LE MIROIR DES MATHS

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 73 60** - Fax. : **02 31 56 73 20**
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO QUINZE : mars 2016

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

Éditorial

Dans ce nouveau numéro du *Miroir des maths*, Danielle Salles nous initie aux carrés géomagiques. Ce concept, créé par Lee Sallows est une généralisation des carrés magiques qui enrichit le monde des carrés magiques avec des visions géométriques. Néanmoins, son article se focalise sur un carré d'ordre 2, présenté dans un article de *Pour la Science* de Juin 2013. Il n'y a pas de carré magique classique d'ordre 2 et Lee Sallows a laissé ouverte, la question de leur existence dans le cadre géomagique. Danielle nous fait découvrir ce carré géomagique d'ordre 2 et construit des activités de codage réinvestissables dans la pratique de la classe.

Dans une autre direction, Pierre Ageron nous présente son travail d'exploration et d'analyse des manuscrits mathématiques de la bibliothèque de Caen du XIII^{e} siècle au XVIII^{e} siècle. L'intérêt non seulement culturel mais aussi pédagogique de cette réflexion est patent.

Je reprends maintenant quelques événements importants de la vie de notre IREM depuis un an.

En mars 2015, le « groupe histoire & statistiques médicales » a animé un exposé sur le thème : "Cancer, tabac, hasard : premiers apports de la statistique".

Puis en juin, Claudine Plourdeau et Marion Bellin (professeur d'histoire-géographie) nous ont présenté un travail interdisciplinaire (EPI avant l'heure ?) qu'elles ont mené ensemble dans leur collège. Cette réunion plénière fut l'occasion de fêter le départ en retraite de notre estimé collègue Ruben Rodriguez. Faux départ ! puisqu'il continue d'animer le site du CEMU où il a mis en ligne une série de vidéos sur la didactique des mathématiques visibles sur le serveur www.canal-u.tv. Toujours en juin, le premier colloque inter-IREM « Popmaths » s'est tenu à Toulouse, organisé par Thierry Mercier, responsable national de cette commission, et aussi un des pères fondateurs de notre rallye.

Le séminaire de prérentrée 2015 a eu lieu à Caen fin septembre. Sans oublier la promotion de plusieurs opérations de popularisation des mathématiques, en voici les temps forts :

Clarisse Gallien et Bertrand Fouques dans leur exposé "Quand les vecteurs nous transportent. . .et nous questionnent ? !" nous ont montré que les vecteurs pouvaient sortir du cahier ou du livre de mathématiques pour venir s'inviter dans la classe.

Dans une présentation de son parcours de recherche estival, Ruben Rodriguez nous a questionné a propos « des triangles rectangles de Ruben ». Un compte-rendu de cette expérience didactique, fait l'objet d'un article de ce numéro du *Miroir des maths*.

En clôture, Odile Jenvrin a détaillé le projet européen qu'elle a mené avec son établissement en coopération avec d'autres établissements européens.

En décembre, Michel Soufflet nous a soumis quelques exemples d'erreurs liées aux mathématiques dans la Presse. Il a aussi évoqué le livre de Leila Schneps et Coralie Golmez, « Les maths au tribunal, quand les erreurs de calcul font des erreurs judiciaires ».

Par ailleurs, une collaboration s'est engagée avec l'Inspection générale pour produire, sur le site EDUSCOL, des documents d'accompagnement des programmes. Notre IREM à participé activement à cette tâche notamment sur le thème « des maths en lien avec le quotidien ».

Avant de souhaiter à tous une bonne lecture, j'attire votre attention sur l'édition 2016 du traditionnel rallye mathématique de l'IREM, préparé par Gérald Giangrande, Jérôme Huet et Thierry Mercier. Le RDV16 aura lieu le vendredi 22 avril 2016. Nous espérons vous retrouver nombreux pour cet événement !

Gilles Damamme – Directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Repères IREM *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

Sommaire du Numéro 102 – Janvier 2016

— **La formule de l'aire du triangle**
Katia VIARD, Guillaume MOUSSARD, IREM de Nantes
— **Compte rendu d'un travail interdisciplinaire mathématiques-sciences physiques (fonctions, statistique et hydrostatique)**
Brigitte Chaput, Hamid Hadidou, Christine Ducamp, IRES de Toulouse
— **Mathématique et connaissance du monde**
Rudolf Bkouche, IREM de Lille
— **La complexité c'est simple comme la dichotomie**
Guillaume Connan, IREM de Nantes
— **Comment les enseignants de mathématiques choisissent les manuels – Étude sur le cas des manuels de seconde, édition 2014**
Ghislaine Gueudet, Marie-Pierre Lebaud, IREM de Rennes

.

Carrés Géomagiques

Introduction

Nous souhaitons étudier les carrés géomagiques inventés par Lee Sallows en 2001 et présentés par Jean-Paul Delahaye dans la revue *Pour la Science* du mois de juin 2013. Cette étude peut être proposée à des élèves-professeurs ou enseignants en formation continue pour renforcer des notions algébriques et calculer dans l'univers des nombres binaires.

Nous présentons en fin de texte une activité pour les élèves.

Il n'est peut-être pas nécessaire de vous présenter les carrés magiques qui sont des tableaux de nombres, tels que le plus ancien connu : le célèbre carré de Lo Shu, IV^e siècle avant J.C. représenté ci-dessous.

Un tableau carré de nombres entiers est un carré magique « normal[1] » d'ordre n si la somme des termes de chacune des lignes, de chacune des colonnes et de chacune des diagonales est toujours la même. Les termes doivent être **des nombres entiers tous différents** entre 1 et n^2. Dans l'exemple ci-dessous la somme est quinze et le carré magique est normal d'ordre trois.

	4	**9**	**2**	Σ=15
	3	**5**	**7**	15
	8	**1**	**6**	15
15	15	15	15	15

Voici une question à propos du carré magique ci-dessus : combien de carrés magiques d'ordre 3 et de sommes toutes égales à 15 est-il possible de construire ?

Autrement dit combien de sommes de trois chiffres de 1 à 9, sans répétition et égales à 15 existe-t-il ?

Puisque notre tableau a neuf cases, nous devons au moins retrouver les huit sommes de notre tableau.

Nous avons les sommes commençant par 1, par ordre croissant :

$1 + 2 + 12$ est impossible, $1 + 3 + 11$ aussi, $1 + 4 + 10$ aussi.

$1 + 5 + 9$ est possible, $1 + 6 + 8$ aussi, $1 + 7 + 7$ est impossible.

Les sommes commençant par deux :

$2 + 3 + 10$ impossible, $2 + 4 + 9$ est possible, $2 + 5 + 8$ aussi, $2 + 6 + 7$ aussi.

Les sommes commençant par 3 :

$3 + 4 + 8$ est possible, $3 + 5 + 7$ aussi, $3 + 6 + 6$ est impossible.

Les sommes commençant par 4 : $4 + 5 + 6$ est possible.

Les sommes croissantes commençant par 5 sont impossibles. Récapitulons :

$1 + 5 + 9$ est possible, $1 + 6 + 8$ aussi, $2 + 4 + 9$ est possible, $2 + 5 + 8$ aussi,

$2 + 6 + 7$ aussi , $3 + 4 + 8$ est possible, $3 + 5 + 7$ aussi, $4 + 5 + 6$ est possible.

Nous avons besoin de huit sommes distinctes, puisque nous en avons trouvé exactement huit, il n'y a qu'un seul tel carré magique. Le nombre 5 apparaît quatre fois et c'est le seul, il a donc nécessairement la position centrale. Plaçons le, ainsi que les lignes et colonnes qui le contiennent, les autres lignes et colonnes se complètent naturellement. On peut faire tourner la croix jaune de ¼ de tour, de ½ et ¾ , on peut aussi effectuer des symétries en échangeant la première et la troisième colonne ou en échangeant la première et la troisième ligne :

	6	**7**	2	15
	1	**5**	**9**	15
	8	**3**	4	15
15	15	15	15	15

	6	**7**	6	15
	9	**5**	**1**	15
	4	**3**	8	15
15	15	15	15	15

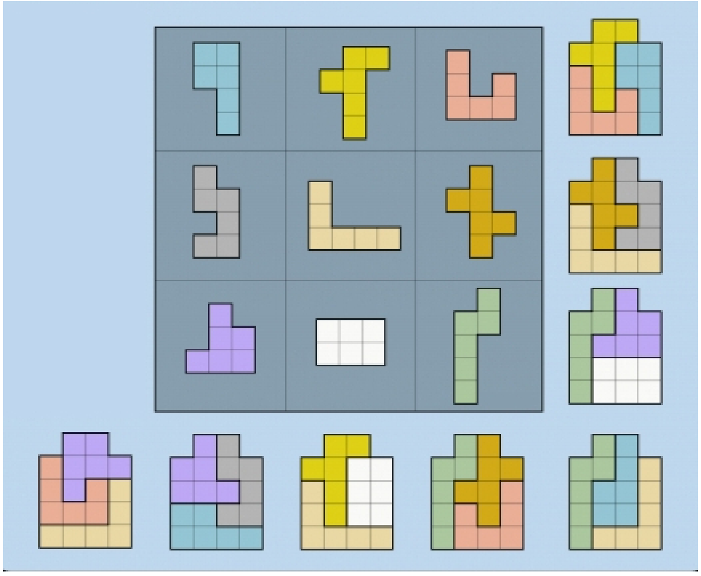
Nous vous présenterons notre travail sous forme de **narration de recherche[2]** car il nous paraît intéressant de faire participer le lecteur à différentes façons d'aborder un problème ; vous verrez que, même si les différentes démarches n'aboutissent pas sur des résultats nouveaux, elles sont source de bons exercices tant pour l'élève que pour le professeur.

Ainsi dans ce qui suit nous allons travailler dans le domaine de la théorie des nombres, celui des nombres binaires et des nombres modulo 15 ainsi que dans celui des espaces vectoriels de dimension 15, ce qui est assez inattendu dans le domaine des carrés géomagiques.

1. Si l'on s'affranchit des bornes 1 et n^2, on définit un simple carré magique.
2. La narration de recherche consiste à conter une démarche de découverte avec ses errements et retours en arrière, elle permet de montrer au lecteur le cheminement du chercheur et peut inciter celui-ci à réfléchir par lui-même sur le sujet.

Qu'est-ce qu'un carré géomagique ?

Un carré géomagique d'ordre n est un ensemble de n^2 figures géométriques toutes différentes, disposées en carré. Elles peuvent s'additionner au sens géométrique c'est-à-dire par juxtaposition sans recouvrement après déplacement, mais éventuellement avec retournement, de telle sorte que leur tableau d'addition ait la propriété caractéristique des carrés magiques à savoir : les sommes des colonnes, des lignes et des diagonales sont égales à une même figure géométrique.



Voici ci-contre un carré géomagique d'ordre 3. Ce carré géomagique est issu du joli site de Lee Sallows qui a consacré beaucoup de ses recherches à ce sujet : http://www.geomagicsquares.com .

Et l'ordre deux ?

Il n'y a pas de carré magique d'ordre deux.
En effet considérons un carré d'ordre 2x2 d'éléments distincts a, b, c, d,

	a	**b**	$a+b$
	d	**c**	$d+c$
$d+b$	$a+d$	$b+c$	$a+c$

Pour qu'il soit magique, c'est-à-dire que les conditions sur les diagonales, les lignes et colonnes soient respectées, il faudrait que :

$a+b=d+c=a+c=b+c=a+d=b+d.$

Cela implique par simplifications [3] successives que $a=b, b=d, b=c$.
Il n'y a donc pas de carré magique d'ordre 2 car dans un carré magique tous les nombres sont différents.

J.P. Delahaye propose dans son article un contre-exemple à ce résultat dans l'univers des **carrés géomagiques qui sont des tableaux contenant non pas des nombres mais des pièces de puzzle** qui s'additionnent par juxtaposition des pièces, sans recouvrement.

J.P. Delahaye nous présente dans son article le (seul pour l'instant ?) carré géomagique d'ordre 2 construit par Frank Tinkellenberg, informaticien hollandais, nous vous le présentons avec ses sommes géométriques :

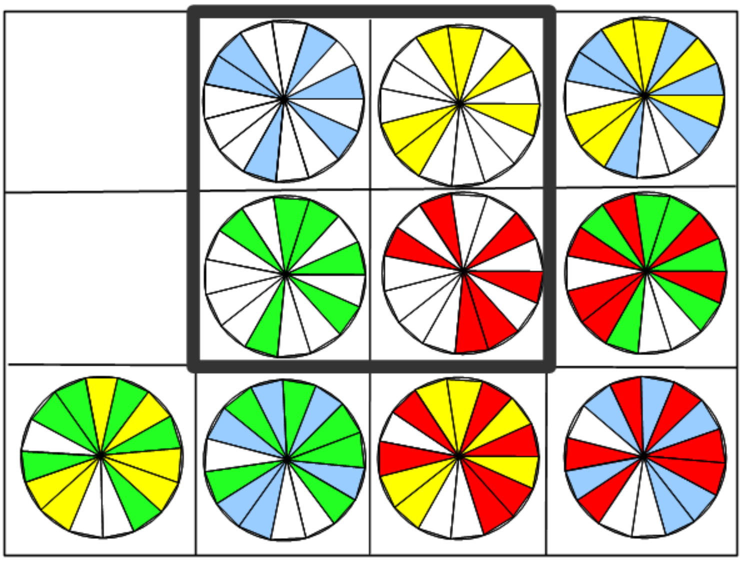


Figure 1.

3. Cette proposition peut se généraliser à des carrés magiques à coefficients dans un « demi-groupe régulier », type de structure où la simplification est possible.

Étude du carré 2x2 de la figure 1

Les pièces sont additionnées par superposition des disques, **sans recouvrement des parties colorées**, elles peuvent subir une rotation et/ou un retournement du disque pour obtenir les six sommes possibles : lignes, colonnes, diagonales.

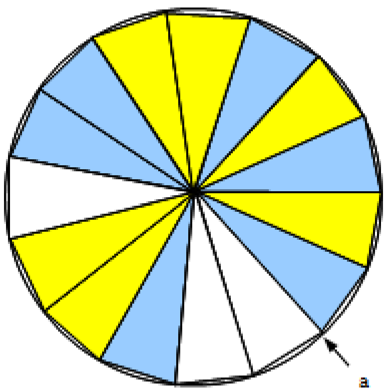
Nous nous proposons **d'étudier ces pièces d'un point de vue algébrique et/ou de la théorie des nombres** en les codant par des 15-uplets binaires. Nous aurions pu aussi les coder par des racines 15-èmes de l'unité.

Ce qui trouble beaucoup les amateurs de carrés géomagiques, c'est qu'il y a, en quelque sorte, des trous dans la figure somme contrairement à celle que nous avons décrite plus haut. Cela ne nous paraît pas crucial car il y a de nombreux carrés géomagiques avec des trous (voyez l'article de « Pour la science »).

Vérifions tout d'abord que c**e carré contient bien quatre éléments distincts en comparant tout d'abord la disposition des parts blanches** :

- Nous remarquons que les disques ont quatre parts blanches voisines sauf le bleu. **Donc le bleu est distinct des trois autres.**
- Les trois disques restants ont quatre parts blanches voisines plus deux parts blanches voisines séparées des précédentes sauf le jaune qui a trois parts voisines. Donc **le jaune est différent des deux autres restants.**
- Les deux disques restants, rouges et verts ont quatre parts blanches voisines et deux parts blanches voisines mais séparées des précédentes par deux nombres différents de parts colorées : les deux derniers disques, **rouges et verts sont bien distincts.**

Les différentes sommes sont égales du point de vue géométrique, elles ressemblent à un éventail avec neuf cases de couleur successives muni d'un pied de trois cases de couleur. Nous allons coder les différentes pièces par rapport à cette forme « d'éventail » en commençant par le point « a » situé en bas à droite de l'éventail et dans le sens trigonométrique.
Le codage du carré géomagique d'ordre 2 nous parait un excellent exercice de manipulation de concepts algébriques et de **calculs binaires.**



Nous avons pensé tout d'abord coder chacun des disques en terminant par le plus de blancs possibles pour avoir des 15-uplets les plus courts possibles. Cela ne s'est pas révélé pratique car, en fait, comme nous l'avons signalé l'addition des pièces se fait éventuellement après une rotation ou une symétrie. Nous avons alors reconstitué les formes de l'article de J. Delahaye et codé chaque pièce dans chacune des sommes qui la contient. Reprenons par exemple la somme du disque bleu et du disque jaune.

Nous allons coder ce disque de la façon suivante :

– Afin d'avoir des zéros en fin de liste nous partons du bas de l'éventail, à droite au point « a ».
– Chaque partie colorée en jaune ou en bleu est notée 1, chaque partie blanche est notée 0. Le codage se fait dans le sens trigonométrique.

D'où le résultat suivant avec calcul de la somme :

Bleu :	[1, 0, 1, 0, 1, 0 , 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Jaune :	[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Les expressions sont des 15-uplets de nombres binaires, éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Nous vous encourageons à effectuer le codage pour les autres éléments, voici les résultats :

Bleu :	[1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
Rouge :	[0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Vous remarquez que le codage du bleu est différent du précédent, en effet lors de l'addition du bleu et du rouge, le bleu est retourné, ce qui correspond à une symétrie axiale d'axe passant par le centre du disque et le point a, puis tourné de la façon suivante (où une rotation de « une part » correspond à une rotation de $\frac{2\pi}{15}$ dans le sens trigonométrique, soit 24°) :

Bleu initial :	[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Bleu retourné :	[0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1]
Bleu pivoté :	[1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
	(pivoté : rotation de 9 parts)

De même pour le rouge et le vert.

Vert :	[1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Rouge :	[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Cette remarque va être précisée lors de la formalisation mathématique de la construction.

Continuons notre codage :

Jaune :	[0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]	(rotation de une part)
Rouge :	[1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	(rotation de 6 parts)
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0,0]	
Bleu :	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]	(rotation de 4 parts)
Vert :	[1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	(rotation de 7 parts)
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]	
Jaune :	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0,1, 1, 0, 0]	(retournement)
Vert :	[1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	(rotation de trois parts)
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]	

Formalisation

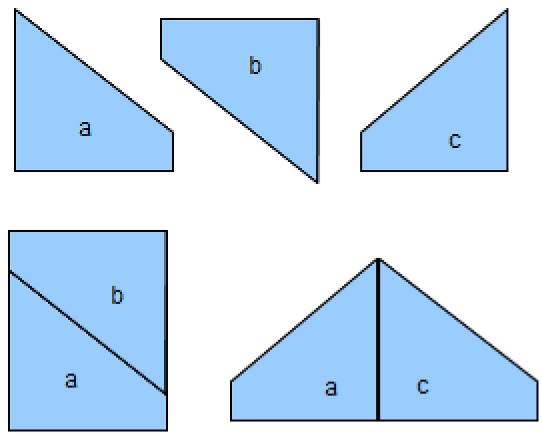
Nous pouvons considérer ces 15-uplets comme des vecteurs d'un espace vectoriel à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Cet espace vectoriel doit être, comme dans le cas de la géométrie euclidienne, muni d'une relation d'équivalence $\Re$ qui correspond à la notion de figures égales dans le plan :

Deux figures du plan euclidien sont dites **égales si et seulement si elles sont superposables après glissement et/ou retournement, ou encore après translation, rotation et/ou symétrie.**

Dans notre cas il n'y a pas de translation, **nos retournements laissent fixe un diamètre du disque.**

Cette relation dite d'égalité des figures géométriques est une **relation d'équivalence**, sur l'ensemble des figures planes, en effet, elle est :

– **Réflexive** : une figure géométrique est égale à elle-même (on dit aussi superposable).
– **Symétrique** : si une figure est superposable à une deuxième figure, cette dernière est superposable à la première.
– **Transitive** : si deux figures sont superposables à une même troisième alors elles sont superposables entre elles.



Pour notre relation d'équivalence, nous remarquons que comme ci-contre, pour celle liée au groupe orthogonal de l'espace euclidien habituel, nous pouvons construire deux "assemblages" connexes non-équivalents en partant de trois figures équivalentes

Voici donc le tableau des quatre 15-uplets avec leurs expressions équivalentes dans les différents cas de sommes des figures. Nous vous invitons à vérifier qu'ils se correspondent bien par rotation et/ou symétrie, puis que leurs sommes, bien choisies, sont toujours égales à : [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0].

Bleu [1, 0, 1, 0, 1, 0 , 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0] = [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0] = [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 , 0, 1, 1, 0, 0]	Jaune [0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0] = [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0] = [0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Vert [1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0] = [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] = [1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]	Rouge [0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0] = [0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0] = [1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]

Exercices de calcul binaire

Nous pouvons considérer ces 15-uplets comme des nombres binaires, rappelons que, dans ce cas 0 se note aussi 0, 1 se note 1, deux se note 10, trois se note 11, quatre se note 100 et ainsi de suite.

Le 15-uplet $[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$ représente la figure bleue ; écrivons le par exemple, comme un nombre binaire en partant de la droite comme dans les nombres décimaux (nous pourrions tout aussi bien partir de la gauche à cause de l'égalité des figures symétriques). Nous avons donc :

$[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$, de valeur numérique en base 10 égale à :
$0\times1+0\times2+1\times4+0\times8+0\times16+0\times32+1\times64+1\times128+0\times256+0\times512+1\times1024+0\times2048+1\times4096+0\times8192+1\times16384=\mathbf{21700}$;
qui est égal par symétrie des disques à :
$1+0+4+0+16+0+0+128+256+0+0+0+4096+0+0=\mathbf{4501}$.

Écrivons de nouveau les 15-uplets convenables pour la figure bleue et la figure jaune afin qu'elles puissent se superposer en formant la somme convenue :

Bleu :	[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Jaune :	[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]
Somme :	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]

Puis écrivons les valeurs numériques en base 10 de ces nombres binaires :

Bleu : $4+64+128+1024+4096+16384=\mathbf{21700}$
Jaune : $8+16+256+512+2048+8192=\mathbf{11032}$
Somme : $4+8+16+64+128+256+512+1024$
$+2048+4096+8192+16384=\mathbf{32732}$

Nous vérifions bien que Bleu + Jaune = Somme.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les autres sommes (voir aussi la fin de cet article).

Commentaire didactique

Cet exercice est très formateur de la pensée scientifique de nos jeunes étudiants futurs chercheurs et/ou enseignants, car on vérifie que deux modélisations morphiques d'un même univers (ici l'univers des « carrés géomagiques »), sont aussi morphiques et donc les calculs en base 10 ou en base binaire sont en correspondance dans un morphisme.

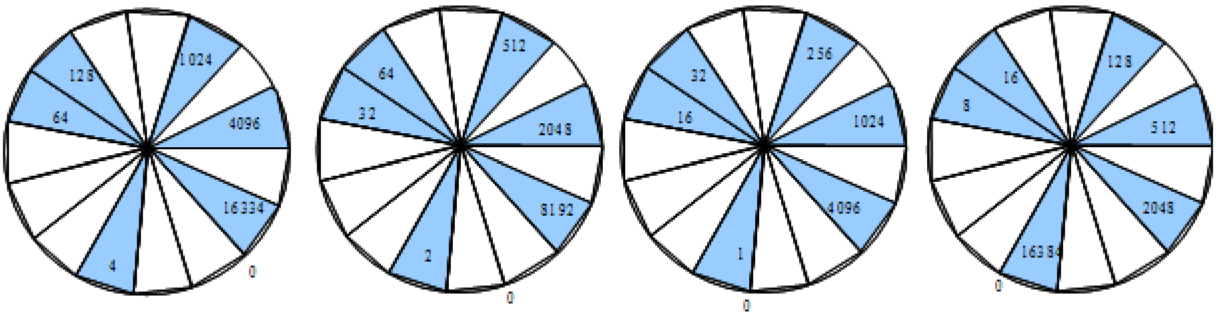
Rappelons que pour le mathématicien un morphisme est une correspondance entre deux catégories qui respecte la structure des objets de ces catégories, le terme « univers », très employé en psychopédagogie est une notion plus tolérante, donc moins structurée que celle de catégorie.

Équivalence de la rotation dans le codage binaire

Lorsque nous effectuons une rotation d'une figure, comment cela opère-t-il sur la valeur du nombre binaire correspondant ?

Reprenons le bleu et effectuons une rotation de «une part» (24°) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ou, ce qui revient au même en déplaçant l'origine « o » dans le sens des aiguilles d'une montre :

Bleu = $[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$
(1ère figure à gauche)
Bleu pivoté = $[0,1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0]$
après rotation (2ème figure)

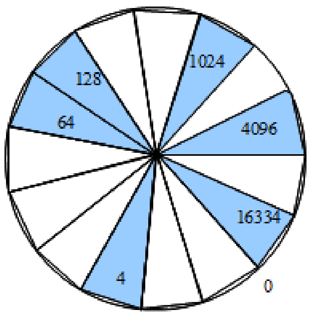


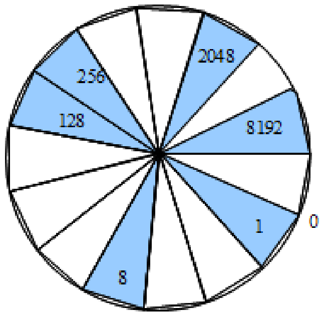
Le bleu a maintenant pour valeur en base 10 : $2+32+64+512+2048+8192$, c'est-à-dire la moitié de sa valeur précédente.

Si nous continuons le processus, nous allons encore diviser par 2, soit : $d=1+16+32+256+1024+4096$. Observons le résultat d'une itération en plus : nous trouvons : $d'=8+16+128+512+2048+16384$ que nous relions à d par une "division" par 2, modulo $2^{15}-1$. En effet, $2\times16384=2^{15}$ et $2^{15}\equiv1$ modulo $2^{15}-1$. Donc $d\equiv2\times d'$ modulo $2^{15}-1$.

Plus généralement lorsque nous effectuons une rotation de « $\frac{2\pi}{15}$ (une part)» d'une figure, nous déplaçons la dernière composante binaire de la fin du 15-uplet vers son début donc nous "divisons" bien, modulo $2^{15}-1$, chaque composante par 2.

Pour terminer nous allons effectuer la rotation maximum à savoir de **14 parts afin de souligner l'existence des inverses pour les 15-uplets**.





Bleu initial :
4+64+128+1024+4096+16384 = 21700

Calculons, d'après la figure, la valeur en base 10 du bleu après une rotation de 14 parts :

1+8+128+256+2048+8192=10633.

Nous remarquons que les composantes après rotation sont le double des composantes initiales sauf 1 qui, modulo $2^{15}-1$ est égal à 32768 qui est bien le double de 16334.

Pouvons-nous justifier ce résultat ?

Lorsque nous effectuons une rotation de 14 parts nous devons, d'après nos calculs précédents, diviser chaque composante binaire par 2^{14}, ou bien les multiplier par deux puisque $2^{14}\times 2 = 2^{15} \equiv 2^0 = 1$ ce qui montre que 2 est l'inverse de 2^{14}.

Ceci termine notre raisonnement. (Nous avons évité le raisonnement par récurrence à cause du nombre fini de cas possibles.)

Nous pouvons donc écrire :

Lorsque l'on effectue une rotation de «une part» dans le sens trigonométrique on divise le nombre représenté par 2.

Lorsque l'on effectue une rotation de n parts on divise le nombre par 2^n.

Si l'on effectue une rotation de sens opposé on le multiplie par la puissance de 2 convenable.

Écrivons ce résultat sous forme algébrique en notant r la rotation élémentaire de une part dans le sens trigonométrique et r^n la rotation de n parts.

Notons les 15-uplets représentant les disques : $d = \sum_{i=0}^{14} a_i 2^i$ où $\forall i, a_i \in \{0,1\}$. Nous avons alors pour $1 \leqslant n \leqslant 15$:

$$r\left(\sum_{i=0}^{14} a_i 2^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{13} a_{i+1}2^i + a_0 2^{14}\right) \text{ et } d = \left(\sum_{i=0}^{13} a_{i+1}2^{i+1} + a_0 2^{15}\right) \text{ modulo } 2^{15}-1$$

$$r^n\left(\sum_{i=0}^{14} a_i 2^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i}2^{14-i} + \sum_{i=n}^{14} a_i 2^{i-n}\right) \text{ et } d = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i}2^{14+n-i} + \sum_{i=n}^{14} a_i 2^{i}\right) \text{ modulo } 2^{15}-1$$

Étude du cas de la symétrie

Étudions le cas de la symétrie par exemple sur la figure bleue :
$[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$ qui devient par symétrie :
$[0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1]$, nous pouvons de nouveau considérer ces 15-uplets comme des nombres binaires.

Petit exercice de calcul binaire (facultatif)
Nous pouvons additionner ces deux 15-uplets de la façon habituelle, rappelons que deux s'écrit alors 10. La somme s'écrit :
$[1,0,2,0,1,0,1,2,1,0,1,0,2,0,1]$ elle est symétrique mais si nous l'écrivons sous forme binaire, elle perd sa symétrie :
$[1,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1]$ soit, numériquement en base 10 :
1+0+0+8+16+0+64+0+0+512+1024+0+0+8192+16384 **= 26201**

Ce que nous vérifions en développant :
Bleu = [1, 0, 1, 0, 1, 0 , 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0] soit en base 10 :
0+0+4+0+0+0+64+128+0+0+1024+0+4096+0+16384 **= 21700**

qui devient par symétrie :
Bleu symétrisé : $[0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1]$ soit en base 10 :
$1+0+4+0+16+0+0+128+256+0+0+0+4096+0\times 2^{13}+0\times 2^{14} = \mathbf{4501}$
la somme est : **21700+4501 = 26201**, ce qui convient.

Dans le cas particulier de nos figures ce type d'addition n'existe pas puisqu'il n'y a jamais recouvrement. Que faisons-nous lorsque nous symétrisons la figure ? Nous avons vu que nous inversons l'ordre des 15-uplets, ainsi le coefficient de 2^{14} devient celui de 2^0, celui de 2^{13} devient celui de 2 et ainsi de suite. Or les 15-uplets sont définis modulo 2^{15} donc :
$2^{14} = 2^{-1}$; $2^{13} = 2^{-2}$ etc.

Symétriser la figure revient donc à inverser les composantes des 15-uplets. Est-il possible de matérialiser algébriquement cette inversion ?

Reprenons la symétrisation du bleu :

bleu	$[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$
bleu symétrisé	$[0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1]$

Écrivons le bleu puis le bleu symétrisé en puissances de deux :
$[2^{15}, 0, 2^{13}, 0, 2^{11}, 0, 0, 2^8, 2^7, 0, 0, 0, 2^3, 0, 0]$
$[0, 0, 2^{12}, 0, 0, 0, 2^8, 2^7, 0, 0, 2^4, 0, 2^2, 0, 2^0]$

Soit encore en réorganisant les puissances de deux :
bleu
$[2^{15} + 0 + 2^{13} + 0 + 2^{11} + 0 + 0 + 2^8 + 2^7 + 0 + 0 + 0 + 2^3 + 0 + 0]$
bleu symétrisé
$[2^0 + 0 + 2^2 + 0 + 2^4 + 0 + 0 + 2^7 + 2^8 + 0 + 0 + 0 + 2^{12} + 0 + 0]$

Nous remarquons que les exposants des puissances de deux apparaissant dans le symétrisé sont les complémentaires à 15 des puissances de deux d'origine, ceci nous permet d'écrire une expression générale du passage au symétrique.

$$\boxed{\text{Si} \quad d = \sum_{i=0}^{14} a_i 2^i \text{ où } \forall i, a_i \in \{0,1\}, \text{ alors} \quad \text{symétrique}(d) = \sum_{i=0}^{14} a_i 2^{14-i}}$$

Récapitulation

Nous avons vu que chaque rotation correspond à une division de chaque puissance de 2 par une puissance de 2, il y a donc 15 rotations si nous comptons l'identité représentée par 2^{15}. Il y a une seule symétrie donc, il y a 30 éléments dans chaque classe dont seulement 3 sont utilisés dans le carré géomagique.

Représentations minimales des figures

Nous allons terminer cette étude des représentations binaires par le tableau des nombres représentant les figures en choisissant d'exprimer chaque figure par son représentant le plus petit possible comme on le fait dans l'anneau des nombres $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Une représentation du bleu est :
$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$. Nous allons effectuer une rotation afin d'avoir le moins possible de puissances élevées de 2 ; pour ce faire nous mettons le plus possible de zéros à gauche du 15-uplet. Ce qui donne, pour le bleu :
$[0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]$ c'est-à-dire en valeur numérique en base 10 :
1+2+0+0+16+0+64+0+256+0+0+2048 = 2387

De même pour le jaune :
$[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ qui devient :
$[0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$, de valeur numérique en base 10 :
1+2+0+0+0+32+64+0+256+0+1024 = 1379

Le vert :
$[1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ qui devient :
$[0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]$, de valeur numérique en base 10 :
1+0+0+8+0+32+0+128+256+0+1024 = 1449

Le rouge :
$[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ qui devient :
$[0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]$, de valeur numérique en base 10 :
1+2+0+8+0+32+0+0+256+0+1024 = 1323.

Le tableau des valeurs binaires des représentants des différentes figures peut donc être complété par les valeurs minimales numériques dans chaque classe d'équivalence modulo $2^{15} - 1$.

Bleu $[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$ $= [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$ $= [0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$ $= \overline{2387}$	Jaune $[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ $= [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$ $= [0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$ $= \overline{1379}$
Vert $[1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$ $= [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ $= [1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ $= \overline{1449}$	Rouge $[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ $= [0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]$ $= [1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$ $= \overline{1323}$

Si ce système de codage est un bon exercice de calcul binaire, il n'en reste pas moins qu'il est assez compliqué, nous aurions pu, par exemple, essayer de nous contenter d'utiliser les nombres de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

La structure du quotient par la classe d'équivalence des rotations et de la symétrie axiale pourrait alors être additive. Ainsi, par exemple la figure bleue aurait pour valeur minimale : $[0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1] = 1 + 2 + 0 + 0 + 5 + 0 + 7 + 0 + 9 + 0 + 0 + 12 = 36$ et $36 \equiv 6$ modulo 15.

La figure jaune : $[0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1] = 1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 6 + 7 + 0 + 9 + 0 + 11 = 36$ et $36 \equiv 6$ modulo 15.

Nous constatons que deux figures différentes ont même codage, ce qui ne convient pas ; nous n'avons pas eu ce problème avec le codage binaire.

Un autre codage possible est le codage complexe avec les racines 15-ièmes de l'unité. Nous laissons le soin de cette modélisation au lecteur en remarquant que, dans son essence, elle est très proche de notre modélisation binaire.

Remarque : Nous espérions pouvoir trouver un système de classes d'équivalence à un seul représentant mais, à cause des manipulations effectuées sur les figures : rotations et symétries, nous n'y sommes pas parvenus. Nous donnons tout de même le détail des nombres utilisés afin que le lecteur puisse contrôler nos résultats ou mieux, faire les calculs, ce qui est un bon exercice de calcul numérique.

Bleu $[1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0]$ $=[1,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0]$ $=[0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0]$ Sous forme réduite : $\overline{[0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1]}$ $=\overline{\mathbf{2387}}$	Jaune $[0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0,0,0]$ $=[0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0,0]$ $=[0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0]$ Sous forme réduite : $\overline{[0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1,1]}$ $=\overline{\mathbf{1379}}$	Bleu + Jaune $= 21700 + 11032$ $= 32732$ $= \overline{8183}$ (cf. remarques qui suivent)
Vert $[1,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,0]$ $=[1,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0]$ $=[1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0]$ Sous forme réduite : $\overline{[0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1]}$ $=\overline{\mathbf{1449}}$	Rouge $[0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0]$ $=[0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0]$ $=[1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0]$ Sous forme réduite : $\overline{[0,0,0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,1,0,1]}$ $=\overline{\mathbf{1323}}$	Vert+ Rouge $= 22148 + 10584$ $= 32732$
Bleu+Vert$= 9548 + 23184 = 32732$	Jaune+Rouge$= 5516 + 27216 = 32732$	Bleu+Rouge$= 25928 + 6804$ $= 32732$ Jaune+Vert$= 13580 + 19152$ $= 32732$

Remarque 1 : rappelons que la somme bleu + Jaune est $[1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,0,0]$ soit, en valeur numérique minimale avec le plus de zéros dans les puissances élevées de 2 :

$[0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1]$
dont la représentation donne la valeur :
$1+2+4+0+16+32+64+128+256+512+1024+2048+4096 = 8183$.

Bien entendu, à cause du non respect par la relation d'équivalence de l'addition des figures que nous avons déjà signalé, les sommes des classes ne sont pas les classes des sommes.

Remarque 2 : Nous travaillons ci-dessous en base 10. Nous remarquons que tous les résultats de sommes non réduites sont paires, nous pouvons donc diviser les représentants des sommes par deux, éventuellement par 4, nous obtenons :

$$\begin{array}{ll}
\text{Bleu+Jaune} = & \overline{21700}+\overline{11032}\equiv\overline{32732}\equiv\overline{5425}+\overline{2758}\equiv\overline{8183}\\
\text{Vert+Rouge} = & \overline{22148}+\overline{10584}\equiv\overline{32732}\equiv\overline{5537}+\overline{2646}\equiv\overline{8183}\\
\text{Bleu+Vert} = & \overline{9548}+\overline{23184}\equiv\overline{32732}\equiv\overline{2387}+\overline{5796}\equiv\overline{8183}\\
\text{Jaune+Rouge} = & \overline{5516}+\overline{27216}\equiv\overline{32732}\equiv\overline{1379}+\overline{6804}\equiv\overline{8183}\\
\text{Bleu+Rouge} = & \overline{25928}+\overline{6804}\equiv\overline{32732}\equiv\overline{6482}+\overline{1701}\equiv\overline{8183}\\
\text{Jaune+Vert} = & \overline{13580}+\overline{19152}\equiv\overline{32732}\equiv\overline{3395}+\overline{4788}\equiv\overline{8183}
\end{array}$$

Les classes ainsi[4] réduites deviennent :

Bleu $5425 \equiv 2387 \equiv 6482$	Jaune $2758 \equiv 1379 \equiv 3395$	Somme des 2 premiers représentants $= 8183$
Vert $5737 \equiv 5796 \equiv 4788$	Rouge $2646 \equiv 6804 \equiv 1701$	Somme des 2 premiers représentants $= 8183$
Somme des 2 seconds représentants $= 8183$	Somme des 2 seconds représentants $= 8183$	Diagonales : Sommes des 2 troisièmes représentants $= 8183$

Nous avons ainsi obtenu une représentation numérique du carré géomagique découvert par Frank Tinkellenberg.

Peut-on coder avec des 13-uplets ?

Écrivons réciproquement ces nombres sous forme binaire. Par exemple le bleu qui vaut 5425.

Reprenons la liste des puissances successives de 2. $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots, 8192, 16384, 32768$

Nous cherchons quelle est la puissance maximale de 2 qui est contenue dans 5425 : $5425 - 4096 = 1329$ auquel nous ôtons la puissance maximale de 2 soit 1024. $1329 - 1024 = 305$, nous continuons ainsi jusqu'au résultat 1 puisque 5425 est impair ; nous obtenons :
5425 = 4096 + 1024 + 256 + 32 + 16 + 1 ce qui s'écrit

4. Rappelons que pour qu'un nombre soit divisible par 4 il suffit que le nombre formé par ses deux derniers chiffres soit un multiple de 4.

sous forme binaire :
$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1]$
Écrivons de même le jaune, nous trouvons :
2758 = 2048 + 512 +128 + 64 + 4 + 2
$[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$;
Présentons la somme habituelle 5425+2758 = 8183 par totaux partiels verticaux :

4096 + 0 + 1024 + 0 + 256 + 0 + 0 + 32 + 16 +0 + 0 + 0 + 1
0 + 2048 + 0 + 512 + 0 + 128 + 64 + 0 + 0 +0 + 4 + 2 + 0

4096 + 2048 + 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 +0 + 4 + 2 + 1

Nous remarquons que nous n'avons plus que 13 éléments au lieu de 15 précédemment. Il reste une case blanche au niveau du 8. Est-ce à dire que nous pourrions coder différemment nos figures avec deux blancs de moins ?
La même situation apparaît avec 2387 + 5796, somme du bleu et du vert :
2387 = 0 + 2048 + 0 + 0 + 256 + 0 + 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1
5796 = 4096 + 0 + 1024 +512 + 0 + 128 + 0 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 0
8183 = 4096 + 2048+ 1024 + 512 + 256 +128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 4 + 2 +1

Observons les représentations par les 13-uplets :
Bleu $[0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]$
Jaune $[1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]$

Le bleu précédent s'écrivait :
$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1]$

Nous remarquons que le deuxième bleu n'est pas une transformation géométrique (rotation et/ou symétrie) du premier puisque le premier contient une suite de trois zéro ce qui n'est pas le cas du deuxième. Cependant si nous observons les deux résultats nous remarquons que si nous complétons les 13 uplets par deux zéros dans les puissances supérieures de 2 :

Premier bleu $[0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1]$

Deuxième bleu $[0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]$

Nous retrouvons bien deux 15-uplets égaux à une rotation près, nos calculs sont donc corrects mais notre conclusion est :

Il est **impossible de réduire les n-uplets de 15 éléments à 13 éléments** par cette méthode et la question de Jean-Paul Delahaye sur la possibilité de trouver des solutions géométriques au carré géomagique d'ordre 2 qui ne contiennent pas de « trous » **reste ouverte**.

Carrés d'entiers 2x2 n-magiques

Nous avons déjà vu qu'il n'y a pas de carré magique 2x2, mais les différentes remarques sur la nécessité d'utiliser des classes d'équivalences pour découvrir un carré géomagique d'ordre 2 nous incitent bien sûr à nous demander si nous ne pourrions pas en « trichant un peu[5] » écrire un carré 15-magique dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons simplement utiliser le fait que, dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, on peut changer de représentant pour les classes.
Voici un « carré 15-magique », vous vérifierez que dans $\mathbb{Z}$, la somme des lignes, colonnes et diagonales est 4 modulo 15.

2	32	$\overline{4}$
17	47	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$

Ici, les contraintes de sommes sont trivialement satisfaites car les quatre éléments représentent la classe $\overline{2}$.

Substituons la multiplication à l'addition. En remarquant que l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ admet des diviseurs de zéro car nous avons $15 = 5 \times 3 \equiv 0$ modulo 15, nous observons qu'il serait intéressant de chercher des carrés n-magiques via un anneau quotient de $\mathbb{Z}$ muni de la multiplication. Au cas où cela ne vous intéresserait pas de chercher, voici un exemple 30-magique tiré de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$; tous les produits sont égaux à zéro modulo 30.

	15	10	$\overline{150}$
	12	30	$\overline{360}$
$\overline{120}$	$\overline{180}$	$\overline{300}$	$\overline{450}$

En voici un autre moins trivial, encore tiré de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ muni de la multiplication. Ce résultat n'est encore pas très satisfaisant puisque deux termes : 45 et 15 sont congrus modulo 30. Pour les élèves professeurs il sera intéressant d'observer « pourquoi cela marche » en décomposant chaque terme en facteurs premiers.

3	5	$\overline{15}$
45	15	$675 \equiv 15$ modulo 30
$75 \equiv 15$ modulo 30	$75 \equiv 15$ modulo 30	$45 \equiv 15$ modulo 30

5. Le qualificatif **n-magique** vient de ce que nous utilisons les congruences modulo n. Un carré **0**-magique est un carré magique : pas de tel carré à l'ordre 2 ! Si $n > 0$, les classes des éléments ne sont pas nécessairement deux à deux distinctes. Pour construire une solution n-magique dans $\mathbb{Z}$, il suffit de partir d'un carré seulement "rangées-diagonales" magique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans l'article de *Pour la Science* cité en introduction, nous retrouvons, en bas de la page 82, une idée similaire au sujet de la construction de carrés géomagiques 3x3, obtenus par "pertubations" de "presque-solutions".

Représentations isomorphes

Pour les élèves professeurs nous proposons un exercice relatif aux deux représentations isomorphes des pièces du carré géomagique.

Page suivante nous donnons, pour chaque pièce le calcul en base dix des trente composantes de chaque classe modulo $2^{15} - 1$.

Nous souhaitons, connaissant deux expressions numériques d'une couleur, retrouver quelles transformations géométriques ont été effectuées sur la première pour obtenir la seconde. Par exemple, de bleu 19096 à bleu 19089 ?

Reprenons la liste des quinze premières puissances successives de 2. $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768$

Écrivons comme précédemment, 19096 en notation binaire :
$19096 = 16384 + 2048 + 512 + 128 + 16 + 8 = 2^{14} + 2^{11} + 2^9 + 2^7 7 + 2^4 + 2^3$
Soit encore : $[1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$.
De même : $19089 = 2^{14} + 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^4 + 2^0$
Soit encore : $[1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]$

Le deuxième 15-uplet est-il le transformé du premier par une symétrie et/ou une rotation ?

Symétrisons le premier 15-uplet pour effectuer une symétrie. Nous obtenons :
$[0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]$

Ensuite, effectuons une rotation en translatant les trois premiers termes à la fin de l'expression, nous obtenons le nouveau 15-uplet en rouge égal à 19089.
$[0, 0, 0, 1, [1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]0, 0, 0, 1]$.

Nous avons donc obtenu la deuxième expression du bleu à partir de la première en effectuant **une symétrie puis une rotation de quatre parts.**

Vérifions ce résultat d'après les formules trouvées précédemment :
Sym $(2^{14} + 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^4 + 2^3) =$
$(2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^{10} + 2^{11}) = 3241$

Effectuons les quatre rotations en multipliant par 2 successivement :
$3241, 6482, 12964, 25928, 51856 = 19089$ modulo $2^{15} - 1$. cqfd.

Il pourra être agréable et profitable pour le futur professeur d'effectuer ces transformations à l'aide des barrettes que nous présentons dans les pages suivantes à destination des plus jeunes.

Les trente composantes pour chaque pièce, (base dix mod. $2^{15} - 1$) de chaque classe[6].

BLEU		JAUNE		VERT		ROUGE	
Rotations	Symétries	Rotations	Symétries	Rotations	Symétries	Rotations	Symétries
2387	3241	1379	1589	1197	1449	1323	1701
4774	4501	2758	3178	2394	2898	26646	3402
5425	5411	3115	3395	4788	4277	5509	5173
6293	6482	5516	6356	5537	5796	5292	6804
9548	9002	6230	6790	8491	8554	9569	8617
9765	9317	11032	8589	9576	9261	10584	9485
10633	10521	11361	10339	11074	10507	11018	10346
10850	10822	12460	12712	11529	11592	11305	10563
12586	12964	12677	13580	13349	13601	12453	13608
17577	18004	17073	17178	16982	17108	17045	17234
18530	18634	17941	18081	19152	18522	19138	18970
18096	19089	22064	20678	20629	21014	21168	20692
21266	21042	22722	21553	22148	21637	22036	21126
21700	21644	24920	25424	23058	23184	22610	21665
25172	25928	25354	27160	26698	27202	24906	27216

6. Calculs effectués par Eric Lehman

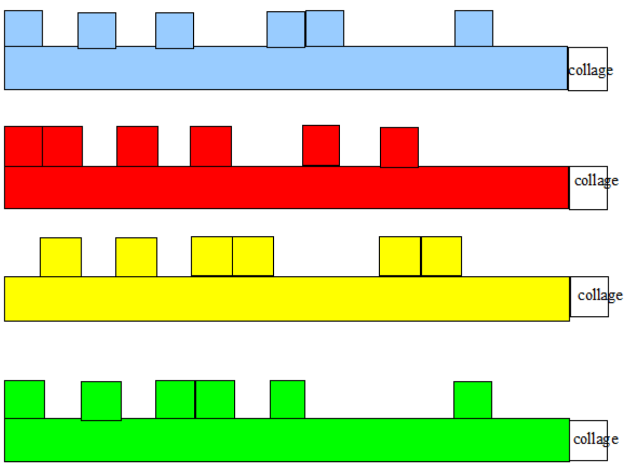
Une variante des carrés magiques géométriques

Cette activité peut être proposée à des plus jeunes à cause de son aspect manipulatoire, elle nécessite cependant beaucoup de soin.

Nous vous proposons ci-dessous une variante des activités précédentes présentée plus concrètement à l'aide de barrettes découpables. Ce type de présentation assortie à des constructions physiques avec découpage nous paraît plus pédagogique que celle des portions de cercle utilisées par Frank Tinkellenberg, conformément à un principe qui nous est cher : le savoir s'acquiert non seulement à la lecture et à la réflexion sur cette lecture mais aussi (sinon surtout !) par d'autres moyens comme la construction de pièces géométriques, le découpage de ces pièces et surtout leur manipulation.

Voici un ensemble de figures constituées de grandes barres bleue, rouge, jaune et vert et de petits carrés disposés sur ces grandes barres à des endroits bien précis car nous voulons réaliser des **sommes de figures**. On appelle **somme de figures** la juxtaposition de figures par exemple le long d'un de leurs côtés **sans recouvrement.**

Dans notre cas l'addition est plus délicate car elle se fait du côté des dents.

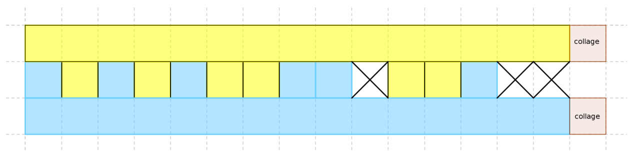


Activité de découpage

Gardez la figure du haut de la page suivante sans la découper, elle vous servira de référence. Dans la figure suivante nous avons représenté les deux faces de chaque barrette, nous vous conseillons d'effectuer un tirage en format A4 sur papier fort afin que vos barrettes, repliées sur elles-mêmes soient plus solides, vous pourrez ensuite découper les dents.

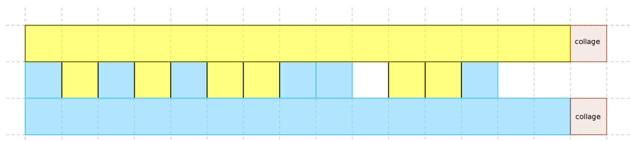
Ensuite vous poserez vos barrettes mobiles sur une page blanche ou sur la page non découpée afin d'effectuer les additions de figures.

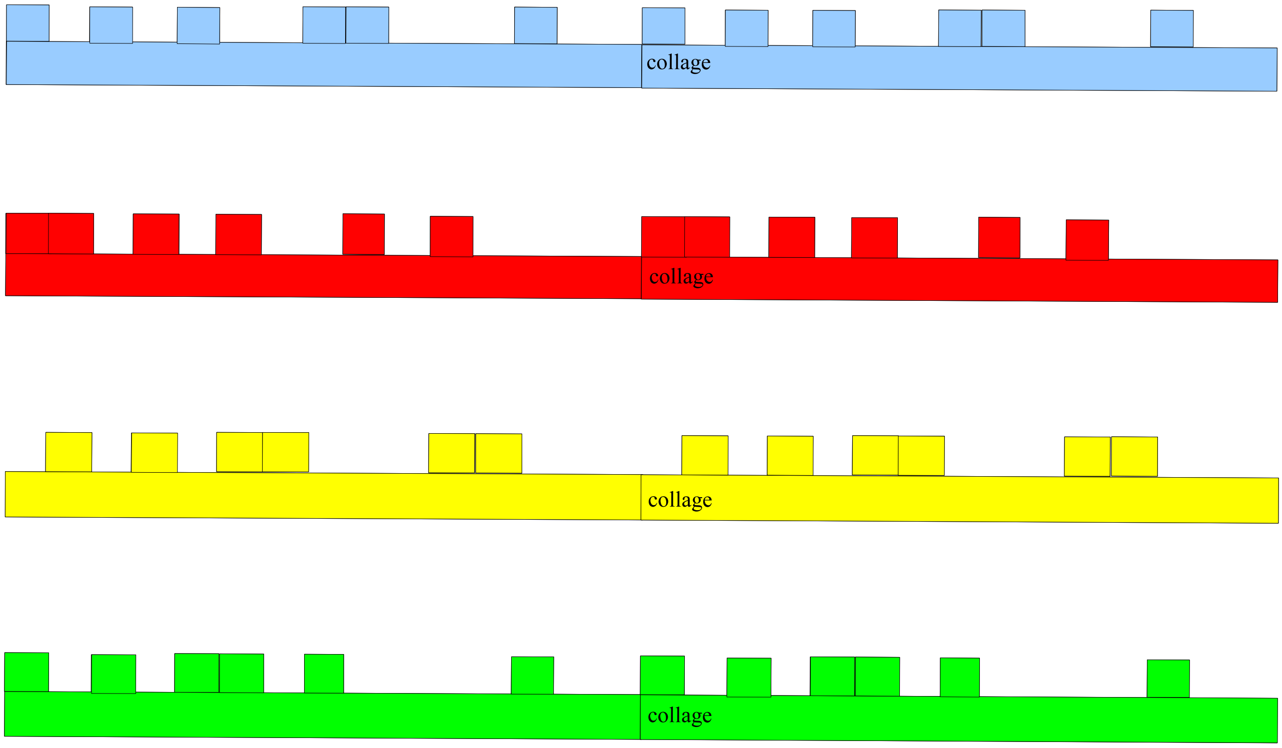
En décalant éventuellement les bandes les unes par rapport aux autres et/ou en les retournant essayez de les additionner du côté des dents, en intercalant les dents de façon à ce qu'elles ne se recouvrent pas, pour respecter les règles de l'addition des figures. Par exemple voici l'addition de la bande bleue avec la bande jaune, nous avons dû la tourner d'un angle de 180° afin qu'elle s'insère bien dans la bleue, vous remarquerez qu'il reste « trois trous dans le dentier » figurés par des X.



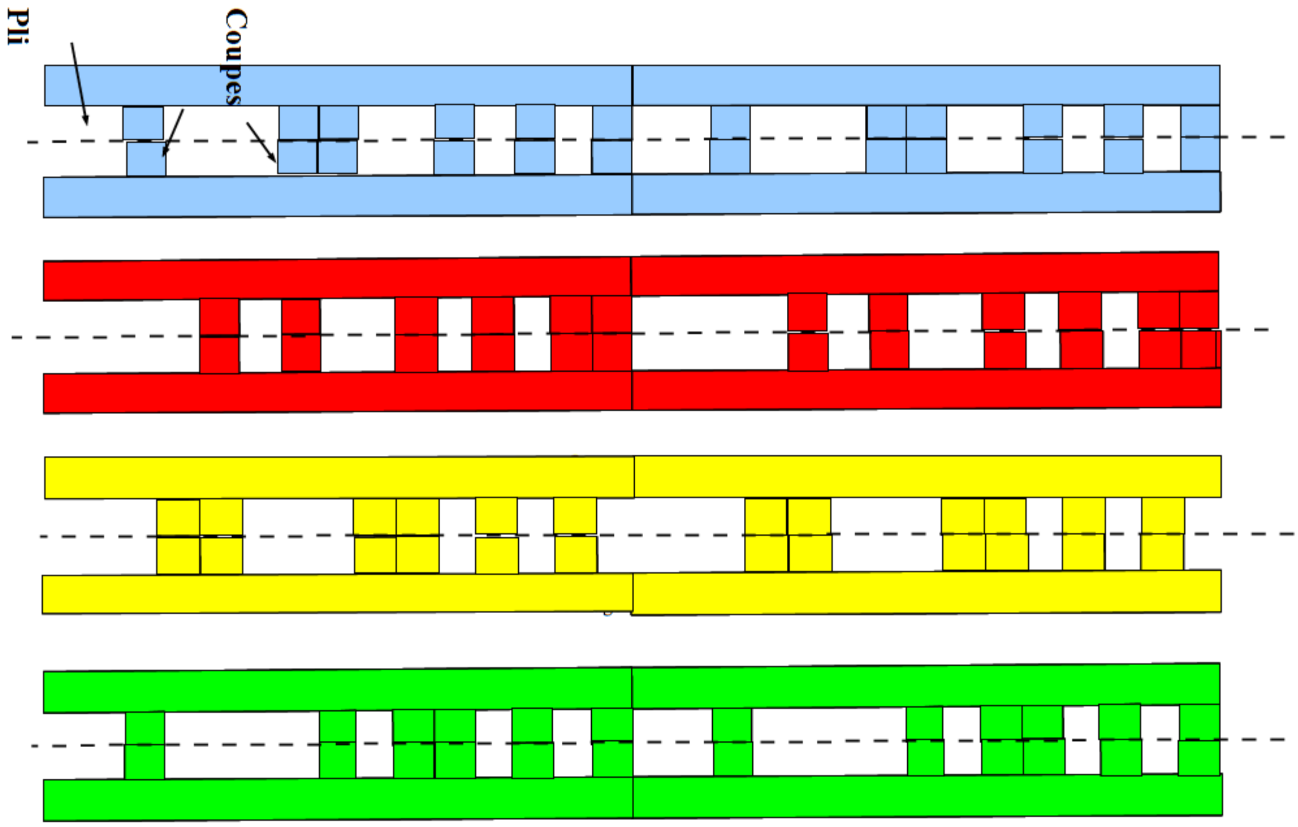
Nous vous proposons de faire de même avec les autres couleurs en essayant de « retrouver le même dentier » c'est-à-dire plein partout, sauf aux trois endroits signalés par une croix.

Dans l'exemple, que nous vous redonnons ci-dessous, nous nous sommes restreints à la partie commune qui nous intéresse et qui nous servira de modèle pour les autres bandes. Si vous ne souhaitez pas faire cette activité « à la main » (en découpant les pièces en double exemplaire) vous pouvez passer directement aux solutions dans les pages suivantes ou effectuer l'activité à l'aide d'un logiciel de géométrie.

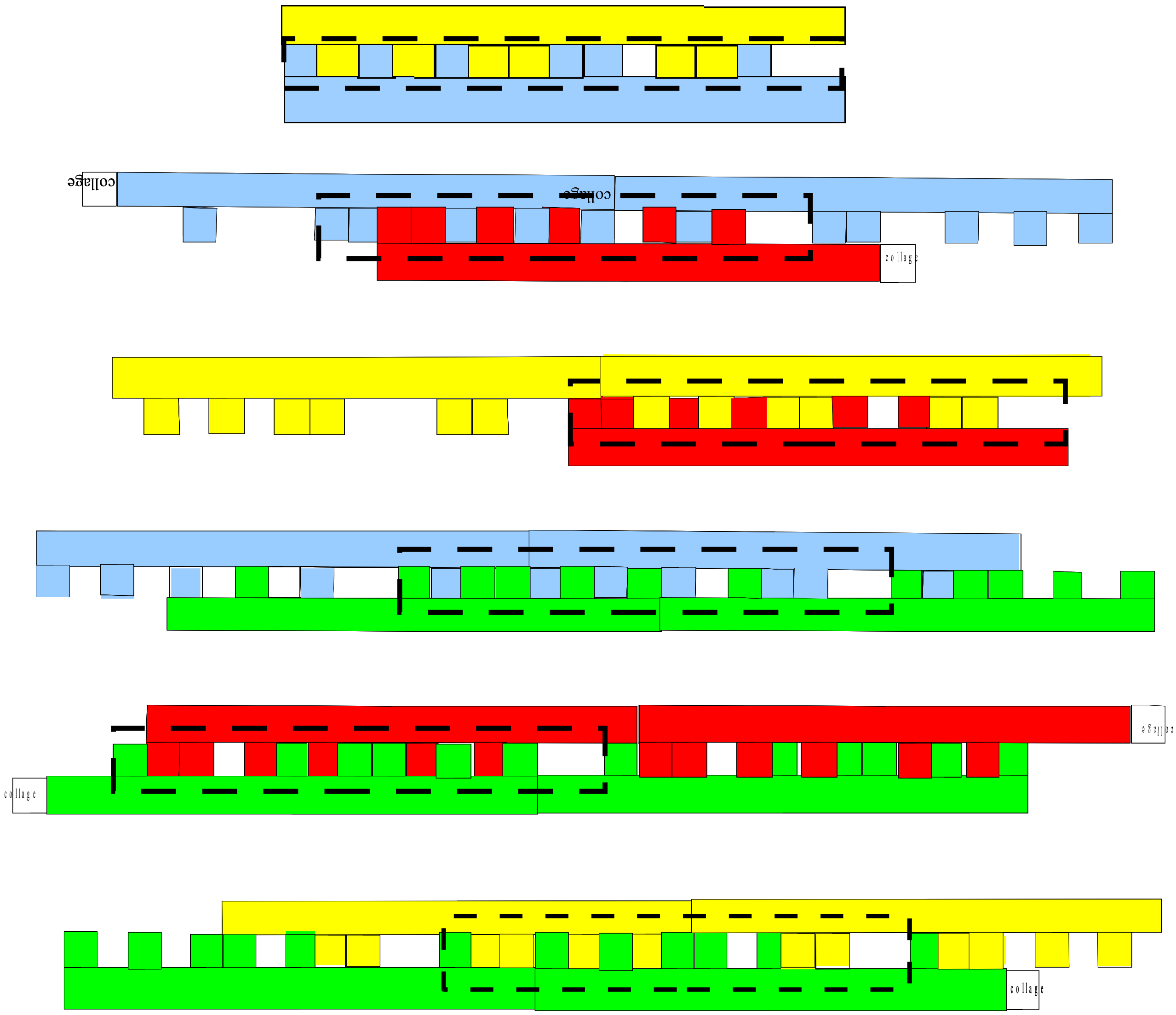




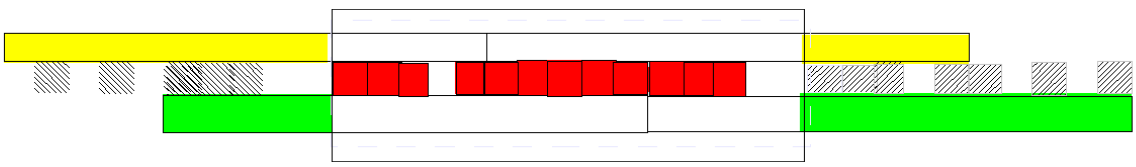
Suggestion pour réaliser des bandes plus rigides en repliant, avant découpage des dents, chaque bande sur elle-même le long du pointillé.



Ensuite nous donnons les cas plus difficiles avec translation et symétrie, nous avons entouré d'un trait pointillé dans les exemples les parties « qui se ressemblent » autrement dit qui sont **égales au sens des figures (elles sont superposables)** :

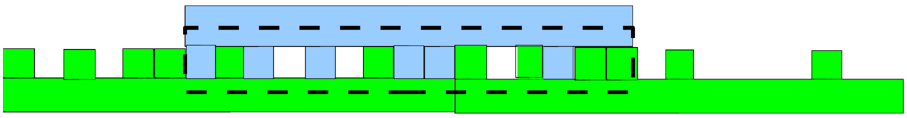


Nous allons considérer les parties entourées d'un pointillé **comme les sommes au sens géométrique des différentes bandes**, nous constatons que ces “sommes” ont toutes la même forme, à savoir la partie que nous avons encadrée et dont les “dents” sont coloriées en rouge :

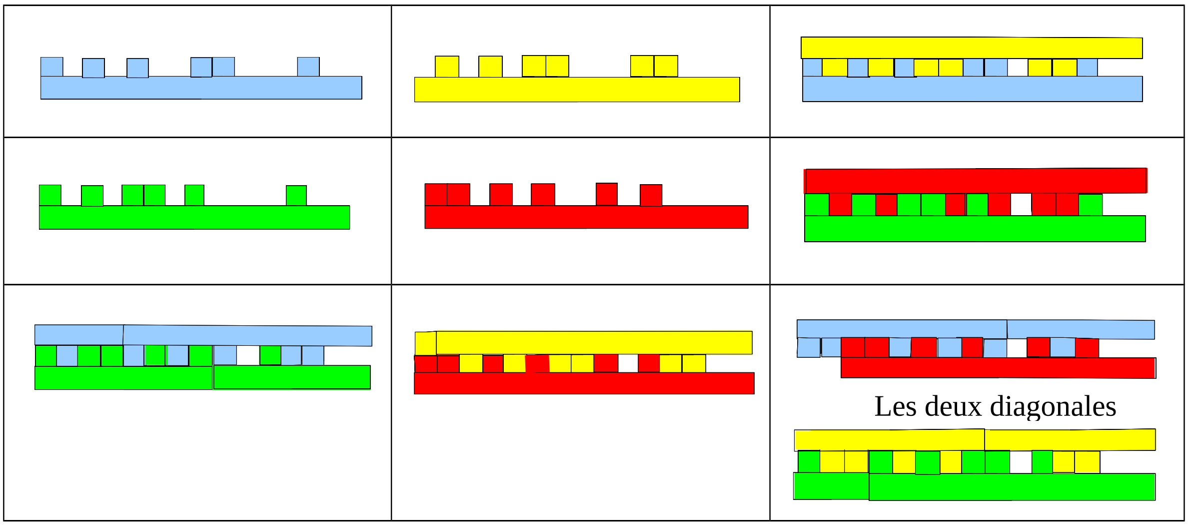


Remarque pour les plus grands : lors de nos manipulations nous avons eu une réponse négative à une question que nous nous étions posée : les barrettes s'additionnent-elles d'une seule façon, autrement dit **l'addition des figures appliquée aux quatre barrettes a-t-elle un résultat unique** ? En effet les barrettes bleue et verte peuvent s'additionner d'une autre façon et le résultat n'est pas le même, il se code par :

[1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1] = [0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1] =
2+4+8+16+32+64+0+256+512+1024+2048+0+8192+0 = 12158.



Nous regroupons ci-dessous les quatre barrettes d'origine et leurs sommes.



Nous avons réalisé un « carré géomagique » d'ordre 2, similaire à celui qui est présenté dans « Pour la science » mais peut-être plus facile à concevoir pour les plus jeunes. Nous attendons avec intérêt commentaires et suggestions de votre part

Bibliographie

DELAHAYE Jean Paul *Carrés géomagiques in* “Pour la science” Juin 2013.

SALLOWS Lee *Geomagics squares* en ligne : www.geomagicsquares.com

RODRIGUEZ HERRERA Ruben et SALLES-LEGAC Danielle *Nombreux articles d'activités géométriques pour les élèves professeurs, l'école primaire, le collège et le lycée en français et en espagnol* en lígne sur le site http://www.math.unicaen.fr/irem/ de l' I.R.E.M. de Basse-Normandíe, Caen.

Membres de l'équipe « Géométrie » de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie à Caen :

Anne-Marie Bock, Eric Lehman, Olivier Longuet, Ruben Rodriguez, Danielle Salles, Michel Soufflet, Silvia Sanchez (Perú).

Triangles rectangles de Ruben

Questions et problèmes pour aborder un parcours d'étude et de recherche.

Introduction

Lorsque je corrige mes copies de mathématiques et que je trouve une erreur du type « formule erronée » (formule inapplicable dans le cas général), je m'interroge sur la possibilité de l'existence d'un sous-ensemble formé des cas où la formule « fausse » serait valable. C'est le cas de cette « petite histoire de recherche » qui m'a permis de réaliser un PER (Parcours d'étude et de recherche) autour du théorème de Pythagore et de triangles rectangles un peu particuliers.

De tels PER ont pour objectif de travailler les compétences concernant « l'attitude de recherche en mathématiques ». Il est souhaitable que nos élèves réalisent un PER à partir de la question initiale : étudier et rechercher les ensembles où une formule serait fausse dans le cas général, mais valable dans ces ensembles particuliers.

Avertissements :

1. Un PER débute toujours par l'appropriation d'une question posée à un groupe d'élèves. Il faut qu'elle soit suffisamment riche pour permettre à chacun de se construire un parcours au sein des questions associées et ainsi effectuer un parcours d'étude et de recherche personnalisé. Ainsi pour entrer dans le parcours d'un autre élève, il est primordial que le récit du PER soit le plus fidèle possible au cheminement réel des questions et recherches telles qu'elles se sont posées. J'ai essayé ici de vous les donner le plus fidèlement possible, en suivant la diversité de mon parcours qui contient les démarches redondantes le cas échéant, dans différents « univers », donnant mes résultats.

   Cet article remanié pour le format du *Miroir* a neuf courtes parties. Ces parties I à IX décrivent la recherche, faite en juillet 2015 avant la présentation réalisée à la journée de rentrée de notre IREM en septembre. Ce travail et les ajouts ultérieurs de l'auteur font l'objet d'un compte rendu foisonnant de 28 pages que vous pouvez télécharger sur notre site web à l'url http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article184 .

2. Dans cet article, j'ai souvent utilisé le terme didactique « univers ». Un « univers » est un ensemble où l'élève se place afin de donner sens aux questions posées. Il s'agit d'un ensemble relativement restreint, où l'un des registres des mathématiques est prépondérant. Par exemple, l'élève peut décider de réfléchir à la question dans « l'univers algébrique des systèmes d'équations du second degré à trois variables ».

I – Algèbre, fonctions, géométrie…

Lors de la correction des copies d'examen du master du professorat des écoles à l'ESPE de Basse-Normandie, j'ai constaté qu'une étudiante avait énoncé le théorème de Pythagore sous la forme erronée : $\frac{a^2}{b^2} = c^2$, au lieu de la bonne forme $a^2 + b^2 = c^2$ pour un triangle ABC rectangle en C.

J'ai fait l'hypothèse d'une cause possible de cette erreur. Il est vraisemblable que cette étudiante ait confondu et mélangé les écritures algébriques des deux théorèmes principaux de son programme, Thalès et Pythagore, en ayant révisé dans le seul « univers des formules » sans faire la correspondance avec « l'univers des configurations et celui des unités de mesure ».

Une question m'est apparue : existe-t-il des triangles rectangles qui vérifient non seulement, évidement, la formule de Pythagore, mais aussi : $\dfrac{a^2}{b^2} = c^2$ (ou la condition équivalente dans les réels strictement positifs $a/b = c$) ?

J'ai commencé ainsi un parcours d'étude et de recherche, en me plaçant tout d'abord dans « l'univers algébrique des équations de second degré à trois inconnues ». Soit le système d'équations à inconnues dans $\mathbb{R}_+^*$ $\quad (a > 0, b > 0, c > 0)$:

$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $\dfrac{a^2}{b^2} = c^2$ (équation 2).
Il est équivalent dans $\mathbb{R}_+^*$ au système

$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $a^2 = b^2c^2$ (équation 2'),
qui est encore équivalent dans $\mathbb{R}_+^*$ au système
$b^2c^2 + b^2 = c^2$ (équation 1') et $a^2 = b^2c^2$ (équation 2').

On obtient : $b^2 = \dfrac{c^2}{c^2+1}$ et $a^2 = \dfrac{c^4}{c^2+1}$

On peut alors prendre c comme une variable réelle strictement positive et calculer a et b. C'est ainsi que j'ai tout naturellement écrit :

Définition : un triangle rectangle ayant a et b pour mesures des côtés de l'angle droit et c pour hypoténuse est un **R-triangle rectangle** si $\frac{a}{b} = c$.

Voici deux exemples de **R-triangle rectangle**.

1) Pour $c = \sqrt{2}$, on obtient $a = 2\sqrt{3}/3$ et $b = \sqrt{6}/3$. D'une part, il s'agit d'un triangle rectangle, car $a^2 = 12/9$, $b^2 = 6/9$, $a^2 + b^2 = 2$ et $c^2 = 2$, et d'autre part, c'est un « R-triangle rectangle » car $a^2/b^2 = 2$ et $c^2 = 2$ impliquent $\dfrac{a^2}{b^2} = c^2$.

2) Pour $c = 1$, alors $a = \sqrt{2}/2$ et $b = \sqrt{2}/2$. C'est le seul « R-triangle rectangle » isocèle.

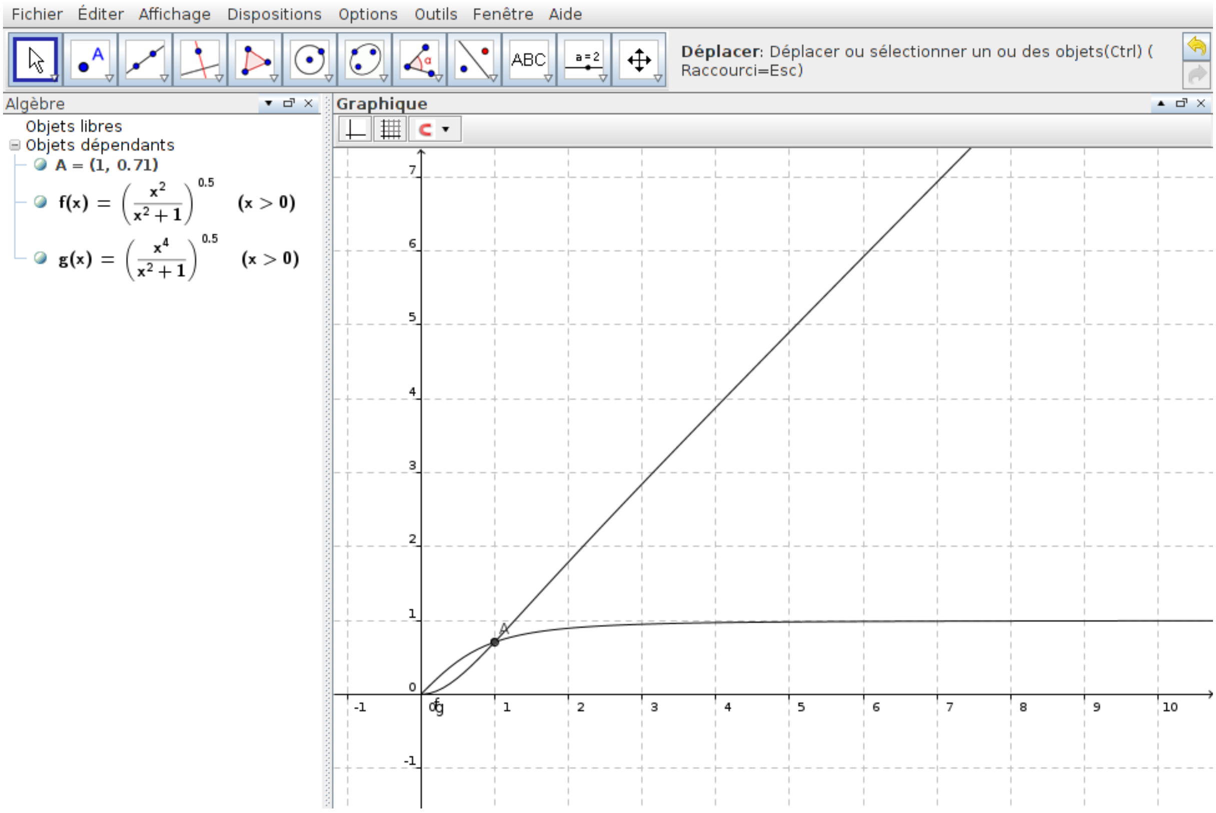
J'ai décidé par la suite de travailler dans l'univers des fonctions et de leurs représentations graphiques. Par exemple, je peux trouver tous les couples (b, c) ou (a, c) possibles en traçant à l'aide du logiciel *GEOGEBRA* les graphes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ comme suit :

$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$, correspondant à $b^2 = \frac{c^2}{c^2+1}$;

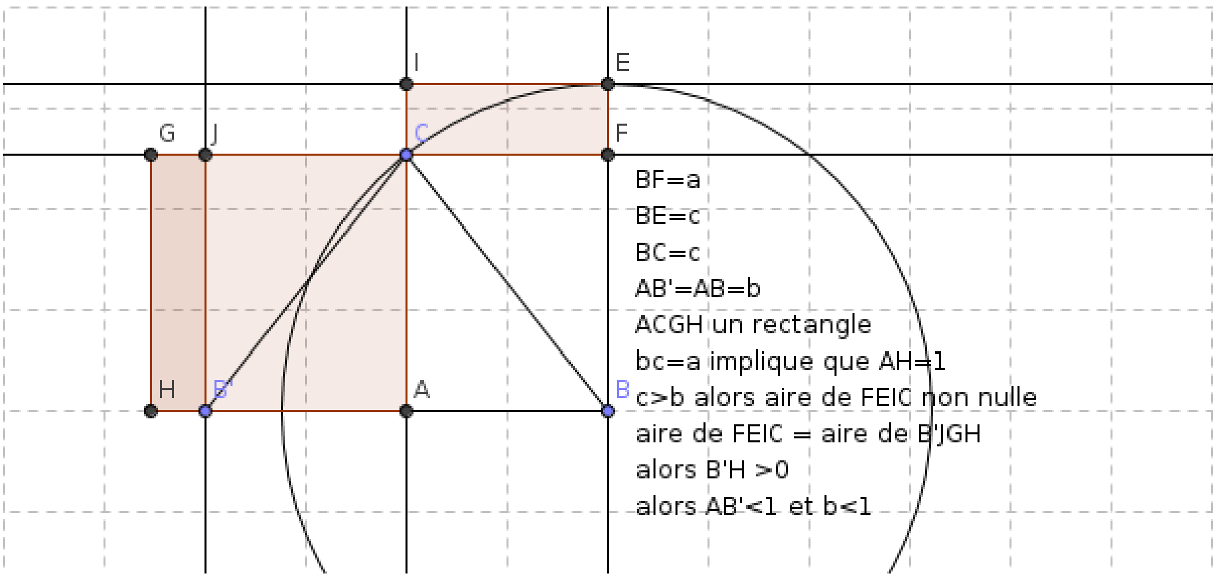
$g(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^2+1}}$, correspondant à $a^2 = \frac{c^4}{c^2+1}$.

J'ai retrouvé graphiquement à l'aide de *GEOGEBRA* que le seul R-triangle rectangle isocèle est celui que j'avais trouvé par le calcul algébrique, ayant pour mesures des côtés $c = 1$, $a = \sqrt{2}/2$ et $b = \sqrt{2}/2$.

La courbe C_f admet une asymptote d'équation $y = 1$ et se situe en dessous, car $f(x) < 1$. Ce graphique indique que b sera toujours compris entre 0 et 1. En $+\infty$, $g(x) = x - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$. La courbe C_g admet une asymptote d'équation $y = x$ et se situe en dessous, car $g(x) < x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. La limite de $g(x)/x$ est 1, ce qui veut dire que pour des valeurs très grandes de c, la valeur de b sera proche de 1 et celle de a proche de c : par exemple $c = 10000$ nous donne $a = 10000,00005$ et $b = 0,99999$.



Dans « l'univers des aires de rectangles et de triangles » le fait que b sera compris entre 0 et 1 est aussi visible.



D'autres questions se posent, par exemple : « quelle est la valeur de c si $a = 1$? » On part de $a^2 = \dfrac{c^4}{c^2+1}$ et pour $a = 1$ on obtient : $1^2 = \dfrac{c^4}{c^2+1}$ qui conduit à $c^4 - c^2 - 1 = 0$ (équation bicarrée en c). Donc avec $c^2 = X$, voici l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ dont la solution positive est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire le nombre d'or noté habituellement par φ. Le nombre c est la racine carrée du nombre d'or et b est la racine carrée de l'inverse du nombre d'or. Rappelons que, dans ce cas nous avions choisi $a = 1$.

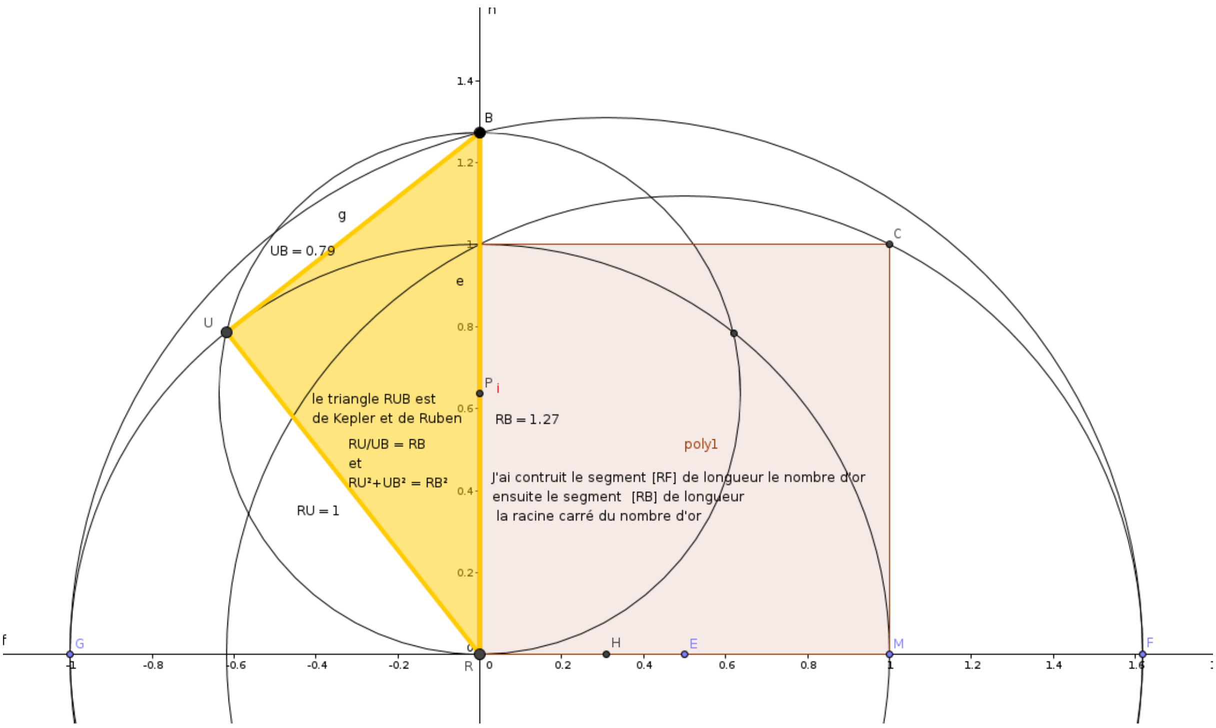
Une autre question encore : existe-t-il un triangle de Kepler qui soit un R-triangle rectangle ?

Un triangle de Kepler est un triangle ayant pour mesures des côtés : $r, r\sqrt{\varphi}$ et $r\varphi$, où r un réel positif et φ le nombre d'or.
Comme $1+\varphi = \varphi^2$, on a l'égalité $r^2+(r\sqrt{\varphi})^2 = (r\varphi)^2$ et donc le triangle est rectangle.

Une condition pour qu'un triangle de Kepler soit un R-triangle rectangle est $\dfrac{r\sqrt{\varphi}}{r} = r\varphi$. D'où $r = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi}}$.

J'ai obtenu le triangle ayant pour mesures $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}, 1, \sqrt{\varphi}$. C'est le triangle obtenu pour $a = 1$

Voici la construction du triangle de Kepler et R-triangle rectangle à l'aide de *GEOGEBRA* ; je l'ai trouvé harmonieux.



J'ai remarqué que le rapport entre les mesures de l'hypoténuse (apothème) et le plus petit côté est égal au nombre d'or. Ceci m'a fait penser à la grande pyramide de Khéops : les Égyptiens ont choisi son apothème (segment reliant son sommet à une arète de sa base) de pente 14/11, ce qui conduit à un rapport entre l'apothème et la demi-base égal au nombre d'or (à 0,01 près). Donc j'ai constaté que le « R-triangle de Kepler » est semblable au triangle rectangle de la pyramide de Khéops. Il est aussi un triangle semblable au « triangle d'or de Pythagore ». Le lecteur intéressé par ces considérations « dorées » les trouvera détaillées en suivant la page 7 du lien http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article184 .

II – L'univers de l'arithmétique

Une autre question : existe-t-il un « R-triangle rectangle pythagorique », c'est-à-dire ayant trois entiers comme mesures des côtés ? Avec c entier naturel strictement positif, une infinité de « R-triangles rectangles » ont comme mesure de l'hypoténuse un nombre entier. Mais peut-on avoir en même temps a, b, c entiers ? Ceci nous conduit à la question :

$\dfrac{c^4}{c^2+1}$ peut-il être égal à un carré parfait p^2, où p est un entier naturel ? Posons $c^2 = X$ on a alors l'égalité $X^2 = (X+1)p^2$ avec $X > 0$. On voit qu'une condition nécessaire est que $X+1$ soit un carré parfait et X le soit aussi. Le seul nombre X tel que X et $X+1$ soient deux carrés parfaits est 0. On le voit dans la suite des carrés 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 . . .

Plus rapidement (suggéré par Eric Trotoux), $a = bc$ et $a^2 + b^2 = c^2$ impliquent que $b^2(c^2+1) = c^2$; avec $b \in \mathbb{R}_+$, on obtient $0 < b < 1$ et donc $b \notin \mathbb{N}$.

Donc l'ensemble des « R-triangles rectangles pythagoriques » est vide.

III – Un autre choix sur le système d'équations

Nous avions commencé notre recherche par une voie algébrique partant du système d'équations

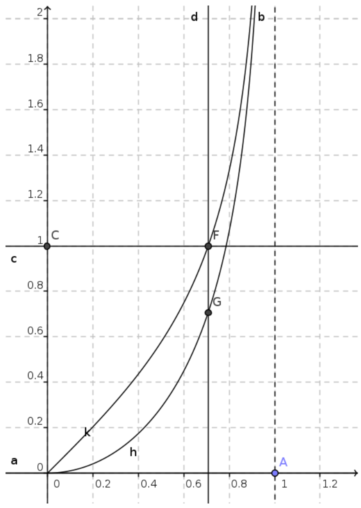
$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $\dfrac{a^2}{b^2} = c^2$ (équation 2)

pour en déduire un paramétrage en fonction de c. Nous pouvons aussi choisir de paramétrer avec b. Alors $c = \frac{a}{b}$, d'où $a^2 + b^2 = \frac{a^2}{b^2}$, puis $(1 - b^2)a^2 = b^4$, ce qui introduit deux fonctions h et k donnant a et c :

$$a = \sqrt{\frac{b^4}{(1 - b^2)}} = h(b).$$

$$c = \sqrt{\frac{b^2}{(1 - b^2)}} = k(b).$$

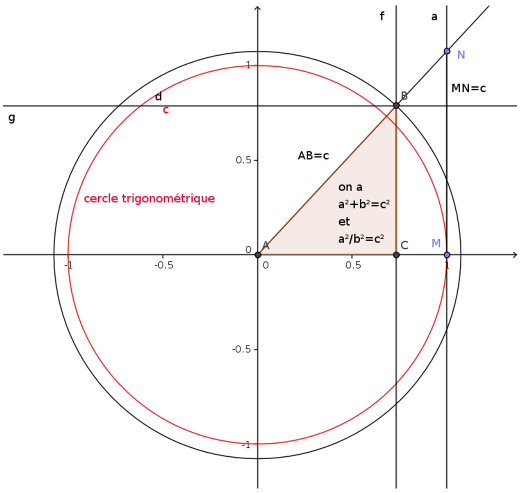
Nous retrouvons la même condition $0 < b < 1$, puisque a^2 est un nombre positif.
Voici donc une autre résolution graphique en fonction de b à l'aide des fonctions h et k. Ce choix me parait moins lisible que celui de la partie I, mais il est intéressant de retrouver les résultats dans les graphiques réalisés avec d'autres fonctions.



Par exemple on peut vérifier que si $c = 1$, alors $a \approx \sqrt{2}/2$ et $b \approx \sqrt{2}/2$. Ici ce sont les points F et G qui nous donnent les valeurs de a et b.

IV – L'univers du cercle trigonométrique

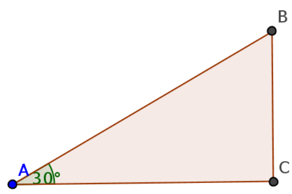
L'équation $a^2 + b^2 = c^2$ donne $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$. Ceci peut être vu sous la forme : $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. De même a/b est vu comme $\tan A$. La condition $a/b = c$ s'écrit $\tan A = c$. On utilise le cercle trigonométrique pour construire un « R-triangle rectangle ».



La configuration nous donne : $a^2 + b^2 = c^2$ et $\dfrac{c}{1} = \dfrac{a}{b}$, donc $c^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$. Nous déterminons A à partir du paramètre c. Puis a, b s'en déduisent. Par exemple si $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, alors $A = \arctan(\dfrac{\sqrt{3}}{3})$, donc la mesure de A vaut 30°. Ensuite on calcule a et b :

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos A = \frac{1}{2}.$$

On peut vérifier que $a^2 + b^2 = \dfrac{3}{36} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3} = c^2$ et que $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{(3/36)}{(1/4)} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} = c^2$. Donc il s'agit bien d'un « R-triangle rectangle ». Ce triangle a une autre particularité : il s'agit d'un demi-triangle équilatéral ayant pour mesure des côtés $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



V – L'univers des triangles semblables

Soit c un réel strictement positif.

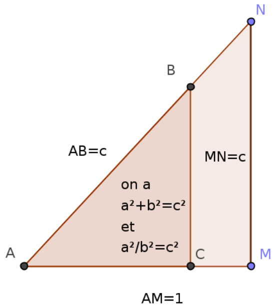
On construit un segment [AM] tel que AM = 1, puis un triangle AMN rectangle en M, tel que MN = c. On place ensuite un point B sur [AN] tel que AB = c.

Enfin, on construit le triangle ABC rectangle en C tel que a = BC et b = AC.

Par les triangles semblables, ou par le théorème de Thalès, on a $\dfrac{c}{1} = \dfrac{a}{b}$, d'où les relations :

$a^2 + b^2 = c^2$ et $c^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$.

ABC est un « R-triangle rectangle »



Remarque : dans un PER, je me pose des questions sans fil directeur. Je peux constater qu'il s'agit ici d'une partie équivalente à la précédente, du point de vue formel. Il n'est pas habituel de se répéter dans un article purement mathématique, par contre du point de vue didactique dans un PER il est fréquent de s'engager dans des voies mathématiquement équivalentes mais présentes dans une forme un peu différente selon le « petit univers » où l'on agit.

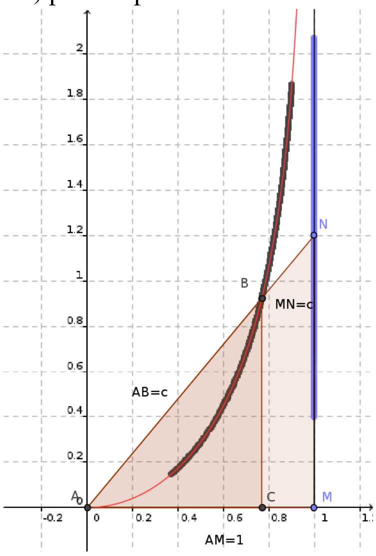
VI – L'univers des lieux géométriques

En nous référant à la figure précédente, que se passe-t-il pour le point B si le point N associé aux valeurs de c se déplace sur la perpendiculaire à (AM) passant par M ? Comme le point B est lié au point N, on constate expérimentalement (*GEOGEBRA*) via sa trace que le point B décrit une courbe non rectiligne. Une question s'impose tout de suite : comment caractériser cette courbe ? On applique les outils de l'univers de la géométrie repérée. Soit un repère orthonormé du plan définie par un triplet (A ;M ;P) avec A comme origine, MAP un angle droit et AM = AP = 1. Soit B$(x; y)$ dans ce repère. On observe avec *GEOGEBRA*.

Le point B$(x; y)$ est soumis aux conditions géométriques : il appartient à la droite (AN) et au cercle de centre A et de rayon MN = c.
Une équation de (AN) est $y = cx$, et pour le cercle $x^2 + y^2 = c^2$.

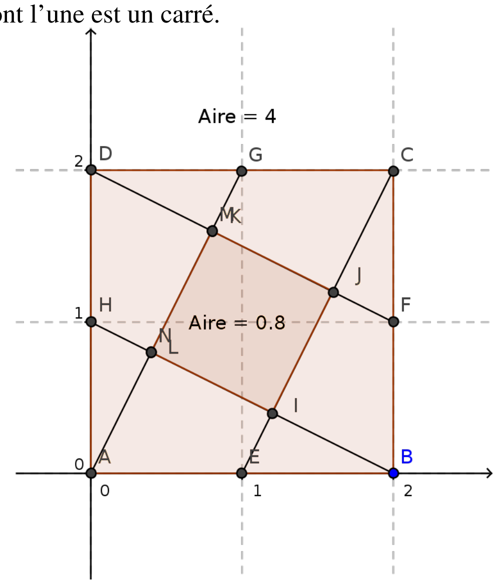
On élimine c entre les deux équations ce qui conduit à : $x^2 + y^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$ qui implique $y^2 = \dfrac{x^4}{1-x^2}$ puis $y = \sqrt{\dfrac{x^4}{1-x^2}}$ avec $0 < x < 1$.

Alors on trace cette courbe via *GEOGEBRA* et on vérifie qu'elle coïncide avec la trace du point B quand on avait déplacé le point N sur la droite perpendiculaire à (AM) passant par M.



Nous retrouvons ici les équations de la partie III.

Nous pouvons rechercher encore d'autres « R-triangles rectangles » en imposant une égalité supplémentaire entre a et c ou entre b et c ou entre a et b. Par exemple $c = 2a$ qui conduit à $a^2 + b^2 = 4a^2$ et $\dfrac{a}{b} = 2a$. Ce qui donne $a = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $b = \dfrac{1}{2}c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, déjà obtenu partie IV.
Autre exemple : $a = 2b$. Cela conduit à $5b^2 = c^2$ et $\dfrac{a}{b} = 2 = c$. D'où $b = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et $a = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. Ce « R-triangle rectangle » possède une autre propriété : son aire est le cinquième de l'aire du carré construit sur son hypoténuse. C'est un triangle qui intervient dans la solution du partage d'un carré en cinq parties de même aire dont l'une est un carré.



Ici le carré ABCD a pour mesure de côté 2 et les points E,F,G,H sont les milieux respectifs aux côtés du carré ABCD. Les triangles IBC, JCD, DKA, ALB et le « petit carré » IJKL ont une aire égale à 1/5 de celle du « grand carré » ABCD.

J'ai orienté la suite de mon travail en utilisant des courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes et polaires (ici cf. partie IV, $r = \tan(\theta)$) avec l'appui graphique du logiciel *GEOGEBRA*. Le lecteur pourra me suivre pages 15 et 16 du texte disponible sur notre site web :
URL http ://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php ?article184.
Mon intérêt n'est pas de chercher une nouveauté, mais tout simplement de confirmer classiquement les résul-

tats précédents. D'un point de vue pédagogique, je pense que des élèves motivés peuvent parfois prendre plaisir à confirmer des résultats en changeant d'univers. L'intention de cet article est de montrer que dans un PER, prendre des chemins différents résulte du plaisir de retrouver les mêmes réponses en promenade dans d'autres univers.

VII – L'univers des courbes et surfaces de l'espace de dimension 3

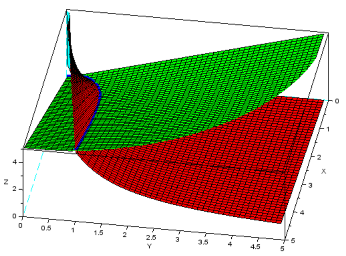
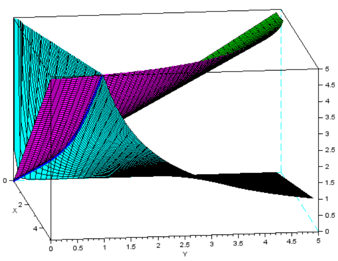
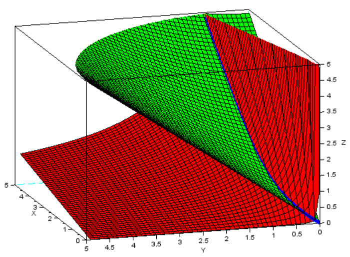
J'ai considéré ensuite les égalités $x^2 + y^2 = z^2$ et $z^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$ comme des équations cartésiennes de deux surfaces dans un repère orthonormal (O,i,j,k) . L'étude de quadriques (dont la classification est maintenant hors du programme des classes préparatoires MP) peut paraître byzantine, mais je vous rappelle qu'il s'agit de mon parcours personnel dans ce PER : j'ai choisi de me promener un peu dans cet univers des quadriques.

La première est l'équation d'un cône de révolution noté (C) et d'axe (Oz) et la seconde peut s'écrire pour $x > 0, y > 0$ et $z > 0$ sous la forme $z = \dfrac{y}{x}$ ou $zx = y$. C'est une quadrique (un paraboloïde hyperbolique, dit aussi « selle de cheval »). Une équation cartésienne d'un cône de révolution d'axe (Oz) est :
$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0$, où α est une mesure de l'angle formé par l'axe du cône et une génératrice. Dans notre cas, on a $x^2 + y^2 = z^2$; il s'agit donc du cône d'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (pour ma recherche, je m'intéresse à la nappe du cône définie par $x > 0, y > 0$ et $z > 0$).

La seconde équation est $y = xz$ (avec x, y, z strictement positifs). Cette surface est une quadrique, dont le nom « paraboloïde-hyperbolique » est lié aux propriétés suivantes :
L'intersection avec le plan $x = z$ donne $y = x^2$, une parabole (remarquons qu'avec les plans $z = x + h$, on obtient $y = x^2 + hx$, encore une parabole). Avec le plan $y = k$ (constante non nulle), on obtient $k = xz$, une hyperbole équilatére. Pour $k = 0$, on obtient les deux droites $x = 0$ et $z = 0$. L'étude classique de cette surface fait intervenir la matrice Q de la forme quadratique associé à cette quadrique dont les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. La signature (1 ;1) implique que la quadrique est un paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique ou la réunion de deux plans. J'ai cherché une base orthonormale de vecteurs propres pour trouver la nouvelle expression de la quadrique et ainsi conclure. Les détails de ces calculs et des prolongements architecturaux sont disponibles sur la version en ligne URL http ://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php ?article184.

Ma recherche a continué par l'étude de l'intersection de ces deux quadriques.

Un système d'équations paramétriques de cette quartique intersection de nos quadriques est :
$x(t) = t, y(t) = \sqrt{\dfrac{t^4}{(1-t^2)}}, z(t) = \sqrt{\dfrac{t^2}{(1-t^2)}}$ avec t dans $]0;1[$. Voici cette courbe vue avec *SCILAB* [1] :

VIII – L'univers de la géométrie avec les nombres complexes

Je me suis posé la question de l'écriture en nombres complexes de l'équation : $x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$ qui équivaut dans $(\mathbb{R}_+)^2$ à l'équation $x^2 + y^2 = \dfrac{y^2}{x^2}$.

Avec $Z = x + iy$, $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ devient : $(\mathrm{Re}Z)^2|Z|^2 = (\mathrm{Im}y)^2$ qui conduit à $|Z| = \tan(\mathrm{Arg}Z)$ (équation où Z est un nombre complexe). On retrouve ici un résultat précédent, l'objectif est de le voir sous la forme d'une équation dans les nombres complexes.

1. Le document en ligne précédemment mentionné montre aussi la courbe tracée via *GEOGEBRA-3D*.

IX – L'univers des matrices (1,3), les groupes et le produit matriciel de Hadamard

J'ai cherché dans une autre direction : si l'on considère l'ensemble A des triplets $(x; y; z)$ de nombres réels tel que $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ et tels que $xz = y$ muni d'une opération binaire interne définie par $(x; y; z) \cdot (x'; y'; z') = (xx'; yy'; zz')$, on obtient un groupe abélien. L'élément neutre est (1 ;1 ;1). La multiplication $(x; y; z) \cdot (x'; y'; z') = (xx'; yy'; zz')$ est le produit matriciel d'Hadamard (ou terme à terme) de deux matrices (1 ;3). Ainsi, une matrice (1 ;3) admet une matrice inverse pour le produit de Hadamard si et seulement si tous ses éléments sont non nuls. Notre paraboloïde hyperbolique pour les triplets de l'ensemble A est ainsi mis en relation avec un groupe commutatif $(A; \cdot)$ et la multiplication matricielle de Hadamard. Essayons d'élargir l'ensemble A à l'ensemble B de triplets $(x; y; z)$ de réels quelconques tels que $xz = y$. On remarque que (0 ;0 ;0) est dans B et qu'il est absorbant pour la multiplication de Hadamard. J'ai étudié une addition $(x; y; z) + (x'; y'; z') = (x + x'; y + y'; z + z')$ dans B et ai cherché une condition pour que la somme soit dans B. La condition est : $(x + x')(z + z') = (y + y')$. On sait que $xz = y$ et $x'z' = y'$ donc : $(x + x')(z + z') = y + xz' + z'x + y'$. Alors il faut et il suffit que $xz' + x'z = 0$. Par exemple : (1 ;2 ;2) et (-1 ;-2 ;2) sont dans B et leur somme (0 ;0 ;4) est dans B. On peut ainsi se donner un élément de $B(x; y; z)$ fixe et définir le sous-ensemble C de B par la condition $xz' + x'z = 0$. Dans cet ensemble C se trouve évidement l'élément (0 ;0 ;0).

Conclusion

Cette petite recherche nous montre que quand on s'interroge sur certaines « erreurs » des élèves qui se produisent en écrivant une égalité fausse sur un certain ensemble, on peut trouver à leur proposer une activité de recherche amusante : découvrir des sous-ensembles où les égalités deviennent vraies. Ce type d'exercice est très formateur pour la pensée scientifique et je vous conseille de les proposer à vos élèves. Quand un élève se trompe, car l'affirmation qu'il propose est fausse sur l'ensemble où l'on travaille, on proposera à la classe de trouver des contre-exemples : ici pour $a^2/b^2 = c^2$, il est facile de trouver un contre-exemple parmi les triangles rectangles, par exemple (3 ;4 ;5). Mais il ne faut pas toujours en rester là, on en profitera pour poser la question : cette affirmation serait-elle vraie sur un sous-ensemble ?
Ou bien : serait-elle vraie sur un autre ensemble ?
Les élèves doivent apprendre que les propriétés sont toujours relatives à un ensemble de référence et qu'ils doivent s'habituer à chercher les ensembles où certaines affirmations dites « fausses » (pour un ensemble donné), deviennent « vraies » pour un autre. Dans le développement des compétences pour chercher en mathématiques, vous avez constaté qu'il est important que les élèves apprennent à chercher sur une même question en utilisant les outils de plusieurs univers et faire ainsi des correspondances entre les propriétés trouvées dans un univers et celles trouvées dans un autre. Cette attitude consistant à chercher une dialectique entre les univers est primordiale dans les activités autour des questions de recherche. Apprendre les mathématiques par des parcours d'étude et de recherche, dans lesquels une question en suscite d'autres et qu'ainsi l'élève cherche dans plusieurs univers est un choix didactique du groupe PERMES de l'IFÉ (Institut français de l'éducation) [2]

Ruben Rodriguez

2. Nous renvoyons aux vidéos de la série « Didactique des mathématiques : les fondamentaux », de Ruben Rodriguez Herrera, et notamment au module 1 sur la notion d'univers en didactique des mathématiques et à la fin du module 7 pour ce qui concerne les parcours d'étude et de recherche (voir notamment à 1h10min). Ces vidéos sont disponibles ici, sur le serveur http ://www.canal-u.tv .

Les manuscrits mathématiques de la bibliothèque de Caen (XIIIe – XVIIIe siècles)

La bibliothèque de Caen, dépendant de l'agglomération de Caen-la-mer, conserve un nombre important de manuscrits mathématiques anciens, pour la plupart d'origine régionale, illustrant une grande variété de thèmes. Bien utilisés, ils me semblent de nature à attirer l'attention des élèves ou étudiants, à les impliquer plus intensivement ou les repositionner favorablement à l'égard des mathématiques. Beaucoup de ces documents étant des manuels ou des cahiers d'élèves, ils peuvent aussi conduire les enseignants en activité ou en formation à une interrogation sur les contenus, les méthodes et les objectifs de l'enseignement des mathématiques à différentes époques. Les lignes qui suivent constituent donc un catalogue exhaustif de tous les manuscrits mathématiques antérieurs à la Révolution française qu'on peut trouver à la bibliothèque de Caen, avec quelques remarques sur l'intérêt pédagogique qu'on peut leur trouver. Les cotes indiquées sont celles du *Catalogue général des manuscrits des bibliothèques françaises*. Quelques livres imprimés, disponibles dans la même bibliothèque, sont aussi évoqués. La bibliographie signale le travail d'analyse de certains manuscrits accompli ces dernières années par plusieurs étudiant(e)s de différents niveaux (L3, M1, M2).

*

* *

Les ressources offertes par la bibliothèque de Caen en matière de manuscrits mathématiques couvrent huit siècles. Elles commencent au temps où l'arithmétique positionnelle décimale indo-arabe devint un concurrent sérieux des chiffres romains et du calcul sur l'échiquier (l'échiquier était une version normande de l'abaque, à l'origine du nom d'une institution financière normande et de la salle de l'Échiquier, au château de Caen). En Normandie, c'est le *Carmen de algorismo* [Poème sur l'algorithme] d'Alexandre de Villedieu (v. 1175-1240), originaire de Villedieu (-les-Poëles), qui fut le véhicule des chiffres arabes. Ce court texte en vers expliquait le principe de la numération en base dix et comment effectuer les sept opérations arithmétiques élémentaires : addition, soustraction, duplication, dimidiation, multiplication, division, extraction de racine. Une copie du XIIIe siècle en est conservée à Caen, au sein d'un recueil de textes de comput ecclésiastique : c'est le plus vieux manuscrit mathématique de la bibliothèque (ms. 14). Le texte est mutilé de la septième partie, relative à l'extraction de la racine. Il est précédé d'une sorte de résumé en prose, qui me semble peu ou pas connu, et plus aisé à exploiter pédagogiquement ; il se termine sur deux problèmes de partage, dont celui-ci :

> *Aliquis vult scire utrum serviens eius sciat computare. Precepit ei quod de XXti denariis emat XX piscis, aliquos ex obolo, alios ex pictos, alios ex duobus denariis, ita quod neque plus neque minus sint de denariis et pictis.* Traduction : Quelqu'un veut savoir si son serviteur sait calculer. Il lui ordonne d'acheter vingt poissons à partir de vingt deniers, certains pour une obole [demi-denier], d'autres pour un picte [demi-obole], d'autre pour deux deniers, de sorte qu'il n'y ait ni plus, ni moins de vingt poissons, et de vingt deniers.

L'invention et le popularisation de l'arithmétique fractionnaire en base dix furent beaucoup plus tardives que ce qu'on imagine en général. Parmi les manuscrits cotés, mais non catalogués de la bibliothèque de Caen se trouve un écrit témoignant de l'introduction des nombres décimaux en Normandie (ms. 1008). Remontant certainement au deuxième quart du XVIIe siècle, il s'intitule *Arithmétique de dixme pratiquée en Holande.* Il est précédé, en partie de la même main, du *Traité de la fortification holandaize* d'un certain « Monsieur du Clos » et d'une *Table de verges de Holande reduittes en toises de France.* Comme le montre son titre, *l'Arithmétique de dixme* s'inspire des principes de la brochure *De Thiende / La Disme*, « premièrement descripte en flameng et maintenant convertie en français par Simon Stevin », publiée dans ces deux langues en 1585. L'auteur écrit :

> Simon Stevin est le premier qui a mis en lumière ceste arithmetique de dixme [...] Or les Flamants ayant vu ceste facilité ont divisé leur verge en 10 parties (qui estoit autrefois en 12). Dont la 10me partie s'appelle pied, & le pied en 10 parties quilz appellent pouce, & le pouce en 10 parties quilz appellent grain, & cette verge ainsi divisée, il a fallu le secours de l'arithmétique de dixme de Stevin pour les mesures de la géométrie. La pratique de ceste arithmetique n'est point si utile qu'en Hollande, & aux autres lieux elle est inutille, & pour appliquer l'arithmetique de Dixme, il faut donner des exemples de Geometrie. Car de la donner comme a faict Stevin, il n'y a poinct apparence & cette arithmétique sera Geometrie & arithmetique tout ensemble.

Pas encore de virgule à cette époque : l'auteur adopte la notation de Stevin, où chaque décimale est suivie de son rang dans un cercle, par exemple

27⓪8①4②7③ pour $27,847$. Il expose la façon de procéder aux opérations arithmétiques élémentaires (désormais au nombre de cinq, duplication et dimidiation n'en faisant plus partie). Il en donne des applications géométriques : la « multiplication de dixme » est ainsi appliquée à la mesure du cercle et la « règle de troys par la dixme » à des calculs de hauteurs de tours.

Ce problème récurrent de la hauteur d'une tour nous conduit de l'arithmétique à la géométrie pratique, qui, favorisée par le développement de l'art militaire, est la grande affaire du premier XVII[e] siècle. À la bibliothèque de Caen, un épais manuscrit anonyme intitulé *Traité de fabricomologie ou ergastice du point* m'intriguait (ms. 131). C'est une véritable encyclopédie de construction géométrique, où j'ai repéré de libres emprunts à des auteurs variés, notamment Dürer (*Décrire la circonférence d'une poire*) et Clavius (*D'un point donné hors le triangle, mener une ligne droite qui le divise en deux également*). Certains problèmes semblent originaux (*Diviser un cône en trois parties égales par des plans parallèles à la base*) et l'ouvrage témoigne d'une pensée personnelle profonde sur l'arithmétique des objets et les méthodes de construction. J'ai réalisé en 2011 qu'il était l'œuvre d'un certain Guillemme Le Vasseur (Dieppe, v. 1564 - Rouen, 1634), et que celui-ci fut le mathématicien le plus influent de son époque en Normandie (Ageron 2013). Tisserand dans sa jeunesse, puis cartographe, pilote de bateau, hydrographe, architecte et ingénieur, il rédigea une série de traités de mathématiques, qu'il enseignait en privé, semble-t-il, aux gentilhommes protestants (Ageron 2016). Parmi eux, le *Traité de fabricomologie* conservé à Caen, dont deux autres manuscrits se trouvent à Paris et à New York. Mais aussi un *Traité de praticométrie*, c'est-à-dire de géométrie pratique mesurée ou nombrée, où Le Vasseur met en avant un compas appelé *gonomètre* permettant de mesurer, par exemple, des lignes ou des hauteurs inaccessible, et où il établit la formule de Héron donnant l'aire d'un triangle à partir de ses côtés. Et encore un *Traité de trigonométrie*, le seul qui fut imprimé, mais sans nom d'auteur : il y montre comment trouver la profondeur maximale de la mer d'un point de la côte normande à un point de la côte anglaise, comme, selon les versions, « entre Dieppe et La Rie » ou « entre Le Havre de Grâce et Blanquef ». De ces deux derniers traités, la bibliothèque de Caen conserve (ms. 130) des versions raccourcies, copiées de la main du grand orientaliste protestant Samuel Bochart (Courtin & Guênerie 2009) : celui-ci fut certainement l'élève de Le Vasseur. Les traités de Le Vasseur sont des mines d'or pour le professeur : les figures des manuscrits séduisent, les problèmes abordés intéressent et se prêtent bien à une infinité d'approches pédagogiques, par exemple avec un logiciel de géométrie dynamique.

*

* *

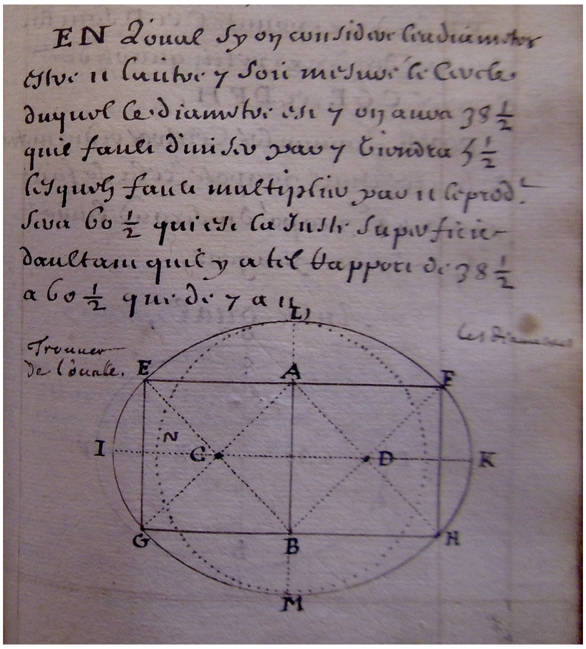
Les hasards de l'histoire ont mené jusqu'à la Biblioteka Jagiellonska de Cracovie un petit manuscrit normand daté de 1637, intitulé *Questions mathematiques a sçavoir de geometrie et de fortification* (ms. gall. fol. 155). Son auteur, Jacques Louvel (Caen, v. 1600 - Caen, 1680), fut maître écrivain juré et professeur d'écriture et de mathématiques ès-collèges du Bois et des Arts de l'université de Caen. Son opuscule, qui semble en partie inspiré par la *Géométrie pratique* du professeur parisien Didier Henrion (1620), se distingue par la qualité et l'ornementation de sa calligraphie. Il a aussi la particularité, intéressante à exploiter pédagogiquement, de ne fournir les solutions des dix-neuf problèmes énoncés que sous forme d'une figure : on a donc des preuves visuelles, sans mots. Il est suivi, du même auteur, de la description de trois opérations d'arpentage sous le titre *De la Construction du demy-cercle et de son usage*, puis d'une compilation sans ordre de sujets attrayants relatifs à la chronologie et à la navigation, œuvre d'un certain Gilles Bellier, P.E.M. (comprendre : professeur ès-mathématiques) à Rouen, tirée entre autres des livres de l'astrologue Jean de Séville, premier titulaire de la chaire de mathématiques de l'université de Caen.

Le jésuite Georges Fournier (Caen, 1595 - La Flèche, 1652) fut élève des jésuites de Caen et la Flèche, professeur de mathématiques à la Flèche de 1628 à 1633, à Dieppe de 1633 à 1636, à Hesdin de 1639 à 1644, puis revint à Caen comme préfet des études. Ses traités de mathématiques manuscrits, autrefois conservés à la bibliothèque des jésuites de la Flèche, semblent n'avoir pas survécu. Mais plusieurs de ses ouvrages ont été imprimés, notamment son *Hydrographie*, écrite après plusieurs voyages en mer et publiée en 1643. Huit pages y sont réservées à des problèmes de construction géométrique (Fournier 1643, p. 481-488). On y trouve une erreur dont il est intéressant de tirer parti pédagogiquement :

> L'ovale ou ellipse est une ligne courbe que les mathématiciens ont accoustumé de nous exposer en coupant de travers un cosne ou un cylindre, en sorte que la coupe, ou diamètre de l'ovale, ne soit point parallèle aux costés du cylindre ou du triangle du cône, ni à leur base. Celle qui se fait par la coupe du cylindre se nomme simplement ovale. Celle qui se fait par la coupe d'un cosne ressemble parfois à un œuf dont l'un des bouts est plus menu que l'autre.

La section d'un cône n'a jamais, bien sûr, un bout « plus menu que l'autre », car c'est une ellipse, de même que la section d'un cylindre. L'erreur semble héritée d'Albrecht Dürer, qui, dans son *Underweysung der Messung* (1528), définissait l'ellipse comme section de cône et la traçait point par point, par double projection orthogonale, selon un principe parfaitement correct, mais obtenait un tracé ovoïde. Guillemme Le Vasseur, dans son *Traité de fabricomologie ou ergastice du point*, semble aussi penser qu'il y a deux courbes différentes : il définit l'ellipse comme section du cône et l'ovale comme section du cylindre.

Le thème de la construction d'ovales par raccord de cercles, riche en possibilités, est présent chez Le Vasseur, Louvel et Fournier. On le trouve encore dans un manuscrit anonyme conservé à Caen, daté de 1684 (ms. 480) : cet épais volume contient plusieurs traités dont un recueil de problèmes de 82 pages intitulé *De la réduction des figures géométriques ou transmutation d'icelles, appelée par les savants métaschématique*. Le cinquante-septième problème consiste à « construire une cornemuse », sorte de cardioïde. Le cinquante-huitième est la « construction de l'oval parfait par deux quarrés esgaux », c'est-à-dire un ovale circonscrit à un rectangle EFHG divisé en deux, tel un domino, par une transversale AB :



Construction de l'oval parfait par deux quarrés esgaux. En l'oval, si on considère un diamètre estre 11, un autre 7, soit mesuré le cercle duquel le diamètre est 7 : on aura 38 ½, qu'il faut diviser par 7, on obtiendra 5 ½, lesquels fault multiplier par 11, le produit sera 60 ½ qui est la juste superficie, d'aultan qu'il y a tel rapport de 38 ½ à 60 ½ que de 7 à 11. Les deux points A et B sont les centres des deux grands quarts de cercle BEF et AGH, et les deux points C et D sont les centres des deux petits quarts de cercle CGE et DFH. Pour trouver les centres et diamètres à tout oval proposé, cela se fait par la 44e proposition du second livre d'Apollonius Pergius.

Après la géométrie, l'algèbre. Au XVI^e siècle, Guillaume Gosselin (v. 1545- v. 1590), né à Ifs, tout près de Caen, fut l'un de ses principaux passeurs en France et le dernier à la désigner par son nom arabe double (Gosselin 1578, seconde partie, déclaration) :

> De la Grand Art, dite en Arabe Algebre & Almucabale, ou Reigle de la chose, inuentée de Maumeth fils de Moïse Arabe

L'algèbre pénétra cependant avec beaucoup de lenteur dans l'enseignement des mathématiques. Au XVII^e siècle, les réticences étaient encore fortes. Dans son cours, le jésuite Pierre Gautruche, professeur de mathématiques à Caen de 1667 à 1681, ne l'évoque que brièvement et prudemment, sur un seul exemple, très simple (Gautruche 1653, p. 31) :

> *Notabis prætera huc accedere & aliam regulam, quam ab inventore, Algebram nominant [...] exemplum subjicio. Quaeretur numerus qui multiplicatus per 14, eandem reddat summam, quam si multiplicetur per 9. additis postea 90, ad ejus productum.* [Traduction : Tu noteras de plus, arrivé à ce point, une autre règle, qu'on nomme l'algèbre, du nom de son inventeur. [...] je présente un exemple. On demande un nombre qui, multiplié par 14, rendra le même total que s'il avait été multiplié par 9, et qu'ensuite 90 aient été ajoutés à son produit.

Vers 1700, l'auteur d'un recueil de problèmes d'arithmétique à visée pédagogique (ms. 132) affiche qu'il entend les résoudre « sans aucun secours de l'algèbre ni ancienne ni nouvelle, mais par des raisonnements aisés tirés de la la nature même de ces questions et appuyés sur les principes les plus simples et les plus communs ». Car cette algèbre est, poursuit-il, une méthode « dommageable », qui « laisse l'esprit dans une étrange confusion » ; quant aux algébristes, ce sont « gens oisifs » dont le passe-temps consiste « à embrouiller » les problèmes ! Mais cette vive hostilité est paradoxale, car c'est au fond par l'algèbre, malgré ses dénégations, qu'il résout un problème comme celui-ci (Prigent 2011) :

> Un nombre inconnu a été multiplié par 20 et le produit ayant été soustrait de 70, on a reservé le reste. Le même nombre inconnu est ensuite multiplié par 30, et l'on ajoute 10 à ce nouveau produit. Après quoi, divisant par cette somme le reste que l'on avait réservé d'abord, le quotient étant soustrait de 2/5, le reste est 3/10. Quel nombre peut satisfaire a ces conditions ?

Il faut, dit-il, le « réduire aux termes les plus simples », ce qui est après tout l'essence de l'algèbre. Il désigne l'inconnue par x. Plus étonnant encore : tirant de Clavius le problème du *ludimagister*, il le résout par une démarche algébrique, alors que le jésuite allemand appliquait la méthode arithmétique de double fausse position (Ageron 2011). Ce problème est :

> Un maistre de mathematique dit qu'il a tel nombre d'ecoliers, que si chacun luy donnoit 8. pistolles, il ne luy en faudroit plus que 30. pour acheter une maison qu'on veut luy vendre ; mais

> que s'ils luy donnoient chacun 10. pistoles il auroit 40. pistolles au delà du prix de cette maison. On demande quel est le nombre de ses ecoliers et quel est le prix de la maison qu'on luy veut vendre.

Au XVIII^e siècle, les réticences sont effacées. L'algèbre semble même parée de toutes les vertus, comme le suggèrent plusieurs manuscrits anonymes conservés à Caen et probablement d'origine locale. L'auteur d'une *Nouvelle méthode pour trouver avec facilité la racine de tous les cubes parfaits et de tous les nombres proprement appelés sursolides* (ms. 133) prône « le secours des lettres » plutôt que la « méthode ordinaire » pour extraire la racine cubique d'un grand nombre comme 115714886617 une fois qu'on a estimé qu'elle « doit être de quatre caractères ». Celui d'un *Traité de géométrie* (ms. 482) venant de la bibliothèque des Jésuites de Caen, ayant commencé à établir sept propositions du livre II des *Éléments* d'Euclide « par les figures », se ravise, biffe ce qu'il a déjà écrit et entreprend de les reformuler algébriquement, car, dit-elle, elles « se démontrent plus aisément par le calcul ». Les techniques enseignées deviennent peu à peu plus complexes. Dans des *Élémens de mathématiques* en français venant en appendice à un cours de philosophie (ms. 465), certainement postérieurs à 1740 puisqu'on y évoque Mme du Châtelet, on trouve les règles de l'arithmétique des polynômes, avec les exemples de la division de $9x^4 + 12ax^3 - 4a^3x - a^4$ par $3xx - aa$ et de la racine carrée de $9aa - 12ab + 4bb$; cependant, les seules équations algébriques considérées sont celles du premier degré. Dans un manuscrit daté de 1763, on trouve, à la suite de cours en latin de botanique et géométrie, le problème de la couronne du roi Hiéron, en français, résolu par l'intermédiaire d'un système de deux équations à deux inconnues (ms. 717). Enfin, dans un cahier d'élève daté de 1742 (ms. 478), on découvre que le jésuite Yves-Marie André, qui fut professeur de mathématiques à Caen de 1726 à 1759 (Ageron & Bessot 2011), montrait à ses élèves comment résoudre certaines équations du troisième degré, comme $x^3+6xx+12x = 117$:

> En ajoutant 8 de part et d'autre, nous aurons $x^3 + 6xx + 12x + 8 = 125$. Donc en extrayant la racine cubique de part et d'autre [...]

*

* *

RÉFÉRENCES

Ageron P. & Bessot D. (2011) De Varignon au père André : tribulations normandes d'un cours de géométrie. In Barbin É. & Ageron P. (éds) (p. 181-200), *Circulation, transmission, héritage - Histoire et épistémologie des mathématiques*, Caen : IREM de Basse-Normandie.

Ageron P. (2011) Le problème du ludimagister dans un manuscrit normand. *Le Miroir des maths* 8, 22-26.

Ageron P. (2013) *Le Traité de fabricomologie ou ergastice du point*. In Barbin É. & Marc Moyon M. (éds) (p. 287-304), *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire, entre enseignement, recherche et culture*. Limoges : PUL.

Ageron P. (2016) Le programme pédagogique de Guillemme Le Vasseur, « architecte, professeur de mathématiques, ingénieur et pilote en la mer océane » (v. 1564-1634). In *Éduquer et instruire en Normandie*, actes du 50e congrès de la Fédération des sociétés historiques et archéologiques de Normandie. Louviers : FSHAN (à paraître en 2016).

Courtin C. & Guênerie N. (2009) *Étude du manuscrit* Pratique de géométrie *de Samuel Bochart*. Travail d'études et de recherche, sous la direction de P. Ageron. Caen : Université de Caen.

Fournier G. (1643) *Hydrographie contenant la théorie et la practique de toutes les parties de la navigation*. Paris : M. Soly.

Gautruche P. (1656) *Philosophiae et Mathematicae totius Institutio, Cum Assertionibus disputatis, et vario genere Problematum*, vol. III, *Mathematica*. Caen : A. & J. Cavelier.

Gosselin G. (1578) *L'arithmétique de Nicolas Tartaglia Brescian*. Paris : A. Périer.

Prigent A. (2011) *Entre arithmétique et algèbre autour de 1700 : étude d'un manuscrit à visée pédagogique*. Mémoire de master 2, sous la direction de P. Ageron. Nantes : Université de Nantes.

Sabalos, M. (2016) Rapport de stage en histoire des mathématiques, sous la direction de P. Ageron. Caen : Université de Caen.

Pierre Ageron

NUMÉRO QUINZE : mars 2016

ISSN : 1969-7929 (imprimé)
ISSN : 1760-6500 (en ligne)

LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

— Éditorial, par Gilles Damamme 2
— Carrés géomagiques, par Danielle Salles 3
— Triangles rectangles de Ruben, par Ruben Rodriguez 17
— Les manuscrits mathématiques de la bibliothèque de Caen (XIII^{e} – XVIII^{e}), par Pierre Ageron 24

Comité de rédaction : Pierre Ageron & Éric Trotoux - Composition LaTeX.

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http://www.univ-IREM.fr/ Prix au numéro : 13 euros + frais d'expédition si envoi par avion.

Repères IREM