LE MIROIR DES MATHS

université de Caen
Basse-Normandie

Université de Caen Basse – Normandie

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP. 5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 73 60** - Fax. : **02 31 56 73 20**
Adresse électronique : irem@unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO QUATORZE : mars 2015

ISSN : 1969-7929

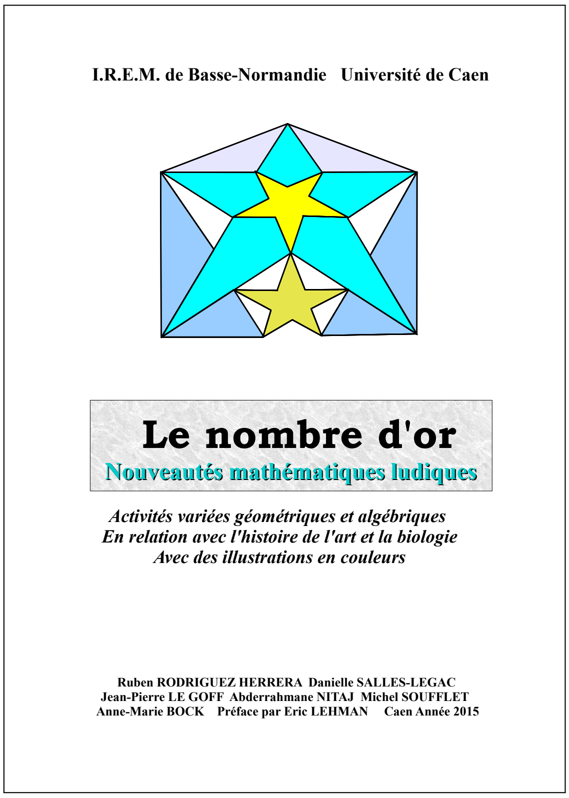
ISSN : 1760-6500

1) Vidéos disponibles en téléchargement

Les quatre premiers modules de la série “ La didactique des mathématiques : les fondamentaux ” par notre collègue Ruben Rodriguez. Connectez-vous en saisissant ainsi, “Canal U Ruben Rodriguez Herrera” sur un moteur de recherche, pour accéder aux vidéos que vous pourrez alors télécharger gratuitement avec les diaporamas. Le quatrième volet de cette série s’intitule :« Situation didactique et apprentissage par le jeu ». Destiné aux étudiants et professeurs, mais aussi à tout public au sens large.

2) Une nouvelle brochure

Ruben Rodriguez-Herrera, Danielle Salles-Legac, Jean-Pierre Le Goff, Abderrahmane Nitaj, Michel Soufflet, Anne-Marie Bock, préfacé par Eric Lehman [1],
Le nombre d’or, Nouveautés mathématiques ludiques, activités variées géométriques et algébriques en relation avec l’histoire de l’art et la biologie.
Format A5, 168 pages, prix 7 €. Voir la présentation détaillée en page 25.


I.R.E.M. de Basse-Normandie Université de Caen

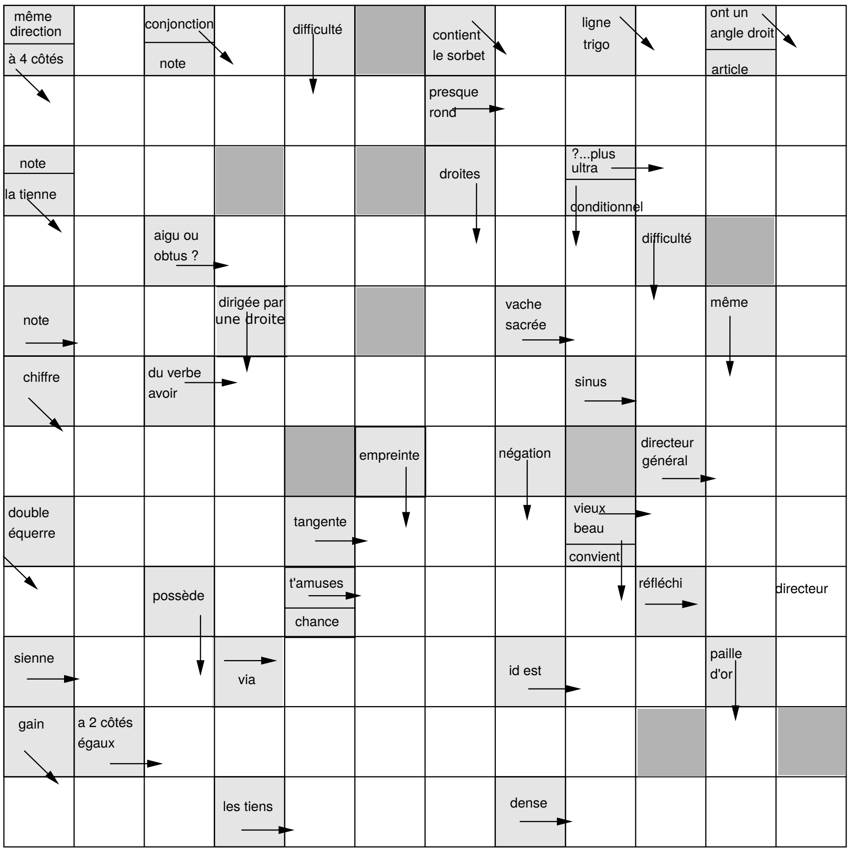
Le nombre d'or

Nouveautés mathématiques ludiques

Activités variées géométriques et algébriques
En relation avec l'histoire de l'art et la biologie
Avec des illustrations en couleurs

Ruben RODRIGUEZ HERRERA Danielle SALLES-LEGAC
Jean-Pierre LE GOFF Abderrahmane NITAJ Michel SOUFFLET
Anne-Marie BOCK Préface par Eric LEHMAN Caen Année 2015

Les mots fléchés proposés par Danielle Salles-Legac – Solution en page 20.



1. Eric Lehman a été le premier Directeur de l’I.R.E.M. de Basse-Normandie en 1974.

Éditorial

Depuis le dernier numéro du *Miroir*, plusieurs événements sont à signaler. Notre séminaire de rentrée s'est déroulé à Bayeux en octobre : le rapprochement IREM-ESPE y a été évoqué et Samuel Voisin (formateur en mathématiques à l'ESPE) a d'ailleurs participé au séminaire. Puis nous avons animé un atelier sur « La face cachée des jeux de grattage ». Les mathématiques ont transporté Pierre Ageron dans tout le bassin méditerranéen à la recherche des différentes versions d'un manuscrit *Le cadeau du converti*. Il nous a raconté ses périples et les secrets que contenait ce fameux manuscrit. Le lendemain, Abderrhamane Nitaj nous a fait une invitation à la cryptographie. Puis a eu lieu un débat sur le thème « Des mathématiques pour mieux comprendre le monde ».

Bien que l'actualité récente nous ait beaucoup marqués par les attentats de janvier, la nouvelle du décès en novembre dernier d'Alexander Grothendieck reste aussi présente dans la mémoire du monde des mathématiques. Le journal *Le Monde* a relaté sa disparition comme celle « du plus grand mathématicien du XX^{e} siècle », le président François Hollande lui a rendu hommage, l'écologiste engagé José Bové a aussi évoqué sa disparition, et pourtant lorsque je parlais le mois dernier à un groupe de professeurs de mathématiques venus faire un stage à l'université, je m'aperçus qu'aucun ne le connaissait (à l'exception du professeur organisant le stage). Qui était donc ce personnage énigmatique, ce « célèbre inconnu » pour reprendre l'expression d'un article écrit au moment de sa mort ? Je reviendrai donc dans ce numéro du Miroir sur sa vie dans l'article *Une vie digne d'être vécue*. Deux textes emblématiques du célèbre mathématicien complètent cet article. Ensuite, Jacques Faisant nous initiera dans le prolongement des programmes de terminale S et ES aux tests d'hypothèse. Il évoquera notamment les tests unilatéraux (ou de non-infériorité) et leurs applications en médecine. Puis Michel Soufflet nous donnera son point de vue sur toutes les réformes mathématiques qu'il a vu passer en réagissant à un article du *Monde* présentant le dernier projet de réforme. Dans un tout autre registre, Loïc Coulombel et Jacques Duval nous parleront dans un article de didactique des manières d'aborder la démonstration en collège avec de nouveaux outils, par exemple des outils tactiles ou du tableau blanc interactif. Dans la rubrique notes de lectures, Pierre Ageron nous livrera ses critiques sur deux de ses dernières lectures mathématiques. On trouvera aussi ici le joli poster qu'il a réalisé à l'occasion des quarante ans de l'IREM de Basse-Normandie, au sujet d'un problème trouvé dans un manuscrit de la bibliothèque de Caen, datant du début du XVII^{e} siècle. Enfin les amateurs de mots fléchés trouveront dans ce numéro une grille (à tonalité géométrique) proposée par Danielle Salles.

Avant de souhaiter à tous une bonne lecture, rappelons que l'IREM a organisé en partenariat avec la régionale APMEP de Basse-Normandie une journée commune sur le thème « Les mathématiques nous transportent » pendant la semaine des mathématiques, le mercredi 18 mars, de 9h30 à 16h, au campus 2 de l'université. Au programme, trois ateliers le matin, Richard Choulet sur des suites de nombres entiers, Claudine Plourdeau et le groupe Didactique au collège sur « Les maths nous transportent ? Mais où ? … D'Univers en Univers », et Ronan Charpentier sur « la méthode d'Euler » ainsi qu'une conférence de Didier Trotoux sur les problèmes de flots dans les réseaux de transports.

Enfin, notez l'édition 2015 du traditionnel rallye mathématique de l'IREM, préparé par Gérald Giangrande, Jérôme Huet et Thierry Mercier. Le RDV15 aura lieu le vendredi 3 avril 2015. Nous espérons vous retrouver nombreux pour cet événement !

Gilles Damamme
Directeur de l'IREM de Basse-Normandie

— **Mettre en œuvre l'investigation en classe à partir d'une "vraie question" l'exemple de l'Alignement du XXIème siècle**
Carole LE BELLER, Marie-Pierre LEBAUD, Irem de Rennes
— **Le poids du cartable**
Alexandre SARTRE, Irem de Clermont Ferrand
— **Témoignage d'une année scolaire organisée autour de la démarche d'investigation. Exemple de parcours sur la myopie**
Laure Guérin, Irem de Clermont-Ferrand
— **Grandeurs et mesures**
Naïma BEDJAOUI-TEBBAL, Université de Tlemcen
— **L'enseignement des mathématiques aux jeunes filles et les stéréotypes de genre (1880-1960)**
Evelyne BARBIN, Irem des Pays de Loire

.

Une vie digne d'être vécue

Le jeudi 13 novembre 2014, Alexander Grothendieck décédait à l'hôpital de Saint-Girons.

Son histoire commence à Novozybkov, en 1889 où naît Sacha Schapiro, le père d'Alexander Grothendieck. Issu d'une famille juive, il s'engage dans un groupe d'anarchistes organisant des actions armées dans la Russie tsariste et est arrêté avec ses compagnons. Tous sont condamnés à mort, et tous sauf lui sont exécutés. Pendant trois semaines, il attend chaque jour de passer lui aussi au peloton, mais il est finalement gracié en raison de son jeune âge (16 ans...) et sa peine est commuée en prison à perpétuité. Lors d'une tentative d'évasion, il perd un bras, puis est libéré après plus de dix ans passés en prison au moment de la révolution russe. Il s'engage alors dans des combats aux côtés des anarchistes contre l'armée blanche mais aussi contre les bolcheviks, et continue une vie aventureuse : il vit successivement à Paris, en Belgique sous de fausses identités, puis à Berlin où il sera photographe de rue. Il y rencontre Hanka Grothendieck, une journaliste engagée, avec qui il aura un fils en 1928, Alexander. Les premières années d'Alexander se passent dans des conditions très rudimentaires, mais avec une totale liberté. Puis en 1933, Sacha et Hanka partent à Paris. Sa mère confie alors Alexander à un pasteur qui prend des enfants en pension. Elle disparaît ensuite avec Sacha sans pouvoir verser d'argent au pasteur. Après être passés à Paris, ils vont se battre en Espagne aux cotés des républicains espagnols. Quand ils reviennent en France en 1939, ils récupèrent à Paris leur fils Alexander que le pasteur a renvoyé vers ses parents, jugeant dangereux de le garder avec la montée du nazisme. Ils se retrouvent à Nîmes où Hanka a trouvé un travail, mais peu de temps après Sacha est arrêté et enfermé au camp d'internement [1] du Vernet dans le sud de la France, puis dans un autre et sera ensuite livré aux nazis pour mourir à Auschwitz (dont on commémore le soixante-dixième anniversaire de la libération du camp) en 1942. Un peu plus tard, Hanka et son fils se retrouvent au camp d'internement du Rieucros (près de Mende). Puis Alexander est caché au Chambon-sur-Lignon, comme d'autres enfants juifs dans le Collège Cévenol par le pasteur André Trocmé (un Juste, protestant des Cévennes). Il y poursuit sa scolarité jusqu'au bac, puis part faire ses études à l'université de Montpellier tout en travaillant dans une ferme. Après sa licence, il rejoint Paris au séminaire d'Henri Cartan, puis est orienté vers Nancy : là, Dieudonné et Schwartz voulant tester cet étudiant venant de nulle part et semblant très sûr de ses capacités, vont lui confier quatorze problèmes qu'ils jugent difficiles. En six mois, il en résout la moitié et résout les autres au cours de sa thèse en analyse fonctionnelle avec Laurent Schwartz, qui à elle seule consiste en l'équivalent de six thèses « normales ».

Malgré ses résultats brillants, sa situation d'apatride l'empêche de trouver un poste et il part au Brésil, puis aux États-Unis. Il revient ensuite en France où il trouve enfin un poste à l'IHES [2] pour se consacrer à un autre domaine des mathématiques : la géométrie algébrique. Pendant dix ans, il mène une vie de travailleur acharné produisant une œuvre de milliers de pages, les « EGA » et le « SGA » (*Éléments de Géométrie Algébrique* et Séminaire de Géométrie Algébrique) où sa manière de percevoir des structures abstraites en fera un chef de file et un rénovateur de la géométrie algébrique. En 1966, il est récompensé par la médaille Fields.

Un autre tournant va se dessiner dans sa vie au moment de mai 68. Grothendieck a toujours revendiqué une certaine originalité et a su s'intégrer dans le monde de la recherche mathématique que parce que celui-ci n'était pas trop conformiste. Mais en 1970, ses convictions antimilitaristes et écologistes le poussent à quitter l'IHES et à créer la revue *Survivre* (qui s'appellera ensuite *Survivre et vivre*) avec deux autres mathématiciens, Samuel, et Chevalley.

C'est de cette époque que date ce rare document :
ici https ://archive.org/details/AlexandreGrothendieck-UneVieDigneDtreVcue
(c'est le seul document audio que je connaisse où l'on entend parler Grothendieck.)

Il s'agit d'une conférence au CERN d'une demi-heure suivie de deux heures de débat. A la fin (après 2h20 environ), il évoque Fournier, un journaliste de *Charlie-Hebdo*.

Néanmoins, quelques temps plus tard, *Survivre* entrera en polémique avec *Charlie-Hebdo*, dans un article *La Nouvelle Église Universelle* où en dénonçant le scientisme [3], le journal s'attaque aux croyances de Cavanna à propos de la science. Après quelques années de militantisme engagé, il quittera progressivement le journal.

C'est aussi à cette époque qu'il se sépare de sa femme, Mireille Dufour (avec qui il a eu trois enfants), vit dans deux communautés, a une liaison avec une étudiante américaine, Justine Skalba. En 1973, il obtient un poste à l'université de Montpellier et déménage dans l'Hérault avec Justine qui le quittera peu de temps après la naissance de leur fils.

Grothendieck relate dans ses écrits un autre épisode important dans sa vie en 1976, avec la découverte de la

1. Pour éviter l'amalgame avec les camps d'extermination nazis, je n'utiliserai pas le terme camp de concentration, mais ces camps existaient avant même l'arrivée des nazis.
2. L'IHES se voulait en quelque sorte l'équivalent français du prestigieux Institute of Advanced Studies (IAS) qui existait aux États-Unis.
3. Dans la thèse de Céline Plessis (lien web [CP], en fin de bibliographie), page 138, est détaillé ce passage et ce que *Survivre* entend par scientisme

méditation, ce qui à l'époque, ajoute une touche de plus à son personnage hors-normes. Cela serait sans doute considéré différemment aujourd'hui, alors que *Pour la Science* fait sa une sur ce thème (Comment la méditation modifie le cerveau) dans son numéro 448 de février 2015. Dans ce contexte, Grothendieck continue à militer, donne ses cours à Montpellier, encadre quelques thèses. Et écrit différents ouvrages mathématiques, en refusant toutefois de rentrer dans le système des publications.

En 1984, il obtient un détachement au CNRS : c'est à cette époque qu'il écrit *Récoltes et semailles, réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, un long ouvrage de plus de 900 pages que les éditeurs refusent de publier, et que par la suite Grothendieck a refusé de faire éditer, mais qu'on peut trouver sur Internet (*Libération* lui a consacré un article sur son édition en ligne avec un lien vers cet ouvrage). Cet ouvrage atypique comporte des éléments biographiques, des réflexions et même certains passages de géométrie algébrique incompréhensibles pour un mathématicien non spécialiste de ce domaine. On en trouvera quelques extraits sur les liens cités en fin de l'article.

Suivent ensuite la rédaction d'autres textes plus personnels (d'environ un millier de pages et qu'il ne cherchera pas à publier) où il va encore plus loin dans sa réflexion, s'affirmant guidé par des rêves prophétiques à témoigner de sa démarche spirituelle.

En 1988 il reçoit le prix Crafoord conjointement avec son élève Pierre Deligne. Mais il le refuse (ainsi que l'allocation d'un équivalent actuel de 450 000 €) et s'en explique dans une lettre au journal *Le Monde* qu'on trouvera ci-dessous. En 1991, il disparaît pour habiter dans un lieu secret seul connu de quelques proches (Lasserre) où il mènera une vie « d'ermite » jusqu'à sa mort, en novembre dernier.

De nombreux médias relateront l'événement [4], relatant son extraordinaire œuvre mathématique et sa personnalité hors-normes. Certains évoquent aussi son militantisme, mais peu de journaux français évoquent son intérêt pour le bouddhisme, le mysticisme, les rêves et la spiritualité.

Faut-il pour autant oublier cet aspect de sa personnalité ?

Il est à noter qu'à l'instar d'un nombre non négligeable de personnes, en cette transition de siècle, Grothendieck se soit intéressé par ses lectures aux religions et spiritualités indépendamment de toute institution. Il se livre à une réflexion où il interroge le fait religieux et différents auteurs contemporains. Mais il ne se contente pas d'analyser une partie d'un héritage culturel. Comme il l'a fait dans de nombreux domaines, il remet à plat les idées reçues pour suivre ses propres intuitions, quitte à quelquefois se tromper.

Après coup, il souhaitera que son témoignage disparaisse : est-ce par pudeur (il y livre une partie assez personnelle de lui-même), par désir de retranchement, par sentiment de se tromper ou parce qu'il aura reformulé entre temps sa vision du monde ?

Une chose est sûre : à travers ses écrits, il s'autorise à penser à l'aspect transcendant de la vie au delà des dogmes des religions, mais aussi de ceux, plus insidieux, de la science (ou plus précisément de ce qu'il appelle le scientisme). Son intention n'est ni d'être un mentor, ni de tirer quelque honneur ou argent de son œuvre, mais d'accomplir ce à quoi il se sent destiné.

Quelques liens qui renvoient à de nombreuses autres références :
voir la page : http ://images.math.cnrs.fr/Alexandre-Grothendieck.html
voir la page : http ://images.math.cnrs.fr/Revue-de-presse-decembre-2014.html
[CP] Céline Plessis : Les années 68 et la science ; p 138 : *La science comme nouvelle église universelle*
voir la page : http ://science-societe.fr/celine-plessis/

Annexes

Voici deux documents qui soulignent bien des engagements de la personnalité d'Alexandre Grothendieck :

La lettre à l'Académie Royale des Sciences de Suède titrée « le mathématicien français Alexandre Grothendieck refuse le prix Crafoord » publiée dans le journal *Le Monde* du 4 mai 1988 et un article de *Survivre et Vivre* numéro 6 de Janvier 1971, résumant une intervention d'Alexandre Grothendieck au cours de la discussion publique *Le Travailleur Scientifique et la Machine Sociale* qui a eu lieu à la Faculté des Sciences de Paris (Paris VI), le mardi 15 décembre 1970.

4. On trouvera sur cette page web : http ://images.math.cnrs.fr/+Alexandre-Grothendieck-1928-2014+.html
de nombreux liens vers des médias relatant l'événement ainsi qu'un lien vers un autre article sur Grothendieck

Le mathématicien français Alexandre Grothendieck, qui obtint en 1966 la médaille Fields, l'équivalent du prix Nobel en mathématiques, vient de refuser le prix Crafoord que l'Académie royale des sciences de Suède avait décidé de lui décerner (Le Monde daté des 17 et 18 Avril). Ce prix, d'une valeur de 270 000 dollars (1,54 millions de francs), qu'il devait partager avec l'un de ses anciens élèves, le belge Pierre Deligne, récompense depuis 1982 des chercheurs travaillant dans le domaine des mathématiques, des sciences de la Terre, de l'astronomie et de la biologie. Le géophysicien français Claude Allègre en fut le lauréat en 1986. Dans le texte qui suit et qui est adressé au secrétaire perpétuel de l'Académie royale des sciences de Suède, M. Alexandre Grothendieck explique les raisons de son refus.

Les dérives de la “science officielle”

Je suis sensible à l'honneur que me fait l'Académie royale des sciences de Suède en décidant d'attribuer le prix Crafoord pour cette année, assorti d'une somme importante, en commun à Pierre Deligne (qui fut mon élève) et à moi-même. Cependant, je suis au regret de vous informer que je ne souhaite pas recevoir ce prix (ni d'ailleurs aucun autre), et ceci pour les raisons suivantes.

1. Mon salaire de professeur, et même ma retraite à partir du mois d'octobre prochain, est beaucoup plus que suffisant pour mes besoins matériels et pour ceux dont j'ai la charge ; donc je n'ai aucun besoin d'argent. Pour ce qui est de la distinction accordée à certains de mes travaux de fondements, je suis persuadé que la seule épreuve décisive pour la fécondité d'idées ou d'une vision nouvelle est celle du temps. La fécondité se reconnaît à la progéniture, et non par les honneurs.
2. Je constate par ailleurs que les chercheurs de haut niveau auxquels s'adresse un prix prestigieux comme le prix Crafoord sont tous d'un statut social tel qu'ils ont déjà en abondance et le bien-être matériel et le prestige scientifique, ainsi que tous les pouvoirs et prérogatives qui vont avec. Mais n'est-il pas clair que la surabondance des uns ne peut se faire qu'aux dépens du nécessaire des autres ?
3. Les travaux qui me valent la bienveillante attention de l'Académie royale datent d'il y a vingt-cinq ans, d'une époque où je faisais partie du milieu scientifique et où je partageais pour l'essentiel son esprit et ses valeurs. J'ai quitté ce milieu en 1970 et, sans renoncer pour autant à ma passion pour la recherche scientifique, je me suis éloigné intérieurement de plus en plus du milieu des scientifiques.

Or, dans les deux décennies écoulées l'éthique du métier scientifique (tout au moins parmi des mathématiciens) s'est dégradée à un degré tel que le pillage pur et simple entre confrères (et surtout aux dépens de ceux qui ne sont pas en position de pouvoir se défendre) est devenu quasiment une règle générale, et qu'il est en tout cas toléré par tous, y compris dans les cas les plus flagrants et les plus iniques.

Dans ces conditions, accepter d'entrer dans le jeu des prix et des récompenses serait aussi donner ma caution à un esprit et à une évolution, dans le monde scientifique, que je reconnais comme profondément malsains, et d'ailleurs condamnés à disparaître à brève échéance tant ils sont suicidaires spirituellement, et même intellectuellement et matériellement.

C'est cette troisième raison qui est pour moi, et de loin, la plus sérieuse. Si j'en fais état, ce n'est nullement dans le but de critiquer les intentions de l'Académie royale dans l'administration des fonds qui lui sont confiés. Je ne doute pas qu'avant la fin du siècle, des bouleversements entièrement imprévus vont transformer de fond en comble la notion même que nous avons de la “science”, ses grands objectifs et l'esprit dans lequel s'accomplit le travail scientifique. Nul doute que l'Académie royale fera alors partie des institutions et des personnages qui auront un rôle utile à jouer dans un renouveau sans précédent, après une fin de civilisation également sans précédent.

Je suis désolé de la contrariété que peut représenter pour vous-même et pour l'Académie royale mon refus du prix Crafoord, alors qu'il semblerait qu'une certaine publicité ait d'ores et déjà été donnée à cette attribution, sans l'assurance au préalable de l'accord des lauréats désignés. Pourtant, je n'ai pas manqué de faire mon possible pour donner à connaître dans le milieu scientifique, et tout particulièrement parmi mes anciens amis et élèves dans le monde mathématique, mes dispositions vis-à-vis de ce milieu et de la “science officielle” d'aujourd'hui.

Il s'agit d'une longue réflexion, *Récoltes et Semailles*, sur ma vie de mathématicien, sur la création (et plus particulièrement la création scientifique) en général, qui est devenue en même temps, inopinément, un “tableau de mœurs” du monde mathématique entre 1950 et aujourd'hui. Un tirage provisoire (en attendant sa parution sous forme de livre), fait par les soins de mon université en deux cents exemplaires, a été distribué presque en totalité parmi mes collègues mathématiciens, et plus particulièrement parmi les géomètres algébristes (qui m'ont fait l'honneur de se souvenir de moi). Pour votre information personnelle, je me permets de vous en envoyer deux fascicules introductifs, sous une enveloppe séparée.

Alexandre Grothendieck

Source : extrait du journal *Le Monde* du 4 mai 1988.

Comment je suis devenu militant ?

Voilà un résumé de l'intervention d'Alexandre Grothendieck au cours de la discussion publique *Le Travailleur Scientifique et la Machine Sociale* qui a eu lieu à la Faculté des Sciences de Paris (Paris VI), le mardi 15 décembre 1970, avec la participation du comité Survivre.

Il est assez peu courant que des scientifiques se posent la question du rôle de leur science dans la société. J'ai même l'impression très nette que plus ils sont haut situés dans la hiérarchie sociale, et plus par conséquent ils se sont identifiés à l'establishment, ou moins ils sont contents de leur sort, moins ils ont tendance à remettre en question cette religion qui nous a été inculquée dès les bancs de l'école primaire : toute connaissance scientifique est bonne, quel que soit son contexte ; tout progrès technique est bon. Et comme corollaire : la recherche scientifique est toujours bonne. Aussi les scientifiques, y compris les plus prestigieux, ont-ils généralement une connaissance de leur science exclusivement "de l'intérieur", plus éventuellement une connaissance de certains rapports administratifs de leur science avec le reste du monde. Se poser une question comme : la science actuelle en général, ou mes recherches en particulier, sont-elles utiles, neutres ou nuisibles à l'ensemble des hommes ? Cela n'arrive pratiquement jamais, la réponse étant considérée comme évidente, par les habitudes de pensée enracinées depuis l'enfance et léguées depuis des siècles. Pour ceux d'entre nous qui sommes des enseignants, la question de la finalité de l'enseignement, ou même simplement celle de son adaptation aux débouchés, est tout aussi rarement posée.

Pas plus que mes collègues, je n'ai fait exception à la règle. Pendant près de vingt-cinq ans, j'ai consacré la totalité de mon énergie intellectuelle à la recherche mathématique, tout en restant dans une ignorance à peu près totale sur le rôle des mathématiques dans la société, id est pour l'ensemble des hommes, sans même m'apercevoir qu'il y avait là une question qui méritait qu'on se la pose ! La recherche avait exercé sur moi une grande fascination, et je m'y étais lancé dès que j'étais étudiant, malgré l'avenir incertain que je prévoyais comme mathématicien, alors que j'étais étranger en France. Les choses se sont aplanies par la suite : j'ai découvert l'existence du CNRS et j'y ai passé huit années de ma vie, de 1950 à 1958, toujours émerveillé à l'idée que l'exercice de mon activité favorite m'assurait en même temps la sécurité matérielle, plus généreusement d'ailleurs d'année en année. Depuis 1959, j'ai été professeur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES) qui est un petit institut de recherche pure créé à ce moment, subventionné à l'origine uniquement par des fonds privés (industries). Avec mes quelques collègues, j'y jouissais de conditions de travail exceptionnellement favorables, comme on n'en trouve guère ailleurs qu'à l'Institute for Advanced Study, à Princeton, qui avait d'ailleurs servi de modèle à l'IHES. Mes relations avec les autres mathématiciens (comme, dans une large mesure, celles des mathématiciens entre eux) se bornaient à des discussions mathématiques sur des questions d'intérêts communs, qui fournissaient un sujet inépuisable. N'ayant eu d'autre enseignement à donner qu'au niveau de la recherche, avec des élèves préparant des thèses, je n'avais guère eu l'occasion d'être directement confronté aux problèmes de l'enseignement ; d'ailleurs, comme la plupart de mes collègues, je considérais que l'enseignement au niveau élémentaire était une diversion regrettable dans l'activité de recherche, et j'étais heureux d'en être dispensé.

Heureusement, il commence à y avoir une petite minorité de scientifiques qui se réveillent plus ou moins brutalement de l'état de quiétude parfaite que je viens de décrire. En France, le mois de mai 1968 a été dans ce sens un puissant stimulant sur beaucoup de scientifiques ou d'universitaires. Le cas de C. Chevalley est à ce sujet particulièrement éloquent. Pour moi, ces événements m'ont fait prendre conscience de l'importance de la question de l'enseignement universitaire et de ses relations avec la recherche, et j'ai fait partie d'une commission de travail à la Faculté des Sciences d'Orsay, chargée de mettre au point des projets de structure (nos conclusions tendant à une distinction assez nette entre le métier d'enseignant et celui de chercheur ont été d'ailleurs battues en brèche avec une rare unanimité par les assistants et les professeurs, et les rares étudiants qui se sont mêlés aux débats). Cependant, n'étant pas enseignant, ma vie professionnelle n'a été en rien modifiée par le grand brassage idéologique de mai 68.

Néanmoins, depuis environ une année, j'ai commencé à prendre conscience progressivement de l'urgence d'un certain nombre de problèmes, et depuis fin juillet 1970 je consacre la plus grande partie de mon temps en militant pour le mouvement Survivre, fondé en juillet à Montréal. Son but est la lutte pour la survie de l'espèce humaine, et même de la vie tout court, menacée par le déséquilibre écologique croissant causé par une utilisation indiscriminée de la science et de la technologie et par des mécanismes sociaux suicidaires, et menacée également par des conflits militaires liés à la prolifération des appareils militaires et des industries d'armement. Les questions soulevées dans le petit tract qui a annoncé la réunion d'aujourd'hui font partie de la sphère d'intérêt de Survivre, car elles nous semblent liées de façon essentielle à la question de notre survie. On m'a suggéré de raconter ici comment s'est faite la prise de conscience qui a abouti à un bouleversement important de ma vie professionnelle et de la nature de mes activités.

Pour ceci, je devrais préciser que dans mes relations avec la plupart de mes collègues mathématiciens, il y avait un certain malaise. Il provenait de la légèreté avec laquelle ils acceptaient des contrats avec l'armée (américaine le plus souvent), ou acceptaient de participer à des rencontres scientifiques financées par des fonds militaires. En fait, à ma connaissance, aucun des collègues que je fréquentais ne participait à des recherches de nature militaire, soit qu'ils jugent une telle participation comme répréhensible, soit que leur intérêt exclusif pour la recherche pure les rendent indifférents aux avantages et au prestige qui est attaché à la recherche militaire. Ainsi, la collaboration des collègues que je connais avec l'armée leur fournit un surplus de ressources ou des commodités de travail supplémentaires, sans contrepartie apparente sauf la caution implicite qu'ils donnent à l'armée.

Cela ne les empêche d'ailleurs pas de professer des idées "de gauche" ou de s'indigner des guerres coloniales (Indochine, Algérie, Viêt Nam) menées par cette même armée dont ils recueillent volontiers la manne bienfaisante. Ils donnent généralement cette attitude comme justification de leur collaboration avec l'armée, puisque d'après eux cette collaboration "ne limitait en rien" leur indépendance par rapport à l'armée, ni leur liberté d'opinion. Ils se refusent à voir qu'elle contribue à donner une auréole de respectabilité et de libéralisme à cet appareil d'asservissement, de destruction et d'avilissement de l'homme qu'est l'armée.

Il y avait là une contradiction qui me choquait. Cependant, habitué depuis mon enfance aux difficultés qu'il y a à convaincre autrui sur des questions morales qui me semblent évidentes, j'avais le tort d'éviter les discussions sur cette question importante, et je me cantonnais dans le domaine des problèmes purement mathématiques, qui ont ce grand avantage de faire aisément l'accord des esprits.

Cette situation a continué jusqu'au mois de décembre 1969, où j'appris fortuitement que l'IHES était depuis trois ans financé partiellement par des fonds militaires. Ces subventions d'ailleurs n'étaient assorties d'aucune condition ou entrave dans le fonctionnement scientifique de IHES, et n'avaient pas été portées à la connaissance des professeurs par la direction, ce qui explique mon ignorance à leur sujet pendant si longtemps. Je réalise maintenant qu'il y avait eu négligence de ma part, et que vu ma ferme détermination à ne pas travailler dans une institution subventionnée pas l'armée, il m'appartenait de me tenir informé sur les sources de financement de l'institution où je travaillais.

Quoi qu'il en soit, je fis aussitôt mon possible pour obtenir la suppression des subventions militaires de l'IHES. De mes quatre collègues, deux étaient en principe favorables au maintien de ces subventions, un autre était indifférent, un autre hésitant sur la question de principe.

Tout compte fait, tous quatre auraient préféré la suppression des subventions militaires plutôt que mon départ. Ils firent même une démarche en ce sens auprès du directeur de l'IHES, contredites peu après par des démarches contraires de deux de ces collègues. Aucun d'eux n'était disposé à appuyer à fond mon action, ce qui aurait certainement suffi à obtenir gain de cause. Il est inutile d'entrer ici dans le détail des péripéties qui ont abouti à me convaincre qu'il était impossible d'obtenir une quelconque garantie que l'IHES ne serait pas subventionnée par des fonds militaires à l'avenir. Cela m'a conduit à quitter cet institut au mois de septembre 1970. Pour l'année académique 70/71, je suis professeur associé au Collège de France.

Après quelques semaines d'amertume et de déception, j'ai réalisé qu'il est préférable pour moi que l'issue ait été telle que je l'ai décrite. En effet, lorsqu'il semblait à un moment donné que la situation "allait s'arranger", je me disposais déjà à retourner entièrement à des efforts purement scientifiques. C'est de m'être vu dans une situation où j'ai dû abandonner une institution dans laquelle j'avais donné le meilleur de mon œuvre mathématique (et dont j'avais été le premier, avec J. Dieudonné, à fonder la réputation scientifique), qui m'a donné un choc d'une force suffisante pour m'arracher à mes intérêts purement spéculatifs et scientifiques, et pour m'obliger, après des discussions avec de nombreux collègues, à prendre conscience du principal problème de notre temps, celui de la survie, dont l'armée et les armements ne sont qu'un des nombreux aspects. Ce dernier m'apparaît encore comme le plus flagrant du point de vue moral, mais non comme le plus fondamental pour l'analyse objective des mécanismes qui sont en train d'entraîner l'humanité vers sa propre destruction.

Alexandre Grothendieck

Source : *Survivre et Vivre* numéro 6 - Janvier 1971

Les tests d'équivalence et de non-infériorité : *peut-on « démontrer » l'hypothèse nulle ?*

L'enseignement de statistique en Terminale S et ES est notamment orienté vers l'étude post-bac des tests d'hypothèses.

Ceux-ci sont fondés sur une asymétrie de traitement entre les deux hypothèses en présence, H_0 et H_1 [B1, page 36] ; c'est pourquoi un test d'hypothèses ne permet jamais d'affirmer (statistiquement ...) que H_0 est vraie.

Or un besoin nouveau est apparu dans le domaine de la recherche médicale, celui de démontrer statistiquement que telle nouvelle thérapie n'était inférieure que de très peu à telle autre, plus contraignante pour les patients.

Ceci a conduit à définir les tests de non-infériorité et d'équivalence.

On trouvera quelques éléments d'histoire concernant les tests d'équivalence et de non-infériorité en consultant [1].

Plan

1 – Les tests d'hypothèses **9**
- 1.1 Les hypothèses **9**
- 1.2 Les deux erreurs **9**
- 1.3 La fonction risque de deuxième espèce **9**
- 1.4 Premier exemple : le test d'égalité de deux espérances, les écarts-type étant inconnus mais égaux **10**
- 1.5 Deuxième exemple : le test d'égalité de deux pourcentages **11**
- 1.6 Compléments **11**

2 – Présentation des tests d'équivalence ou de non-infériorité dans le domaine des essais cliniques **12**
- 2.1 Tests d'équivalence ; pourcentages **12**
- 2.3 Pourcentages : tests de non-infériorité (tests unilatéraux) **12**
- 2.3 Test de non-infériorité pour deux espérances **14**

3 – Tests d'équivalence **15**
- 3.1 Usage d'un intervalle de confiance **15**
- 3.1 Des graphiques **15**
- 3.3 Un exemple de test d'équivalence **16**
- 3.4 Autre exemple de test d'équivalence **16**

Références et bibliographie **17**

1 Les tests d'hypothèses

1.1 Les hypothèses

Dans une population, on a à étudier une caractéristique numérique $\theta \in \Theta$, qui se trouve être un paramètre d'une variable aléatoire X, par exemple une espérance ou une variance.

On définit une hypothèse concernant θ, appelée hypothèse nulle et notée H_0, ainsi qu'une hypothèse contradictoire avec H_0, appelée hypothèse alternative et notée H_1. Souvent, H_0 est « $\theta = \theta_0$ » et H_1 est « $\theta \neq \theta_0$ ». À partir d'un échantillon de n membres de la population tirés au sort, on recueille les données $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, réalisations de la variable aléatoire considérée.

Le but du test est de déterminer si ces données permettent ou non d'affirmer *raisonnablement* que H_0 est fausse et, en conséquence, que H_1 est vraie.

1.2 Les deux erreurs

Pour atteindre ce but, on utilise une statistique $T = f(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$

- où les variables X_i sont indépendantes et ont la même loi de probabilité que X
- dont la valeur apporte, si possible, des renseignements *optimaux* sur H_0
- et dont la loi de probabilité *correspondant aux cas où* H_0 *est vraie* est connue, au moins asymptotiquement.

La statistique T nous permet d'instaurer une règle de décision statistique, qui peut conduire à deux types d'erreurs :

- l'erreur de première espèce : rejeter H_0 alors qu'elle est vraie ;
- l'erreur de deuxième espèce : ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse.

On appelle risque de première espèce d'un test et on note α la probabilité, calculée en considérant H_0 *comme vraie*, que la règle de décision de ce test conduise à rejeter H_0. D'après les propriétés de T ci-dessus, il est possible de choisir α, souvent avec $\alpha = 0,05$.

Si on sait seulement que le risque de première espèce maximal d'un test est égal à un nombre α, on dit que ce test est de niveau α.

1.3 La fonction risque de deuxième espèce

Le risque de deuxième espèce, noté $\beta(\theta_1)$, où $\theta_1 \in \Theta$ a une valeur en contradiction avec H_0, est la probabilité, calculée en considérant que $\theta = \theta_1$, de ne pas rejeter H_0.

On voit que le risque $\boldsymbol{\beta}$ (risque de deuxième espèce) est une *fonction* et n'est pas aussi simple à maîtriser que le risque α.

On appelle puissance du test la fonction $\theta_1 \mapsto 1-\beta(\theta_1)$. Sa valeur intéressante dépend, évidemment, de la valeur inconnue du *paramètre* θ.

1.4 Premier exemple : le test d'égalité de deux espérances, les écarts-type étant inconnus mais égaux

1.4.1 Statistique de test

Les variables aléatoires X et Y suivent les lois $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. On se pose la question de l'égalité de μ_X et μ_Y.
On note H_0 : « $\mu_X = \mu_Y$ » (*hypothèse simple*) et H_1 : « $\mu_X \neq \mu_Y$ » (*hypothèse composite*).[1]
(Remarque : sous certaines conditions, H_0 et H_1 peuvent être *toutes les deux composites*).
Les échantillons indépendants étant $X_1, X_2, X_3, ..., X_{n_X}$ et $Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_{n_Y}$, on note $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n_X} X_i}{n_X}$, $\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n_Y} Y_i}{n_Y}$, $S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\overline{X})^2}{n_X-1}}$, $S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\overline{Y})^2}{n_Y-1}}$
et $S = \sqrt{\frac{(n_X-1).S_X^2+(n_Y-1).S_Y^2}{n_X+n_Y-2}}$, c'est-à-dire
$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\overline{Y})^2}{n_X+n_Y-2}}$.
Comme statistique de test, on emploie

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}.$$

1.4.2 Loi et règle de décision

On montre que la loi de probabilité de cette statistique est, dans le cas où H_0 est vraie, la loi de Student à $n_X + n_Y - 2$ degrés de liberté.
Pour la règle de décision à prendre, le choix naturel est, par construction de T, de rejeter H_0 au profit de H_1 (« $\mu_X \neq \mu_Y$ ») lorsque la réalisation de T obtenue est trop grande en valeur absolue, c'est-à-dire lorsque cette valeur absolue appartient à la zone de rejet qu'on détermine comme suit :

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\text{Rejet de } H_0) = \mathbb{P}_{H_0}(|T| > c)$$

ce qui, pour une zone de rejet prise symétrique par rapport à 0, équivaut à $c = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ où t_p est le fractile d'ordre p de la loi de Student à $n_X + n_Y - 2$ degrés de liberté, qui est défini par $\mathbb{P}(T \leqslant c) = p$.

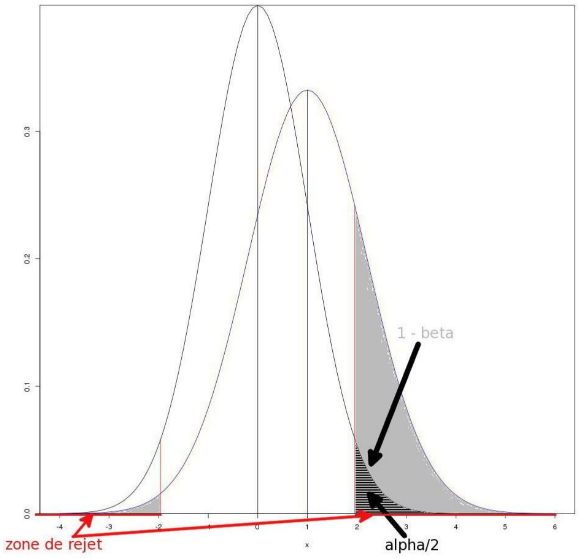
1.4.3 Remarques

— Remarque 1 : une autre écriture de la zone de rejet est $]-\infty\,; -c[\, \cup \,]c\,; +\infty[$.)

— Remarque 2 : ce test est considéré comme robuste, c'est-à-dire que le résultat obtenu lorsque les variables aléatoires ne suivent pas exactement une loi normale ou que leurs variances ne sont pas franchement égales reste relativement utilisable.

— Remarque 3 : si les effectifs des échantillons sont suffisamment grands, on pourra utiliser, comme loi de probabilité de T dans le cas où H_0 est vraie, la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.4.4 Puissance du test



1.4.5 Calcul approximatif de la puissance du test

Pour déterminer la zone de rejet, utilisons $\mathcal{N}(0, 1)$ comme loi approximative pour T puis disons que, en fait,
$\mu_X = \mu_Y + e$ avec $e > 0$ et que S n'est pas aléatoire et a σ comme valeur. Alors,

$$1 - \beta = \mathbb{P}_e(|T| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cong \mathbb{P}_e(T > z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$
donc $\beta \cong \mathbb{P}_e(T \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cong$
$$\mathbb{P}_e\left(\overline{X} - \overline{Y} \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}\right) \cong$$
$$\mathbb{P}_e\left(\overline{X} - \overline{Y} - e \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}} - e\right) \cong$$
$$\mathbb{P}_e\left(\frac{\overline{X} - \overline{Y} - e}{\sigma.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{e}{\sigma.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}\right).$$

Or, comme, ici, l'écart entre les espérances inconnues est égal à e, et d'après les décisions prises,
$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - e}{\sigma.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc
$z_\beta \cong z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{e}{\sigma.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$ et la puissance est
$1 - \beta \cong 1 - \phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{e}{\sigma.\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}\right)$ où z_p est le fractile d'ordre p de $\mathcal{N}(0, 1)$ et où ϕ est sa fonction de répartition.

1. Une démonstration de l'impossibilité de choisir comme hypothèse nulle « $\mu_X \neq \mu_Y$ » se trouve dans [2], *page 8*. On trouvera également dans ce document des exemples de fonctions R.

1.4.6 Formule donnant la taille nécessaire pour les échantillons

— Dans le cas où $n_X = n_Y = n$, on a $z_\beta \cong z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{e}{\sigma.\sqrt{\frac{2}{n}}}$, soit

— $-z_{1-\beta} \cong z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{e.\sqrt{n}}{\sigma.\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $n \cong \frac{2.\sigma^2(z_{1-\frac{\alpha}{2}}+z_{1-\beta})^2}{e^2}$.

— Cette formule permet, après avoir *intuité* σ, par exemple à partir d'études précédentes, de déterminer grossièrement l'effectif n des échantillons avec lequel la puissance $1-\beta$ est obtenue pour un choix de l'écart e entre les espérances inconnues.

Une petite application numérique : un choix fait fréquemment est $\alpha = 0,05$ et $\beta = 0,2$. Si nous cherchons à détecter un écart e entre les espérances égal à $\frac{\sigma}{5}$, nous obtenons $n \cong 50.(1,96+0,84)^2 \cong 392$. En fait, réunir deux échantillons indépendants d'environ 400 personnes est rarement accessible : le choix $e = \frac{\sigma}{5}$ n'est pas réaliste.

1.5 Test d'égalité de deux pourcentages

(Dans la suite j'abandonne la notation systématique en majuscule des variables aléatoires $T, \overline{X}, \overline{Y}$, etc.)

Les variables aléatoires X et Y suivent les lois de Bernouilli $\mathcal{B}(1,\pi_X)$ et $\mathcal{B}(1,\pi_Y)$. On se pose la question de l'égalité de π_X et π_Y. On note H_0 : « $\pi_X = \pi_Y$ » et H_1 : « $\pi_X \neq \pi_Y$ ».

Dans la suite j'utilise les notations suivantes : $p_X := \overline{X}, p_Y := \overline{Y}, p_s := \dfrac{n_X.p_X + n_Y.p_Y}{n_X+n_Y}$.

Comme statistique de test, on emploie

$$T = \frac{p_X - p_Y}{\sqrt{p_s.(1-p_s).\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)}}$$

et non pas $T = \dfrac{p_X - p_Y}{\sqrt{\frac{p_X.(1-p_X)}{n_X}+\frac{p_Y.(1-p_Y)}{n_Y}}}$.

(Le premier choix est plus puissant et produit un test équivalent au test du χ^2 de K. Pearson).

« T » a, asymptotiquement, comme loi de probabilité correspondant au cas où H_0 est vraie, la loi $\mathcal{N}(0,1)$, p_X et p_Y estimant les proportions observées dans les échantillons et p_s estimant la proportion globale $\frac{p_X.n_X+p_Y.n_Y}{n_X+n_Y}$.

Ce test ne convient que pour des échantillons ayant de grands effectifs.

Ici, la zone de rejet est également déterminée par :

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\text{Rejet de } H_0) = \mathbb{P}_{H_0}(|T|>c)$$

où c est le fractile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1.5.1 Exemple de test d'égalité de deux pourcentages

Essai randomisé [3] : une étude a inclus 200 patients hospitalisés avec une fracture du col du fémur pour comparer la mortalité à 5 ans entre les patients traités chirurgicalement et les patients traités orthopédiquement (traitement non chirurgical).

H_0 : « $\pi_X = \pi_Y$ » contre H_1 : « $\pi_X \neq \pi_Y$ ».

	Décès à 5 ans		
Traitement	Oui	Non	*Total*
Chirurgical	15 (**15%**)	85 (85%)	**100** (50%)
Orthopédique	25 (**25%**)	75 (75%)	**100** (50%)
Total	40 (**20%**)	160 (80%)	200 (100%)

On trouve que T a valu $t = \frac{0{,}15-0{,}25}{\sqrt{0{,}2.0{,}8.\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}} \cong -1,77$; or la zone de rejet de H_0 au risque $\alpha = 0,05$ est bien connue : $]-\infty\,; -1,96[\ \cup\ ]1,96; +\infty[$ environ. Donc on ne rejette pas H_0, ce qui ne démontre absolument pas H_0. Que faire ?

Par la suite, le cas de deux pourcentages va être principalement envisagé.

1.6 Compléments

1.6.1 Les tests unilatéraux

— On a vu ci-dessus la difficulté principale, qui concerne le non-rejet de H_0.

— Un autre problème apparaît lors de la comparaison d'un traitement expérimental avec un placebo :

il n'est pas intéressant de s'apercevoir que le traitement est « moins ou plus » efficace que le placebo.

Dans ce cas, un *test unilatéral* convient mieux : il est intéressant de s'apercevoir que le traitement est « plus » efficace que le placebo.

1.6.2 Essai randomisé d'un corticoïde, par infiltration, sur les lombosciatiques, test unilatéral [4]

	Succès/échec à J+20		
Traitement	Succès	Échec	*Total*
Corticoïde x	18 (**41,9%**)	25 (58,1%)	**43**(50,6%)
Placebo y	10 (**23,8%**)	32 (76,2%)	**42**(49,4%)
Total	28 (**32,9%**)	57 (67,1%)	85 (100%)

On utilise la même statistique de test,

$$T = \frac{p_X - p_Y}{\sqrt{p_s.(1-p_s).\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)}}$$

mais seules les valeurs *trop* positives de T permettent ici de rejeter utilement « $\pi_X = \pi_Y$ ».

Ainsi, on prendra H_1 : « $\pi_X > \pi_Y$ » et, donc, H_0 : « $\pi_X \leqslant \pi_Y$ ».

Les deux hypothèses sont composites ; ce test est seulement *de niveau* α, (mais on ne le dit que rarement ...)
Bien que les deux hypothèses soient composites, un théorème montre que la zone de rejet à considérer est $]c\,;\,+\infty[$ pour le cas unilatéral à droite, où H_1 est $\pi_X - \pi_Y > 0$ comme ici, ou $]-\infty\,;\,-c[$ pour le cas unilatéral à gauche, où H_1 est $\pi_X - \pi_Y < 0$, c étant le fractile d'ordre $1-\boldsymbol{\alpha}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
T a valu $t \cong \frac{0{,}419-0{,}238}{\sqrt{0{,}329.0{,}671.\left(\frac{1}{43}+\frac{1}{42}\right)}} \cong 1,78$ et la zone de rejet au risque $\alpha = 5\%$ est]1,65 ; +∞[. On rejette H_0.
Conclusion : un test de supériorité du *traitement par le corticoïde* avec un *placebo* comme contrôle a été réalisé et le traitement a été effectivement jugé supérieur.

1.6.3 Puissance

On a ici :

$$1-\beta \cong 1-\phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{e}{\sqrt{\frac{p_X.(1-p_X)}{n_X} + \frac{p_Y.(1-p_Y)}{n_Y}}}\right)$$

soit $z_{1-\alpha} + z_{1-\beta} \cong \frac{e}{\sqrt{\frac{p_X.(1-p_X)}{n_X} + \frac{p_Y.(1-p_Y)}{n_Y}}}$.
Dans le cas où $n_X = n_Y = n$, on a
$n \cong \frac{(p_X.(1-p_X)+p_Y.(1-p_Y)).(z_{1-\alpha}+z_{1-\beta})^2}{e^2}$.
Ici, pour déterminer l'effectif n des deux échantillons permettant d'obtenir une puissance convenable, on devrait disposer d'une valeur approximative de π_X ou π_Y, pouvant provenir d'études antérieures. Mais, si nous cherchons simplement à majorer n, nous pouvons remarquer que $p_X.(1-p_X)+p_Y.(1-p_Y) \leqslant \frac{1}{2}$
Application numérique : prenons $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,2$ et $e = 0,1$. Nous trouvons $n \leqslant \frac{0{,}5.(1{,}65+0{,}84)^2}{0{,}1^2} \cong 310$, ce qui est encore une valeur peu réaliste.
Si nous pensons que $\pi_X = 0,3$, nous remplaçons p_X par 0,3 et p_Y par 0,2 et nous obtenons
$n \cong \frac{(0{,}3.(1-0{,}3)+0{,}2.(1-0{,}2)).(1{,}65+0{,}84)^2}{0{,}1^2} \cong 230$.

2 Présentation des tests d'équivalence ou de non-infériorité dans le domaine des essais cliniques

2.1 Tests d'équivalence ; pourcentages

- Pour traiter une maladie, on dispose d'un traitement standard et, de plus, on étudie un nouveau traitement, expérimental.
- On juge la qualité de chacun des traitements à l'aide du pourcentage des patients guéris (ou bien soulagés, par exemple), respectivement π_s, s comme *standard*, et π_e, e comme *expérimental*.

Le non-rejet de H_0 : « $\pi_s = \pi_e$ » n'est pas une démonstration de H_0.

On voudrait prendre au maximum un risque de première espèce α, fixé, de conclure à tort « $\pi_s \neq \pi_e$ », ce qui conduirait à tester H_0 : « $\pi_s \neq \pi_e$ » contre H_1 : « $\pi_s = \pi_e$ ˇ.

Mais on a vu qu'il existe une démonstration de l'impossibilité théorique de la réalisation d'un tel test. Donc on se contentera de définir un maximum d'écart δ entre l'efficacité du traitement standard et l'efficacité du traitement expérimental et on prendra :

- H_0 : « $|\pi_s - \pi_e| \geqslant \delta$ »
- H_1 : « $|\pi_s - \pi_e| < \delta$ »,

le choix de la valeur de δ relevant principalement de normes définies par les différentes agences internationales.

Ainsi, le rejet de H_0 constituera une démonstration statistique de l'équivalence des deux traitements.

2.2 Tests de non-infériorité : pourcentages (tests unilatéraux)

En fait, on utilise le plus souvent la version unilatérale de ce test avec

- H_0 : « $\pi_s - \pi_e \geqslant \delta$ »
- H_1 : « $\pi_s - \pi_e < \delta$ ».

Rejeter H_0 signifie ici que

- $\pi_e > \pi_s$ si $\pi_s - \pi_e < 0$
- ou, sinon, que π_e n'est pas trop inférieur à π_s : $\pi_s \geqslant \pi_e > \pi_s - \delta$.

Voici comment la nécessité de l'usage d'un test de non-infériorité est décrit dans un article de 2008, article de référence, sûrement, car directement disponible[5] sur le site des National Institutes for Health : « *Pour ce type de tests, l'erreur de première espèce est la probabilité que nous concluions que les résultats obtenus sur le groupe « traitement nouveau » ne sont pas pires que ceux obtenus avec le groupe « témoins » alors qu'en fait ils sont réellement inférieurs.*
Comme nous contrôlons, en employant un test de non-infériorité, l'erreur de première espèce, nous nous protégeons contre une éventuelle conclusion fausse, qui affirmerait à tort la non-infériorité du traitement nouveau par rapport au traitement standard. »

2.2.1 Justification thérapeutique

- Beaucoup de maladies ont aujourd'hui un traitement qu'on considère comme efficace.
- Mais certains de ces traitements peuvent être, pour les patients, très lourds, voire invasifs, ou bien très chers...

— Il peut donc être utile de rechercher de nouveaux traitements qui n'auraient pas ces inconvénients,
- même s'ils ne disposent que d'une efficacité un peu inférieure,
- la différence pouvant peut-être, d'ailleurs, être de l'ordre de l'incertitude sur les pourcentages obtenus lors de l'essai clinique.

2.2.2 Mise en œuvre d'un test de non-infériorité (pourcentages)

Comme on l'a vu, on définit

— H_0 : « $\pi_s - \pi_e \geqslant \delta$ »

— H_1 : « $\pi_s - \pi_e < \delta$ ».

et, donc, on utilise comme statistique de test

$$T = \frac{p_s - p_e - \delta}{\sqrt{\left(\frac{p_s.(1-p_s)}{n_s} + \frac{p_e.(1-p_e)}{n_e}\right)}}$$

— Ce sont les valeurs *trop* négatives de t qui permettent de rejeter H_0.

— La zone de rejet est donc $]-\infty\,;-c[$, c étant le fractile d'ordre $1-\boldsymbol{\alpha}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, ce qui donne]-∞; $-1,65$[au risque α = 5 %.

Remarque : aucune nouvelle justification théorique n'est nécessaire ici, car ce qui a été dit au paragraphe 1.6.2 s'applique également aux tests de non-infériorité.

2.2.3 Exemple : cellules souches

L'allogreffe de cellules souches hématopoïétiques [5] est utilisée pour le traitement de certaines maladies hématologiques. Une étude de 2007 a eu pour but de comparer l'emploi de cellules sources du sang périphérique (PBSC) avec celui de la moëlle osseuse (BM). Lors d'un prélèvement de cellules souches du sang périphérique, le sang est prélevé par le biais d'un cathéter veineux. Le sang est ensuite dirigé vers un séparateur de cellules, appareil centrifugeur qui en extrait les cellules souches et les stocke. Puis le sang est réinjecté au donneur par le biais d'un second cathéter veineux.

On voit que l'avantage du sang périphérique est que son prélèvement est beaucoup moins invasif pour le donneur ; de plus, des études indiquent qu'il a une meilleure efficacité que BM dans le cas des donneurs jumeaux des receveurs. Cependant, dans le cas des donneurs non apparentés aux receveurs, le risque de réaction du greffon contre l'hôte semble accru.

On prend donc ici BM comme traitement expérimental, PBSC comme traitement de contrôle (de référence) et on cherche à savoir si BM n'est, au pire, que peu inférieur à PBSC pour la survie à 6 mois. Le choix a été fait de $\delta = 0,1 = 10\%$.

Mise en œuvre du test

Données	n	mortalité liée au traitement
BM (*exp*)	583	187
PBSC (*std*)	328	95

— La statistique de test vaut donc

$$t = \frac{\frac{233}{328} - \frac{396}{583} - 0,1}{\sqrt{\left(\frac{\frac{233}{328}.(1-\frac{233}{328})}{328} + \frac{\frac{396}{583}.(1-\frac{396}{583})}{583}\right)}} \cong -2,18$$

— Or la zone de rejet pour un « z-test » unilatéral à gauche au risque $\alpha = 5\%$ est environ $]-\infty\,;-1,65[$.

— Donc, à ce risque, on rejette l'hypothèse H_0 : « $\pi_s - \pi_e \geqslant \delta$ » et on déclare que BM est non-inférieur à PBSC du point de vue de la survie liée au traitement,

— en plus de sa plus faible tendance à la réaction du greffon contre l'hôte.

2.2.4 Exemple : trypanosomiase

Objectif de l'étude NECT [6] : comparaison de la combinaison thérapeutique d'eflornithine en administration I.V. (deux fois par 24 h, sept jours) et de nifurtimox par voie orale (10 jours) au traitement de référence d'elfornithine I.V. (quatre fois par 24 h, 14 jours) en termes d'efficacité thérapeutique pour le traitement des patients atteints de trypanosomiase TBG en phase méningo-encéphalique.

Données	n	nombre d'échecs
EN (*exp*)	47	3
E (*std*)	51	5

La statistique de test vaut donc ici

$$t = \frac{\frac{46}{51} - \frac{44}{47} - 0,1}{\sqrt{\left(\frac{\frac{46}{51}.(1-\frac{46}{51})}{51} + \frac{\frac{44}{47}.(1-\frac{44}{47})}{47}\right)}} \cong -2,45$$

Même conclusion : au risque $\alpha = 5\%$, on rejette l'hypothèse H_0 : « $\pi_s - \pi_e \geqslant \delta$ » et on déclare que EN est non-inférieur à E du point de vue de l'efficacité, et plus simple à mettre en œuvre.

Défaut : les données sont telles que l'approximation normale n'est pas justifiée ici ...

2.2.5 Test de non-infériorité et intervalles de confiance (pourcentages)

En admettant que l'approximation normale soit justifiée, un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ de la différence $\pi_X - \pi_Y$ est $\left[p_X - p_Y - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v}\,;\, p_X - p_Y + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v}\right]$ où $v = \frac{p_X.(1-p_X)}{n_X} + \frac{p_Y.(1-p_Y)}{n_Y}$.

Il a aussi été défini « intervalle de confiance à droite » : $\left]-\infty\,;\, p_X - p_Y + z_{1-\alpha}.\sqrt{v}\right]$; de même à gauche.

Or, dans un test de non-infériorité (à gauche, comme plus haut), H_0 : « $\pi_s - \pi_e \geqslant \delta$ » est rejetée si et seulement si

$$\frac{p_s - p_e - \delta}{\sqrt{\left(\frac{p_s.(1-p_s)}{n_s} + \frac{p_e.(1-p_e)}{n_e}\right)}} < -z_{1-\alpha}$$

c'est-à-dire :

$$p_s - p_e + z_{1-\alpha}.\sqrt{\left(\frac{p_s.(1-p_s)}{n_s} + \frac{p_e.(1-p_e)}{n_e}\right)} < \delta.$$

On voit donc que H_0 est rejetée si et seulement si l'intervalle de confiance à droite de $\pi_s - \pi_e$ de niveau $1-\alpha$ est inclus dans $]-\infty\,;\,\delta[$.

(Pour une justification théorique de la formule employée ici pour obtenir un intervalle de confiance, voir [B3], page 241.)

2.2.6 Intervalle de confiance symétrique (pourcentages)

Si on ne veut pas utiliser d'intervalle de confiance non symétrique, on peut aussi dire que H_0 est rejetée si et seulement si :
la borne droite de l'intervalle de confiance bilatéral de $\pi_s - \pi_e$ de niveau $1 - 2.\alpha$ est inférieure à la borne droite de l'intervalle $]-\delta\ ;\ \delta[$.
Cette conclusion est compliquée, voire même tortueuse, mais elle s'avèrera utile au paragraphe 3.1.

2.3 Test de non-infériorité pour deux espérances

2.3.1 Exemple des antihypertenseurs

On compare un antihypertenseur expérimental, e, avec un antihypertenseur de référence, s.

— Le critère de jugement est la variation de tension artérielle avant/après traitement (mmHg).
— On considère que ce caractère suit une loi normale, de même variance pour les deux traitements. La statistique de test est

$$T = \frac{\overline{X_s} - \overline{X_e} - \delta}{S.\sqrt{\frac{1}{n_s} + \frac{1}{n_e}}} \text{ avec } s = \sqrt{\frac{(n_s-1).S_s^2 + (n_e-1).S_e^2}{n_s + n_e - 2}}.$$

— La borne d'équivalence δ choisie est 2 mmHg.

Données :

n_e	$\overline{x_e}$	s_e	n_s	$\overline{x_s}$	s_s
140	13,1	7,8	138	12,0	8,0

T a donc valu $t \cong \frac{12-13{,}1-2}{\sqrt{\frac{137.8^2+139.7{,}8^2}{276}}.\sqrt{\frac{1}{138}+\frac{1}{140}}} \cong -3,27.$

— La zone de rejet au risque $\alpha = 5\%$ étant environ $]-\infty\ ;\ -1,65[$, on rejette H_0 et on affirme que le nouvel antihypertenseur n'est pas inférieur au contrôle employé.

2.3.2 Harpagophyton

Voici un extrait d'article [7] *que nous allons décoder et dont nous allons vérifier les calculs* :

« L'hypothèse principale à tester était la suivante : essai d'équivalence unilatérale ou de non-infériorité de l'harpagophyton par rapport à la diacerhéine sur la douleur spontanée mesurée à l'aide d'une Échelle Visuelle Analogique (100 mm). Ce test d'équivalence devait être mené en situation unilatérale avec un risque à 0,05.

En posant l'hypothèse que la différence vraie entre les traitements était nulle avec un δ de 10 mm, un test d'équivalence unilatéral avec un risque α à 0,05, un risque β à 0,10 et un écart type de 18 mm, nécessitait l'inclusion de 56 patients par groupe. »

Tests d'équivalence basés sur les intervalles de confiance de la différence entre les groupes (douleur à l'EVA)

	Moyenne des différences par rapport à la valeur de base		Différence entre les groupes (H-D)	Intervalle de confiance à 90 % de la différence (H-D)	Hypothèse : Harpagophyton est au moins aussi bon que la diacerhéine
	Harpagophyton	Diacerhéine			
Douleur à j120	-30,6 ± 3,3	-25,5 ± 3,6	-5,1	-13,1 ; 3,0	Acceptée

Décodage :

— « Équivalence unilatérale » est une périphrase représentant, comme il est indiqué, un test de non-infériorité. L'échelle visuelle analogique ayant un support borné, l'usage d'un test de Student ne peut être justifié que pour de grands effectifs, ce qui n'est pas encore assuré. Le risque égal à 0,05 est, en fait, le risque α, et c'est indiqué trois lignes plus bas.
— Adaptons la formule vue au paragraphe 1.4.6 : $n \cong \frac{2.\sigma^2(z_{1-\alpha}+z_{1-\beta})^2}{e^2} \cong \frac{2.18^2(1,65+1,28)^2}{10^2} \cong 56.$
— « $-30,6 \pm 3,3$ » indique que la moyenne, calculée sur le groupe de patients recevant de l'harpagophyton, des diminutions des douleurs mesurées par EVA a été égale à 30,6 mm (signe - car il s'agit de diminutions) et que l'estimation de l'écart-type de cette moyenne (ou *erreur-type*) a été égale à 3.3. De même pour« $-25,5 \pm 3,6$ ».
— Un intervalle de confiance de niveau $1 - 2.0.05$ de $\mu_H - \mu_D$ est donc $[m_H - m_D - z_{0,95}.\sqrt{v}\ ;\ m_H - m_D + z_{0,95}.\sqrt{v}]$ où $v = 3.3^2 + 3.6^2$, ce qui donne $[-13,16\ ;\ 2,96]$.
— Nous avons dit que le rejet de H_0 était obtenu lorsque la borne droite de l'intervalle de confiance ci-dessus était inférieure à celle de l'intervalle $[-\delta\ ;\ \delta]$. Ceci s'applique également ici, bien que la soustraction faite, $m_H - m_D$ corresponde à $m_e - m_s$ et non pas à $m_s - m_e$ comme indiqué. En effet, ici, un bon traitement est un traitement qui fait *diminuer* la douleur, alors que, précédemment, il s'agissait d'*augmenter* le nombre de personnes guéries, ce qui compense le changement de signe. H_0 est donc rejetée, ce qui revient à affirmer que l'harpagophyton n'est pas inférieur (« est au moins aussi bon ») que la diacerhéine.

Discussion figurant dans la suite de l'article :

«

— Les anti-inflammatoires non stéroïdiens sont utilisés depuis longtemps pour lutter contre la douleur des patients arthrosiques.
— Leur efficacité n'est pas contestable, attestée par une multitude d'essais thérapeutiques...
— Plusieurs médicaments, les anti-arthrosiques d'effet différé et prolongé, ont récemment montré leur efficacité symptomatique dans l'arthrose sans démontrer pour le moment un effet structural. Ils sont utiles comme traitement de fond des patients arthrosiques souffrant de façon régulière et chez lesquels

les mesures non médicamenteuses ne suffisent plus à maîtriser les symptômes. Leur intérêt principal est de réduire la consommation d'antalgiques ou d'anti-inflammatoires...

— Il n'a pas été inclus de groupe placebo dans cette étude car il est souvent difficile de recruter des patients lorsqu'ils sont informés du risque (égal à 50 %) d'être dans un groupe placebo, et ce d'autant plus que la durée de traitement est particulièrement longue (quatre mois).

— Par ailleurs, l'appréciation de l'intensité de l'effet placebo dans l'arthrose a récemment été étudiée.

  — Une revue portant sur 457 patients traités par placebo dans le cadre de six essais contrôlés d'anti-arthrosiques symptomatiques d'action lente a montré que sous placebo, la baisse moyenne de la douleur à l'EVA était de l'ordre de 10 à 16 mm.

  — Par conséquent, la baisse observée dans le groupe harpagophyton (30,6 mm) est nettement supérieure à celle habituellement observée sous placebo. »

Commentaire :

— L'auteur rappelle ici les raisons pour lesquelles on utilise un test de non-infériorité, en particulier le caractère parfois non éthique de l'emploi d'un groupe témoin ne recevant qu'un placebo. Cependant, le test de non-infériorité tolère, malgré son nom, une légère déficience du traitement expérimental par rapport au traitement standard. Si ce dernier n'est supérieur que de peu à l'effet d'un placebo, est-ce que le traitement en cours d'expérimentation ne risque pas de recevoir son brevet de non-infériorité alors qu'il serait, en réalité, inférieur à un placebo ? L'angoisse du chercheur est ici dissipée par la connaissance d'expérimentations antérieures !
(Une question reste sans réponse : pourquoi les placebos ont-ils une certaine efficacité ?)

3 Tests d'équivalence

3.1 Usage d'un intervalle de confiance

Il a été indiqué au paragraphe 2.1 que, pour un test d'équivalence, on prend

— H_0 : « $\pi_s - \pi_e \geqslant \delta$ ou $\pi_e - \pi_s \geqslant \delta$ »

— H_1 : « $\pi_s - \pi_e < \delta$ et $\pi_e - \pi_s < \delta$ ».

Donc [8], en s'inspirant des idées des paragraphes 2.2.5 et 2.2.6, on obtient un test d'hypothèse de H_0 contre H_1 en rejetant H_0 lorsque l'intervalle de confiance de $\pi_s - \pi_e$ de niveau $1 - 2.\alpha$ est entièrement inclus dans $]-\delta\ ;\ \delta[$.

En effet, la probabilité, dans le cas où H_0 est vraie, de rejeter H_0 par erreur par cette méthode, se calcule de deux façons différentes, selon que la vraie valeur de $\pi_s - \pi_e$ est supérieure à δ ou bien inférieure à $-\delta$, ces deux cas étant les seuls possibles pour que H_0 soit vraie.

Dans les deux cas, le rejet ne peut avoir lieu, par définition, que si l'intervalle de confiance est inclus dans $]-\delta\ ;\ \delta[$.

Rappelons aussi que c'est l'intervalle de confiance qui est aléatoire, alors que $\pi_s - \pi_e$ est une valeur de la nature, non aléatoire

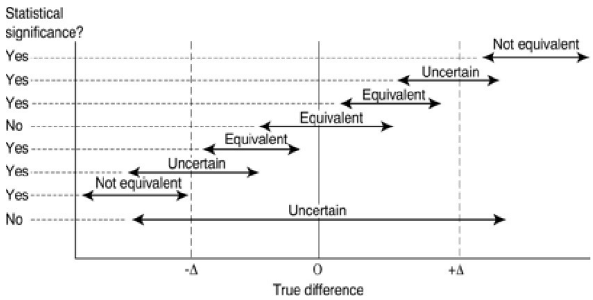
Dans le premier cas, cette probabilité est donc inférieure à la probabilité que tous les éléments de l'intervalle de confiance soient inférieurs à $\pi_s - \pi_e$, cette dernière probabilité étant par définition α pour un intervalle de confiance de niveau $1 - 2.\alpha$.

Dans le deuxième cas, cette probabilité est cette fois inférieure à la probabilité que tous les éléments de l'intervalle de confiance soient supérieurs à $\pi_s - \pi_e$, cette dernière probabilité étant aussi, par définition, α pour un intervalle de confiance de niveau $1 - 2.\alpha$.i

Par disjonction des cas, nous avons démontré qu'il s'agit bien d'un test de niveau **inférieur ou égal à** α de H_0 contre H_1 ; cependant, rien ne prouve qu'il ait une puissance optimale[2].

3.2 Des graphiques

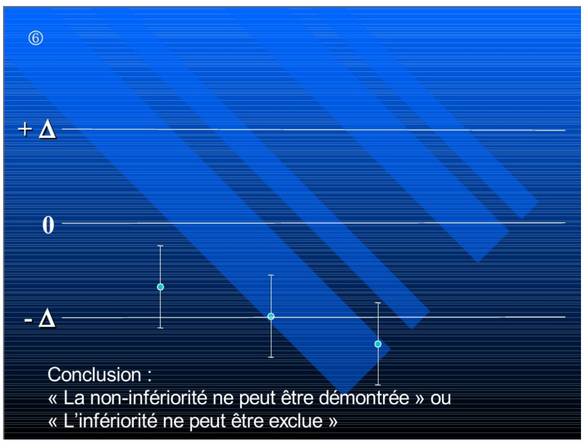
3.2.1 Université du Nord Texas



Ce graphique figure parmi les documents destinés aux étudiants de psychologie de l'université du Nord Texas. Il donne la vision que ces étudiants sont censés avoir concernant les tests d'équivalence.

3.2.2 Université de Rouen

Le graphique ci-dessous est extrait, parmi une dizaine d'autres du même genre, d'un polycopié de médecine de l'Université de Rouen [9]. Le but est le même.



3.3 Un exemple de test d’équivalence

Vérifions les calculs de l’article ci-dessous :

« Staszewski et al. [10] ont rapporté les résultats d’un essai clinique portant sur 562 patients atteints du VIH, conçu pour démontrer l’équivalence entre un traitement par abacavir, lamivudine et zidovudine d’une part et un traitement par indinavir, lamivudine et zidovudine d’autre part. Le critère principal était la proportion de patients ayant un niveau d’ARN du VIH de 400 copies / ml ou moins à la semaine 48. Sur la base de discussions avec des chercheurs, des cliniciens, et la Food and Drug Administration, la marge d’équivalence pour la différence des proportions avait été fixée à $\delta = 12$ %. Les taux de réponses positives à la maladie furent respectivement de 50,8% et 51,3% pour l’abacavir et l’indinavir. L’intervalle de confiance de niveau 95% pour la différence des les taux de réponses positives était $[-9, 8]$ et, comme cet intervalle est inclus dans $[-12, 12]$, les deux thérapies ont pu être déclarées équivalentes au risque $\alpha = 0,025$. »

- L’article indique également que 35 patients avaient été soumis à une intention de traitement mais n’avaient finalement pas pu suivre le protocole. Donc le nombre de patients traités a été $562 - 35 = 527$, dont 262 dans le groupe abacavir et 265 dans le groupe indinavir.
- Dans le groupe abacavir, le nombre de succès a été $262.0,508 \cong 133$; dans le groupe indinavir, il y a eu $265.0,513 \cong 134$ succès.
- La figure ci-dessous illustre la réalisation des calculs indiqués dans cet article à l’aide d’un tableur, les formules contenues dans certaines cellules étant affichées dans les cellules voisines. À droite figure la copie d’écran obtenue avec le logiciel R, qui se trouve reprise sous la figure.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Effectif	Echec	Succès	%		
2	abacavir	262	129	133	0.508		
3	indinavir	265	129	136	0.513		
4	+ ou -	527	258	269	-0.00557		
5	Pas pris part	35					
6		562					
7	Z	1.960	LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0.975)				
8	Borne g :	-0.0909	E2-E3-B7*RACINE(E3*(1-E3)/B3+E2*(1-E2)/B2)				
9	Borne d :	0.0798	E2-E3+B7*RACINE(E3*(1-E3)/B3+E2*(1-E2)/B2)				

```
> x<-c(133,136)
> n<-c(262,265)
> prop.test(x,n,conf.level=0.95)

 2-sample test for equality of proportions
with continuity correction
data:  x out of n
X-squared = 0.0017, df = 1, p-value = 0.9674
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 -0.09472809  0.08358017
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.5076336 0.5132075
```

- On constate bien que l’intervalle de confiance, obtenu comme précédemment, est inclus dans $[-0, 12; 0, 12]$, autre écriture de $[-12\%; 12\%]$.
- Le logiciel R est un logiciel de statistique, agréable à utiliser avec un peu d’habitude ; voici comment nous lui faisons déterminer l’intervalle de confiance de cet exemple :

  > x<-c(133,136)

  > n<-c(262,265)

  > prop.test(x,n,conf.level=0.95)

  2-sample test for equality of proportions with continuity correction

  data : x out of n
  X-squared = 0.0017, df = 1, p-value = 0.9674
  alternative hypothesis : two.sided

  95 percent confidence interval :
  -0.09472809 0.08358017
  sample estimates :
  prop 1 prop 2
  0.5076336 0.5132075
- R ne trouve pas le même intervalle de confiance ! C’est qu’il a utilisé la formule conseillée en 1934 par le statisticien Frank Yates (1902, 1994). Il est possible de ramener R à plus de naïveté :

  > prop.test(x,n,conf.level=0.95,correct= FALSE)

  2-sample test for equality of proportions without continuity correction

  data : x out of n
  X-squared = 0.0164, df = 1, p-value = 0.8982
  alternative hypothesis : two.sided

  95 percent confidence interval :
  -0.09093290 0.07978498
  sample estimates :
  prop 1 prop 2
  0.5076336 0.5132075

Et voilà !

3.4 Autre exemple de test d’équivalence

« Comparaison d’anesthésiques [11]. Helmy (1999) a comparé l’efficacité et la sécurité des effets anti-émétiques de l’ondansétron par voie intraveineuse avec ceux de la meto-clopramide, lors de leur administration préchirurgicale pour les patients qui a subi une cholécystectomie laparoscopique sous anesthésie générale intraveineuse (TIVA).
Dans cette étude, 80 patients ont été répartis au hasard en deux groupes recevant respectivement de l’ondansétron (4 mg) ou du dropéridol (1,25 mg), donnés en une seule dose intraveineuse immédiatement avant la mise en oeuvre d’une anesthésie générale standard ...
Un (autre) indice important pour la comparaison est le score relatif au "bien-être" du patient. Celui-ci est évalué sur une échelle comportant trois valeurs : "pauvre", "modéré", et

"confortable". Des études antérieures ont généralement suggéré l'absence de différence entre les scores de bien-être de l'ondansétron et du dropéridol.

Par conséquent, il est intéressant de déterminer sii, pour les *deux groupes*, "pauvre ou modéré" et "confortable" [2] Droperidol et Ondansetron sont équivalents en termes de bien-être. »

Score de bien-être du droperidol et de l'ondansetron		
	Score de bien-être	
	Pauvre ou modéré	Comfortable
Droperidol	12	28
Ondansetron	9	31

Man-Lai Tang, , Wai-Yin Poon, Hong Kong, 2006.

Appliquons la méthode que nous avons vue.

Borne gauche de l'intervalle de confiance de $\pi_X - \pi_Y$:

$t = \frac{28}{40} - \frac{31}{40} - z_{1-\alpha} * \sqrt{\left(\frac{\frac{28}{40}.(1-\frac{28}{40})}{40} + \frac{\frac{31}{40}.(1-\frac{31}{40})}{40}\right)}$

$\cong -0,24$

Borne droite :

$t = \frac{28}{40} - \frac{31}{40} + z_{1-\alpha} * \sqrt{\left(\frac{\frac{28}{40}.(1-\frac{28}{40})}{40} + \frac{\frac{31}{40}.(1-\frac{31}{40})}{40}\right)}$

$\cong 0,09$

Ici, si l'écart maximal $\delta = 0,1$ est utilisé, on ne peut rien conclure car l'intervalle de confiance, approximativement [-0,24 ; 0,09], n'est pas inclus dans
[-0,1 ; 0,1].

Références

1 http://jacques.faisant.pagesperso-orange.fr/JN2014/
2 http://jacques.faisant.pagesperso-orange.fr/JN2014/Atelier_2014/PrEsentation2014_texte.pdf
3 http://unf3s.cerimes.fr/media/paces/Grenoble_1112/labarere_jose/labarere_jose_p06/labarere_jose_p06.pdf
4 Test construit à partir de http://www.sante.univ-nantes.fr/med/cidmef/diapo/TestStatistique_Principe.ppt
5 http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2701110/ *ou bien*
da Silva GT, Klein JP. Methods for equivalence and noninferiority testing. Biol Blood Marrow Transplant. 2008 ;15 :120-7.
6 http://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00623076/document
7 L'harpagophyton dans le traitement de la gonarthrose et de la coxarthrose. Rev Rhum [Ed Fr] 2000 ;67 :634-40
8 Wilfred J. Westlake. Symmetrical Confidence Intervals for Bioequivalence Trials. Biometrics. Déc 1976 ;32 :741-744
9 http://medecine-pharmacie.univ-rouen.fr/servlet/com.univ.collaboratif.utils.LectureFichiergw?ID_FICHIER=9935
10 Abacavir-Lamivudine-Zidovudine vs Indinavir-Lamivudine-Zidovudine in Antiretroviral-Naive HIV-Infected Adults. JAMA. 2001 ;285(9) :1155-1163. http://jama.jamanetwork.com/article.aspx?articleid=193616
11 Statistical inference for equivalence trials with ordinal responses. Computational Statistics & Data Analysis 51 (2007) 5918-5926

Bibliographie

B1 Fisher, Neyman, and the Creation of Classical Statistics, Erich L. Lehmann, 2011, Springer
— (en ligne : http ://bookzz.org/md5/FC1B6E96A1AEE1538A6EA73D65288E9E)
B2 Testing Statistical Hypotheses, Erich Leo Lehmann, 1959, John Wiley & Sons
B3 Méthodes statistiques, Philippe Tassi, 1985, Economica

2. Modification du texte original de l'article : deux modalités ont été regroupées.

Point de vue : Les réformes de l'enseignement des mathématiques

Lors de l'assemblée générale des animateurs de l'IREM de Basse-Normandie du 5 décembre 2014, notre directeur Gilles Damamme a lancé un débat sur le plan annoncé par la ministre de l'éducation pour améliorer l'image des mathématiques et le niveau des élèves dans cette matière. Le soir même, Didier Trotoux nous communiquait l'article paru la veille dans Le Monde, reprenant l'essentiel des constats et des propositions ministérielles. En voici le texte :

Un plan tous azimuts pour corriger la faiblesse des Français en maths

Avec ses treize médailles Fields – l'équivalent du prix Nobel –, la France a la meilleure école de mathématiques au monde. Mais les résultats de ses élèves sont médiocres. Pire, ils se dégradent dans le temps et sont marqués par un fort déterminisme social. Pour lutter contre ce paradoxe, le ministère de l'éducation nationale lance, jeudi 4 décembre, un plan tous azimuts visant les programmes du primaire et du collège, la production de ressources pédagogiques, le recrutement et la formation des enseignants ainsi que l'image même des mathématiques. Objectif : relever le niveau, mais aussi redorer l'image de cette matière.

Il y a urgence. À la fin de la Troisième, après 1 500 heures de mathématiques, un quart des adolescents peinent à réaliser les opérations les plus simples ou à résoudre des problèmes auxquels la vie les confrontera. L'édition 2012 de l'enquête PISA, publiée fin 2013 par l'OCDE, avait révélé que, si la part des élèves très performants était stable par rapport à 2003 (13 %), la proportion d'élèves en difficulté s'était envolée à 22,4 %, contre 16,6 % dix ans plus tôt. « Même nos meilleurs élèves ne sont pas très bons. Aux Olympiades internationales de mathématiques, notre classement moyen se situe à la 35e place », souligne Martin Andler, professeur à l'université de Versailles-Saint-Quentin et président de l'association Animath.

Au-delà des difficultés d'apprentissage, les élèves ont développé au fil des années une anxiété vis-à-vis de cette matière. Selon l'OCDE, 53 % des jeunes Français de 15 ans se déclarent tendus quand ils doivent faire leurs devoirs de mathématiques, contre 7 % des Finlandais, 28 % des Italiens et 30 % des Allemands. C'est en France que le taux de non-réponse aux questionnaires à choix multiples est le plus fort d'Europe. Et ce blocage touche essentiellement les enfants issus de milieux défavorisés et les filles.

Parmi les principales mesures annoncées, la ministre de l'éducation, Najat Vallaud-Belkacem, appelle à une rénovation des programmes en primaire et au collège, avec l'objectif de donner une place centrale au calcul mental. « C'est une excellente chose, déclare Véronique Chauveau, professeure en lycée et vice-présidente de l'association Femmes et mathématiques. Nos élèves sont tributaires de la calculatrice et, quand ils n'en ont pas, ils sont perdus. » En 2011 déjà, Luc Chatel, alors ministre de l'éducation, avait insisté sur cette pratique pour lutter contre l'innumérisme. Pour renforcer l'attrait des mathématiques, la place laissée au jeu sera plus importante au primaire, et les exercices devront être encore plus concrets. Le sempiternel problème de temps pour remplir sa baignoire en fonction des robinets d'eau froide et d'eau chaude devrait donc définitivement disparaître au profit de cas qui les concernent davantage : faire des courses, gérer un budget « On le voit en cours, dès qu'on met les élèves dans des situations qui touchent à leur quotidien, par exemple si on parle d'argent, ça marche tout de suite beaucoup mieux », admet Aurélie Bodenes, professeure au collège Eugénie-Cotton d'Argenteuil (Val-d'Oise).

Un des enjeux de ce plan concerne la formation initiale des professeurs des écoles. Un vrai casse-tête : ceux-ci sont en très grande majorité issus de filières littéraires ou de sciences humaines, et ils ont souvent arrêté les mathématiques à la fin de la Première. « Un effort particulier sera fait sur la formation des formateurs en mathématiques », indique le ministère.

Le ministère entend aussi revaloriser le métier de professeur de mathématiques auprès des étudiants. Or, sur ce terrain, il peine à recruter : un tiers des postes ouverts n'ont pas été pourvus après les résultats du CAPES 2014 (836 admis sur 1 243 postes à pourvoir). Pas étonnant : les études de mathématiques offrant plus de débouchés que les langues ou les lettres, les étudiants se tournent plus rarement vers le professorat et choisissent des secteurs mieux rémunérés, comme la finance ou l'informatique. Le ministère annonce que le nombre de postes ouverts sera maintenu à un niveau élevé. Une décision qui s'inscrit dans la logique des 60 000 nouveaux postes. Une option informatique au CAPES de mathématiques sera intégrée. Sans garantie que les candidats affluent, tant que le salaire restera peu attractif.

Les filles ne sont pas oubliées. « Nous voulons lutter contre les stéréotypes sexués », dit-on au ministère. « Il y a un problème d'autocensure chez les filles », reconnaît M. Andler. Les professeurs ont souvent inconsciemment une représentation plus masculine de la matière, qui se retrouve aussi dans les manuels. « Dans un livre de terminale S, dans le chapitre sur les nombres complexes, pour expliquer la différence entre un être complexe et le fait d'avoir des complexes, les auteurs avaient pris comme exemple dans le premier cas un homme, dans le deuxième une femme… », se souvient Mme Chauveau. Une politique de sensibilisation des éditeurs et du Conseil supérieur des programmes à l'égalité hommes-femmes sera mise en place. Histoire d'en finir une fois pour toutes avec le cliché « maman coupe les parts du gâteau et papa achète une voiture ».

Nathalie Brafman

La lecture de cet article m'a replongé plus de quarante ans en arrière. Alors surveillant au lycée Malherbe, je ne me destinais pas à l'enseignement : j'y suis venu parce qu'il y avait la réforme des « maths modernes ». Les vieux profs étaient un peu dépassés, et moi je m'amusais quand on me demandait un remplacement. Dans l'opinion, la réforme était censée faire disparaître les sempiternels problèmes de robinets qui fuient. Elle était beaucoup plus riche que cela, bien évidemment. Au moins cet objectif-là a-t-il été atteint, car en quarante ans de carrière, je n'ai jamais rencontré de problème de robinets. Je n'en avais d'ailleurs pas non plus rencontré dans mon parcours scolaire, qui avait été traditionnel jusqu'au bac. Pour moi, ces histoires de baignoire relevaient du fantasme ! Retrouver ce fantasme dans l'actualité de 2014 me paraît, pour le moins…surréaliste.

Vers la fin des années 1970, la lutte contre les effets pervers liés à la réforme de 1970 occupait une grande partie de l'activité de l'APMEP et des IREM. C'est avec l'idée que cette réforme était mal comprise par la majorité des enseignants que nous avons commencé à réfléchir à de nouveaux programmes. Au GREM (Groupe de réflexion sur l'enseignement des mathématiques), dont le rôle était de proposer des changements de programmes à l'Inspection générale et au ministre, nous étions animés des mêmes intentions que celles que je retrouve dans l'article du Monde. Lorsque, en 1988, je suis parti en Afrique transmettre la « bonne parole » dans le cadre de la coopération, je pensais ces problèmes derrière nous.

De retour en 1995, il m'a fallu me rendre à l'évidence : l'enseignement des mathématiques était toujours coupé du monde et des autres disciplines. Visiblement cette nouvelle réforme avait, elle aussi, été mal comprise J'en suis venu à penser que le choix des contenus dans une filière donnée n'est pas l'essentiel pour attirer plus d'élèves, et de filles en particulier, vers les mathématiques. Ce choix est important pour la filière en elle-même, mais pour susciter de l'envie et des vocations, il faut davantage donner du sens par exemple. Je me souviens avoir dit à peu près la même chose en 1984 dans un article du numéro 0 du BGV, le Bulletin à grande vitesse de l'APMEP, intitulé « Espèce en voie de disparition » qui alertait sur la crise de recrutement des professeurs de mathématiques. AU CAPES, entre 1976 et 1983 nous étions passés de un candidat reçu sur seize à... quasiment un sur un, car il y avait désormais moins de candidats étudiants que de places offertes.

De mon point de vue, il faut, le plus souvent possible, privilégier tout ce qui peut donner du sens. Lors du séminaire de rentrée de l'IREM de Basse-Normandie à Bayeux, en octobre 2014, j'ai fait une brève intervention sur l'accord de septième en musique. Cet exemple faisait partie de mon cours, toutes sections confondues, lorsque j'introduisais les logarithmes. Un jour, une élève de Terminale ES (spécialité maths) est venu me remercier à la fin de l'heure, – ce n'est pas si courant, alors on s'en souvient ! – elle venait de comprendre comment étaient constitués les accords qu'elle jouait sur son piano. Vingt ans plus tard, je ne suis pas sûr qu'elle se rappelle que la fonction logarithme est une primitive de 1/x , mais il est fort probable qu'elle se souvienne que c'est une fonction qui transforme les produits en somme et que c'est cette perception logarithmique qui fait que le physicien produit des fréquences tandis que le musicien perçoit des gammes.

La question d'introduire des problèmes faisant intervenir des manipulations d'argent a fait débat à la dernière assemblée générale. Ramener notre enseignement à cela n'est certes pas réjouissant, mais certains d'entre eux, bien choisis peuvent apporter du sens et permettre d'aller plus loin. La recherche de sens est un comportement. À un niveau élémentaire, demander de calculer le périmètre d'un cercle est une chose, prévoir quel arbre il faudra choisir pour obtenir une poutre de dimensions données en est une autre.

Un des principes que nous avions fixés au GREM était de n'introduire un concept que si on est en mesure de le faire fonctionner. Je reste persuadé qu'on comprend mieux la notion de dérivée en résolvant des problèmes d'optimisation qu'en se contentant de la définition. C'est pour cette raison que les structures de groupes, d'anneaux ont disparu des programmes. Un des effets pervers des « maths modernes » était que de nombreux élèves étaient capables de reconnaître un espace vectoriel, mais que cette capacité était stérile. La théorie de Galois ne s'enseignant pas au lycée, trouver des situations fécondes utilisant la notion de groupe dans le secondaire n'est pas aisé. L'étude des pavages est un bon exemple, mais elle demande du temps et les programmes sont toujours trop chargés !

On va donc se diriger vers de nouveaux changements de programmes, et peut-être même remettre ce qui va avait été enlevé trente ans auparavant, donnant raison aux tenants du principe de la pendule : une pendule arrêtée est la seule à donner l'heure exacte deux fois par jour ! Forts de ce principe, en 1995, de nombreux collègues continuaient à enseigner les définitions des limites en classe de Première alors que les programmes précisaient qu'à ce niveau, la notion intuitive de limite était suffisante. Nous avons eu de longs débats sur ce sujet à l'APMEP, débats qui montraient que chez beaucoup de collègues, même agrégés, ces notions n'étaient pas toujours bien comprises. Le regretté Daniel Lazet de l'IREM de Bordeaux avait publié un article dans le *Bulletin Vert* de l'APMEP qui faisait le point sur les nuances et subtilités que leur usage induit : j'invite à relire, car il se situe bien au-delà des modes [1]. Je continue de penser que ces définitions ne sont utiles que lorsqu'on rencontre des difficultés, qui obligent à distinguer convergence uniforme et convergence simple. À ce niveau, elles apportent du sens.

Ce débat, « faut-il introduire ou non les définitions des limites au lycée ? », serait sans doute encore d'actualité si on le reposait aujourd'hui. Il contient en lui-même une grande partie des germes de ce qui éloigne les élèves de notre discipline : un excès de rigueur et de vocabulaire à un moment où cela ne sert à rien. Les garçons motivés qui ont davantage de pression sociale vont accepter ces difficultés parce qu'ils se doivent de réussir en maths. D'autres, moins motivés, et les filles en particulier vont se désintéresser et se diriger vers la physique ou les sciences naturelles. Les filles sont souvent majoritaires en Première S et minoritaires en Terminale S, spécialité maths.

Plutôt que de modifier à nouveau les programmes, nous ferions peut-être mieux de demander un moratoire pour mettre les projets de changement en attente et profiter de ce délai pour mieux appliquer ceux qui existent. Je me souviens avoir dit la même chose à un journaliste du Monde : c'était en 1985, la vie est un éternel recommencement.

Michel Soufflet

Solution de la grille donnée en page 2

de même direction à 4 côtés	p	conjonction note	o	difficulté		contient le sorbet	c	ligne trigo	t	ont un angle droit article	r
c	a	r	r	e	s	presque rond	o	v	a	l	e
note la tienne	r	e		n		droits	n	...plus ultra conditionnel	n	e	c
t	a	aigus ou obtus ?	a	n	g	l	e	s	difficulté.		t
note	l	a	centrée	u		i	vache sacrée	i	o	même	a
chiffre	l	du verbe avoir	a	i	e	n	t	sinus	s	i	n
d	e	u	x		empreinte	e	négation		directeur général	d	g
double équerre	l		e	tangente	t	a	n	vieux beau convient	b	e	l
t	e	possède	e	t'amuses chance	r	i	e	s	réfléchi	m	e
sienne	s	a	via	p	a	r	id est	i	e	paille d'or	s
gain	a 2 côtés égaux	i	s	o	c	e	l	e		l	
l	o	t	les tiens	t	e	s	dense	d	r	u	s

1. Daniel Lazet, « À propos de la notion de limite », Bulletin de l'APMEP, n° 341, décembre 1983, p. 588 et seq.

Construire des outils de formalisation de la démonstration au collège

Introduction

L'apprentissage de la démonstration, dans le cadre géométrique ou numérique, trouve toujours difficilement sa place dans les classes au collège.

Nous vous proposons de passer en revue des activités dont l'objectif principal est de permettre à tous les élèves de s'approprier les multiples compétences nécessaires pour construire cet instrument de pensée propre aux mathématiques. Nos activités s'intègrent à un parcours d'apprentissage et d'enseignement cohérent depuis la Sixième. Nous nous interrogerons sur les obstacles rencontrés et tenterons de regarder ces activités sous l'angle de la coopération (élèves/professeurs, élèves/élèves).

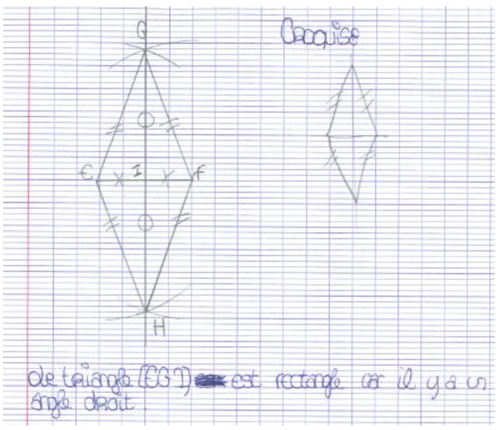
Une situation de départ

On se place au niveau de la classe de Quatrième, où l'on formalise et institutionnalise la notion de démonstration. On propose aux élèves l'exercice suivant, extrait du manuel Triangle 4e (éditions Hatier) :

> Tracer un losange EFGH tel que EF = 3 cm et EG = 5 cm.
>
> Tracer la droite parallèle à (FH) qui passe par E :
> elle coupe (GH) en I.
>
> Démontrer que le triangle EGI est rectangle.

Le premier obstacle est la construction de la figure. Elle nécessite d'exécuter diverses étapes, guidées par l'application de propriétés. On est déjà au premier palier de la démonstration. Il est fondamental pour l'apprentissage de la démonstration de donner du sens à « l'exigence » de justifier par un savoir.

Plusieurs élèves ne prennent pas en compte l'ordre dans lequel sont énumérés les sommets du quadrilatère : leur dessin fait apparaître [EF] comme une diagonale et [EG] comme un côté, et non l'inverse.



L'auteur de cette copie a interprété l'énoncé comme un programme de construction linéaire, mais il semble qu'une surcharge cognitive se soit produite, qui l'a conduit à construire un losange prototypique (grande diagonale verticale) tout en plaçant le premier point (E) à gauche de la feuille, et non en bas.

On remarque que l'élève a codé par un symbole toutes les propriétés qu'il pensait connaître : le codage doit être objet d'enseignement et son utilisation doit être définie dans le contrat didactique passé entre élèves et professeur. Le croquis ne renseigne pas sur la chronologie de la construction et n'est pas en lien suffisant avec l'énoncé, dont les premières données sont manquantes. Enfin, c'est par par reconnaissance « à l'œil » de l'angle droit que l'élève conclut que le triangle est rectangle : il est donc au niveau de la géométrie perceptive visuelle des figures dans une reconnaissance globale, telle qu'on la pratique en CM2 ou en début de Sixième. En pensant la démonstration dans le cadre d'un parcours d'apprentissage-enseignement depuis la Sixième, voire le CM2, cette dernière remarque nous a incité à construire des activités où le sens de la vue est pour un moment suspendu, et remplacé par le toucher.

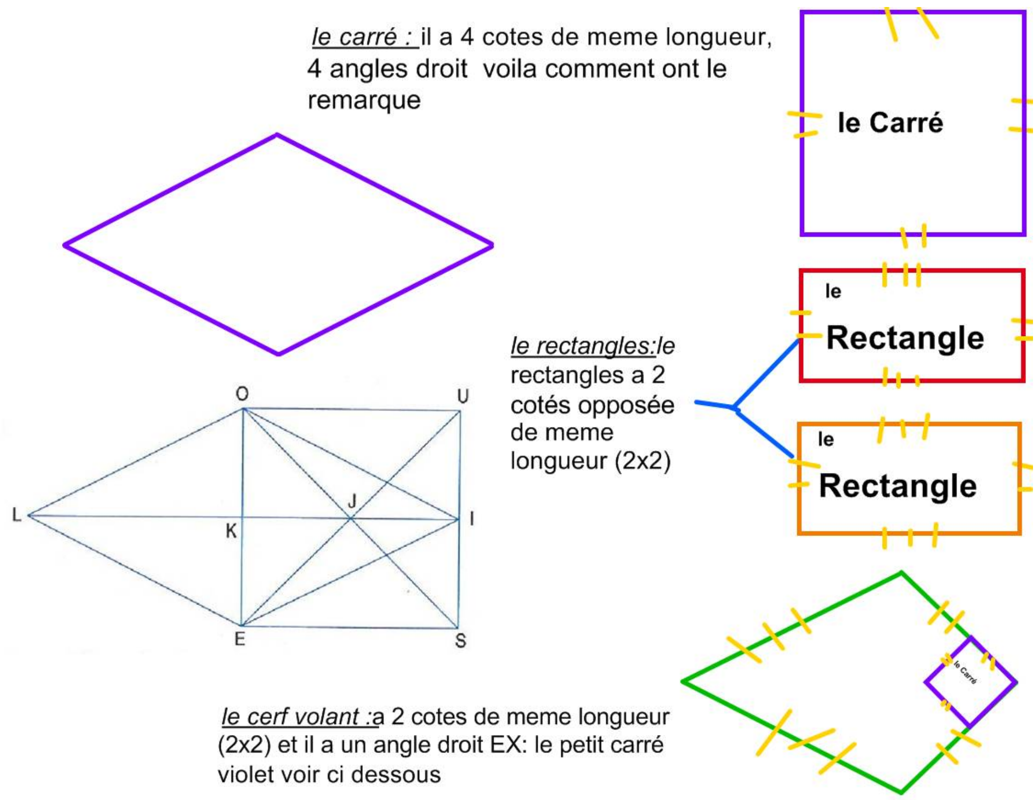
Des activités haptiques

Les activités haptiques, ou tactiles, consistent à décrire un objet, les yeux bandés, avec verbalisation orale des indices perçus. Un observateur est chargé de noter par écrit cette production orale. Les objets sont des figures géométriques simples, construites en tasseaux de bois de section carrée de 10 mm de côté et collées sur une plaque de carton. Par reconnaissance haptique des figures, les élèves vont passer d'une perception globale (c'est un rectangle, ça se voit) à une géométrie des propriétés.

Cet outil peut être utilisé avec de jeunes enfants pour la reconnaissance à l'aveugle des lettres de l'alphabet. Il permet la création de l'image mentale d'une lettre, d'une figure géométrique.

Les notes prises par l'observateur sont réinvesties dans un travail de synthèse et de formalisation des propriétés décrites par le joueur « aveugle ». Un logiciel de carte mentale est utilisé par l'élève pour structurer la phase de formalisation et faire émerger les invariants des figures géométriques (nombre de côtés, de sommets, longueurs égales, perpendicularité, parallélisme. . .)

Le contrat didactique entre l'élève et le professeur s'est enrichi, l'élève convenant désormais de ceci : « Quand je cherche à identifier des figures géométriques, j'énonce les propriétés que j'ai reconnues ». Ce travail est réinvesti dans une activité qui consiste à extraire des configurations de base d'une figure complexe en justifiant.



Ces premiers écrits vont permettre aux élèves de construire **dans le temps** une formalisation des propriétés caractéristiques des figures de base en vue d'une institutionnalisation.

Du numérique pour donner du sens au « si … alors … »

« Le camping des trois chênes » est un problème numérique qui avait été donné aux évaluations nationales des acquis des élèves de CM2 en 2011 :

Camping des trois chênes

Tarif par jour

Adulte : 8 €

Enfant (jusqu'à 10 ans) : 3 €

Emplacement pour une caravane : 6 €

Emplacement pour une toile de tente : 3,50 €

Animaux autorisés : gratuit

Pierre et Catherine, accompagnés de leur fille Léa de sept ans et de leur chien, installent leur caravane dans le camping des trois chênes. Ils souhaitent y rester trois jours. Combien paieront-ils pour une semaine ?

Nous avons transformé ce problème en omettant de préciser l'âge de Léa, qui devient donc un paramètre conditionnant la résolution. Aucune consigne n'est donnée : les élèves en ont l'habitude, car ceci est intégré dans le contrat didactique de la classe. Les productions sont ramassées et analysées. Ces productions, projetées en classe, vont faire naître des échanges collectifs qui permettront à chacun de commencer à construire la notion attendue.

Dans la production ci-dessous, tout se passe comme si l'élève avait implicitement supposé Léa âgée de moins de dix ans. Malgré les apparences, la subordonnée conjonctive « si ils restent trois jours » n'est pas une condition qui déclenche une résolution particulière, mais une simple donnée utile à la résolution numérique du problème. L'élève ne propose d'ailleurs pas d'autre résolution.

#1 8x2 = 16 16+9 = 25 Ils payeront 91€ si ils
16x3 = 48 25+18 = 43 restent 3 jours.
3x3 = 9 43+48 = 91
6x3 = 18

Au contraire, la production suivante montre que certains élèves produisent naturellement des subordonnées de condition. La clause « si condition ... » y est bien lisible.

#1
Calculs P(8x2)x3 + 3x3 + 6x3 = 69
P= 16 x 3 + 3x 3 + 6x3
P= 48 + 9 + 12
P= 69
Si leur fille a moin de 10 ans ils payeront 69 euros sinon ils payeront 84 euros.

C'est dans l'échange avec la classe que la phrase « si condition alors conclusion » est construite en totalité.

Quant au codage « #1 » sur la production de l'élève, il signifie « essai 1 ». Cette numérotation des essais est aussi intégrée dans le contrat didactique de la classe, afin de pouvoir lire toutes les stratégies des élèves, d'éviter les ratures ou les effaçages qui empêchent de lire tous les cheminements.

Et si Léa dormait dans une tente ? Cette nouvelle hypothèse, qui n'apparaît pas dans les productions des élèves, est soulevée par le professeur. Les élèves doivent alors reprendre l'exercice, avec comme consigne complémentaire l'écriture de phrases de la forme « si condition(s) alors conclusion ».

Faire travailler ce type de phrase dans le cadre numérique présente l'avantage de permettre à tous les élèves d'élaborer des réponses. Ils ne sont en aucun cas bloqués par un manque de connaissances de propriétés géométriques. Donnée en début de l'année de Quatrième, l'activité permet également de faire le diagnostic de la classe sur le calcul en ligne et la résolution de problèmes numériques.

Une situation a-didactique

Après le travail sur le « si.... alors ... » précédent, qui aura été consolidé avec des activités géométriques, il faut en classe de Quatrième instituer la démonstration à travers la construction du chaînon déductif. Ici aussi, le choix est fait de ne pas travailler dans le cadre géométrique, ni même dans le cadre mathématique au sens scolaire du terme : ceci interroge les élèves, les dérange parfois, mais leur montre aussi que les mathématiques sont présentes là où ils ne l'imaginent pas toujours.

L'activité est intitulée « l'identité nationale » et consiste à donner aux élèves les éléments du code civil relatifs aux conditions pour être ou devenir français. Des cas concrets sont donnés, à partir desquels les élèves doivent produire une réponse justifiée qui montre que le ou les personnages sont français ou peuvent le devenir. Tous les élèves n'ont pas le même cas.

> Exemple 1 : John, 13 ans, est né à Cambridge en Angleterre, mais ses parents sont tous les deux français.

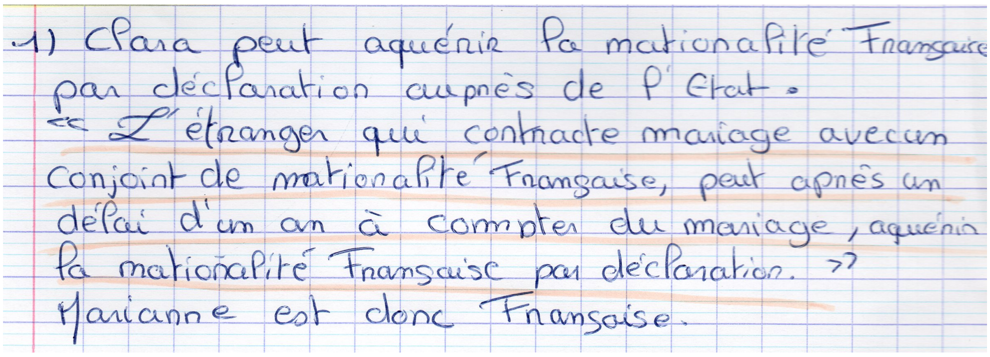
> Exemple 2 : Clara, 27 ans, est polonaise. Il y a deux ans, elle a épousé Stéphane, qui est français. Ils viennent d'avoir une petite fille, Marianne.

Encore une fois les productions sont ramassées et analysées. Elles sont ensuite projetées devant toute la classe, et s'ensuit le débat collectif.

La production suivante est très significative des actions produites par les choix didactiques faits dans un parcours-enseignement pensé sur l'année entière :

1) Si John, 13 ans, est né en Angleterre et que ses parents sont tous les deux Français alors il est Français.

L'élève a réutilisé le « si condition(s) alors conclusion » travaillé les semaines ou mois précédents. Il montre qu'il a bien compris le rôle des conditions et des conclusions. Il ne sera pas le seul dans la classe. La production suivante permettra à toute la classe de se construire la structure du chaînon déductif comme un texte qui comporte trois parties : les conditions adaptées à la situation, une connaissance en relation avec ces conditions et une conclusion en relation avec la connaissance. Ici les articles du code civil jouent le rôle des connaissances.


1) Clara peut aquérir la nationalité Française par déclaration auprès de l'Etat.
« L'étranger qui contracte mariage avec un conjoint de nationalité Française, peut après un délai d'un an à compter du mariage, aquérir la nationalité Française par déclaration. »
Marianne est donc Française.

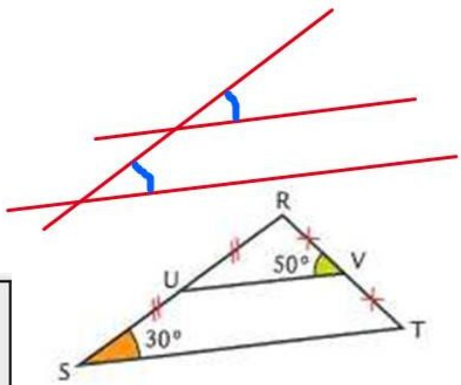
Les trois éléments du texte sont bien repérés par tous les élèves et un nouveau cas est donné avec pour consigne de produire un texte qui comporte ces trois éléments.

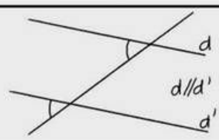
Une activité dans le cadre géométrique est ensuite donnée pour que les élèves transfèrent ce nouvel apprentissage dans le cadre géométrique cette fois.

Le tableau blanc interactif, outil de résolution

Voici une activité simple de calcul d'angle sur le tableau blanc interactif, montrant comment celui-ci peut favoriser l'activité des élèves pour franchir les difficultés et les obstacles à l'apprentissage de la démonstration.

43 À partir des indications portées sur la figure, calculer l'angle $\widehat{SRT}$.



Si deux droites sont parallèles et sont coupées par une sécante alors elles forment des angles correspondants de même mesure.	

Donc les angles $R\hat{U}V$ et $R\hat{S}T$ sont correspondants et de même mesure, $R\hat{U}V = 30°$

Les élèves éprouvent des difficultés à extraire une information dans un univers riche. Ainsi, en mathématiques, il leur est difficile de reconnaître une configuration de base dans une figure complexe.

Grâce à ses différentes fonctionnalités, le tableau blanc interactif devient un outil pédagogique et didactique de résolution de problèmes en géométrie. Son outil « instantané » permet de prendre une photo de la figure complexe à partir d'un fichier ouvert ou d'un logiciel de géométrie dynamique. Ses outils de dessin et d'annotation permettent d'extraire les configurations de bases associées. Son module « galerie » permet de mettre en corrélation ces figures avec les étiquettes de savoir et d'importer le texte de la propriété concernée. Son outil « texte » permet, par exemple, d'écrire la conclusion. Sa fonction « trieuse de diapositives » permet de travailler la chronologie des pas de démonstration. Sa fonction « affichage des participants » permet d'autoriser ou non individuellement un participant à annoter le tableau blanc interactif. Enfin, sa commande d'archivage permet le stockage et la consultation des fichiers sur le serveur de communication LCS.

Conclusion

Dans cet article, nous sommes partis d'une situation de démonstration en Quatrième. L'analyse des productions de nos élèves nous a renseignés sur l'état de leurs connaissances et compétences – en cela, on peut intégrer cette situation dans une évaluation diagnostique –, mais aussi sur les obstacles rencontrés dans les apprentissages.

En ciblant les obstacles, nous avons proposé des situations adaptées qui pourront permettre à l'élève de progresser. Ces obstacles peuvent être anticipés, et des situations-obstacles peuvent être intégrées dans des parcours-enseignement. Des obstacles différents se dévoilent dans ces parcours et l'enseignant devra faire preuve d'imagination pour proposer de nouvelles situations.

Les activités haptiques ainsi que l'utilisation du numérique s'intègrent dans les parcours, soit pour construire des images mentales fortes, soit pour formaliser des connaissances en partant de l'univers familier des élèves.

À travers ces différentes activités autour de la démonstration géométrique dans un parcours-enseignement pensé tout au long du collège, voire à partir du cycle 3, nous avons cherché à montrer comment l'idée de coopération et/ou de collaboration entre le professeur et ses élèves, ce que d'autres appellent l'action conjointe, s'intègre et participe à la construction des apprentissages chez nos élèves.

Loïc Coulombel & Jacques Duval

Présentation détaillée de la brochure : *Le nombre d'or, Nouveautés mathématiques ludiques*

Cet ouvrage préfacé par Eric Lehman [1] est un recueil d'activités géométriques et algébriques variées en relation avec l'histoire de l'art et la biologie, pour la plupart originales sur le « Nombre d'Or ». Nous vous présentons les divers domaines tant contemporains qu'anciens où ce nombre très particulier a été employé. Vous trouverez donc dans ces pages :

– La petite histoire du nombre d'or, celle du pentacle ou pentagone régulier, diverses spirales reliées ou non au nombre d'or, vues par les architectes, peintres et/ou mathématiciens.

– Leurs propriétés scientifiques curieuses : la spirale d'or dont l'accroissement recopie presque exactement celle du nautile, du cœur du tournesol, de certaines nébuleuses, mais pas celle de votre tuyau d'arrosage.

– Des nouveautés, pentagone, croix et spirale célestes, remarquables à cause de leurs relations étroites avec les vues en perspective.

– L'Univers de ces objets fascinants : des pavages du plan, des considérations astronomiques et/ou de navigation en mer, les secrets des beaux tableaux renaissance et des belles photos numériques.

Dans chaque chapitre, des présentations culturelles et ludiques vous permettront d'entrer par la grande porte et de cheminer à votre goût et votre rythme dans ce « langage mathématique de la beauté » comme le qualifie Cédric Villani dans sa collection « Le monde est mathématique ». N'ayez pas peur de ces derniers mots car vous en ferez des dessins superbes, des pliages, des puzzles, des jeux pour les grands et petits.

Les auteurs conçoivent depuis longtemps des activités pour la formation des professeurs des écoles, des lycées et des universités dans le cadre de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques.
Format A5, 168 pages prix 7 €.

1. Eric Lehman a été le premier directeur de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie en 1974.

Notes de lecture en histoire des mathématiques

Jacques Sesiano, *Récréations mathématiques au Moyen Âge*, 290 pages, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2014, 46 euros.

L'auteur de ce livre est un spécialiste des mathématiques médiévales latines et arabes, auteur d'ouvrages érudits reconnus. Dans ce livre passionnant et de lecture aisée, qui se veut « à la croisée de l'histoire et des mathématiques », il expose un important corpus de problèmes récréatifs mathématiques présents dans les textes médiévaux : problème des tonneaux, des gardiens du verger, de la multiplication des lapins, et bien d'autres encore, célèbres ou oubliés. De nombreux textes originaux rédigés en moyen français sont proposés ; d'autres sont traduits en français d'aujourd'hui à partir du grec, du latin, de l'italien, de l'allemand ou occasionnellement de l'arabe : la version originale est alors fournie en note. Dans certains cas, des analyses mathématiques sont données, avec les notations de notre temps. Signalons que ce chapitre apparemment léger de l'histoire des mathématiques présente pour le chercheur de très grandes difficultés : les problèmes récréatifs ont énormément voyagé d'une culture à une autre, de sorte que tenter de retrouver les chemins qu'ils ont suivis et d'étudier les modes de leur variation implique une documentation colossale et la maîtrise d'un très grand nombre de langues. Aucune érudition individuelle ne peut y suffir, et on ne peut donc faire grief à l'auteur de ce livre d'avoir oublié telle ou telle occurrence de ces problèmes dans la littérature. On ne peut en revanche l'exempter de certains reproches sérieux.

Évoquant le fameux « partage des chameaux », dix-sept bêtes à diviser en une moitié, un tiers et un neuvième (p. 198-199), Sesiano n'y voit qu'un problème de partage proportionnel avec somme des coefficients différente de 1, ce qui lui fait dire : « les ouvrages médiévaux ont quelques exemples de tels problèmes ». C'est là une confusion des genres, car si les problèmes de partage réputés impossibles sont anciens et courants dans de nombreuses cultures, le bel artifice de l'emprunt d'un chameau supplémentaire, à l'origine de l'extraordinaire succès de l'histoire, est, dans l'état actuel de nos connaissances, attesté pour la première fois dans l'Iran du XVIII^{e} siècle : on se reportera à l'étude détaillée de ce problème publiée par la *Revue d'histoire des mathématiques* en 2013.

Sesiano traite longuement du problème des « passagers indésirables » (p. 164-171). J'en rappelle la version la plus courante : pour alléger un bateau essuyant une tempête, on décide de sacrifier la moitié des trente passagers en s'en remettant au sort ; les passagers, quinze croyants et quinze infidèles, étant assis en rond, le capitaine les compte circulairement de un à neuf, pousse le neuvième par-dessus bord, puis recommence avec ceux qui restent, et ainsi de suite ; on demande comment les croyants doivent être placés pour qu'ils soient épargnés et que les infidèles soient noyés. L'auteur note à juste titre (p. 166) qu'il en existe des versions chrétiennes, musulmanes et juives. Pour ces dernières, il se borne à renvoyer à : « Moshe ben Maïmon (Maimonides, m. 1204) *Hilkhoth Akum* X, 1 (trad. Pranaitis) ». Source *a priori* douteuse, car ce Pranaitis, un prêtre lithuanien, fut seulement l'auteur d'une compilation truquée à visée polémique, dite en français *Le Talmud démasqué*, qui voisine aujourd'hui avec le *Protocole des sages de Sion* sur les sites antijuifs de tous ordres. Plus étrange encore : le livre de Pranaitis ne contient rien sur notre problème mathématique. Voulant démontrer la cruauté des Juifs, il cite *Hilkot ʿakum* X, 1 sous la forme : « Si vous voyez un *ʿakum* [non Juif] en difficulté ou en train de se noyer, n'allez pas à son secours. Et s'il est en danger de mort, ne le sauvez pas de la mort [...] » Alors qu'il existe bel et bien des manuscrits judéo-arabes mentionnant le problème des passagers indésirables, cette référence à Pranaitis est donc un inexplicable dérapage.

Driss Lamrabet, *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines*, deuxième édition revue et augmentée, 483 pages, diffusion Lulu, 2014, 49,95 euros.

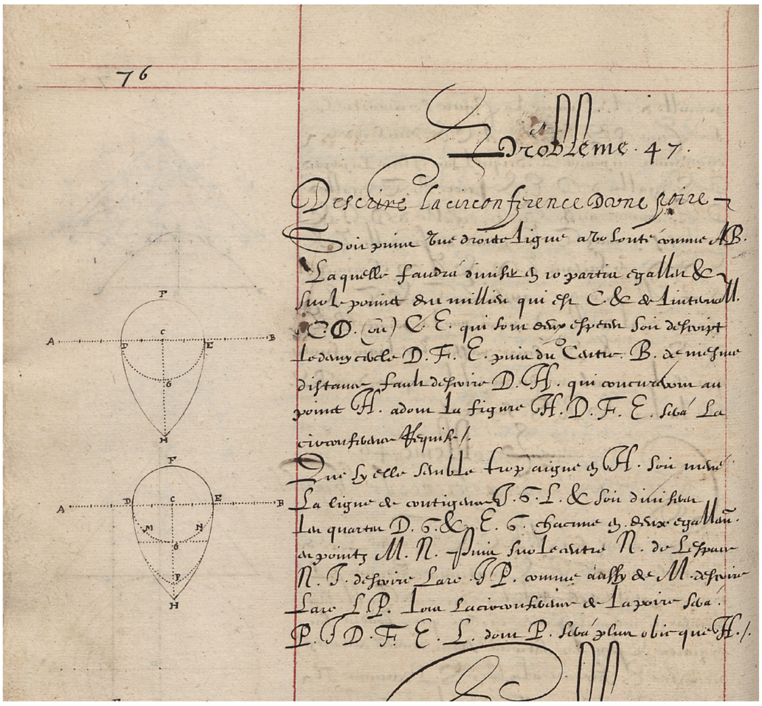
Un tel ouvrage ne s'analyse pas, il s'utilise. C'est une mine sans équivalent de renseignements bio-bibliographiques sur les mathématiciens du Maghreb, auxquels il rend justice avec précision, sans sombrer dans le discours apologétique. Chose exceptionnelle, le recensement se poursuit jusqu'au milieu du vingtième siècle. Il est complété de synthèses utiles et agréables à lire. Vingt ans après la première édition, restée fort confidentielle, mais bien connue de spécialistes qui ne lui ont pas toujours rendu justice, cette deuxième édition est la bienvenue. Elle est très augmentée, tient compte des progrès accomplis par les chercheurs.

Il est dans la nature de ce type d'ouvrage de comporter des erreurs. Beaucoup ont d'ailleurs été corrigées d'une édition sur l'autre, mais d'autres sont inévitablement apparues. Pour donner quelques exemples, les auteurs al-Suwîrî (M448) donné mort en 1879 et al-Tanânî (M471) donné mort en 1902 sont en réalité un seul et même homme, et c'est la deuxième date qui est exacte ; tandis que l'auteur al-ʿAlj (M459) donné comme vivant en 1888 est mort du choléra en 1879. Quant à Ibn Hamza (M558, fin du XVI^{e} siècle), lui attribuer un premier pas vers les logarithmes ne repose que sur une tradition sans fondement. Des cotes de manuscrits sont erronées ou périmées. Tout ceci n'est rien si l'on mesure la quantité d'informations que l'auteur a modestement recueillies et mises entre les mains des chercheurs spécialisés. Au-delà de ce cercle, ce livre mérite d'être découvert par tout un public qui n'est sans doute pas étroit, amoureux à la fois des mathématiques et des pays du Maghreb.

Pierre Ageron

Décrire la circonférence d'une poire

selon Guillemme Le Vasseur, « maître mathématicien » (Dieppe, 1564 – Rouen, 1634)

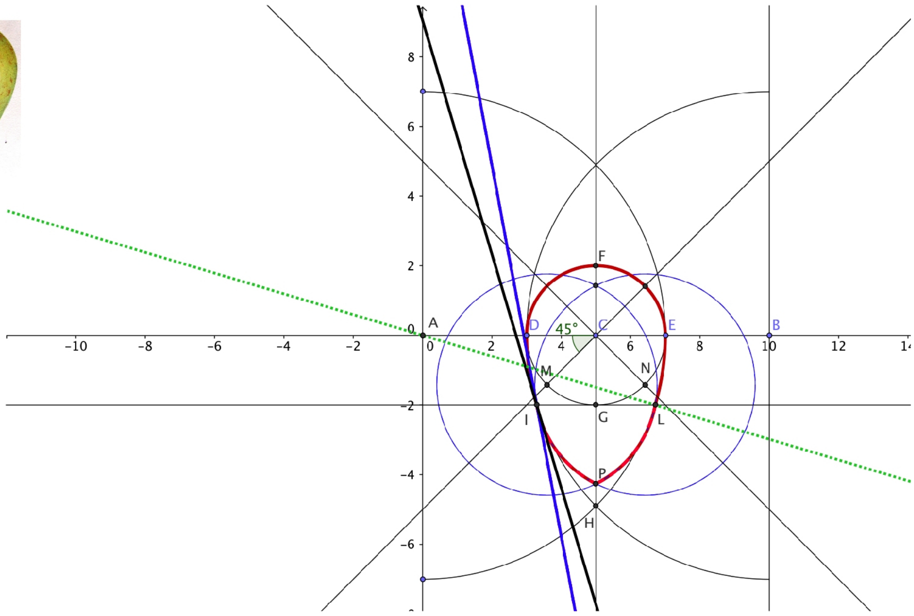


Traité de fabricomologie
et ergastice du poinct
manuscrit *in-fol.* 28, bibliothèque de Caen

Problème 47.

Soit prise une droite ligne à volonté comme AB, laquelle faudra diviser en dix parties égales. Sur le point du milieu qui est C et l'intervalle CD ou CE, qui sont deux égaux, soit décrit le demi-cercle DFE. Puis du centre A, de l'intervalle AE, faut décrire l'arc EH ; et du centre B, de même distance, faut décrire DH, qui concourront au point H. Adonc la figure HDFE sera la circonférence requise.

Que, si elle semble trop aiguë en H, soit menée la ligne de contingence IGL, et soient divisés les quartiers DG et EG chacun en deux également aux points M, N. Puis sur le centre N, de l'espace NI, décrire l'arc IP, comme aussi de M décrire l'arc LP. Lors la circonférence de la poire sera PIDFEL, donc P sera plus obtus que H.



LA POIRE EST-ELLE LISSE ? Non ! La construction avec GeoGebra (ou le calcul des dérivées) montre que l**a tangente noire** et **la tangente bleue** sont différentes, et qu'il faut, pour qu'elles coïncident, placer *M* tel que (*CD*, *CM*) = 29° – et non 45°.

NUMÉRO QUATORZE : mars 2015

ISSN : 1969-7929 (imprimé)
ISSN : 1760-6500 (en ligne)

LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

— Annonces et mots fléchés, par Danielle Salles 2
— Éditorial, par Gilles Damamme 3
— Une vie digne d'être vécue, par Gilles Damamme 4
— Les tests d'équivalence et de non-infériorité, par Jacques Faisant 9
— Point de vue : Les réformes de l'enseignement des mathématiques, par Michel Soufflet 18
— Construire des outils de formalisation de la démonstration au collège, par Loïc Coulombel & Jacques Duval 21
— Notes de lecture, par Pierre Ageron 26
— Décrire la circonférence d'une poire, par Pierre Ageron. 27

Comité de rédaction : Pierre Ageron & Éric Trotoux - Composition LaTeX.

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http://www.univ-IREM.fr/ Prix au numéro : 13 euros + frais d'expédition si envoi par avion.