# LE MIROIR DES MATHS

**IREM DE BASSE-NORMANDIE**
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP. 5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 73 60** - Fax. : **02 31 56 73 20**
Adresse électronique : irem@unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

## IREM DE BASSE-NORMANDIE

**NUMÉRO TREIZE : avril 2014**

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

## Les nouveautés du RDVmath 2014…

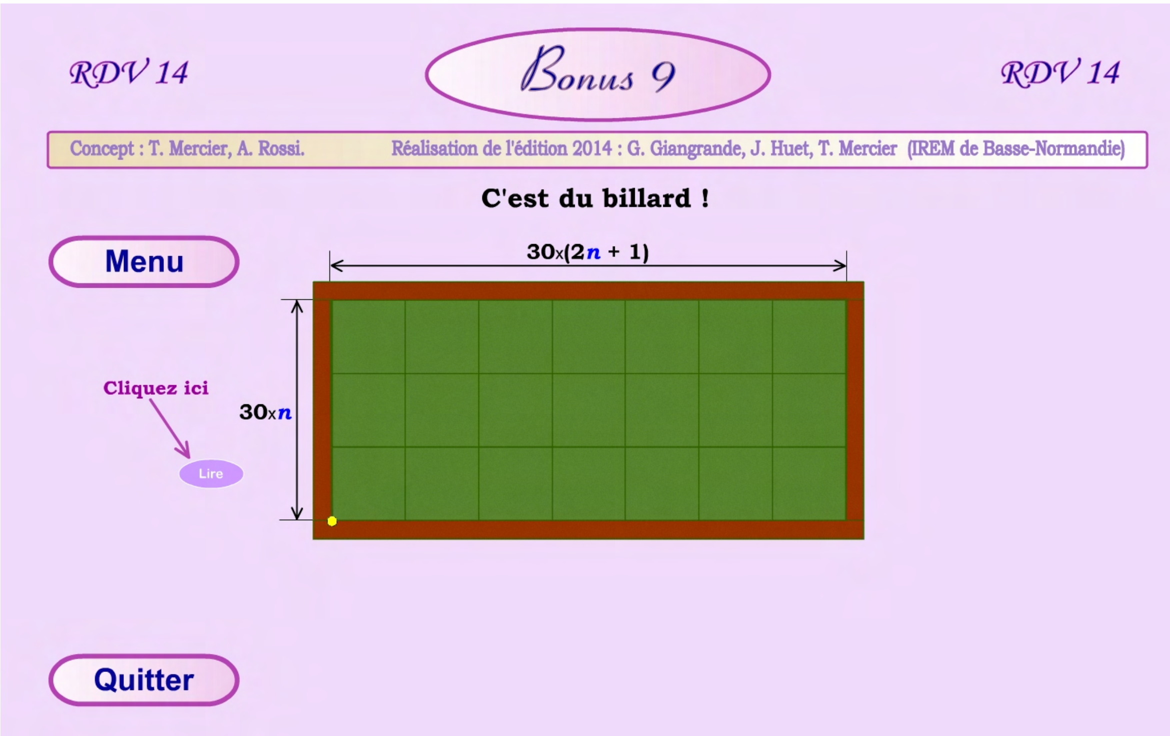
L'édition 2014 du rallye mathématique de l'IREM de Basse-Normandie (« RDVmath ») a connu récemment sa 11ème édition. Elle se distingue des éditions précédentes, non par le principe qui pour l'essentiel reste le même[1], mais par quelques innovations. En effet, Les habitués du rallye que nous saluons au passage, l'ont sans doute remarqué, le programme « rdv » permettant chaque année aux élèves participants de prendre connaissance des énoncés des énigmes, a été réalisé au format « flash » et non au format « pdf » comme c'était le cas jusqu'à présent. Inutile désormais de passer par le lecteur de fichier pdf : le rdv14 a été conçu comme une application autonome à copier simplement sur le poste de l'utilisateur. Mais la véritable raison de ce choix est ailleurs : le format « flash » est un format conçu au départ pour faire de l'animation et c'est cette dimension que nous avons voulu intégrer. Ainsi cette année, la compréhension de certaines des énigmes du rallye était basée non seulement sur un texte mais sur l'observation d'une image animée. Ce sont des énigmes d'une autre nature qui peuvent ainsi être proposées.

Par ailleurs, le passage d'une étape à la suivante s'effectuant par la saisie d'un mot de passe, cela peut dorénavant se faire directement sur la page de l'énigme dans une barre de saisie visible en bas de l'écran.

Autre petite nouveauté : la création d'un bouton permettant de commander l'impression d'une figure dans le cas où la résolution de l'énigme repose sur une telle figure et que le besoin se fait sentir de procéder à des tracés supplémentaires ou de porter des notes sur celle-ci.

Nous espérons que ce « rdv » nouveau aura séduit les participants et aura contribué au plaisir de participer à ce rendez-vous mathématique de notre IREM.

Thierry Mercier.




## Livres publiés ou recommandés par l'IREM de Basse-Normandie.

Nos groupes de recherche publient de nombreux livres intéressant l'enseignement des mathématiques. Voici quelques titres parus, que vous pouvez commander par simple mail à irem@unicaen.fr :

– D. Salles, R. Rodriguez, S. Sanchez D'Arrigo - *Activités de pliages dans l'univers du cercle,des tangentes et des polygones inscrits* bilingue franco-espagnol, 2013, ISBN 978-2-902498-08-6 format A4, 50 pages prix 3 €.
– D. Salles R. Rodriguez - Deuxième édition de "*Practicar la geometría*" – de las acciones directamente experimentables a sus formalizaciones matemáticas, 2013, ISBN 978-2-902498-04-8, format A4, 108 pages prix 7 €.

Chaque commande est accompagnée d'un livre cadeau sur un thème voisin !

[1]Pour ceux qui ne connaissent pas, le principe du « rdv » est le suivant : 6 étapes à franchir avec à chaque étape une énigme à résoudre, dont la solution sert de mot de passe pour passer à l'étape suivante. D'autres petits problèmes appelés "bonus" sont aussi proposés. Les solutions de tous ces problèmes sont transmises à notre serveur pendant toute la durée du jeu. Durée : 1 h 30.

# Éditorial.

Depuis la parution de notre numéro « spécial 40 ans » en décembre, quelques nouvelles de nos animateurs et activités : Thierry Mercier a été nommé co-responsable de la commission Inter-IREM « Popmaths » qui a pour vocation de s'occuper des rallyes de notre réseau des IREM, des groupes liés aux Jeux mathématiques et des actions de popularisation des mathématiques au sein de notre réseau. Cette commission travaille en partenariat avec d'autres associations : l'APMEP, la FFJM (Fédération Française des Jeux Mathématiques), la CIJM (Comité International des Jeux Mathématiques), Kangourou, Tangente, etc. Vous pouvez consulter les pages web de « Pop-maths » sur le portail des IREM[1].

En janvier-février, François Plantade a animé une exposition qu'il a réalisée sur Jules Houël, Mathématicien de Thaon « au carrefour des sciences de son temps » (1823 - 1886).

Le mois de mars a été marqué par la troisième édition de la semaine des mathématiques dont le thème était cette année : « Mathématiques au carrefour des cultures ». L'IREM a participé à l'animation de cette semaine, notamment par deux conférences dont l'une de Jean-Pierre Le Goff au musée des beaux-arts de Caen, a porté sur « Les mathématiques au carrefour des arts et du design » : Comment l'art a-t-il contribué à révolutionner les mathématiques & comment les mathématiques peuvent-elles contribuer à décrypter les images ?

L'autre conférence présentée par Pierre Ageron à l'occasion de la journée régionale académique 2014 de l'APMEP, avait pour titre « Quatre divertissements mathématiques au carrefour des cultures » : Dix-sept chameaux, huit galettes, quatre-vingt un palmiers, quinze croyants et quinze infidèles ! Quatre historiettes fameuses au parfum d'Orient, qui ont beaucoup voyagé et connu bien des métamorphoses.

Enfin en avril, ce fut au tour du rallye (Dynamique et Virtuel) de l'IREM de Basse-Normandie d'occuper le devant de la scène. Thierry Mercier nous signale ci-contre les nouveautés de cette onzième édition.

Ce numéro 13 du *Miroir des maths* vous propose des thèmes variés. Il débute par des questions géométriques et statistiques abordées dans le cadre de la DNL par Anne Reyssat et ses lycéens au sujet, de drapeaux du monde, puis est suivi d'un retour sur le « Pentagone céleste » déjà présenté par Ruben Rodriguez et Danielle Salles dans le numéro 11 du *Miroir*, via ses liens avec le rectangle d'or et le nombre d'or et enrichi ici, par la dimension perpective et heuristique apportée par l'étude de Jean-Pierre Le Goff. L'équation du nombre d'or est choisie comme objet d'étude du troisième article qui initie aux équations algébriques dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Une brève étude probabiliste sur la distance entre la médiane et la moyenne d'une variable aléatoire basée sur une version latéralisée de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev complète le numéro. Dans l'introduction de cette dernière, est posée la question de l'interprétation du salaire moyen et du salaire médian : que résument les données salaire net moyen (2410 €) et salaire net médian (1675 €) pour les Français en 2013 ?

Enfin dans la rubrique notes de lectures, Pierre Ageron nous livre ses critiques solidement argumentées sur quatre ouvrages récemment parus. Il nous donne notamment envie de découvrir deux ouvrages parus aux éditions du Pommier regroupant des articles publiés sur le site du CNRS « Images des mathématiques ».

Je souhaite à tous une lecture agréable.

Gilles Damamme
Directeur de l'IREM de Basse-Normandie

---

***Repères IREM*** *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

**Sommaire du Numéro 94 – Janvier 2014**

- **Approche de la notion de probabilité chez des enfants de 10-15 ans**
  François Jaquet, Michel Henry, Irem de Besançon
- **La « preuve pour comprendre », un levier pour la construction du sens de la lettre en classe de Cinquième**
  Cécile Bombrun-Nigon, Sylvie Coppé, Université de Lyon 2
- **La modélisation de la prise de décision à travers un exemple**
  Yves Ducel, Damien Fourny, Maxime Fourny, Bruno Saussereau, Irem de Besançon
- **Semaine des mathématiques 2014 & Repères Irem Mathématiques au carrefour des cultures**
  Marc Moyon, Irem de Limoges
- **Explicitation croisée des démarches d'investigation en sciences : un levier pour donner du sens et favoriser le dialogue entre disciplines scolaires**
  équipe « Enseignement scientifique », Irem de Montpellier

.

[1] http ://www.univ-irem.fr/spip.php ?rubrique22

# Drapeaux du monde

**Une activité pour la DNL mathématiques en section européenne**

Anne Reyssat, professeur au lycée Allende d'Hérouville-Saint-Clair, membre du groupe DNL de l'IREM.

Il existe à l'IREM de Basse-Normandie un "groupe DNL". Mais qu'est-ce qu'ils peuvent bien faire, et que signifie ce sigle bizarre ?

DNL veut dire **"discipline non linguistique"** : les élèves des sections européennes des lycées la pratiquent (en principe) deux heures par semaine. Dans une section européenne anglais avec DNL mathématiques, les élèves bénéficient de deux heures de cours en anglais avec un enseignant de mathématiques titulaire d'une certification complémentaire. Cet horaire est en supplément de l'horaire officiel de mathématiques de la classe en langue française, que tous les élèves suivent. La DNL la plus répandue reste l'histoire-géographie, quelle que soit la langue concernée.

Depuis quelques années, **la DNL mathématiques** est enseignée dans les sections européennes d'une dizaine de lycées de l'académie de Caen, uniquement en langue anglaise. C'est un choix intéressant pour les élèves qui ont du goût pour les sciences, il leur apporte un nouvel éclairage sur les notions mathématiques utilisées et est une bonne initiation à l'utilisation de l'anglais pour les études scientifiques.

Il s'agit davantage d'un enseignement de **culture mathématique** que d'exercices techniques : le but est de parler des mathématiques que l'on fait. Les thèmes choisis sont basés sur des observations concrètes et les différences d'expression d'un même concept dans les deux langues aident souvent à sa compréhension en montrant la même notion sous deux angles différents.

Le groupe DNL se réunit régulièrement trois ou quatre fois par an depuis 2009. Si nous avons passé pas mal de temps sur des questions d'organisation dans nos établissements ou pour le baccalauréat, nous partageons aussi nos (bonnes) idées sur les thèmes abordés et les méthodes susceptibles d'aider nos élèves à prendre la parole et de rendre notre enseignement attrayant.
L'activité présentée ici été pratiquée en début de première sur une durée comprise entre 12 et 15 heures.

## Objectifs

Cette activité permet de faire des mathématiques et surtout d'en parler en langue étrangère. Le contexte visuel et culturel des drapeaux du monde la rend attrayante.

Le travail est composé de plusieurs activités d'introduction, puis de deux facettes, l'une statistique, l'autre géométrique.

– On découvre que la notion de rapport est utilisée différemment dans les pays anglo-saxons et en France, et l'on s'en sert pour décrire la forme d'un rectangle.
– On acquiert le vocabulaire des statistiques descriptives et du tableur en anglais.
– On réinvestit le travail sur la géométrie élémentaire effectué en classe de seconde.
– On exerce la compréhension écrite et orale ainsi que l'expression orale en continu (en référence au Cadre européen commun de référence pour les langues).

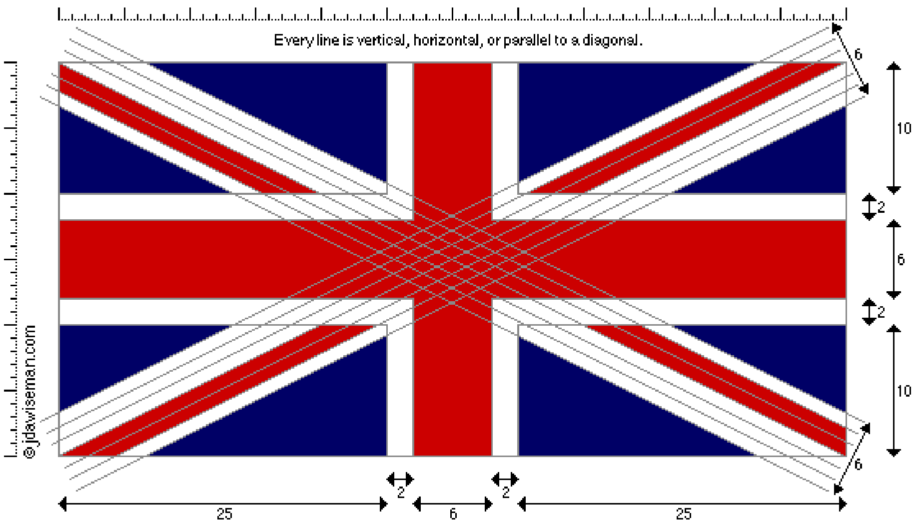
## Introduction

*Première séance* : La question proposée à des élèves de section européenne anglais qui ont eu des contacts par Internet avec une classe finlandaise est simple : « Comment dessiner le drapeau français, le drapeau finlandais et le drapeau du Royaume-Uni ? »
La première réaction des élèves est de dire qu'on connaît bien tout ça, mais que le drapeau du Royaume-Uni a une géométrie vraiment compliquée et qu'on ne va pas y arriver.
Je propose donc de commencer par le drapeau français dont le motif ne pose pas de problème, les élèves n'ont aucun mal à faire une esquisse ! Mais si on découvre assez vite le problème de la forme du rectangle, il est plus difficile de faire comprendre que l'important, c'est le rapport (en anglais "ratio") $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$.
Et la surprise est grande lorsqu'une petite recherche sur Internet révèle que le rapport en question n'est pas le même pour les trois drapeaux : 3 : 2 pour le drapeau français, 18 : 11 pour le drapeau finlandais et 2 : 1 pour celui du Royaume-Uni !
On peut alors demander de tracer trois rectangles de même aire (6 cm$^2$ par exemple) pour pouvoir y dessiner chaque drapeau.

Une question reste en suspens : les drapeaux français et britannique ont des proportions qui semblent raisonnables, mais pourquoi le choix bizarre de 18 : 11 pour le drapeau de la Finlande ?

N.B. Si le contenu de cette séance semble léger, pour des 1ères S en particulier, n'oublions pas qu'il s'agit d'expliquer et de dialoguer tout cela en anglais, et que la réalité pratique du tracé des figures avec le calcul des longueurs des côtés prendra du temps.

*Deuxième séance : Tracé précis de l'Union Jack*




On commence par regarder le drapeau britannique (brut, sans lignes de construction) et décrire les couleurs et la superposition de croix qui le composent : la croix de Saint Georges, verticale et rouge, qui représente l'Angleterre et le pays de Galles, la croix de Saint André, blanche et en diagonale pour l'Écosse et la croix de Saint Patrick, rouge et en diagonale pour l'Irlande.

On réfléchit ensemble avant de tracer un rectangle dont la longueur est double de la largeur et dont le petit côté aura une longueur facile à diviser par 15 (on verra pourquoi ci-après) : si on utilise du papier format A3 et des dimensions 15×30, la diagonale sera trop longue pour les règles classiques de 30 cm. On peut aussi se demander quelles dimensions choisir pour que la longueur de la diagonale ne dépasse pas 30 cm, ou plus simplement pour rester à l'intérieur d'une feuille A4. On choisit par exemple 12×24.

Je décris alors oralement les étapes de la construction selon le schéma ci-dessus. C'est à la fois un exercice de compréhension orale et l'occasion de manipuler des fractions : la largeur de la croix rouge de Saint Georges est égale au cinquième de la largeur du drapeau, et celle de ses bordures est égale au quinzième de la largeur du drapeau. Les écarts entre les lignes auxiliaires parallèles aux diagonales sont égaux au trentième de la largeur du drapeau.
Les élèves sont fort satisfaits lorsqu'ils peuvent enfin effacer les lignes auxiliaires, colorier leur œuvre et dessiner la hampe du drapeau sur la gauche. L'inconvénient est que certains sont vraiment très lents, soit parce qu'ils sont très soigneux, soit parce qu'ils ont du mal à comprendre l'anglais, soit enfin parce qu'ils ont dû s'y reprendre à deux fois après un premier essai trop imprécis.

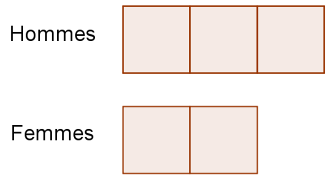
Une dernière question : quels éléments de symétrie pour ce drapeau ?

## Une digression : ratios and proportions

Pour dire qu'une assemblée comporte 2/5 de femmes et 3/5 d'hommes, les Anglais diront volontiers que le rapport ("ratio") hommes/femmes est de "3 to 2", noté aussi 3 : 2 ou plus classiquement $\frac{3}{2}$ : on compare ainsi les deux parties entre elles (3 hommes pour 2 femmes) alors qu'en France, on compare plus volontiers la partie au tout (la proportion d'hommes est de $\frac{3}{5}$ ou de 60%).
Nous manipulons cette notion sur des exercices d'un site en anglais qui schématise les différentes quantités par des rectangles nommés "thinking blocks"

http://www.thinkingblocks.com/tb_ratios/ratios.html (travail de compréhension de l'écrit).

Dans le contexte précédent, le schéma ci-contre permet de résoudre visuellement une question comme « S'il y a trois hommes de plus qu'il n'y a de femmes, combien y a-t-il de femmes ? »




## Première facette : drapeaux et statistiques

(4 heures, plus confection de l'affiche)
En salle informatique, les élèves accèdent sur le réseau du lycée au tableau ci-contre qui présente une liste des pays membres de l'ONU (avec des erreurs possibles : nouveaux pays membres...) et deux nombres pour chacun de leurs drapeaux.
On utilise le tableur Libre Office avec les commandes en anglais.
Le fichier précise que "$x/y$ est le rapport longueur/largeur pour un drapeau donné".

| Country | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| Afghanistan | 3 | 2 |
| Albania | 7 | 5 |
| Algeria | 3 | 2 |
| Andorra | 10 | 7 |
| ... | | |

### 1. Observation du tableau

Quelles sont les questions qui se posent ?
Les élèves constatent spontanément que les couples $x = 3, y = 2$ et $x = 2,\ y = 1$ sont de loin les plus courants, et sont intrigués par les valeurs exotiques comme $x = 335,\ y = 189$.
La question "Que représentent $x$ et $y$ et quelle est l'unité utilisée ?" amène aisément l'idée de calculer les rapports $r = x/y$. Voici quelques questions posées par des élèves :
Combien de drapeaux ont les valeurs $r = 3/2$ ou $r = 2$ ?

Quelles sont les valeurs maximale et minimale de $r$ et les pays correspondants ?

Combien de rapports différents existe-t-il et quelles sont leurs fréquences ?

Quelle explication pour les rapports bizarres comme 18 :11 ou 335 :189 ?

Quel drapeau a l'aire la plus grande ? Question plus surprenante et qu'on pourra reprendre à la fin en cherchant comment lui donner du sens.

### 2. Acquisition du vocabulaire des statistiques

On observe les commandes du tableur et on les fait fonctionnner sur un petit exemple avec quatre ou cinq valeurs simples. Il y a des mots transparents comme "median" ou "quartile", mais aussi des faux amis comme "frequency" qui signifie "effectif" alors que "fréquence" se dit "relative frequency".
Les élèves reçoivent une liste de 12 mots en rapport avec les statistiques ; chacun est invité à vérifier qu'ils connait leur sens ; ensuite, les élèves travaillent en binôme pour essayer de donner oralement une définition (en anglais) de chaque mot (exercice d'expression orale).

Pour s'assurer que ces termes sont mémorisés, on fait le jeu de "Bingo" suivant (exercice de compréhension orale) : chacun choisit neuf mots dans la liste des 12 mots donnés en rapport avec les statistiques et les dispose dans une grille $3 \times 3$, par exemple comme ceci :
Je lis alors les définitions dans n'importe quel ordre, chacun coche une case lorsqu'il reconnait la définition du mot qu'il y a écrit. Le premier qui a coché trois cases alignées crie "Bingo", puis on poursuit le jeu jusqu'à ce qu'un élève puisse crier "Full house" lorsqu'il a reconnu les définitions de ses 9 mots.

| | | |
|---|---|---|
| mean | pie chart | ratio |
| standard deviation | range | mode |
| bar chart | relative frequency | median |

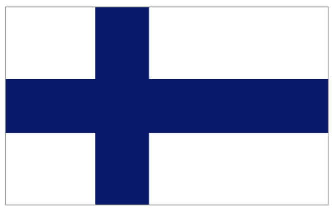
**3. Calcul des caractéristiques statistiques de la série des rapports $x/y$**

Après avoir calculé les caractéristiques classiques en utilisant le tableur, on tombe d'accord que la moyenne et l'écart-type ne nous donnent rien de bien facile à exploiter.
Voici deux nouvelles questions à résoudre, la première posée par des élèves, et la deuxième par le professeur :
- Pourquoi se trouve-t-il que la médiane est égale au premier quartile ?
- Quel est le pourcentage des drapeaux dont le rapport est inférieur ou égal au premier quartile $Q_1$ (environ 52%) ? Au troisième quartile $Q_3$ (environ 99%) ?

Il n'est pas facile pour les élèves de comprendre pourquoi ces valeurs ne sont pas proches de 25% ou 75%, et on a bien du mal à exprimer une explication satisfaisante en anglais. Je me satisfais de "il y a beaucoup de pays dont le drapeau a un rapport égal à 2 :1", par exemple.

Ce travail va faire l'objet d'un panneau pour présenter la section à la journée Portes Ouvertes du lycée. Dans ce but, les élèves travaillent en groupe pour produire :

– un diagramme en boîte à moustaches,
– un tableau des différentes valeurs de $r$ et de leurs fréquences,
– un camembert (faut-il individualiser les rapports ou fera-t-on un secteur "autre", et quels rapports contiendra-t-il ?),
– une présentation générale de l'activité,
– une présentation de quelques drapeaux particuliers : celui qui n'est pas rectangulaire, ceux qui correspondent aux valeurs extrêmes de $r$, celui de la Finlande avec les détails qui expliquent le rapport 18 :11.
Il s'agit d'obtenir quelque chose qui soit à la fois attrayant, compréhensible par tous, et qui rende bien compte de l'activité...



Les proportions des segments de couleurs sont 4 :3 :4 sur la largeur et 5 :3 :10 sur la longueur : $4+3+4=11$
$5+3+10=18$.

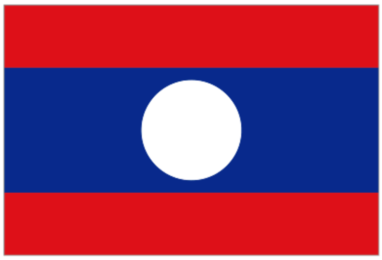
## Deuxième facette : la géométrie de certains drapeaux

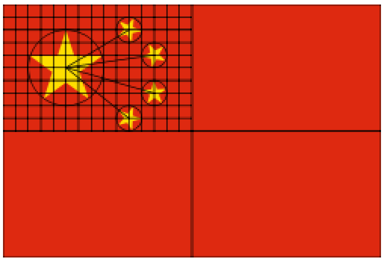
(4 heures environ)

**Chaque élève doit choisir un drapeau** qui lui plaît et qui a une géométrie intéressante. Chacun devra **enregistrer une description** orale de la géométrie de son drapeau, de façon qu'un autre élève puisse dessiner le drapeau en écoutant l'enregistrement. La durée imposée est entre trois et cinq minutes.
Les **critères d'évaluation** sont explicités par écrit : 2 points pour la structure générale et le respect de la durée imposée, 9 points pour le contenu (vocabulaire mathématique, exactitude, précision, richesse), 9 points pour la langue (intelligibilité, correction, aisance).
Les drapeaux trop simples (trois bandes) sont interdits, ainsi que le drapeau britannique. On trouve assez facilement des indications géométriques précises, par exemple sur le site `www.flagspot.net` ; parfois, on se trouve obligé de parcourir des indications données dans d'autres langues : chiffres et schémas peuvent permettre de "se débrouiller" même sans comprendre la langue.

Le drapeau d'Antigua et Barbuda (Antilles) contient une grande variété de formes : triangles rectangles, triangle isocèle, trapèze, même s'il vaut mieux ne pas trop chercher à préciser les détails du soleil. La largeur des bandes noire, bleue et blanche peut être définie en utilisant un "ratio" avec trois nombres :
9 : 5 : 9.

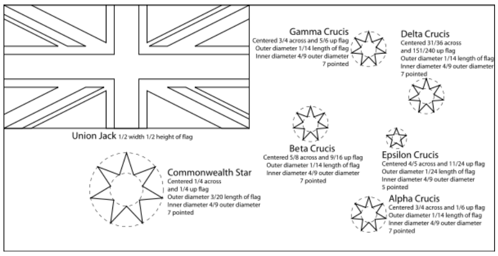
Le drapeau du Laos est presque trop simple et oblige à chercher par exemple quel pourcentage de la surface de la bande bleue est occupé par le disque blanc pour enrichir la présentation.





Ce schéma de construction permet dire beaucoup de choses sur le drapeau de la Chine : utilisation d'un quadrillage, étoiles à cinq branches diversement orientées, cercles qui permettent de construire ces étoiles...

Une soixantaine de pays du monde ont une ou plusieurs étoiles sur leur drapeau, la plupart du temps avec une signification symbolique (religieuse, politique ou autre).




Le choix de l'Australie (avec les indications de constructions) permet d'utiliser des mots composés (five-pointed star) et montre les rapports des diamètres intérieurs et extérieurs des étoiles tous égaux à 4 : 9.

De plus, dans ce drapeau, comme pour d'autres pays de l'hémisphère sud, les étoiles représentent la constellation de la Croix du Sud.


Le drapeau du Brésil, lui, compte 26 étoiles, chacune représentant un des Etats qui le composent, et ces étoiles sont placées dans la configuration du ciel de Rio-de-Janeiro le 15 novembre 1889 à 8 h 30, au moment précis où la république était proclamée. On reconnait, là aussi, la Croix du Sud, mais vue dans un miroir, comme si on regardait de l'extérieur de la sphère céleste. Ce drapeau est fort intéressant, mais à mon avis trop compliqué pour l'activité de description.

**Trois séances d'une heure** sont bien nécessaires pour que chacun ait choisi son drapeau, préparé, puis enregistré sa présentation (expression orale en continu). Je demande que la préparation soit faite sous la forme d'une liste ordonnée de mots-clés pour éviter au maximum que la présentation ne soit finalement la lecture d'un texte écrit. La description du pays concerné peut être plus ou moins détaillée pour obtenir au moins trois minutes d'enregistrement. C'est un exercice d'expression orale en continu qui n'est pas facile.
J'écoute alors chaque enregistrement pour l'évaluer et remettre à chacun un compte-rendu de mes observations, activité dévoreuse de temps pour moi. Le critère dominant est l'intelligibilité de la production, tant pour la langue que pour le contenu.
Pour la séance suivante, j'organise les élèves **par binômes** : je place dans l'espace personnel de chaque élément du binôme la présentation de son associé. Chacun doit alors dessiner le drapeau d'après l'enregistrement qu'il écoute. Les élèves comparent ensuite leurs travaux. Ce nouvel exercice de compréhension orale permet à chacun de mesurer l'importance de la clarté de l'exposé, tant pour la langue que pour le contenu ici aussi. Quelques échantillons sont présentés à la classe.
La première année où cette activité a été mise en place, elle a été couronnée par le tournage d'une brève **vidéo**. Un AED du lycée compétent dans ce domaine est venu passer une heure dans un cours "euro", et il a filmé une petite mise en scène où chaque élève montre "son" drapeau et en parle pendant environ trente secondes avec obligatoirement la mention d'une particularité géométrique. Ce petit film tourne en boucle dans la salle dévolue à la section européenne anglais lors de la Journée Portes Ouvertes du lycée.

## Conclusion

A ce stade, l'activité est terminée, et les élèves ont manifesté de l'intérêt, surtout pour la deuxième facette. Je reste avec deux impressions contradictoires : il y a tellement de choses intéressantes à découvrir qu'on pourrait continuer longtemps, et il est temps de passer à autre chose pour retrouver l'attrait de la nouveauté.

Un test écrit aura lieu avec une dizaine de mots à traduire, un nouveau drapeau à décrire et un petit problème sur les rapports. Il faut insister pour que les élèves réalisent qu'ils ont un travail d'expression écrite à faire, et qu'il ne suffit pas de résoudre un exercice de maths.

Pour introduire l'activité suivante dans la continuité, je demande au groupe ce qui fait qu'un drapeau leur a plu : le dessin, les couleurs, l'attrait pour le pays concerné...
Puis, je pose la question : pour un rectangle uni, qu'est-ce qui peut faire qu'on le trouve plus ou moins beau ? On retrouve vite le rapport longueur sur largeur de la première facette.
En faisant dessiner à un grand nombre d'élèves un rectangle qui, selon eux, a des proportions harmonieuses, on réinvestira les acquis de statistiques sur leurs rapports longueur sur largeur, pour déboucher sur l'étude d'un rectangle qui est historiquement considéré comme "beau", ce qui permet de démarrer une activité sur le nombre d'or.

# Définition et propriétés succinctes des Pentagones Célestes

Par Jean-Pierre LE GOFF, Ruben RODRIGUEZ HERRERA, Danielle SALLES-LEGAC

**Introduction** Ce court article présente brièvement un pentagone non régulier, mais réellement esthétique, que nous appelons pentagone « céleste », apparaissant naturellement lorsque l'on effectue des constructions de rectangles d'or[1].

## I - Constructions, définitions et propriétés des Pentagones et Croix Célestes

Pour définir une figure géométrique nous avons deux possibilités complémentaires :

D'une part on peut présenter une suite d'étapes de la construction de la figure, (ce qui est nommé « programme de construction » dans la didactique de la géométrie), et d'autre part on peut donner un ensemble de propriétés nécessaires et suffisantes pour que la figure géométrique les vérifiant soit le « pentagone céleste » à une similitude plane près, (ce qu'on nomme en didactique de la géométrie une « description » de la figure, plus difficile pour les élèves, à cause du caractère « nécessaire et suffisant »). Nous avons choisi un parcours qui va d'une présentation des deux constructions possibles à l'énumération des principales propriétés.

### a) Première construction des pentagones célestes : convexe et étoilé

Soit ACEI un rectangle d'or de côtés de longueur a et a$\varphi$ dont les diagonales se rencontrent en B.

On appelle J et D les projetés orthogonaux respectivement des points A et C sur ces diagonales.

La demi-droite [AJ) rencontre le segment [IE] en H, la demi-droite [CD) rencontre le segment [IE] en F. Appelons G le point de rencontre de [AJ) et [CD). Alors nous disons que le pentagone ACEGI est un « Pentagone convexe céleste » et que le pentagone ABCDEFGHIJ est un « Pentagone étoilé céleste ».

On peut définir un « Pentagone céleste étoilé » sans nommer les points, de façon plus elliptique et littéraire :

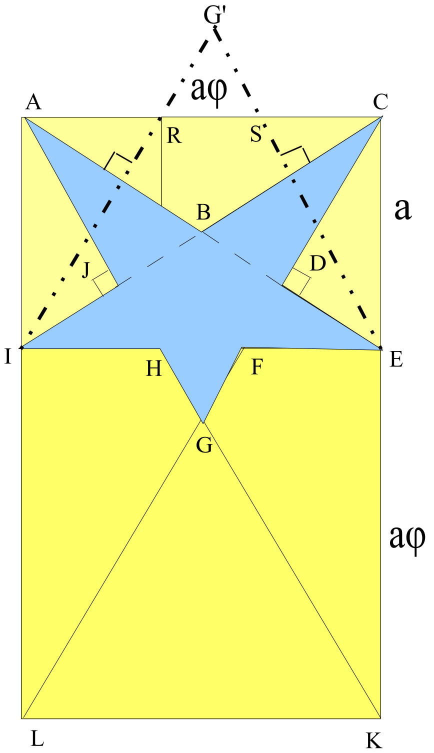
Un pentagone céleste étoilé est un pentagone dont quatre côtés sont les diagonales d'un rectangle d'or les deux autres étant deux droites orthogonales à chacune de celles-ci, issues des sommets qui leur sont extérieurs.

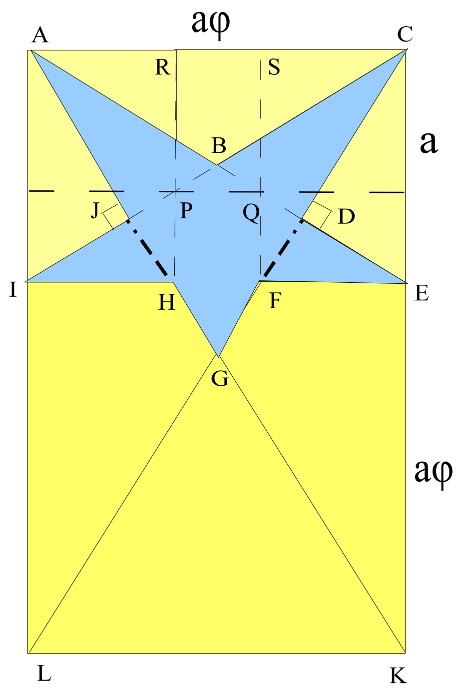
Ainsi énoncée la définition permet, pour tout rectangle d'or, de construire deux pentagones étoilés. Nous figurons en pointillés sur la première figure les deux autres droites orthogonales qui se rencontrent en G'.

### b) Propriétés de cette construction

- Les points AIH sont les sommets d'un rectangle d'or de côtés de longueur a et a$\varphi^{-1}$.
- Les points CEF sont les sommets d'un rectangle d'or de côtés de longueur a et a$\varphi^{-1}$.
- Les points IHP sont les sommets d'un rectangle d'or de côtés de longueur a$\varphi^{-2}$ et a$\varphi^{-1}$.
- Les points EFQ sont les sommets d'un rectangle d'or de côtés de longueur a$\varphi^{-2}$ et a$\varphi^{-1}$.
- Le rectangle ACKL de centre G est un rectangle d'or de côtés de mesures a$\varphi$ et a($\varphi$+1) = a$\varphi^2$.
  (Voyez les rectangles d'or complétés dans la deuxième figure ci-dessous.)
- Les points AJHPI forment une croix dont les mesures des côtés sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison $\varphi$. Nous disons que cette croix est une « croix céleste ».

[1] Il nous a été demandé pour le glossaire de PUBLIMATH et pourra servir d'introduction à notre article paru dans *Le Miroir des maths n°11*. Un supplément de 23 pages de J. P. Le Goff, « *Une propriété perspective du nombre d'or* » prolongeant cette étude est téléchargeable sur notre site.



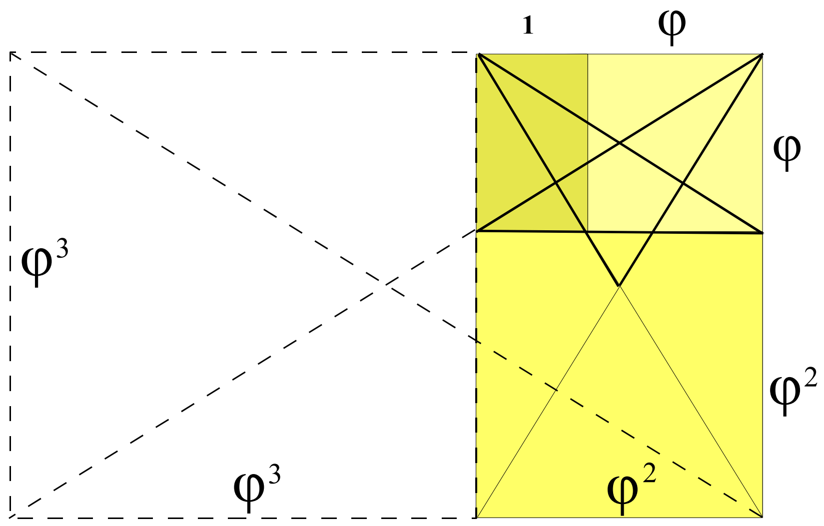

**c) Deuxième construction (de découverte et naturelle) des pentagones célestes**

Considérons le rectangle d'or élémentaire de côtés de mesure 1 et φ, (en jaune foncé sur la figure suivante).

Construisons, le long d'un côté de mesure φ un carré de même mesure (en jaune moyen). Alors la figure formée du premier rectangle d'or et du carré est un nouveau rectangle d'or de mesures φ et $\varphi+1 = \varphi^2$ .

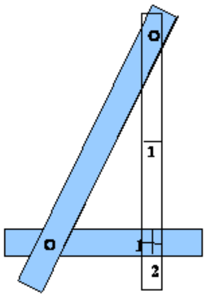
Si on itère le processus d'adjonction, toujours dans le même sens, on obtient ce que l'on appelle généralement la spirale des rectangles d'or.

Les diagonales des rectangles d'or successifs forment alors le Pentagone céleste étoilé que nous avons tracé en gras. Nous avons indiqué en pointillés une ébauche du pentagone céleste suivant dans la spirale (il est basculé dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au premier).



### d) Une propriété remarquable de cette suite de constructions de rectangles d'or

Pour des raisons de proportionnalités des mesures des rectangles d'or successifs, certaines diagonales appartenant à des rectangles différents sont portées par le même axe, voyez la figure précédente.




Les diagonales d'un même rectangle d'or forment entre elles un angle aigu de tangente égale à 2, cet angle mesure 63,4° au dixième de degré près ce qui permet de construire facilement les rectangles d'or de centre donné et passant par un point donné, ce qui peut être utile en architecture en utilisant par exemple une fausse équerre.

Remarque : les diagonales des rectangles d'or successifs forment une suite géométrique de raison $\varphi$. Cette propriété nous permet d'énoncer des propriétés numériques des pentagones étoilés célestes (conditions nécessaires). Les longueurs de leurs diagonales sont :

$$\boxed{a\varphi\ ;\ a\sqrt{\varphi^2+1}\ ;\ a\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1} \text{ ou encore } a\varphi\ ;\ a\sqrt{\varphi+2}\ ;\ a\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi+2} \text{ où a est un paramètre réel positif.}}$$

En multipliant a par $\varphi$ on obtient les mesures des diagonales du pentagone céleste suivant dans la spirale des rectangles d'or.
Pour une exposition détaillée des propriétés des pentagones célestes, le lecteur pourra consulter notre article « À la rencontre de la croix et du pentagone célestes » dans le *Miroir des maths* n°11.

### e) Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pentagone soit céleste (voir la première construction)

- Quatre de ses sommets parmi cinq soient les sommets d'un rectangle d'or ACEI.
- Le cinquième sommet G se trouve à l'intersection des droites orthogonales [AG) à la diagonale [CI] et [CG) à la diagonale [AE].

L'observation des propriétés des pentagones célestes étoilés qui ressemblent à des pentagones réguliers « vus de loin » nous a incités à en proposer l'étude à notre collègue Jean-Pierre Le Goff de l'équipe « Histoire des sciences » de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie, d'un point de vue historique et « perspectiviste ». Il vous livre maintenant un résumé de ses jolis résultats et commentaires.

## II – Le pentacle céleste, formé des pentagones célestes étoilé et convexe, pourrait-il être l'image par perspective centrale d'un pentacle régulier ?

Cette question fournit l'occasion d'aborder quelques aspects historiques et heuristiques d'un domaine un peu perdu de vue : la géométrie dite de situation et des propriétés projectives des figures.

En effet, le résultat le plus surprenant auquel aboutit l'étude de Danielle et Ruben sur le pentagone céleste étoilé est que le pentacle céleste (conjugaison des pentagones célestes convexe et étoilé) est l'image perspective d'un pentacle régulier. Ce résultat, au passage, pourrait être une définition princeps de cet objet. Un article détaillant l'aspect heuristique et calculatoire du « Pentacle céleste comme vision perspective du pentacle régulier » est joint avec ce numéro du « Miroir des maths » et téléchargeable en ligne sur le site de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie.

S'il est assez simple de concevoir qu'un pentagone (qu'il soit convexe ou étoilé) puisse être l'image d'un pentagone régulier (convexe ou étoilé, respectivement), et si la théorie projective permet d'intuiter qu'il s'agit, par exemple, d'une extension du théorème de Poncelet sur les perspectives de quadrilatères plans et/ou de tétraèdres, c'est-à-dire d'un cas particulier des théorèmes sur les images perspectives de figures polygonales planes ou gauches, il reste que ce constat d'existence de solutions ne doit pas masquer le fait que la construction et/ou l'exhibition d'un pentagone régulier (donc d'un pentagone étoilé et du pentacle qu'il forme avec le régulier qui le contient) dont l'image soit le pentagone céleste convexe (donc du pentagone céleste étoilé et du pentacle ainsi constitué) ne sont pas immédiates.

Les voies heuristiques de cette construction donnent l'occasion de remettre en mémoire quelques propriétés peu connues, quoiqu'élémentaires, de la géométrie perspective des polygones et des coniques.

C'est donc la voie heuristique qui sera empruntée et exposée : elle permet de comprendre où le géomètre va chercher tout cela ! En prime, c'est une histoire du passage de la géométrie des configurations à la géométrie des transformations – celles qui transforment "vraiment", c'est-à-dire qui modifient la forme et en brouille la reconnaissance – qui sera esquissée : le lecteur sera convié à (ré-) apprendre ce que sont la double projection vitruvienne et la vision arguésienne[2] du cercle engendrant les coniques.

Quant à se faire une idée de ce résultat, deux images suffiront (peut-être ?) La figure 1 montre que la construction d'une perspective centrale peut toujours être conduite à partir de la connaissance de deux projections orthogonales : c'est ainsi que Gaspard Monge enseignera la perspective centrale à partir de sa géométrie descriptive à la fin du XVIII^e^ et au début du XIX^e^ siècle.

Il reprendra ainsi l'idée primitive de l'architecte italien Filippo Brunelleschi, vers 1420, qui inventera la perspective centrale (non empirique) en coordonnant les informations fournies par le plan et l'élévation d'une situation spatiale regroupant sur un même géométral (le plan au sol) le "sujet regardant" (l'œil ponctuel Œ du perspecteur cyclopéen repéré au dessus du sol et face au tableau), le plan DCGH du tableau érigé à l'aplomb du sol et l'objet regardé (point, figure plane ou solide, ici pentagone ABCDE au sol) situé au-delà du tableau (voir la figure 2).

Ces projections orthogonales, la Renaissance les tient de l'architecte Vitruve, contemporain de César (I^er^ siècle av. J.-C.), qui définit l'*ichnographie* – projection verticale sur un plan horizontal – et l'*orthographie* – projection orthogonale sur un plan vertical – dans son traité d'architecture redécouvert dans cette période de néo-platonisme, dont Leon Battista Alberti donnera une version en 1452 et qui sera imprimé de nombreuses fois après l'invention de Gutenberg à la fin du Quattrocento.

Les rayons visuels issus de Œ traversent le tableau en des points *X* qui sont définis comme les images perspectives des points X de l'objet.

Le pentacle ABCDE devient *abcde* dans la figure 1 où l'on voit le tableau placé en regard des vues de dessus et de profil, et *ABCDE* dans la figure 2, où l'on voit le tableau érigé au-dessus du plan géométral.

C'est grâce au relèvement des "coordonnées" (pas au sens de Descartes, mais au sens de grandeurs que l'on peut relever au compas) qu'on peut connaître la position d'un point-image dans le tableau. Les écarts se lisent sur la ligne DC ou TT du tableau en vue du dessus (où J sert d'origine) et sur la ligne TT', vue de profil de ce même tableau (où T sert d'origine).

Dans une certaine position de Œ, déterminée par sa distance A'J du tableau et sa hauteur ŒA' au-dessus du sol, l'image du pentacle régulier ABCDE "devient" un pentacle céleste $ABCDE$ construit à partir du rectangle d'or $CDHG$ (avec $CD = a$ et $DH = b = a{\cdot}\varphi$ .

Les conditions *ad hoc* seront explicitées dans l'article en ligne sur notre site, grâce à des considérations qui relèvent de la théorie des proportions dans un premier cas : la position de A' est connue du fait qu'il doit se trouver dans le *plan neutre* (parallèle au tableau et passant par Œ) pour que les images de (ED) et (BC) soient parallèles dans le tableau, ce qui induit que A', pied de l'observateur se trouve à l'intersection de (ED) et (BC) (figure 1).

Dans un second cas, ces conditions ressortissent à la théorie des coniques : en effet le cercle circonscrit au pentagone régulier a pour image une ellipse circonscrite au pentagone régulier, qui se trouve entièrement définie par la donnée de cinq points, comme toute conique du plan.

[2] L'adjectif "vitruvien" renvoie à l'architecte romain Vitruve ; et "arguésien" renvoie au géomètre lyonnais Girard Desargues (1591-1661), dont les travaux sur la perspective et les coniques ont donné naissance à ce que nous appelons, depuis Jean-Victor Poncelet (1788-1867), le bi-rapport et la géométrie projective.

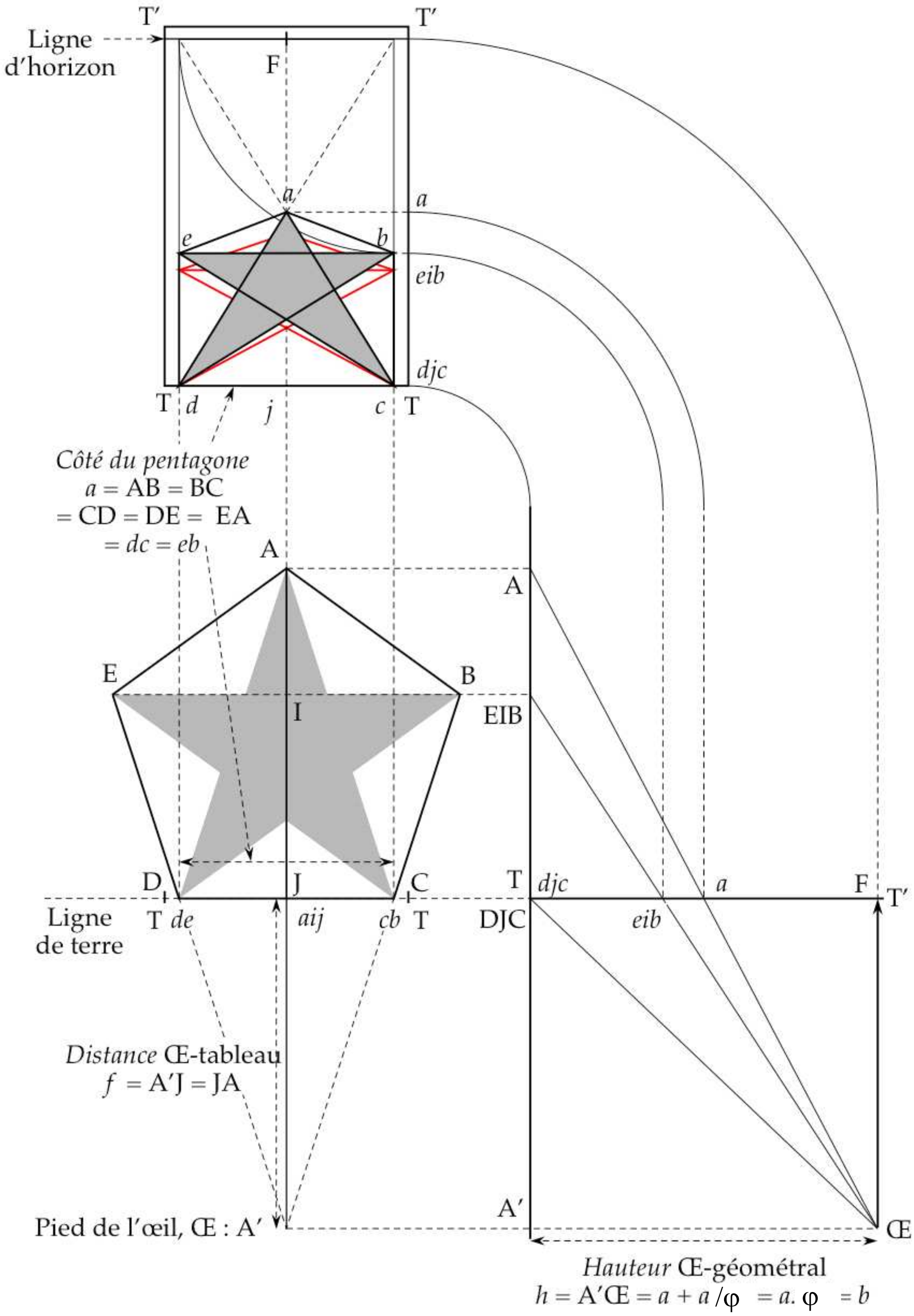



Figure 1. Dans le géométral, en grisé, le pentagone croisé ACEBD dans le pentagone régulier ABCDE. Dans le tableau TTT'T', en grisé, l'image $acedb$ de ABCD, qui est bien un pentagone céleste étoilé, dès lors que $h = b = a{\cdot}\varphi$. En rouge, l'un des pentagones-images obtenus lorsque l'on fait un choix arbitraire de $h$.

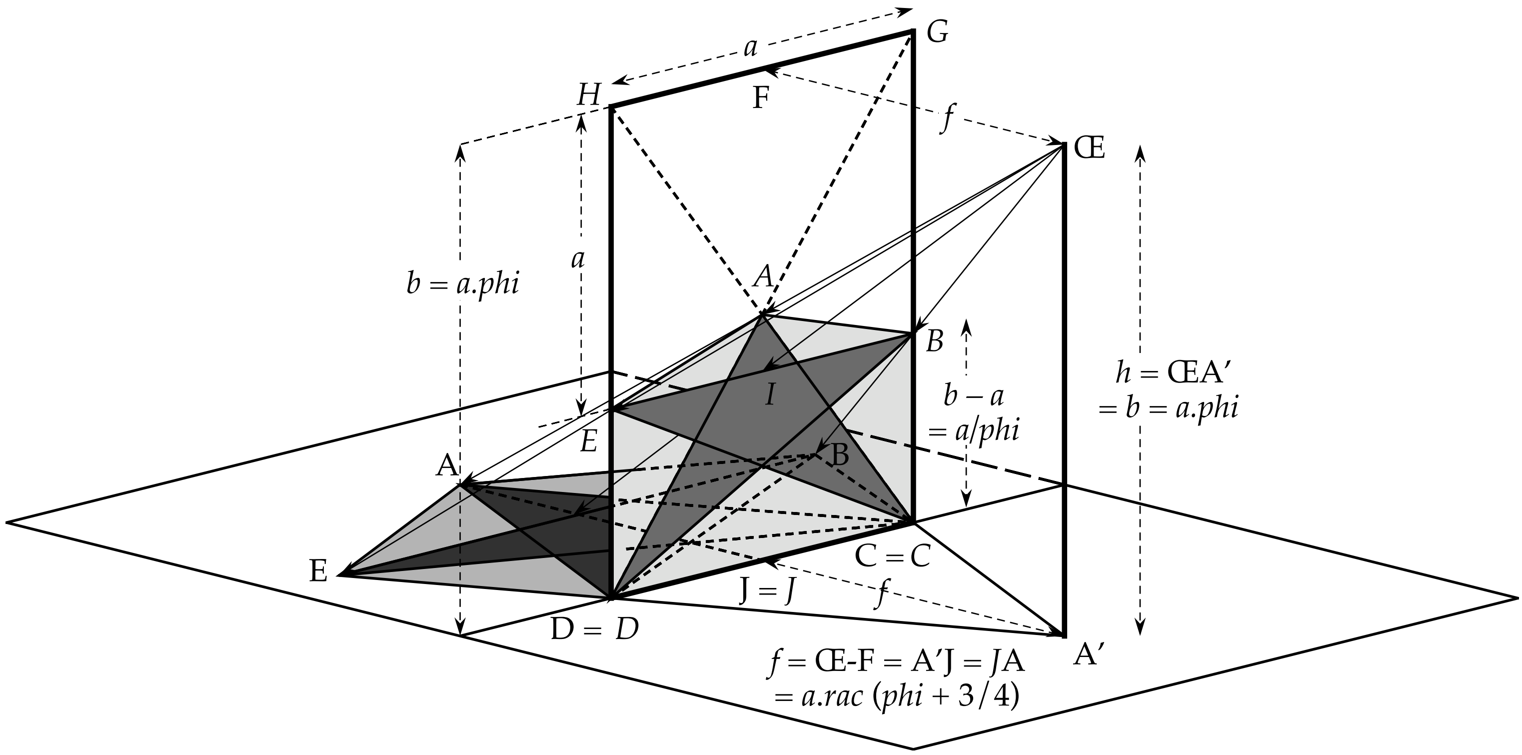


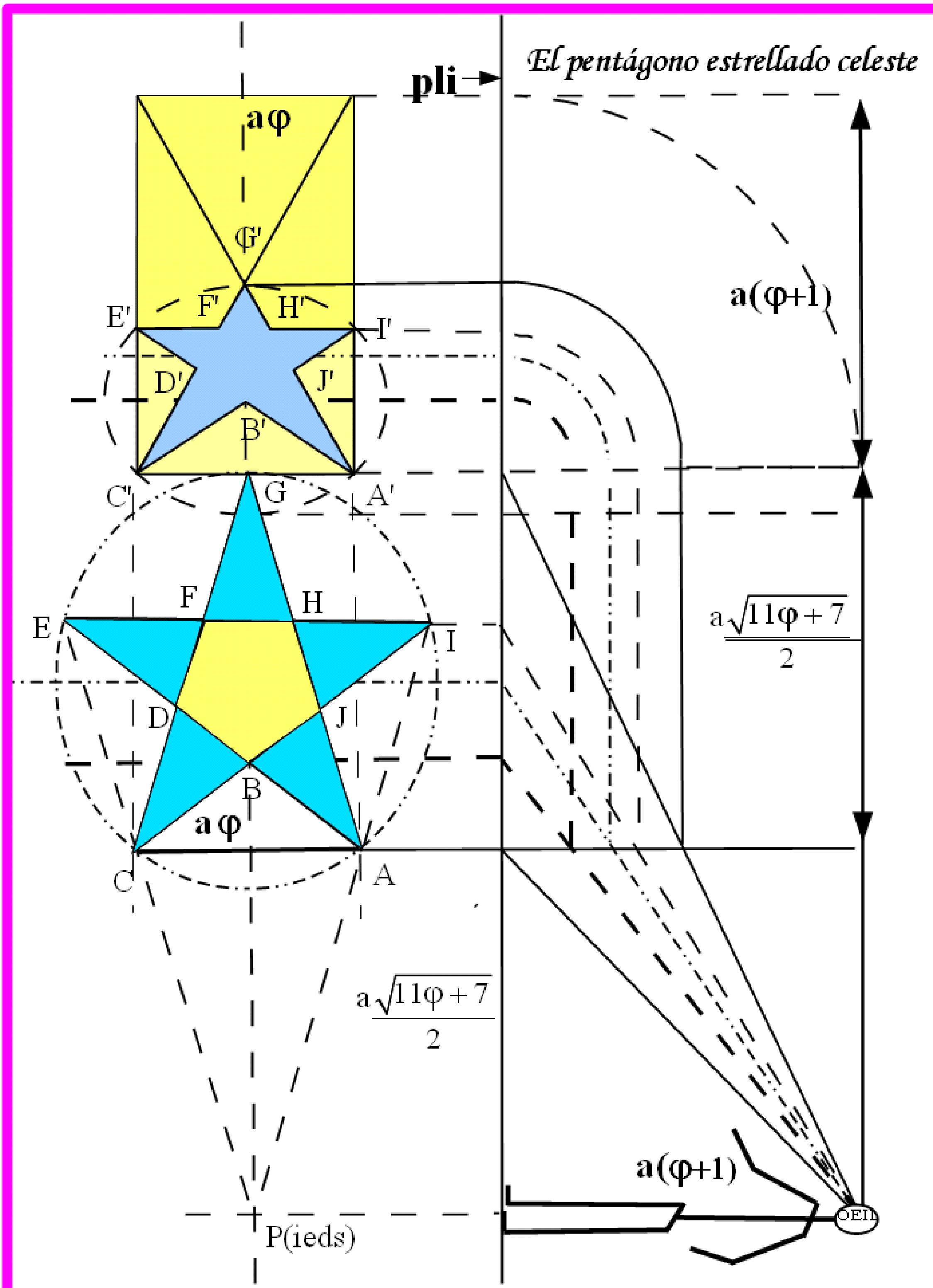

Figure 2. $AJ = a\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi + 2}$

Nous vous proposons dans la page qui suit une reprise de la figure n°1 avec des notations modernes peut-être un peu plus habituelles au lecteur. Nous avons redessiné la figure de telle sorte qu'elle soit pliable le long d'un axe longeant les pieds de l'observateur. Cette petite affiche a été proposée aux visiteurs de notre exposition à l'occasion des quarante ans de l'IREM de Basse-Normandie.

Voici le texte que nous avions mis derrière l'affiche :

Cette affiche peut être pliée afin de vous montrer comment les artistes peintres du XVI$^{e}$ siècle construisaient leurs images en perspective.

Faites un pli en extérieur (« pli montagne ») sur toute la feuille de haut en bas sur la ligne qui longe les pieds de l'observateur qui se trouve en bas à droite. Repliez encore une fois la feuille dans le sens de sa longueur afin d'amener le premier pli sur la droite pointillée qui passe par les points G', B', G, B, P(ieds), Aplatissez le pli. Cela fait un pli plat ou « de couturière ». Les pieds de l'observateur doivent se trouver en P(ieds). Redressez verticalement la partie droite de l'affiche. Alors, par les reports de longueurs par les arcs de cercle, vous pouvez observer comment il faut dessiner le pentagone turquoise vu en perspective, s'il est représenté par exemple en décor de sol à l'italienne sur une peinture.




*Le pentagone étoilé céleste J. P. Le Goff, R. Rodriguez Herrera, D. Salles-Legac*

**I.R.E.M. de Basse-Normandie Caen France 2013**

# Initiation aux équations algébriques modulo un nombre premier Le cas du nombre d'or

Pour les élèves-professeurs, les classes de troisième et seconde avec une initiation pour les plus jeunes.

Cet article fait suite à quatre articles mis en ligne sur notre site IREM par Ruben Rodriguez à destination des professeurs et élèves- professeurs et à notre article des pages précédentes sur les nouvelles notions de "Pentagone et Croix célestes".

Le Nombre d'Or noté en général φ est la racine positive de l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$ qui est égale à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ce nombre, hormis son intérêt historique indéniable est une mine (d'or, excusez le pléonasme !) pour le mathématicien qui trouve son miel dans son étude et peut piocher dans divers champs mathématiques pour concevoir des activités tant de découverte que de consolidation de notions très variées.

Comme le rappelle Antoine Chambert-Loir dans son article de la *Gazette des Mathématiciens* (janvier 2012) Carl Friedrich Gauss s'était déjà intéressé à la résolution d'équations en considérant que tout multiple d'un nombre premier donné est nul. Il s'agit bien entendu de travailler dans les corps finis de la forme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $p$ est un nombre premier fixé supérieur ou égal à trois.

Pour le lecteur non familier de l'arithmétique modulaire, nous allons rappeler quelques notions sur les congruences modulo $p$ puis étudier deux cas particuliers $p = 7$ et $p = 11$ dans le cas de la résolution de l'équation caractéristique de φ.

## I – Rappel sur les congruences

### I - a) L'addition dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Rappelons tout d'abord une petite énigme chinoise du Vème siècle citée par A. Chambert-Loir :

Nous avons un nombre inconnu de choses. Si nous les comptons par trois, il en reste deux ; si nous les comptons par cinq il en reste trois, si nous les comptons par sept, il en reste deux. Trouver le nombre de ces choses.

Si cela vous inspire nous vous invitons à chercher une méthode de résolution… Si cela ne vous inspire pas vous trouverez quelques indications en annexe.

Pour notre part nous allons vous définir les congruences et vous proposerons une "chinoiserie" plus simple sous une forme moderne.

Définitions : Soit $p$ est un nombre premier fixé. Dans notre travail, $p$ sera choisi supérieur ou égal à 3.

– On dit qu'un nombre $n$ est congru à zéro modulo $p$ si c'est un multiple de $p$ ($p$ est lui-même un de ses multiples).
– On dit que deux nombres $n$ et $m$ sont congrus modulo $p$ si leur différence $n - m$ est multiple de $p$.

Ainsi si $p = 7$ alors 14 est congru à 0 modulo 7 , cela s'écrit : $14 \equiv 0 \mod 7$. Et 15 est congru à 1 modulo 7 ce qui s'écrit : $15 \equiv 1 \mod 7$. Si $p = 11$ alors 33 est congru à 0 modulo 11 et 17 est congru à 6 modulo 11.

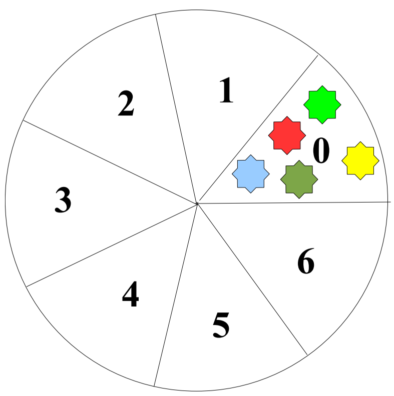
Pour rendre les choses plus perceptibles on peut imaginer que les nombres de 1 à $p$ sont répartis sur une circonférence et que lorsque l'on se déplace sur cette circonférence, quand on arrive en $p$, c'est " un tour pour rien ".

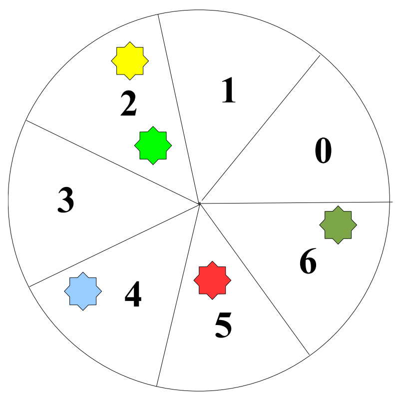
Pour les plus jeunes de nos élèves on peut donc leur proposer le petit jeu suivant :

Matériel : une feuille de papier fort, un compas, un rapporteur, un dés à six faces, des pions de couleurs différentes, par groupe de cinq élèves, par exemple.

Le professeur peut tracer le cercle et les cases numérotées auparavant, sinon :

Tracer sur une feuille un cercle et répartir régulièrement sur sa circonférence sept points notés de 0 à 6 (on peut s'aider du rapporteur). Tracer les rayons associés à ces points pour obtenir des quartiers. On pose les pions de couleurs différentes (un par élève) sur le 0.



Chaque élève lance le dé et place son pion sur le nombre trouvé, il note son score sur un papier.

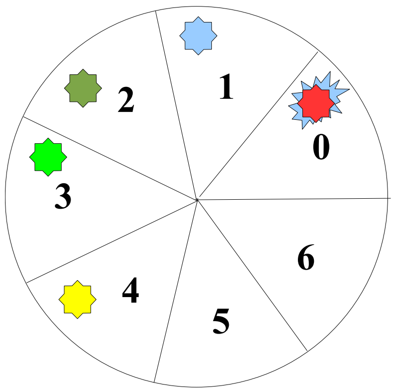
Au tour suivant chacun joue et déplace son pion selon son nombre de points comme aux « petits chevaux ». Chacun note son score, on peut dépasser le 0.

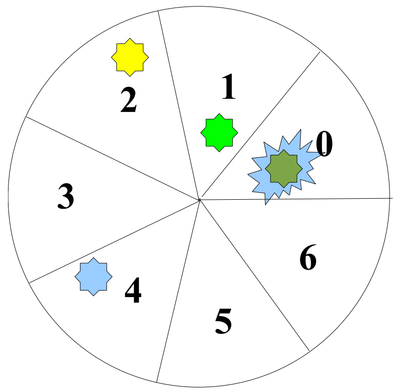
Le premier qui tombe exactement sur 0 a gagné, il enlève son pion, les autres continuent jusqu'à ce qu'ils tombent sur 0. Quand le jeu est fini chacun annonce ses points successifs, on a ainsi plusieurs façons d'obtenir 0 modulo 7.

Nous avons simulé un jeu : au premier tour le vert clair et le jaune ont tiré 2, le bleu a tiré 4, le rouge a tiré 5 et le vert foncé 6. Personne n'a 0 car il n'y a que 6 faces au dé.

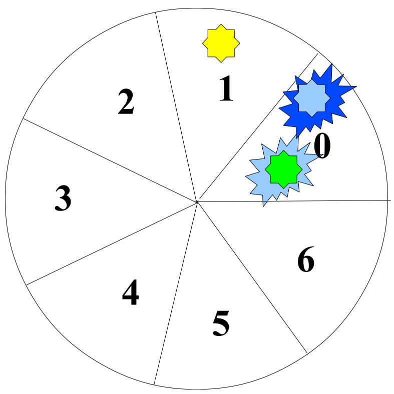
Au second tour (voir figure page précédente) le vert clair a tiré 1, le bleu 4, le jaune et le rouge 2 et il tombe sur le 0 donc il gagne et quitte la partie, le vert foncé a tiré 3, il dépasse le 0 et va en 2.

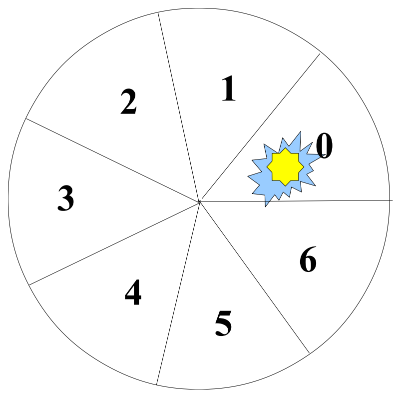
Au troisième tour le vert clair a tiré 5, il dépasse le 0 et passe en 1, le jaune a tiré 5, il dépasse aussi le 0, le bleu a tiré 3, le vert foncé a tiré 5, il tombe sur 0, c'est le deuxième gagnant, il sort du jeu.




Les autres continuent jusqu'à ce qu'ils trouvent 0. Au quatrième tour le vert clair tire 6, il tombe sur le 0, il sort du jeu, le bleu tire 3, il tombe aussi sur 0 et sort du jeu. Le jaune tire le 6 il passe en 1.




Au cinquième tour , le jaune tire encore 6 et tombe en 0. Le jeu est terminé nous écrivons au tableau les scores successifs :

vert clair 2 + 1 + 5 + 6 = 14 GAGNANT !
Jaune 2 + 2 + 5 + 6 + 6 = 21 GAGNANT !
bleu 4 + 4 + 3 + 3 = 14 GAGNANT !
rouge 5 + 2 = 7 GAGNANT !
vert foncé 6 + 3 + 5 = 14 GAGNANT !

Nous récapitulons les résultats :

$$\boxed{\begin{array}{l} 2+1+5+6=14\equiv 0 \mod 7 \\ 2+2+5+6+6=21\equiv 0 \mod 7 \\ 4+4+3+3=14\equiv 0 \mod 7 \\ 5+2=7\equiv 0 \mod 7 \\ 6+3+5=14\equiv 0 \mod 7 \end{array}}$$

Ce petit jeu fait calculer la somme de différents tirages modulo 7.

Les jeunes ne sachant pas compter modulo 7 peuvent compter les cases comme au jeu des petits chevaux mais ils doivent noter leur score à chaque fois.

Dans cette optique de présentation des nombres entiers modulo $p$ pour les plus jeunes nous vous présentons maintenant quelques « souvenirs didactiques » de Ruben Rodriguez qui, dans les années 1970 a introduit dans son collège de Montevideo, ces notions algébriques. Tous les « anciens » qui ont, soit enseigné ces notions, soit aidé leurs enfants à les apprendre peuvent témoigner que cela les amusait beaucoup (les enfants !) et terrorisait seulement les parents car les IREM en particulier (créés à cette occasion !) élaboraient de multiples jeux pour les introduire auprès des enfants qui ne s'en plaignaient pas, loin de là ! Le professeur André Lichnérowicz, à l'origine de l'introduction de ces notions auprès des plus jeunes était peut-être un peu trop ambitieux (il présidait de 1966 à 1973 la Commission ministérielle sur l'enseignement des mathématiques qu'il voulait moderniser, ce qui de notre point de vue, fut réalisé de façon trop précipitée : les mathématiques, c'est « de la sueur et des larmes »). Il avait oublié que – avec des jeunes (et les moins jeunes aussi d'ailleurs) – il faut essayer chaque fois que c'est possible de « jouer avec les maths », car les mathématiques sont très ludiques.

**I – b) Un autre jeu : témoignage de Ruben sur ses souvenirs de l'introduction des « Maths modernes »**

Au cours de mes travaux de recherche en Uruguay sur l'enseignement des mathématiques modernes dans les années 70, que j'appliquais dans mes classes de première année du collège, je créai une situation de jeu avec un ballon et cinq élèves réunis en cercle dans la cour du collège.

Je le nommai « Jeu du distrait ». Il a été analysé didactiquement dans ma thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, mention Didactique des mathématiques, « La pédagogie des mathématiques est-elle moderne ? », sous la direction de Gaston Mialaret soutenue à l'Université de Caen en 1978.

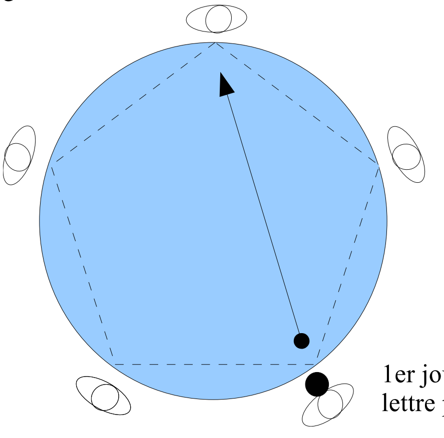
Voici la description de la situation didactique.

1) Dans une première phase les élèves entendaient l'enseignant prononcer une des voyelles parmi **a,e,i,o,u** : L'élève qui avait le ballon dans ses mains devait passer le ballon de la manière suivante :

Pour la voyelle **a** au premier joueur à sa gauche ;

Pour la voyelle **e** au deuxième joueur à sa gauche ;

Pour la voyelle **i** au troisième, pour le **o** au quatrième et pour le **u**, il devait rester avec le ballon dans ses mains. Au bout d'un nombre fixé à l'avance de passages du ballon, l'élève qui se trompait le moins de fois était le gagnant.



1er joueur
lettre proposée : i

2) Dans une deuxième phase l'enseignant prononçait deux voyelles à la suite et les élèves devaient faire le calcul exact avant de faire la passe du ballon.

Par exemple **a a** donnait **e** ;

**a e** donnait **i** ;

**a i** donnait **o** ;

**a o** donnait **u**.

3) Dans une troisième phase les élèves revenaient dans la salle de cours et ils modélisaient le jeu dans sa deuxième phase.

Ceci conduisait au tableau à double entrée suivant :

| opération | a | e | i | o | u |
|---|---|---|---|---|---|
| a | e | i | o | u | a |
| e | i | o | u | a | e |
| i | o | u | a | e | i |
| o | u | a | e | i | o |
| u | a | e | i | o | u |

4) Plus tard dans une autre séance les élèves travaillaient sur des congruences modulo 2, modulo 3, modulo 4, ensuite ils avaient rencontré la congruence modulo 5.

Les élèves construisaient des tableaux des opérations binaires internes, en particulier le tableau de l'addition modulo 5.

| + modulo 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

5) Nous avons travaillé à cette époque de « mathématiques modernes » avec nos élèves à Montevideo la notion de morphisme et d'isomorphisme.

C'est ainsi que les élèves nous ont dit qu'il y avait un isomorphisme entre le groupe du « jeu du distrait » et le groupe des nombres entiers modulo 5 parce que c'est le même tableau et donc que les deux opérations fonctionnent de façon similaire.

Il faut dire que ces élèves qui étaient à peu près dans le milieu du troisième trimestre de l'année scolaire avait bien avancé dans le vocabulaire des mathématiques modernes que l'on avait travaillé tout au long de l'année.

Remarque didactique : nous avons découvert à cette époque l'importance didactique du travail des élèves d'abord dans un univers expérimentable, ici il s'agit de l'univers du jeu avec le ballon et ensuite dans un univers morphique formalisant : l'univers de la table des opérations binaires internes. Et aussi dans d'autres univers comme ceux des congruences modulo 2, 3, 4 5, . . .

Commentaire : les élèves de Montevideo des ces classes de sixième ont fait à la fin de l'année une exposition avec des affiches et en leur présence pour expliquer aux adultes les mathématiques apprises dans l'année. Il y a eu beaucoup de parents, collègues enseignants et même, l'inspecteur général des mathématiques et le ministre de l'éducation nationale et ils se sont fait expliquer par les élèves, entre autres notions l'isomorphisme cité plus haut !

Il faut souligner que des collègues du secondaire n'avaient jamais travaillé sur les isomorphismes algébriques et encore moins les parents qui n'avaient jamais entendu parler de ceux-ci au cours de leur scolarité.

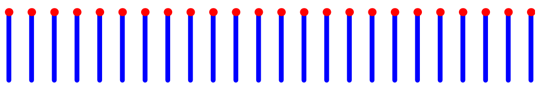
Voici donc le témoignage de cette époque riche en recherches sur la pédagogie des mathématiques, en France avec les IREM et aussi dans d'autres pays comme celui de mes origines, l'Uruguay, où j'avais fondé une équipe de recherche à Montevideo avec des collègues et plus tard avec l'inspecteur général Galli Nari qui avait souhaité participer à titre personnel à nos travaux.

## II – Les multiplications dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

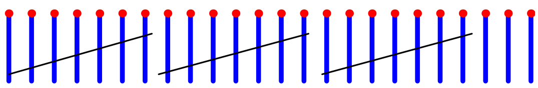
Nous expliquons que l'on peut faire aussi des multiplications des nombres entiers non nuls en décidant que :

« sept égale zéro ».

Pour commencer on dessine sur son cahier un nombre inconnu de petits traits, cette présentation est parfois désignée par « jeu des allumettes » et peut être réalisée avec ces dernières :



Nous demandons aux élèves de faire des paquets de sept traits en les barrant, si on opère avec des allumettes ont les met en paquets de sept :



Dans notre exemple il en reste trois. Ensuite nous leur demandons de compter leurs petits traits, dans notre exemple il y en a 24. Nous écrivons au tableau : 24 égale 3 modulo 7. Nous vérifions que 3 est le reste de la division de 24 par 7. Nous notons au tableau tous les résultats et vérifions que nous avons bien trouvé les restes modulo 7.

Nous allons alors écrire les tables d'addition et de multiplication modulo 7

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Nous voyons donc que lorsque le résultat d'une addition ou d'une multiplication est plus grand que 7 on enlève 7 autant de fois que nécessaire pour trouver un nombre plus petit que 7.

| $\times$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Nous demandons aux élèves d'observer ces deux tables attentivement et d'observer comment sont répartis les nombres. Ces tables font penser au jeu de sudoku : les nombres entiers de 0 à 6 apparaissent un fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne, on dit que l'on a des " Carrés Latins ".

Lorsque l'on définit une opération sur un ensemble, ici par exemple une " addition " sur les nombres entiers de 0 à 6 modulo 7, si la table représentant les résultats des additions pour tout couple de nombres entiers est un carré latin alors l'opération est telle que chaque nombre admet un opposé, c'est-à-dire que pour tout nombre $p$ il existe un nombre $q$ tel que $p + q = 0$, on dit que p est l'opposé de $q$ (dans notre exemple modulo 7) et que $q$ est l'opposé de $p$. D'autre part le résultat de l'addition de deux nombres entiers quelconques est unique, par exemple, on ne peut avoir à la fois :

$2 + 3 = 5$ et $2 + 3 = 0$ modulo 7.

Si l'opération est une multiplication, il est d'usage de parler d'inverse d'un nombre et non d'opposé, et on dit que $p$ est l'inverse de $q$ si $p \times q = 1$.

Ainsi $2 \times 4 = 1$ modulo 7, on dit que $4$ est l'inverse de 2 modulo 7 et aussi que 2 est l'inverse de $4$ modulo 7.

## III – Les équations à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

**III – a) Commençons par résoudre une équation du premier degré à coefficients dans l'ensemble des entiers modulo 7**

On suppose que cet ensemble est muni de deux opérations : l'addition et le produit dont les deux tables sont les précédentes.

Résolvons l'équation $2y = 1$ modulo 7.

Nous recherchons dans la table de multiplication un nombre qui multiplié par 2 donne 1, nous observons que $2 \times 4$ =1 donc $y = 4$ est solution de l'équation.

Résolvons l'équation $3y + 1 = 0$ modulo 7.

Elle équivaut à $3y = 0 - 1 = -1$ modulo 7.

$-1$ n'apparaît pas dans la table, donc nous devons chercher comment écrire $-1$ avec un nombre positif. Quelle est la particularité de $-1$ ? C'est l'opposé de 1 car $-1+1 = 0$ modulo 7, donc il faut chercher dans la table d'addition quel est le nombre qui ajouté à 1 donne 0. C'est 6, donc 6 est l'opposé de 1 et $6 = -1$ modulo 7.

Notre équation devient : $3y = 6$ modulo 7. Dans la table de multiplication nous vérifions que $3 \times 2 = 6$, la solution est donc $y = 2$.

Les équations du premier degré sont donc assez simples à résoudre. Nous passerons plus loin aux équations du second degré.

### III – b) D'autres équations modulo 7 sont amusantes à résoudre

Elles donnent à réfléchir dans un domaine que l'on appelle l'arithmétique, par exemple :

Essayons de résoudre l'équation : $2y \equiv 3z \mod 7$. Nous voyons que nous devons chercher deux nombres entiers $y$ et $z$ dans la table de multiplication tels que 2 fois l'un vaut 3 fois l'autre. . .Nous voyons que :

$2 \times 3 = 6 = 3 \times 2$ donc $y = 3$ et $z = 2$ conviennent.

Y-a-t-il d'autres possibilités ? Nous remarquons par exemple que :

$2 \times 5 = 3 = 3 \times 1$ ; donc $y = 5$ et $z = 1$ conviennent.

En fait si nous continuons ainsi nous voyons que pour tout $y$ de notre ensemble des entiers modulo 7 il existe un $z$ tel que $3y \equiv 4z \mod 7$. Pourquoi ?

Nous avons observé plus haut que tout élément de l'ensemble admet un inverse donc nous pouvons transformer notre équation :

$2y \equiv 3z \mod 7$ en $y = (1/2) \times 3z$. Nous devons rechercher le nombre qui multiplié par 2 donne 1 c'est 4 donc l'équation devient : $y = (1/2) \times 3z \equiv 12z \mod 7$, soit encore $y = 5z$, donc pour tout $z$ de 1 à 6, il suffit de choisir pour $y$ la valeur $z$ multipliée par 5.

Les couples de nombres entiers solutions de l'équation sont donc :

(5,1) ; (3,2) ; (1,3) ; (6,4) ; (4,5) ; (2,6).

### III – c) Les équations du second degré

Par exemple l'équation $y^2 = 4$ a deux solutions évidentes $y = 2$ et $y = -2 \equiv 5 \mod 7$.

Mais l'équation $y^2 = 3$ a-t-elle une solution ? Nous n'avons pas trouvé de nombre qui multiplié par lui-même donne 3. Observons dans la table de multiplication si d'autres nombres entiers admettent une racine.

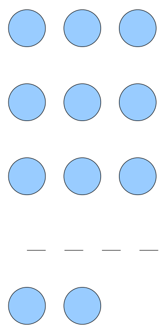
Nous avons $1 \times 1 = 1$ donc 1 admet sa racine habituelle 1, mais aussi :

$6 \times 6 = 1$ donc 6 est aussi racine de 1. Est-ce surprenant ? Non car $6 = -1$.

Récapitulons : l'ensemble des nombres entiers modulo 7 que nous noterons $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ admet deux racines carrées : racine (1) et racine (6).

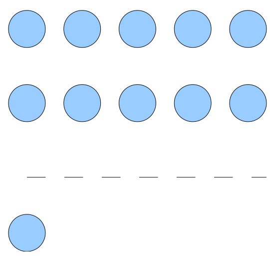
## IV – Entracte : une énigme plus simple que celle des Chinois

J'ai dans ma poche des pièces de 1 €, si je les compte par trois il en reste deux, si je les compte par cinq il en reste une, combien ai-je de pièces ?



P = 3 x n + 2

Observons la première équation qui exprime que lorsque l'on divise $P$, nombre de pièces, par 3 il reste 2.
Observons la deuxième : lorsque l'on divise $P$ par 5 il en reste une.
Peut-on utiliser la deuxième pour améliorer la première ?
Multiplions la première par 5, on obtient :
$5P = 15n + 10$. Multiplions la deuxième par 3 on obtient :
$3P = 15m + 3$. Soustrayons les deux expressions :
$2P = 15(n - m) + 7$ , ce qui se dit aussi
$2P$ est congru à 7 modulo 15. Nous avons maintenant une seule congruence.
Essayons le cas où $m = n$ alors $2P = 7$ ce qui est impossible car 7 n'est pas un nombre pair, essayons $n - m = 1$ alors :
$2P = 22$ et $P = 11$, est-ce possible ? Oui car :
$11 = 3 \times 3 + 2$ et $11 = 2 \times 5 + 1$



P= 5 x m + 1

**J'ai 11 pièces dans ma poche.**

## V – Le cas nombre d'or φ, solution de l'équation à coefficients entiers : $y^2 - y - 1 = 0$.

On peut se demander si le nombre d'or a un sens dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ puisque les coefficients de l'équation dont φ est solution sont 1 et 0.

On peut étudier ce problème de deux façons différentes :

– L'approche par essais successifs ;
– L'approche algébrique habituelle dans les nombres réels. Commençons par cette dernière :

On sait que dans l'ensemble des nombres réels φ s'écrit : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous avons vu que $\sqrt{5}$ n'existe pas dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Ne nous décourageons pas, on ne sait jamais…
Essayons les éléments successifs de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ .

$y = 0$ ne convient pas ; y = 1 ne convient pas ;
$y = 2$, on a $4 - 2 - 1 \equiv 0$ ;
$y = 3$, on a : $9 - 3 - 1 = 2 - 3 - 1 = 5 \equiv 0$ ;
$y = 4$, on a : $16 - 4 - 1 = 4 \equiv 0$ ;
$y = 5$, on a : $25 - 5 - 1 = 5 \equiv 0$ ;
$y = 6$, on a : $36 - 6 - 1 = 1 \equiv 0$.

Le nombre d'or n'existe donc pas dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, bien que 7 soit traditionnellement " un nombre sacré " ( !).

### Le cas des entiers modulo 11

Antoine Chambert-Loir, dans son article de la "Gazette des mathématiciens" nous propose d'étudier l'équation du nombre d'or dans l'ensemble des entiers modulo 11 : $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ .

L'addition s'effectue, comme dans les entiers modulo 7 mais il y a maintenant 11 éléments, numérotés de 0 à 10.

La multiplication présente les mêmes caractéristiques que la multiplication modulo 7, en particulier tout élément admet un inverse. (voir la table ci-dessous)

Nous demandons aux élèves de construire la table de multiplication seuls afin de bien installer ces techniques de calcul et de raisonnement dans un contexte inhabituel.

Tout d'abord essayons comme précédemment de chercher si la racine de 5 existe dans cet ensemble. Autrement dit existe-t-il un nombre qui multiplié par lui-même donne 5 ? Nous constatons que $4^2 = 5$ et $7^2 = 5$.

Remarquons que les deux nombres entiers 4 et 7, (4 + 7 = 0 modulo 11) sont opposés et que cette propriété algébrique est générale : il existe deux racines de 5. Comme dans les nombres relatifs il y a deux racines, on convient dans ceux-ci de choisir la racine positive mais dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ cela n'a pas de sens puisque tout nombre est à la fois positif et négatif.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 3 | 6 | 9 | 1 | 4 | 7 | 10 | 2 | 5 | 8 |
| 4 | 8 | 1 | 5 | 9 | 2 | 6 | 10 | 3 | 7 |
| 5 | 10 | 4 | 9 | 3 | 8 | 2 | 7 | 1 | 6 |
| 6 | 1 | 7 | 2 | 8 | 3 | 9 | 4 | 10 | 5 |
| 7 | 3 | 10 | 6 | 2 | 9 | 5 | 1 | 8 | 4 |
| 8 | 5 | 2 | 1 | 7 | 4 | 1 | 9 | 6 | 3 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Donc nous allons vérifier si au moins l'une des solutions $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ ou $\frac{1+7}{2} = \frac{8}{2}$ convient.
Or est 8 le nombre qui multiplié par 2 donne 5.

Le nombre d'or dans l'ensemble des nombres entiers modulo 11 est-t-il 8 ?

Nous devons chercher si $8^2 - 8 - 1 = 0$ soit $9 - 8 - 1 = 0$, ce qui est vérifié. Le nombre d'or modulo 11 est 8.
Étudions la deuxième solution $8/2$. Notre premier mouvement nous incite à poser $\frac{8}{2} = 4$
Effectuons le calcul $4^2 - 4 - 1 = 5 - 4 - 1 = 0$ ;
Un second nombre d'or modulo 11 est 4, cette solution convient.

Pour consolider les résultats nous demandons aux élèves de faire les calculs pour tous les nombres entiers de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ .
L'existence de deux nombres d'or dans l'ensemble des entiers modulo 11 nous interpelle et nous incite à nous poser des questions intéressantes…

Tout d'abord ces résultats ont-ils un sens géométriquement ? Peut-on imaginer que dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, il y ait une « divine proportion » ?

Par exemple observons le couple de nombre (1,8), le couple suivant délivré par une « suite à la Fibonacci »(c'est-à-dire une suite de Fibonacci généralisée) est (8,9) est-il dans la même proportion ?

A-t-on : 8/1 = 9/8 modulo 11 ?

Nous avons prouvé précédemment que si trois nombres $a, b, c$ vérifient $c = a + b$ et que $b/a = c/b$, ceci équivaut à $b/a = \varphi$ , effectuons le calcul pour vérifier cette assertion.
Nous observons dans la table de multiplication modulo 11 que $9/8 = 8$, ce qui convient.

Le « deuxième » nombre d'or modulo 11 est 4.

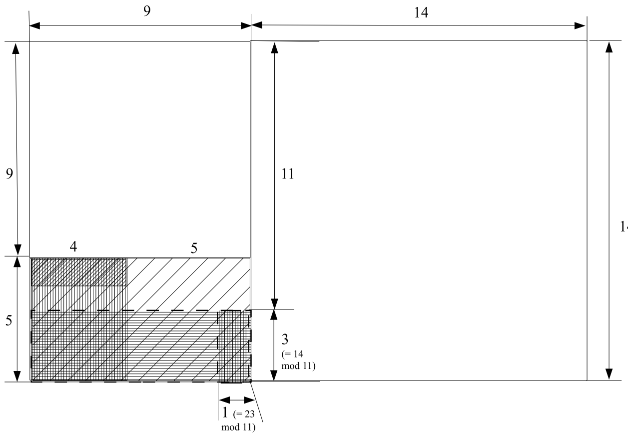
Le premier couple est donc (1,4) le deuxième (4,5), or $5/4 = 4$, ce qui convient.

Nous pouvons essayer de représenter cet « univers modulo 11 », qui est ce que l'on appelle un univers « discret » (c'est-à-dire opposé à continu) une construction de la spirale des rectangles d'or successifs : les « dimensions » des rectangles d'or successifs, construits comme dans les nombres réels, comme une suite de Fibonacci sont : (1 ; 4 ) ; (4 ; 5) ; (5 ; 9) ; (9 ; 14) soit (9 ; 3) modulo 11 ; (3 ; 12) soit (3 ; 1) modulo 11 ; (1 ; 4) et nous revenons au rectangle d'origine.

Nous vérifions que
3/9 = 4 modulo 11 et que 1/3 = 4 modulo 11. les « rectangles d'or » ont leurs côtés proportionnels au « nombre d'or » 4. Il y a donc cinq « rectangles d'or modulo 11 » distincts correspondants au nombre d'or modulo 11 soit 4, ce sont les couples :

(1 ; 4 ) ; (4 ; 5) ; (5 ; 9) ; (9 ; 3) et (3 ; 1) on retrouve ensuite (1 ; 4).

Nous avons dessiné en tirets gras les rectangles d'or modulo 11 « écrasés », tous les rectangles d'or modulo 11 sont inscrits dans le rectangle (5 ; 9).




Observons maintenant cela avec 8, « nombre d'or modulo 11 ».

Les couples de nombres entiers correspondants à une suite de Fibonacci généralisée sont :

(1 ; 8) ; (8 ; 9) ; (9 ; 6) ; (6 ; 4) ; (4 ; 10) ; (10 ; 3) ; (3 ; 2) ; (2 ; 5) ; (5 ; 7) ; (7 ; 1) ; on retrouve ensuite (1 ; 8).

## VI – Quelques remarques pour les élèves-professeurs

Il n'est pas innocent d'avoir choisi pour nos exemples des nombres entiers modulo un nombre premier. En effet la théorie de Galois montre que les ensembles de nombres entiers modulo $p$ premier se munissent facilement d'une structure de corps commutatif et, de ce fait, se prêtent bien à la résolution des équations.

D'une façon générale, si nous voulons résoudre des équations du second degré nous devons chercher si un nombre a de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un carré. Nous dirons qu'alors « a est un résidu quadratique modulo p ».

Les corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont cycliques c'est-à-dire qu'un élément $\alpha$ est générateur du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ :

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots .\alpha^{p-2}\}$.

On a alors le théorème suivant : $\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \mod p$

Soit un nombre premier impair. **Un générateur $\alpha$ n'est pas un résidu quadratique**. En effet d'après le petit théorème de Fermat on a $\alpha^{p-1} = 1$ donc, $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$.

Puisque $\alpha$ est un générateur la seule solution possible est : $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = -1$

Si $\alpha$ était un carré on aurait $\alpha = \beta^2$ et $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = \beta^{p-1} = 1$, ce qui est faux puisque $\alpha$ étant générateur son ordre est exactement $p-1$.

Deuxième théorème

**Dans un corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ les seuls résidus quadratiques sont les puissances paires d'un générateur.**

En effet il est clair que les nombres entiers de la forme $\alpha^{2k}$ sont des carrés, d'autre part si $\alpha^{2k+1}$ était un carré de la forme $u^2$ on aurait $\alpha = \dfrac{u^2}{\alpha^{2k}}$ et $\alpha$ serait un carré, ce qu'il n'est pas.

Reprenons le cas que nous avons traité précédemment où $p = 11$, nous avons vu que 5 admet deux racines carrées dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ : 4 et 7 (ou -4), ce qui semble pour le moins surprenant car 5 n'est pas une puissance paire d'un générateur ! Remarquons tout d'abord que 11 étant premier, $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est un corps cyclique donc son groupe multiplicatif admet un générateur.

Par exemple 2 est générateur. Vérifions-le :
$2^2 = 4$ ; $2^3 = 8$ ; $2^4 = 16 \equiv 5 \mod 11$ ;
$2^5 = 32 \equiv 10 \mod 11$ ; $2^6 = 64 \equiv 9 \mod 11$ ;
$2^7 = 128 \equiv 7 \mod 11; 2^8 = 256 \equiv 3 \mod 11$ ;
$2^9 = 512 \equiv 6 \mod 11; 2^{10} = 1024 \equiv 1 \mod 11$.

Tous les nombres entiers modulo 11 peuvent s'exprimer comme une puissance de 2. Nous remarquons dans la table de multiplication que $5 = 2 \times 8 = 16$ et $16 = 2^4$ . Ce qui nous satisfait…

Nous pouvons observer la diagonale sur la table de multiplication de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ : les carrés (en rouge) se trouvent sur celle-ci, ce sont : 1, 3, 4, 5, 9.
$1 = 1^2 = 10^2$ ; $3 = 5^2 = 6^2$ ; $4 = 2^2 = 9^2$ ;
$5 = 4^2 = 7^2$ ; $9 = 3^2 = 8^2$.

Vérifions que ces carrés, sauf 1 sont des puissances paires de 2 :
$4 = 2^2$ ; $3 = 4 \times 9 = 2^2 \times 2^6 = 2^8$ ; $5 = 2 \times 8 = 2^4$ ;
$9 = 8 \times 8 = 2^6$.

Réciproquement, existe-t-il des nombres entiers dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ qui ne sont pas des carrés parfaits ? (à part 2 qui étant générateur ne peut être un carré).

Ce sont les autres nombres : 2, 6, 7, 8, ce dernier est une puissance impaire de 2.

Une remarque à propos des « rectangles d'or modulo 11 que nous avons calculés précédemment, nous remarquons que nous avons seulement 5 rectangles d'or correspondants au « nombre d'or modulo 11 » : 4 alors que nous avons 10 rectangles d'or correspondants au « nombre d'or modulo 11 » : 8. Comment expliquer cette différence ?

Notre intuition nous souffle que cela est dû au fait que 4 n'est pas un générateur modulo 11 car c'est un carré alors que 8 est générateur car c'est une puissance impaire du générateur 2 (deuxième théorème).

**Essai de généralisation**

Soit $p$ un nombre premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps quotient correspondant. Nous voulons chercher si $\sqrt{5}$ existe dans ce corps, autrement dit, existe-t-il un nombre $q$ pair inférieur à $p$ tel que $2^q \equiv 5 \bmod p$ ? Est-ce une condition nécessaire et suffisante ? Nous allons voir qu'elle est seulement suffisante. Essayons par exemple le nombre premier $p = 17$ ; les calculs sont fastidieux, nous essayons de tracer des courbes $y = 2^x$ et $y = 17x$ avec GEOGEBRA mais la recherche est peu efficace à cause du peu de précision des calculs. Nous cherchons sur internet la liste des nombres premiers jusqu'à 100 000 que nous trouvons sur le site web en note[1].

Ensuite nous écrivons dans un tableau les puissances paires de 2 auxquelles nous ajoutons ou retranchons 5. Nous recherchons si le nombre trouvé est premier, nous trouvons ainsi que 5 est un carré dans les corps : $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/59\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/251\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/1039\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4901\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/74901\mathbb{Z}$.

Cette méthode nous semble incomplète, pouvez-vous en trouver d'autres ? Si le sujet vous intéresse, vous pouvez trouver des résultats concernant la recherche de racines carrées dans les corps, sur le site web en note[2].

Plus généralement, grâce à l'aide de notre collègue Christian Ballot de l'Université de Caen, écrivons comment on peut trouver tous les corps modulo $p$ admettant une racine carrée de 5. Ce résultat provient de la loi de réciprocité quadratique étudiée particulièrement par Gauss (en 1801). Appliquons cette loi à 5 :

5 est un carré modulo $p$ si et seulement si $p \equiv \pm 1 \bmod 5$.

**Annexe : le problème chinois**

Nous avons un nombre inconnu de choses. Si nous les comptons par trois, il en reste deux ; si nous les comptons par cinq il en reste trois, si nous les comptons par sept, il en reste deux. Trouver le nombre de ces choses. Ainsi, en notant $a$ le nombre des choses :

$a = 2 \bmod 3$ ; $a = 3 \bmod 5$ ; $a = 2 \bmod 7$. Écrivons ces équations en éliminant l'inconnue $a$ ; nous avons :
$2 \mod 3 = 3 \mod 5 = 2 \mod 7$ soit encore :

$2 + 3r = 3 + 5s = 2 + 7t$ où $r, s, t$ sont des entiers que nous pouvons choisir positifs. Nous en déduisons : $3r = 7t$ ; puisque 3 et 7 sont premiers entre eux nous en déduisons que 3 divise t et 7 divise r ; $r = 1$ et $s = 1$ ne conviennent pas, essayons $t = 3$ et $r = 7$ alors $3 + 5s = 23$ ; $s = 4$.

D'où $a = 23 = 3 \times 7 + 2 = 4 \times 5 + 3 = 7 \times 3 + 2$. Nous avons 23 choses.

Bien entendu nous avons traité ce problème en « arithmétique à l'ancienne » afin de ne pas décourager le lecteur non familier avec l'algèbre des structures. En complément on pourra consulter l'article collectif de l'IREM de Toulouse, présenté dans la bibliographie cidessous.

**Bibliographie**

**Antoine Chambert-Loir** « De Galois aux corps finis », *Gazette des mathématiciens* 131 (2012) p. 58-68.
**Ruben Rodriguez Herrera** *Activités variées autour du nombre d'or pour la classe de troisième*, quatre articles en ligne sur le site de l'IREM de Basse-Normandie Caen 2012 : http ://www.math.unicaen.fr/irem/

**Denis Daumas, Michel Guillemot, Olivier Keller, Raphaël Mizrahi, Maryvonne Spiesser** *Le théorème des restes chinois. Textes, commentaires et activités pour l'arithmétique au lycée*

Les problèmes de congruences simultanées sont connus dans l'histoire des mathématiques comme « problèmes des restes » ou « des restes chinois ». C'est un sujet qui a donné lieu, depuis des siècles, à de riches développements mathématiques et dont l'origine reste hypothétique puisqu'il est très difficile de démêler les motivations premières qui en ont suscité l'intérêt. . .

Dossier disponible en téléchargement sur le site http ://culturemath.ens.fr et édité en version papier par l'IREM de Toulouse, Université Paul-Sabatier (UFR MIG).

À paraître prochainement la brochure *Recueil d'activités sur le Nombre d'Or* proposée par **Ruben Rodriguez, Danielle Salles, Éric Lehman, Michel Soufflet.** 140 p. environ Éditeur IREM de Basse-Normandie.

[1] http ://compoasso.free.fr/primelistweb/page/prime/liste_online.php
[2] http ://www.acrypta.com/telechargements/fichecrypto_210.pdf

# Distance entre la moyenne et la médiane d'une variable aléatoire :

une application d'une version latéralisée de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff[1]

### À propos de médiane et de moyenne

La médiane et la moyenne sont des outils statistiques couramment utilisés par exemple, pour les comparaisons de salaires. Ces deux outils, qui ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients, devraient être employés de manière complémentaire selon le cadre de l'étude.

La médiane est généralement plus représentative pour l'analyse des petits groupes, car la présence de quelques cas extrêmes peut tirer fortement la moyenne vers le haut ou vers le bas et donner ainsi une image qui n'est pas représentative de la grande majorité des données. Prenons un exemple simple pour illustrer le phénomène : un groupe de 10 salaires, dont 8 de 2000 euros et 2 de 5000 euros. La moyenne est 2600 et la médiane de 2000. La moyenne est tirée vers le haut, dans une zone où il n'y a justement pas de salaires. La médiane est par contre représentative de la majorité des salaires analysés.

Dans les grands groupes, de plusieurs dizaines ou centaines de données analysées, la médiane et la moyenne tendent à se confondre. Les dispersions vers le haut et vers le bas tendent à se compenser et d'autre part les cas extrêmes isolés ont peu d'influence sur la moyenne.

Dans les grands groupes, c'est toutefois la médiane qui peut donner une image peu représentative de la réalité. C'est le cas lorsque les groupes analysés sont formés de sous-groupes eux-mêmes assez homogènes, mais bien distincts les uns des autres. Pour illustrer ce phénomène, prenons à nouveau un cas simple avec deux groupes de 100 salaires. Dans chacun des deux groupes, il y a un sous-groupe de bas salaires de 2000 euros et un sous-groupe de hauts salaires de 4000 euros. La proportion des deux sous-groupes est différente entre les deux groupes. Dans le premier, il y a 60% de bas salaires et 40% de hauts salaires. Dans le second groupe, la proportion est inversée. Dans cet exemple, la moyenne est de 2800 pour le premier groupe et de 3200 pour le second, soit un écart de 400, correspondant à 13,3% de la moyenne globale des deux groupes. Les médianes donnent par contre une image très différente, avec une valeur de 2000 pour le premier groupe et de 4000 pour le second. L'écart est alors de 2000, soit 66% de la moyenne globale. Dans cet exemple, l'écart calculé sur la base des médianes donne manifestement une image fortement biaisée de la réalité, alors que les moyennes permettent une bonne représentation de cette réalité.

Ceci est évidemment simpliste, mais correspond toutefois à certaines analyses statistiques basées sur les médianes, publiées par des organismes officiels.

Proposons-nous maintenant d'examiner sur un plan théorique, comment une information sur la dispersion de la distribution autour de sa moyenne donnée par le paramètre écart-type, $\sigma$, permet de situer une valeur médiane. Nous nous plaçons dans le cadre des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé. Une définition de la médiane souvent utilisée est donnée par la formule $m_e = \min\left\{x \ / F(x) \geqslant \frac{1}{2}\right\}$ où $F$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$. Elle peut s'appliquer indifféremment aux cas des variables discrètes ou autres. Cette définition de la médiane n'est pas toujours celle qui est implantée dans les logiciels calculant des paramètres statistiques[2]. Plus précisément en ce qui nous concerne, nous allons prouver que si $m = \mathbb{E}(X)$,

$$\mathbf{P}(X \leqslant m - \sigma) \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{P}(X \leqslant m + \sigma) \geqslant \frac{1}{2}$$

ce qui permet de conclure que la médiane est dans l'intervalle $[m-\sigma, m+\sigma]$ au sens précédent lorsque $\dfrac{1}{2}$ admet au plus un antécédent par la fonction $F$ (c'est le cas si $X$ discrète finie, prend $n$ valeurs $\{x_i / i \in [\![1, n]\!]\}$, rangées en ordre croissant, telles que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ $\sum_{i=1}^{j} \mathbf{P}(X = x_i) \neq \dfrac{1}{2}$).

### Justification des inégalités

Soit $X$ une variable aléatoire ayant des moments au moins d'ordre deux.
Rappelons l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

dont une application importante est d'établir la loi faible des grands nombres, i.e. la convergence (*en probabilité*) vers $m$ de $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ où $(X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes deux à deux, admettant une espérance $m$ et une variance $\sigma^2$. Cet emploi ne sera pas utilisé dans notre étude. L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff peut s'établir par déduction[3] d'une inégalité plus simple à formuler connue sous le nom d'inégalité de Markov qui s'énonce ainsi : si $X$ est une variable aléatoire discrète ou à densité dont l'univers

---

[1] Cette courte présentattion m'a été inspirée par la consultation du site http://www.se16.info/hgb/cheb.htm et de pages web d'Henry Bottomley où vous trouverez des développements complémentaires. Je remercie Jean Lejeune pour sa relecture et ses judicieuses remarques.

[2] On pourra consulter à ce sujet l'article bien documenté de Jean Lejeune sur les différentes définitions des quantiles couramment usitées, publié dans le *Miroir des Maths n°1* et téléchargeable sur notre site web.

[3] Appliquer l'inégalité de Markov à la V.A.R. $Y$ telle que$Y = |X - \mathbb{E}(X)|^2$ avec $\lambda = \varepsilon^2$ et remarquer que $\mathbb{E}(Y) = V(X) = \sigma^2$.

image $X(\Omega)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$ et qui possède une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$, $\quad \mathbf{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

Nous allons maintenant déduire de cette inégalité, la proposition suivante :

Soit $X$ une variable aléatoire ayant des moments au moins d'ordre deux, et $t > 0$. Posons $Z = X - \mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X) = \sigma$. Nous avons $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $\mathbb{E}(Z^2) = \sigma^2$.

Pour tout $c \geqslant 0$, $\quad P(Z \geqslant t) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + c^2}{(t+c)^2}$ (1).

Preuve : Posons $Y = Z + c$ et $t + c = b$. Nous avons $(Z \geqslant t) = (Y \geqslant b) \subset (Y^2 \geqslant b^2)$. Appliquons l'inégalité de Markov avec $Y^2$ et $\lambda = b^2$ :

Nous avons $\mathbf{P}(Y^2 \geqslant b^2) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y^2)}{b^2}$. Par linéarité de l'espérance, nous obtenons $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}((Z+c)^2) = \mathbb{E}(Z^2) + 2c\mathbb{E}(Z) + c^2 = \sigma^2 + c^2$. En substituant les expressions de $\mathbb{E}(Y^2)$ et de $b$ nous obtenons l'inégalité (1) annoncée au dessus.

Nous allons maintenant en déduire une version latéralisée de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff :

$$\text{Pour tout } t > 0, \quad P(X - \mathbb{E}(X) \geqslant t) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2} \quad (2)$$

Pour ce faire, nous montrons[4] que la fonction $c \mapsto \dfrac{\sigma^2 + c^2}{(t+c)^2}$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+$.

Exprimons $\dfrac{\sigma^2 + c^2}{(t+c)^2}$ à l'aide de $b, t$ :

$\dfrac{\sigma^2 + c^2}{(t+c)^2} = \dfrac{\sigma^2 + (b-t)^2}{b^2} = 1 + \dfrac{\sigma^2 + t^2 - 2bt}{b^2} = (\sigma^2 + t^2)\dfrac{1}{b^2} - 2t\dfrac{1}{b} + 1$. En posant $u = \dfrac{1}{b}$, nous avons affaire à un trinôme de variable $u$, que nous pouvons écrire $P(u) = (\sigma^2 + t^2)\left(u - \dfrac{t}{\sigma^2 + t^2}\right)^2 + 1 - \dfrac{t^2}{\sigma^2 + t^2}$. Il s'ensuit que $P(u)$ est minimum pour $u = u_0 = \dfrac{t}{\sigma^2 + t^2}$. Le minimum est $1 - \dfrac{t^2}{\sigma^2 + t^2} = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$. La valeur $c_0$ de $c$ donnant le minimum global de la fonction considérée plus haut est $\dfrac{\sigma^2}{t}$. L'inégalité annoncée est bien établie.
Nous pouvons en déduire une nouvelle inégalité en substituant $-X$ à $X$ :

$$\text{Pour tout } t > 0, \quad P(-X + \mathbb{E}(X) \geqslant t) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2} \quad \text{ou encore} \quad P(X - \mathbb{E}(X) \leqslant -t) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2} \quad (3)$$

En choisissant $t = \sigma$ dans (2), puis (3) nous obtenons[5] : $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant m + \sigma) \geqslant \dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \leqslant m - \sigma) \leqslant \dfrac{1}{2}}$

Pour finir, nous comparons les majorants des probabilités obtenus par les deux inégalités de B.T. avec les probabilités calculées en supposant que la loi de X est "normale". Nous posons $A_k = (|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant k\sigma)$ et $B_k = (X - \mathbb{E}(X) \geqslant k\sigma)$. Les inégalités de B.T. mentionnées dans ce qui précède peuvent s'écrire :

$$\text{Pour tout } k > 0, \quad \mathbf{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant k\sigma\right) \leqslant \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(X - \mathbb{E}(X) \geqslant k\sigma\right) \leqslant \frac{1}{1+k^2}$$

| $k$ | $\dfrac{1}{k^2}$ | $\dfrac{1}{1+k^2}$ | $\mathbf{P}(A_k)$ | $\mathbf{P}(B_k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 10000,00% | 99,00% | 92,00% | 46,00% |
| 0,5 | 400,00% | 80,00% | 61,70% | 30,90% |
| 0,9 | 123,00% | 55,00% | 36,80% | 18,40% |
| 1 | 100,00% | 50,00% | 31,70% | 15,90% |
| 1,64 | 37,00% | 27,00% | 10,00% | 5,00% |
| 1,96 | 26,00% | 20,70% | 5,00% | 2,50% |
| 2 | 25,00% | 20,00% | 4,55% | 2,28% |
| 3 | 11,11% | 10,00% | 0,27% | 0,13% |
| 4 | 6,25% | 5,88% | 0,01% | 0,00% |
| 4,36 | 5,26% | 5,00% | 0,00% | 0,00% |
| 4,47 | 5,00% | 4,76% | 0,00% | 0,00% |
| 9,95 | 1,01% | 1,00% | 0 | 0 |
| 10 | 1,00% | 0,99% | 0 | 0 |

Nous remarquons bien sûr que contrairement à sa version latéralisée, l'inégalité de B.T. classique fournit des majorants de probabilités sans intérêt pour $k \leqslant 1$ !
La médiocre qualité des majorants obtenus dans les deux cas s'explique par le fait que l'inégalité de Markov dont elles découlent, ne prend en compte que la valeur moyenne de la distribution de $X$ sans tenir autrement compte de la loi de probabilité de $X$. Malgré cela, cette inégalité conserve cependant un bon rapport qualité/prix.

[4]par accès de « trinomite » aiguë, qui m'a laissé des séquelles. Une dérivation /c conduit aussi facilement au même résultat.

[5]l'inégalité (2) donne $\mathbf{P}(X < m + \sigma) \geqslant \frac{1}{2}$ qui implique $\mathbf{P}(X \leqslant m + \sigma) \geqslant \frac{1}{2}$ par croissance de la probabilité.

# Notes de lecture

Al-Khwârizmî, *L'Algèbre et le Calcul indien*, présenté par Ahmed Djebbar, 56 pages, ACL - éditions du Kangourou, Paris, 2013, 5 euros.

Cet opuscule est le cinquième de la collection des classiques Kangourou, où il rejoint la *Géométrie* de Descartes, les *Récréations mathématiques* d'Ozanam, les *Éléments* d'Euclide et les *Neuf chapitres* de la Chine ancienne. Il s'adresse à un large public, notamment d'enseignants. Il les aidera à préciser quelle furent les contributions de ce mathématicien de langue arabe dont, on le sait, le nom est l'origine du mot français algorithme : principalement, la diffusion dans l'Orient arabe du calcul décimal indien et la fondation de l'algèbre comme discipline à part entière. Ahmed Djebbar a rédigé des introductions de qualité, riches en informations et à la portée de tous. En revanche, les « larges extraits » annoncés sur la couverture, occupant en réalité moins de la moitié des pages, sont décevants par la désinvolture qui a présidé à leur présentation : de quelle version latine sont tirés les extraits du livre perdu sur le *Calcul indien* ? quelle traduction française de l'*Algèbre* a été choisie ? d'où viennent les illustrations qui émaillent le livre, et qu'enseignent-elles ? Il est incompréhensible d'avoir refusé ces données de base au lecteur de base.

*Destination systèmes dynamiques avec Poincaré* et *Destination géométrie et topologie avec Thurston*, chaque volume : 158 pages, éditions du Pommier, Paris, 2013, 19 euros.

Ces deux ouvrages très illustrés, inaugurant la collection *Voyages en mathématiques*, comprennent chacun dix articles issus du site *Images des mathématiques*. Ils sont rédigés par des chercheurs, qui ont su discerner au sein de leur thématique un sujet accessible et scientifiquement riche. Le résultat est en général excellent : l'enthousiasme des chercheurs est communicatif et certains montrent un talent d'écrivain. Le bagage mathématique requis varie de presque rien jusqu'au niveau d'une première année d'études scientifiques. Les articles ont été améliorés par plusieurs relecteurs (dont Gilles Damamme de l'IREM de Basse-Normandie). Les scories sont rares : un décalage dans la numérotation des illustrations de l'article sur les tresses. Chaque volume est scientifiquement cohérent, même si les patronages de Poincaré et de Thurston peuvent paraître artificiels, une partie des articles ne mentionnant ces noms qu'en passant, voire pas du tout. L'histoire des mathématiques est là, mais essentiellement mise au service des mathématiques vivantes, à la curieuse exception de deux articles purement biographiques sur Poincaré. La mise en pages et la typographie ont fait l'objet d'un soin particulier : polices sans empattements, marges non parallèles au bord et usage fréquent d'émoticônes peuvent apparaître comme des gadgets branchés, mais s'avèrent finalement modernes et séduisants. Au total, une réussite.

Abû Kâmil, *Algèbre et analyse diophantienne*, édition, traduction et commentaire par Roshdi Rashed, xvi + 820 pages, De Gruyter, Berlin, 2012, 150 euros.

Abû Kâmil l'Égyptien est, après al-Khwârizmî, le deuxième algébriste arabe dont l'œuvre soit conservée. Son *Livre d'algèbre et d'al-muqâbala* montre sa virtuosité dans la résolution de problèmes conçus comme applications de l'arithmétique ou de la géométrie plane. Roshdi Rashed en donne ici une belle édition critique avec traduction française en regard, augmentée de deux œuvres mineures du même auteur. Dans une introduction très complète, il est notamment conduit à réévaluer la date de composition de l'ouvrage (sans doute vers 860) et son influence sur Fibonacci (58 problèmes du chapitre XV du *Liber Abaci* en sont issus). Les deux cents pages de commentaire en langage mathématique contemporain rendront service, même s'il est surprenant d'y lire, par exemple, qu'une notion moderne comme celle de genre d'une courbe plane est la « raison objective - ignorée » de l'ordre des problèmes du livre III. On rencontre vite des coquilles gênantes : à la p. 536, le sens d'une phrase est altéré par l'absence d'une virgule pourtant ajoutée dans le texte arabe et le nombre 15625 du texte devient 15825 dans le commentaire (p. 123).

Keith Devlin, *Les Énigmes mathématiques du troisième millénaire*, 330 pages, éditions du Pommier, Paris, 2013, 12 euros.

En 2000, la Fondation Clay attirait l'attention des media en publiant une liste de sept problèmes mathématiques ouverts et promettant un million de dollars à qui saurait en résoudre un. L'auteur de ce petit livre prévient : « aucun d'entre eux ne peut être présenté correctement sans faire appel à des connaissances considérables ». C'est pourtant ce qu'il tente de faire, partant d'exposés élémentaires maladroits : la preuve d'Euclide qu'aucune liste finie n'épuise les nombres premiers est « modernisée » en un invraisemblable enchevêtrement de raisonnements par l'absurde (p. 87). Lorsqu'il aborde les problèmes, il multiplie les lamentations sur la difficulté de sa tâche et les appels au lecteur à abandonner ! Seule la conjecture $P = NP$ lui semble accessible. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est rapidement expédiée ( « Voilà vous savez tout maintenant... ») ; celle de Hodge est protégée par une dernière salve d'encouragements « à laisser tomber » (p. 304). Ajoutons-y des fautes de traduction (les « membres d'ordre fini » d'un groupe, p. 292), d'orthographe (« il m'a fallut de gros efforts », p. 285) et une information datée : le chapitre sur la conjecture de Poincaré évoque *in extremis* une proposition de preuve qui « semble bel et bien tenir la route » alors que médaille Fields et récompense Clay ont été attribuées à Perelman en 2006 et 2010. Un livre auquel personne ne semble avoir cru, même son auteur.

Pierre Ageron

**NUMÉRO TREIZE : avril 2014**

**ISSN : 1969-7929 (imprimé)**
**ISSN : 1760-6500 (en ligne)**

# LE MIROIR DES MATHS

## Sommaire



Comité de rédaction : Pierre Ageron & Éric Trotoux - Composition LaTeX.

*Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par* http://www.univ-IREM.fr/ Prix au numéro : 13 euros + frais d'expédition si envoi par avion.

Repères IREM