011.

Salles-Legac Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle* (en espagnol et en français). Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2011.

Salles-Legac Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie *Symétrie axial d'un point et déplacement d'un segment par pliage* *Le miroir des mathématiques* (n°10) novembre 2012. Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

Membres de l'équipe Géométrie de l'IREM de Basse-Normandie :
Anne-Marie Bock, Éric Lehman, Olivier Longuet, Ruben Rodriguez, Danielle Salles.

Un approfondissement pour l'Accompagnement Personnalisé en TS

Approximation de $n!$ et formule de Stirling¹

Introduction

Dans cette étude élémentaire, d'un sujet très connu, abordable avec les connaissances du programme d'un bac scientifique (cf. Sujet bac C Centres étrangers 1994)² ou traité couramment au niveau L1/2, il s'agit d'illustrer la mise en œuvre d'idées et de méthodes mathématiques intéressantes en soi, qui peuvent être réinvesties dans d'autres problèmes. Nous nous proposons d'obtenir une information quantitative (déduite d'une vision géométrique des valeurs en jeu et exprimée avec les fonctions disponibles en TS) sur la croissance de la suite factorielle et le résultat asymptotique dû à A. De Moivre et J. Stirling (vers 1730)³.

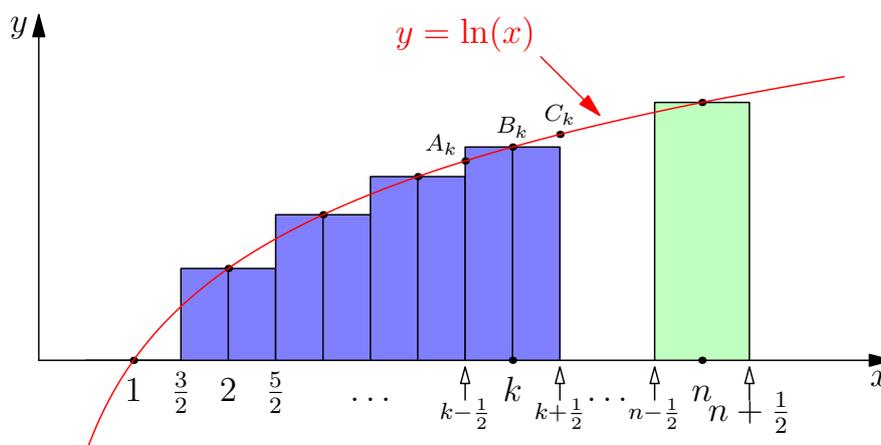
Les deux idées D'une part, utiliser deux propriétés fondamentales de la fonction logarithme népérien : La fonction \ln aplatit les fortes variations et transforme

les produits en somme. En effet le quotient $\frac{(n+1)!}{n!}$ tend vers plus l'infini, ce qui montre que la croissance de $n!$ est plus rapide que toute suite géométrique. D'où l'idée de s'intéresser à la suite $u_n = \ln(n!)$ dont le rapport de deux termes consécutifs tend vers 1.

D'autre part, nous pouvons écrire $u_n = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$, d'où l'idée de l'interprétation de cette somme comme approximation d'une intégrale que nous saurons expliciter.

Prérequis Les fonctions logarithme népérien et exponentielle, les bases du calcul intégral, les théorèmes de convergence des suites réelles (existence de la limite pour les suites croissantes majorées, obtention de limite par encadrement.)

L'intégrale I_n approximant $\ln(n!)$



Pour évaluer la somme $\sum_{k=2}^n \ln(k)$, nous introduisons un repère orthonormé dans le plan et interprétons (voir figure ci-dessus) ses termes comme des mesures d'aires de rectangles de même largeur 1 (en abscisse) et de hauteurs $\ln(k)$ (en ordonnée). Pour la suite de ce travail, nous considérons vis-à-vis de ce repère, la courbe C représentative de la fonction \ln , les points

$A_k (k - \frac{1}{2}, \ln(k - \frac{1}{2})) ; B_k (k, \ln(k)) ; C_k (k + \frac{1}{2}, \ln(k + \frac{1}{2}))$ et le domaine Δ constitué des points :

$$\{M(x, y) \mid \frac{3}{2} \leq x \leq n + \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq \ln(x)\}.$$

Nous approximations la somme u_n par l'aire de Δ qui

est égale à $\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(t) dt$, que nous désignons par I_n .

¹Cet article n'est pas une "activité clé en main" à proposer sans accompagnement, mais seulement une suggestion fondée sur le programme 2013, que chaque professeur pourra exploiter à sa guise.

²<http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/CentresetrangersCjuin1994.pdf>

³Les lecteurs intéressés pourront consulter un article approfondi de D. Lanier et D. Trotoux, animateurs de l'IREM de Basse-Normandie, sur les questions auxquelles A. De Moivre et J. Stirling ont apporté leur réponses, ainsi que sur les méthodes mises en œuvre pour trouver des développements en séries de $\ln(n!)$. Le document est disponible à cette adresse [http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire des maths/pdf/Formule de Stirling.pdf](http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/pdf/Formule%20de%20Stirling.pdf)

Majoration de l'erreur $u_n - I_n$

D'après la relation de Chasles, nous avons :

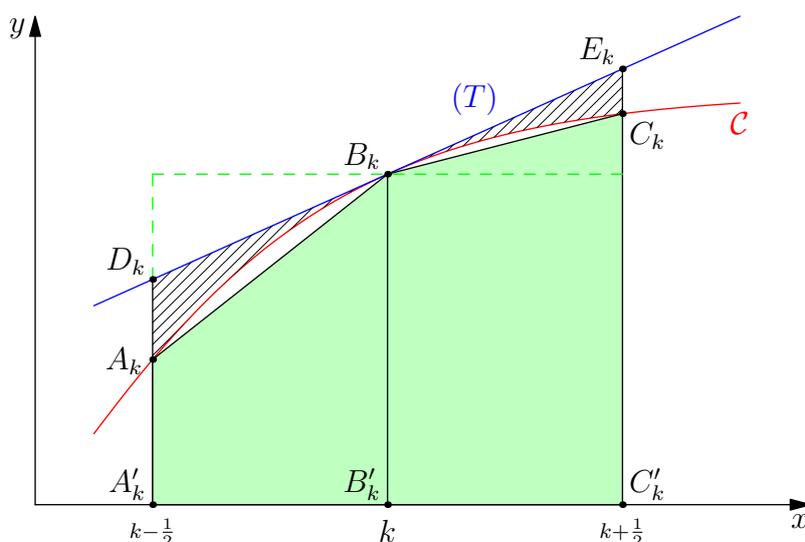
$$u_n - I_n = \sum_{k=2}^n a_k \text{ où } a_k = \ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt.$$

Introduisons les points $A'_k(k - \frac{1}{2}, 0)$, $B'_k(k, 0)$, $C'_k(k + \frac{1}{2}, 0)$, la tangente (T) à C en B_k dont une équation est $y = \ln(k) + \frac{1}{k}(x - k)$, puis les points D_k (resp. E_k) d'intersection entre (T) et $(A_k A'_k)$ (resp. $(B_k B'_k)$). Leurs coordonnées sont : $(k - \frac{1}{2}, \ln(k) - \frac{1}{2k})$

pour D_k , (resp. $(k + \frac{1}{2}, \ln(k) + \frac{1}{2k})$ pour E_k).

Le rectangle "milieu" construit sur le segment $[A'_k C'_k]$ de hauteur $[B'_k B_k]$ a même aire que le trapèze $A'_k D_k E_k C'_k$ (voir figure ci-dessous). Cette aire vaut $\ln(k)$.

L'aire de la partie hachurée Θ_k (comprise entre C et (T)) a pour valeur a_k .



D'une part, d'après la concavité de la fonction \ln^4 , tout arc de C est situé sous la tangente (T) .

D'autre part, tout arc de C est situé au dessus de la corde joignant ses extrémités. Ici, $B_k \widehat{C}_k$ est au dessus de $[B_k C_k]$ et $A_k \widehat{B}_k$ au dessus de $[A_k B_k]$. Il s'ensuit que la partie hachurée est incluse dans la réunion des domaines triangulaires $\text{Tr}1_k(A_k B_k D_k)$ et $\text{Tr}2_k(B_k C_k E_k)$.

Il en découle :

$$0 \leq a_k \leq \frac{1}{4} \left(\ln(k) + \frac{1}{2k} - \ln(k + \frac{1}{2}) \right) + \frac{1}{4} \left(\ln(k) - \frac{1}{2k} - \ln(k - \frac{1}{2}) \right) \text{ soit en simplifiant, } 0 \leq a_k \leq \frac{1}{4} \ln \left(\frac{k^2}{k^2 - \frac{1}{4}} \right).$$

Selon la propriété⁶ $\ln(1+x) \leq x$ si $x > -1$, puisque $\frac{k^2}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = 1 + \frac{1}{4k^2 - 1}$, nous concluons que

$$a_k \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4k^2 - 1}. \text{ De plus, } \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right). \text{ De cela, nous déduisons :}$$

$$\text{Pour tout } k \geq 2, \quad 0 \leq a_k \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right), \text{ d'où par sommation, } 0 \leq \sum_{k=2}^n a_k \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

Le télescopage des termes consécutifs entraîne $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}$, ce qui nous conduit à l'encadrement suivant de $u_n - I_n$:

⁴Cette notion ne figurant pas au programme de TS, on peut justifier ce point en invoquant, par exemple la décroissance la fonction dérivée sur \mathbb{R}^+ ou par l'étude de variations de fonctions auxiliaires.

⁵ $\lambda(S)$ est la mesure de l'aire de la partie S .

⁶Cette inégalité aussi liée à la concavité de la fonction \ln , peut être facilement établie en TS.

Formule asymptotique pour $n!$

Nous allons maintenant établir l'existence d'une constante K telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{(n + \frac{1}{2})} e^{-n}}{n!} = K$.

Nous reprenons les inégalités obtenues précédemment pour la suite a_k :

Pour tout $k \geq 2$, $0 \leq a_k \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$.

Posons $V_n = \sum_{k=2}^n a_k$. Cette suite est croissante ($V_{n+1} - V_n = a_{n+1}$ qui est positif). En reprenant l'encadrement de a_k rappelé, nous déduisons comme précédemment que $V_n \leq \frac{1}{24}$.

D'où la convergence de V_n vers V , tel que $V \leq \frac{1}{24}$.

Majorons alors la suite $V - V_n$: pour $p \geq n$, $V_p - V_n = \sum_{k=n+1}^p a_k$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} (V_p - V_n) = V - V_n$

$$\sum_{k=n+1}^p a_k \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2p+1} \right) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$$

puis par passage à la limite ($p \rightarrow +\infty$) on obtient : $0 \leq V - V_n \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$.

Or, $V_n = u_n - I_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) + n - 1 + \frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2})$. D'où :

$$0 \leq V - \ln(n!) + (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) - n + 1 - \frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2}) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$$

$$0 \leq \ln \left(\frac{(n + \frac{1}{2})^{(n + \frac{1}{2})} e^{-n}}{n!} \right) + V + 1 - \frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2}) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$$

On en déduit alors en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{(n + \frac{1}{2})} e^{-n}}{n!} = K \quad \text{où } K = e^{\frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2}) - V - 1}$$

Ce n'est pas la formule de Stirling habituelle, mais nous la retrouvons en remarquant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + \frac{1}{2})^{(n + \frac{1}{2})}}{n^{(n + \frac{1}{2})}} = e^{\frac{1}{2}} \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n = e^{\frac{1}{2}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{(n + \frac{1}{2})} e^{-n}}{n!} = K' \quad \text{où } K' = e^{\frac{3}{2} \ln(\frac{3}{2}) - V - \frac{3}{2}} \quad (K' = \frac{K}{\sqrt{e}})$$

La constante K' peut être déterminée indirectement par la méthode⁷ des intégrales de Wallis.

Considérons la suite J_m définie pour $m \in \mathbb{N}$ par $J_m = \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} dt$.

En dérivant la fonction $f(t) = -\frac{t}{2} \times \frac{(1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}$ nous obtenons :

$$f'(t) = \left(-\frac{t}{2} \right) (-2t(1 - t^2)^{\frac{m}{2}}) - \frac{1}{2} \frac{(1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}$$

$$f'(t) = t^2(1 - t^2)^{\frac{m}{2}} - \frac{1}{2} \frac{(1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}$$

$$f'(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} - (1 - t^2)^{\frac{m}{2} + 1} - \frac{1}{2} \frac{(1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}.$$

Nous évaluons alors $\int_0^1 f'(t) dt$ de deux façons.

Comme $f(0) = f(1) = 0$:

$$0 = \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} dt - \left(1 + \frac{1}{m+2} \right) \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{m+2}{2}} dt,$$

⁷méthode que l'on peut mettre à la portée du programme de TS en simulant la formule d'intégration par parties pour obtenir la relation de récurrence entre les intégrales. Dans l'article de W. Feller cité dans la bibliographie, l'expression de $\ln(K')$ est obtenue directement comme valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi}\right) dt$, qui vaut $-\frac{1}{2} \ln(2\pi)$. La justification de ce résultat passe par l'identité $t \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{k^2} \right) = \frac{\sin \pi t}{\pi}$ qui n'est pas à la portée du programme de TS.

ce qui donne $\frac{m+3}{m+2}J_{m+2} = J_m$.

Avec $J_0 = 1$ et $J_1 = \frac{\pi}{4}$ (aire du quart du disque unité),⁸

la relation de récurrence $(m+3)J_{m+2} = (m+2)J_m$

conduit à $J_{2m} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}$ pour $m \in \mathbb{N}$

et $J_{2m-1} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \frac{\pi}{2}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

D'après la positivité de l'intégration,

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $0 < J_{2m} \leq J_{2m-1} \leq J_{2m-2}$

d'où : $1 \leq \frac{J_{2m-1}}{J_{2m}} \leq \frac{J_{2m-2}}{J_{2m-1}}$

Ayant $\frac{J_{2m-2}}{J_{2m}} = \frac{2m+1}{2m}$, nous obtenons par enca-

drement $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{J_{2m-1}}{J_{2m}} = 1$. En utilisant les expressions de J_{2m} , de J_{2m-1} et la substitution de $n!$ par $\frac{n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}}{K'}$ nous déduisons $K'^2 = \frac{1}{2\pi}$.

Nous pouvons donc conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = 1$. Une approximation de $n!$ est alors $S_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Cette dernière est d'autant plus précise⁹ que n est grand. Nous notons $\varepsilon_n = \frac{n! - S_n}{n!}$ l'erreur relative commise.

Illustrons comme précédemment l'approximation obtenue :

n	1	2	3	4	5	6
S_n	0.922137	1.919004	5.836209	23.506175	118.019167	710.078184
$n!$	1	2	6	24	120	720
ε_n	0.077862	0.040497	0.027298	0.020576	0.016506	0.013780

n	7	8	9	50	100
S_n	4980.395831	39902.3954527	359536.872842	$3.03634459394 \cdot 10^{64}$	$9.32484762527 \cdot 10^{157}$
$n!$	5040	40320	362880	$50! = 30414093! \dots /0000$	$100! = 9332621544! \dots /0000$
ε_n	0.011826	0.010357	0.009212	0.001665	0.000832

L'observation des valeurs obtenues nous suggère de produire une preuve de la minoration de $n!$ par S_n . Nous nous proposons donc d'examiner la suite $w_n = n! n^{-(n+\frac{1}{2})} e^n$. C'est l'objet de la section suivante.

Un deuxième encadrement de $n!$

Nous allons, indépendamment de la preuve précédente, établir de nouveau grâce à un encadrement lié à des aires de trapèzes, que la suite $w_n = n! n^{-(n+\frac{1}{2})} e^n$ converge vers une limite finie C . C vaut $\sqrt{2\pi}$ d'après la

méthode des intégrales de Wallis. Nous présentons en la simplifiant, une approche figurant dans la fin de l'article de H. Robbins¹⁰ (cf. bibliographie) attribuée à Cesàro.

$$\text{Nous avons } \ln \left(\frac{w_n}{w_{n+1}} \right) = \ln \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{(n+\frac{1}{2})} \right] - 1 = \frac{2n+1}{2} (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1.$$

Nous cherchons maintenant à encadrer $(\ln(n+1) - \ln(n))$ pour en déduire notre preuve de la minoration de $n!$ par S_n .

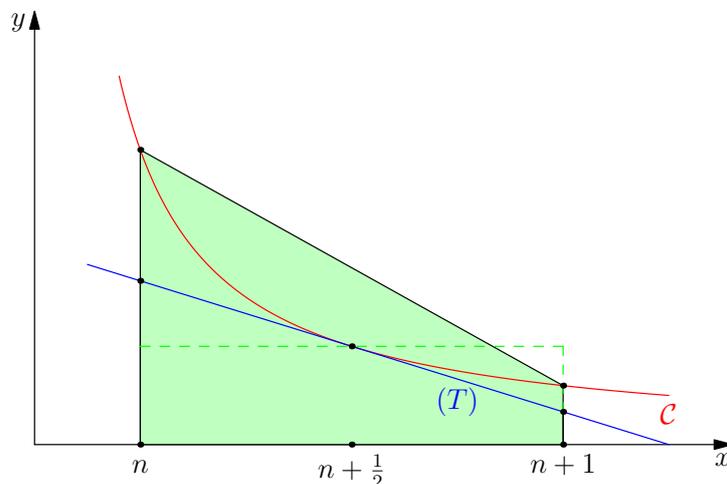
⁸La fonction intégrée sur $[0,1]$ est $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ dont la courbe est le quart de cercle d'équation $y^2 + x^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0$

⁹L'erreur relative tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, ce qui n'était pas le cas pour la suite m_n obtenue dans un premier temps. S_n semble cependant être une approximation par défaut, moins précise que m_n pour les petites valeurs de n .

¹⁰Herbert Robbins y a établi l'encadrement $w_n = C e^{r_n}$ où $\frac{1}{12n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{12n}$, en utilisant le développement en série de $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, puis une majoration et une minoration par des séries géométriques.

L'encadrement de $(\ln(n+1) - \ln(n))$ qui correspond à l'aire du domaine limité par la courbe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, l'axe (Ox) , et les droites verticales d'abscisse n et $n+1$ découle de la convexité de la fonction :

le trapèze tangent au point milieu d'abscisse $n + \frac{1}{2}$ (d'aire égale à celle du rectangle "milieu") est inclus dans le domaine, alors que le trapèze construit avec la corde d'extrémités $(n, \frac{1}{n})(n+1, \frac{1}{n+1})$ le contient.



$$\text{Donc } \frac{1}{2n+1} \leq (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \text{ ou encore } \frac{2}{2n+1} \leq (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

$$\text{Nous obtenons alors } 0 \leq \ln \left(\frac{w_n}{w_{n+1}} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

En introduisant la suite $t_n = w_n e^{-\frac{1}{4n}}$, il s'ensuit que $\ln \left(\frac{t_n}{t_{n+1}} \right) \leq 0$, donc la suite (t_n) est croissante.

De façon analogue, $0 \leq \ln \left(\frac{w_n}{w_{n+1}} \right)$ entraîne que la suite (w_n) décroît. Comme pour tout n , $t_n \leq w_n$, leur convergence découle du théorème sur les suites monotones bornées.

Dès lors $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - t_n) = 0$. Les deux suites convergent donc vers la même limite C . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \leq C \leq w_n$. Cela permet d'obtenir des approximations de C avec une précision arbitraire. Par exemple avec $w_1 = e$ et $t_1 = e^{\frac{3}{4}}$, on trouve $2,117 \leq C \leq 2,719$. Enfin sachant que d'après l'étude de la section précédente, $C = \sqrt{2\pi}$, nous pouvons conclure que :

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{1}{4n}}$$

Conclusion

Cette étude nous a permis de trouver une approximation de $n!$ dans une première approche intuitive, basée sur une interprétation géométrique de la valeur de la suite $\ln(n!)$, puis au delà, d'obtenir un encadrement

final asymptotiquement convergent. Ce dernier encadrement ouvre alors la porte à une preuve assez élémentaire, quoique difficile pour le niveau TS, du théorème de De Moivre-Laplace.

Bibliographie

- E. Lesigne**, 2001, *Pile ou Face, Une introduction aux théorèmes limites du Calcul des Probabilités*. Ed. Ellipses.
D. Lanier & D. Trotoux, 1998, *La formule de Stirling in Analyse et démarche analytique*, IREM de Reims, p. 231-286.
H. Robbins, 1955, *A remark on Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 62 : p. 26-29.
R. Johnsonbaugh, 1981, *The trapezoid rule, Stirling's formula, and Euler's constant*. Amer. Math. Monthly, 88 : p. 696-698.
W. Feller, 1967, *A direct proof of Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 74 : p. 1223-1225.
W. Feller, 1968, *Correction to : A direct proof of Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 75 : p. 518.
D. Dominici, Feb 2006, *Variations on a Theme by James Stirling*. arXiv :math/0603007v1 [math.CA].



LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

- La revue *Repères* des IREM. 2
- Éditorial, par Gilles Damamme. 3
- Sur le vice et les vertus... de l'induction, le problème dit "du cercle de Moser" par Jean-Pierre Le Goff . 4
- À la rencontre de la croix et du pentagone célestes (I) , par Danielle Salles-Legac, Ruben Rodriguez Herrera. 13
- Un approfondissement pour l'Accompagnement Personnalisé en TS : approximation de $n!$ et formule de Stirling, par Eric Trotoux. 26