LE MIROIR DES MATHS

UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE

IREM DE CAEN NORMANDIE
UNICAEN, CAMPUS II Bât. SCIENCES 3
BP 5186 CS 14032 – 14032 CAEN Cedex
Adresse électronique : sciences.irem@unicaen.fr
Secrétariat : Mme Sonia ESNAULT 02 31 56 73 60
Site web - http ://irem.unicaen.fr

IREM DE CAEN NORMANDIE

NUMÉRO SEIZE : mai 2017

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

Récemment à l'IREM de Caen Normandie.

Le Cercle de lecture en histoire des mathématiques a, au mois de mars, invité Odile Le Guillou-Kouteynikoff qui a présenté une (cir)conférence sur Guillaume Gosselin de Caen, un algébriste de la Renaissance.

Guillaume Gosselin, né à Caen vers 1550, est un mathématicien original et rigoureux qui a contribué à l'émergence de l'algèbre en France à la Renaissance. Il est l'auteur de deux ouvrages qui se répondent. L'un est un traité d'algèbre (*De arte magna libri quatuor*), imprimé en 1577. L'autre, qui paraît en 1578, intitulé *L'Arithmétique de Nicolas Tartaglia*, est une traduction française, à la fois abrégée et augmentée, des deux premières parties du *Traité général des nombres et de la mesure* de Tartaglia. Dans ces deux livres, Gosselin se montre soucieux d'énoncer des règles générales et concises, qu'il démontre sans recourir à la géométrie, donnant ainsi au champ numérique une autonomie inédite. Son travail s'appuie sur les *Éléments d'Euclide* et sur les *Arithmétiques de Diophante* dont la première traduction du grec est parue à Bâle en 1575. En 1583, par sa *Leçon sur la manière d'étudier et d'enseigner la mathématique*, Gosselin contribue de manière plus générale au débat sur le statut des mathématiques. La conférence a permis d'avoir un aperçu concret de son œuvre et d'en entrevoir le potentiel pédagogique.

Anciennement professeur en lycée et animatrice IREM, Odile Le Guillou-Kouteynikoff est aujourd'hui chercheur au laboratoire SPHERE (CNRS / université Paris-Diderot). Vous pouvez voir ci-contre en page 3, les couvertures des livres d'Odile Le Guillou-Kouteynikoff et de Guillaume Gosselin.

Repères IREM *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

Sommaire du Numéro 105 – Octobre 2016

Sommaire du Numéro 106 – Janvier 2017

Éditorial

Dans ce numéro 16 du *Miroir des maths*, dans une *Note d'humeur*, Claude Roche revient sur la méthodologie employée dans les enquêtes Pisa et TIMMS, en montrant quelques incohérences.

Dans un autre article, Aurélien Detey apporte son point de vue sur le vocabulaire employé dans l'enseignement de certaines notions mathématiques. Il expose comment certains mots dont le sens nous paraît évident dans le contexte mathématique peuvent être source de confusion pour des élèves.

Michel Soufflet quant à lui nous expose le phénomène des marées, ainsi que la méthode empirique utilisée par les marins pour déterminer la hauteur d'eau en un point donné. Cet article est complété par des calculs détaillés sur un exemple par Didier Bessot.

L'Équipe de Géométrie de l'IREM nous présente des constructions de pavages du type de Penrose, issues du pavage réalisé dans l'église Santa Maria de Mahón à Minorque (Espagne).

Enfin Pierre Ageron nous propose deux articles. Le premier traite d'un outil géométrique : *l'aigle-compas*, inventé par un mathématicien normand du XVI^e siècle, permettant de tracer l'arc de cercle passant par trois points non alignés. Le second article revient sur l'héliocentrisme dans les pays musulmans, en analysant de plus près une traduction turque d'un livre français du XVII^e siècle.

Pour finir, je reviens sur quelques évènements importants de la vie de notre IREM pendant cette année.

Il ne vous a pas échappé que nous avons changé de directeur. J'ai repris cette fonction en novembre dernier et je remercie tous les animateurs des différents groupes qui ont bien voulu que je prenne cette charge. J'espère pouvoir mener à bien cette tâche.

En septembre dernier, l'IREM a tenu son séminaire de rentrée sur l'île de Tatihou ; moment d'échanges et de convivialité, apprécié de tous les participants dans un endroit dépaysant.

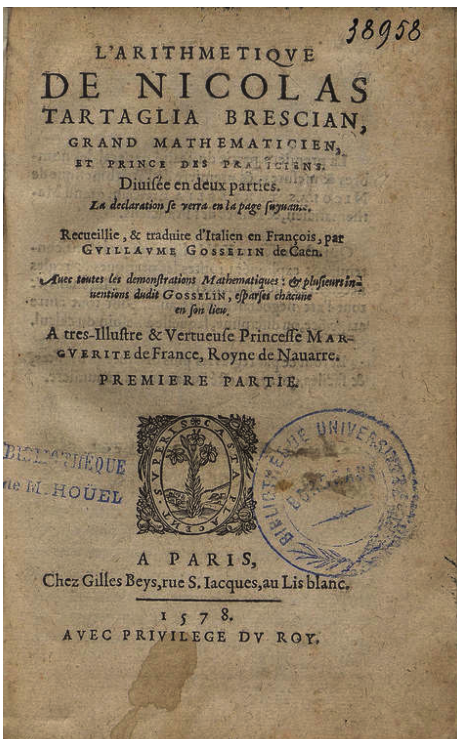
En mars, l'IREM a invité Odile Le Guillou-Kouteynikoff pour nous parler de Guillaume Gosselin de Caen, algébriste de la Renaissance.

Cette année nous avons expérimenté le déplacement hors de Caen d'une de nos assemblées générales des animateurs. L'expérience conduite à Saint-Lô, dans le collège Lavalley où Philippe Langlois nous a chaleureusement accueillis, a été appréciée et il faudra certainement la reconduire.

Enfin l'édition annuelle du Rallye Mathématique Dynamique et Virtuel, organisé par Gérald Giangrande, Jérôme Huet et Thierry Mercier, s'est déroulée le 28 avril dernier et a, comme d'habitude, rencontré un franc succès. Rendez-vous est donné pour l'an prochain.

Bonne lecture à tous.

André Sesboüé
Directeur de l'IREM de Caen Normandie



Note d'humeur : sur une enquête concernant le niveau en mathématiques

Je ne m'étonne pas de lire (1) que le niveau en mathématiques des jeunes Français s'est effondré. Il y aurait beaucoup à dire sur les causes ; je vais me replonger dans mes vieux dossiers pour voir si, comme l'explique l'actuelle ministre de l'Éducation nationale, c'est la faute à Fillon ! Ici, je me contente de dire ma perplexité devant la méthodologie des sondeurs.

Déjà à propos de l'enquête Pisa, on pouvait présenter deux objections. La première était dans la définition : « la culture mathématique est l'aptitude à identifier et à comprendre les divers rôles joués par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leurs propos, et à s'engager, en fonction des exigences de sa vie présente et future (!) en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi ». Si cela était sérieux, ce serait peut-être de la philosophie, mais certainement pas des mathématiques. On ne reconnaît d'ailleurs aux domaines mathématiques, tels qu'ils sont enseignés, que le statut d'« aspect mineur de l'organisation du domaine de la culture mathématique » ! On reprochait ensuite aux écoliers français de ne répondre qu'à bon escient, ayant intériorisé l'approche socratique selon laquelle c'est déjà beaucoup de reconnaître son ignorance. Or dans un questionnaire à choix multiples, il vaut mieux répondre au hasard si l'on ne sait pas ; au lieu d'avoir 0, on a ainsi une une chance sur trois de tomber juste s'il y a trois options et qu'on répond au hasard... on a même la moyenne, s'il n'y a que deux options à chaque fois !

Dans l'enquête internationale TIMSS, rendue publique mardi 29 novembre 2016, on propose à nos écoliers une suite chiffrée, 6, 13, 20, 27... et on s'étonne que seulement 59% d'entre eux, quand on leur demande de poursuivre, répondent 34. Je trouve que c'est encore trop, car n'importe quelle réponse convient à un problème si mal posé. On aurait dû, selon les auteurs de l'étude TIMSS, demander d'établir une relation entre termes consécutifs (comme ici $u_{n+1} = u_n + 7$) ou une relation fonctionnelle $un = f(n)$ (ici $u_n = 6 + 7n$, si j'appelle u_0 le premier terme). Mais les règles du jeu ont-elles été correctement explicitées ? Quand on est en face d'une suite, implicitement considérée comme une suite de nombres entiers, dont on donne quatre termes, il y a une infinité de prolongements. Par exemple dans le cas présent : $6, 13, 20, 27, 32, 34, 39, 41 \ldots$ qui est la suite des nombres entiers qui sont la somme de six cubes, ou le début de la liste finie des nombres qui sont de façon unique la somme de six cubes. On pourra chercher sur le site OEIS (2), non pas toutes les solutions, puisqu'elles sont en nombre infini, du moins la plupart de celles qui ont fait l'objet d'une publication.

On se demande enfin si les écoliers qui ont en plus répondu au problème de Flaubert [1] et donné l'âge du capitaine (3) ont eu des points supplémentaires.

Références

(1) « L'inquiétant niveau des élèves français en maths et sciences », *Le Monde*, 29 novembre 2016.
(2) Site oeis.org (*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*).
(3) IREM de Grenoble, « Quel est l'âge du capitaine ? », *Grand N*, numéro 19, 1979 (disponible en ligne sur www-irem.ujf-grenoble.fr/revues).

Claude Roche

L'âge du capitaine :

« Puisque tu fais de la géométrie et de la trigonométrie, je vais te donner un problème : Un navire est en mer, il est parti de Boston chargé de coton, il jauge 200 tonneaux, il fait voile vers Le Havre, le grand mât est cassé, il y a un mousse sur le gaillard d'avant, les passagers sont au nombre de douze, le vent souffle NNE, l'horloge marque trois heures un quart d'après-midi, on est au mois de mai...
On demande l'âge du capitaine. »

Gustave Flaubert (1843) *Correspondance*

1. La précision concernant G. Flaubert et l'âge du capitaine est apportée par la rédaction. Le dessin illustrant la citation de G. Flaubert rebondit sur l'humour de la conclusion de l'auteur. Il provient du site http ://cdn4.coloritou.com.

L'aigle-compas de Toussaincts de Bessard

L'AIGLE-COMPAS DE T. DE BESSARD, D'AVGE EN NORMANDIE.

Auec ſon vſage, accompaigné des demonſtrations requiſes pour l'intelligence d'iceluy.

Par lequel on peut faire des lignes circulaires de telle eſtendue qu'il viendra à gré, n'ayant toutesfois autre centre que l'air.

Qui eſt vn abregé treſ-beau & treſ-vtile pour tous Coſmographes, fabricateurs d'inſtrumens Mathematiques, & Architectes ingenieux, à raiſon que par ſon moyen vn chacun d'eux eſt releué de la peine ennuyeuſe de la recherche du centre incogneu, par la doctrine des trois poincts donnez.

EN MOY LA MORT,

EN MOY LA VIE.

A PARIS,

De l'Imprimerie de Hieroſme de Marnef, & Guillaume Cauellat, au mont S. Hilaire, à l'enſeigne du Pelican.

1572.

1. À propos de Toussaincts de Bessard

Toussaincts de Bessard, qui se présente comme « d'Auge en Normandie », est un de ces nombreux quasi-inconnus de l'histoire des mathématiques. Il naît vers 1524 dans le village de Putot, proche de Dozulé [1]. Il paraît avoir obtenu ses grades de docteur en médecine et étudié les mathématiques [2] ; il voyagea beaucoup, « sur terre et sur mer », et devint un « des plus renommez pilotes de France » [3]. Il se fixa dans la France antarctique, l'éphémère colonie française des côtes du Brésil fondée en 1555, où il assure avoir demeuré dix ans, notamment à Cabo Frio, à Rio de Janeiro et dans leurs environs [4]. Rentré probablement en 1567, lors de l'expulsion de la presque totalité des colons français, il semble avoir vécu quelques années à Paris. Il fréquenta la Cour et témoigna sur les mœurs des habitants de l'Amérique : des observations précises, nuancées, « des choses toutes differentes de ce qu'on en escrit », nota François de Belleforest qui les mit à profit dans son *Histoire universelle du monde* [5]. Il se mit sous la protection de René de Voyer, vicomte de Paulmy, conseiller privé du Roi, auquel il fit « en ses heures de repos » le récit de son séjour brésilien : celui-ci lui fit promettre de le coucher par écrit. Mais l'opuscule que lui dédicaça Bessard le 18 septembre 1572, intitulé *L'Aigle-compas* [6], était de toute autre nature : il y décrivait un instrument de géométrie de son invention, que nous allons examiner plus bas. De plus, il y annonçait, outre le récit de ses voyages, un traité de navigation qu'il était sur le point d'achever. En novembre 1572, il se fit octroyer pour ce traité le privilège du roi Charles IX. Il semble alors avoir brusquement quitté son protecteur pour regagner sa Normandie natale : il s'installa à Rouen afin d'y faire publier ses livres. En juin 1573, il obtint une gratification de trente livres des conseillers et échevins, qui consentirent de plus en mai 1574 un prêt à son libraire, étant convenu que la moitié des bénéfices tirés de la vente des livres de Bessard serait « pour le remboursement des deniers que la ville a advancez » [7]. En 1574 fut imprimé le *Dialogue de la longitude est-ouest*, présenté comme première partie d'un ensemble intitulé *Le Miroir du monde* [8] : on y trouvait notamment la description d'un nouvel instrument, le *micomètre*, sorte d'astrolabe renfermant une boussole, censé permettre la détermination en mer de la longitude que l'on croyait alors liée à la déclinaison magnétique. L'ouvrage, aux armes de Rouen, était dédicacé « à honorables seigneurs Messieurs les conseillers & eschevins ». Bessard s'y félicitait que les Rouennais aient « prins goust a la science » et espérait, par son livre, « les remercier du bon accueil » et satisfaire « ceux qui ayment la mer, sur laquelle se fait la principalle partie du traffic de [leur] ville ». Il y annonçait un *Traicté du cosmo-metre, Seconde partie du Miroër du Monde* « qui suyvra bien-tost cette premiere » [9], et des *Tables de l'Anathomie Geometrique* « faictes à la devotion de monsieur de Brevedent, Lieutenant General de monsieur le Bailly de Roüen » où il devait traiter du cercle et de la sphère. Aucun d'eux ne vit le jour, pas plus que les récits de voyages promis au vicomte de Paulmy. Le dernier travail de Toussaint de Bessard que nous ayons repéré est, vers 1574, un *pourtraict* de la ville de Compiègne exécuté pour le Maréchal de Montmorency, gouverneur de l'Île de France [10]. Il vivait encore en 1584 [11].

Nous ignorons si Toussaincts de Bessard a enseigné, mais ses écrits le montrent disposé à dispenser des leçons. Dans *L'Aigle-compas*, il indique que « le surplus de tout ce qui s'en pourroit traicter par escrit est reservé

1. Dans l'épître dédicatoire de son *Aigle-compas (vide infra)*, datée du 18 septembre 1572, il dit qu'il « approche l'an quinquagénaire ». Un document daté de 1573 le dit « de Putot en Auge » (cité dans : Édouard FRÈRE, *Manuel du bibliographe normand*, Rouen, A. Le Brument, t. I^er^, 1858, p. 100).

2. Un document le désigne comme « mathématicien » (É. FRÈRE, *Manuel*..., t. I^er^, p. 100) ; un autre comme « médecin et mathématicien » ([Xavier] DE BONNAULT D'HOUËT, *Compiègne pendant les guerres de religion et la Ligue*, Compiègne, Imprimerie du Progrès de l'Oise, 1910, p. 51).

3. François [Grudé] DE LA CROIX DU MAINE, *Premier volume de la bibliothèque du Sieur de La Croix du Maine*, Paris, Abel L'Angelier, 1584, p. 468.

4. Dans son *Dialogue de la longitude (vide infra)*, p. 29, Bessard laisse entendre avoir fait des observations non seulement « au Cap de Frie, & Rie de Janviere », mais aussi « aux isles du Peru [Grandes Antilles], & Cap de la Floride » et à « la terre neufve, qu'on dit de Bachalaos, ou des Moluës ».

5. François DE BELLEFOREST, *L'Histoire universelle du monde*, Paris, Gervais Mallot, 1570, f^o^ 315r-317r.

6. T[oussaincts] DE BESSARD, *L'Aigle-compas, avec son usage, accompaigné des demonstrations requises pour l'intelligence d'iceluy, par lequel on peut faire des lignes circulaires de telle estendue qu'il viendra à gré, n'ayant toutesfois autre centre que l'air, qui est un abregé tres-beau & tres-utile pour tous cosmographes, fabricateurs d'instrumens mathematiques & architectes ingenieux, à raison que par son moyen, un chacun d'eux est relevé de la peine ennuyeuse de la recherche du centre incogneu par la doctrine des trois poincts donnez*, Paris, Hierosme de Marnef & Guillaume Cavellat, 1572. Ouvrage rare dont aucun exemplaire ne semble conservé en Normandie. Nous avons consulté celui de la bibliothèque universitaire de Turin, accessible en ligne.

7. É. FRÈRE, *Manuel*..., t. I^er^, p. 100.

8. Toussaincts DE BESSARD, *Dialogue de la longitude est-ouest (...) qui est la première partie du Miroir du Monde, contenant tous les moyens que l'on pourroit avoir tenus en la navigation jusqu'à maintenant*, Rouen, Martin Le Mesgissier, 1574. Ouvrage rare dont aucun exemplaire ne semble conservé en Normandie ; nous avons consulté celui de la British Library, accessible en ligne. Courte analyse dans : Jean MASCART, *La Vie et les Travaux du chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799), épisodes de la vie scientifique au XVIII^e^ siècle*, Annales de l'université de Lyon, nouvelle série, II, Droit - Lettres, fasc. 33, Lyon, Rey & Paris, Picard, 1919, p. 695-696 ; réimpr. Paris ; Presses Université Paris-Sorbonne, 2000.

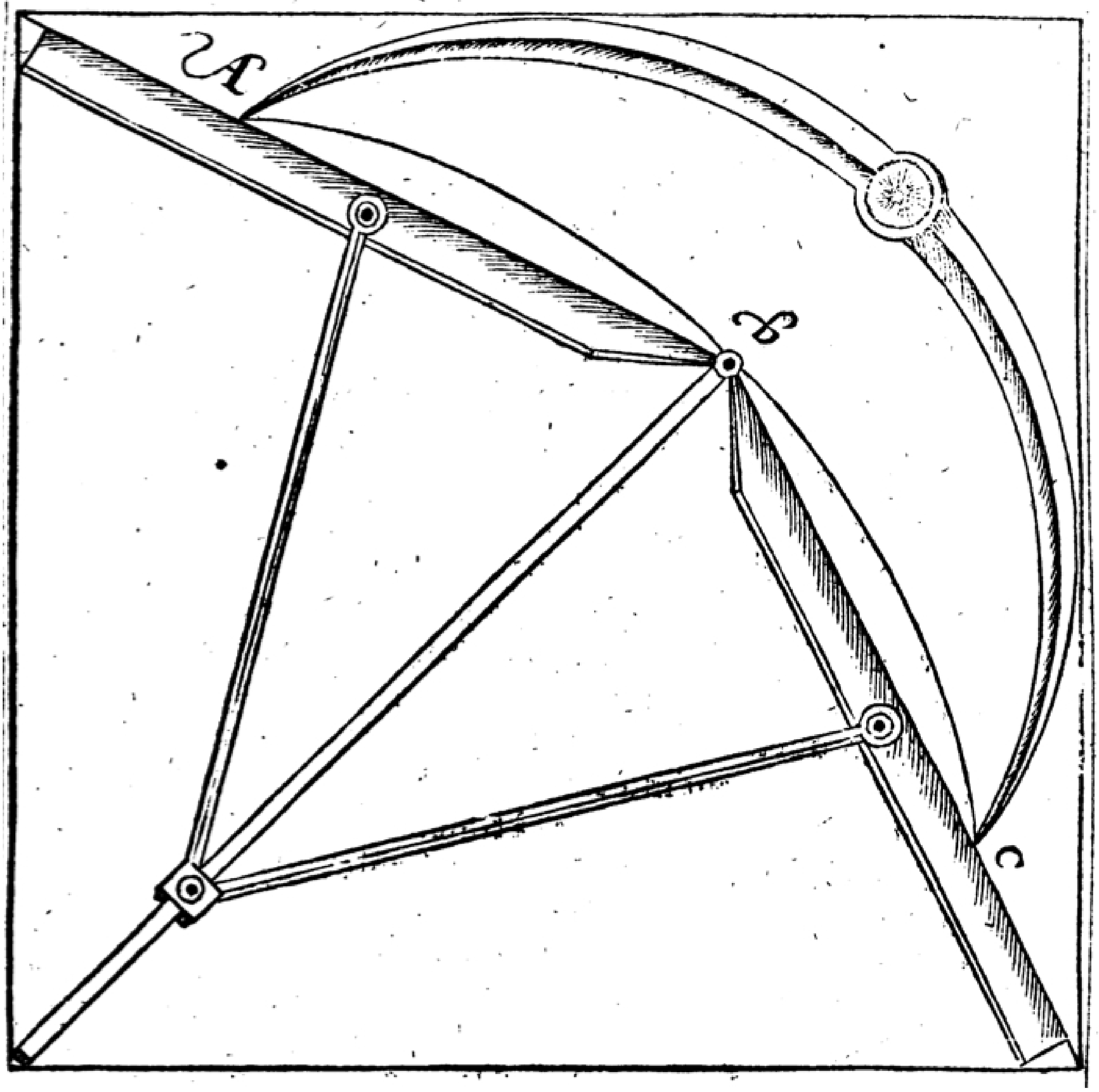
9. T. DE BESSARD, *Dialogue*..., p. 17-18, 110 et 4.

10. X. DE BONNAULT D'HOUËT, *Compiègne*..., p. 51.

11. F. DE LA CROIX DU MAINE, *Premier volume de la bibliothèque*..., p. 468.

aux leçons & demonstrations qu'en pourra faire l'autheur, tant en general qu'en particulier » ; dans le *Dialogue de la longitude*, on lit : « Si aucun veut conferer avecques l'Autheur des choses contenuës en ce present livre, qu'il s'adresse chez George L'Oiselet, qui l'a imprimé, audit lieu de Rouen & il donnera enseignement de la residence dudit Autheur ».

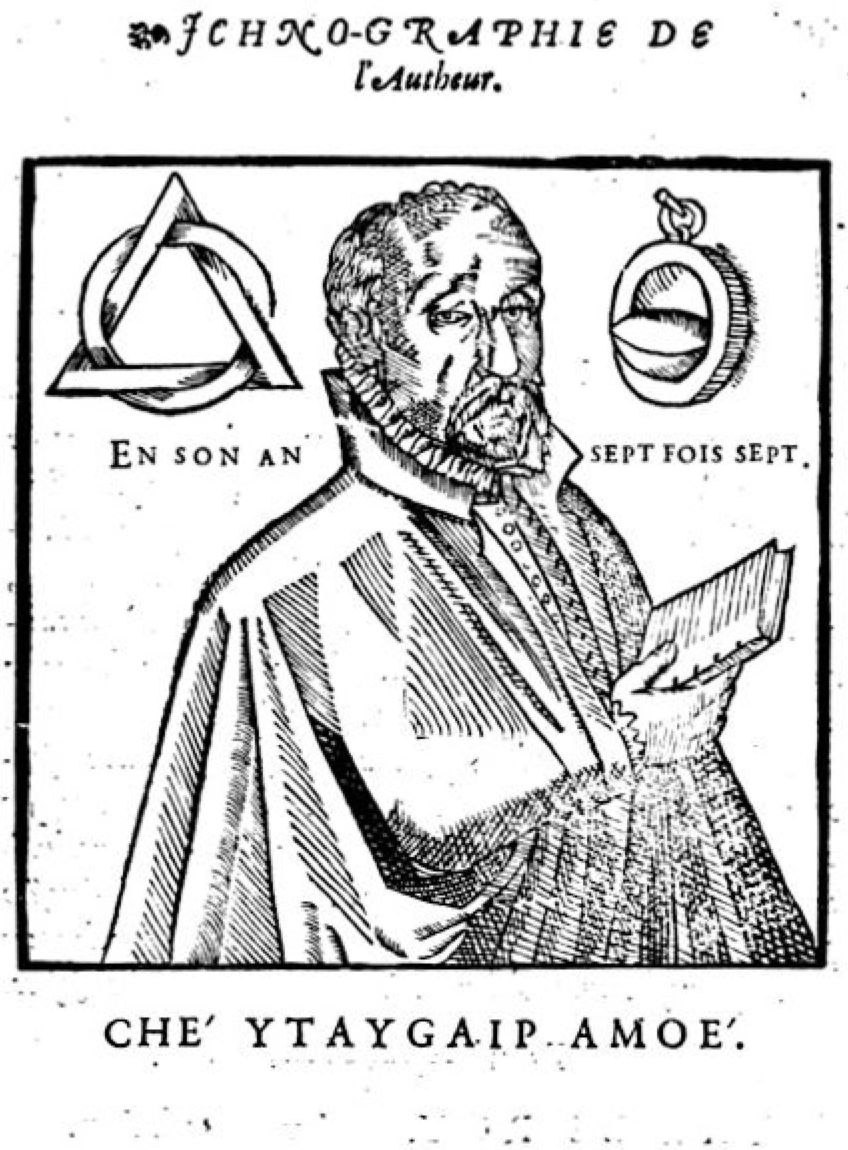
L'AIGLE-COMPAS DE T. DE BESSARD.



2. Principe de l'aigle-compas

Dans son *Aigle-compas*, Bessard décrit un instrument de géométrie de son invention, « semblable à un oiseau qui vole apres la proye », permettant de tracer l'arc de cercle passant par trois points non alignés sans qu'il soit besoin de construire son centre. Voici quelques explications qui permettront d'en comprendre le principe. Pour tracer l'arc de cercle passant par trois points non alignés A, B et C, la méthode habituelle consiste à construire le centre O du cercle circonscrit à ABC : certains auteurs, comme Charles de Bovelles (1542) ou Jean L'Hoste (1619), disent qu'il s'agit de retrouver le « point perdu » qu'est le centre. Avec un compas, ce n'est en principe pas difficile : puisque O se trouve à égale distance de A et B, il est sur la médiatrice de [AB], et puisqu'il se trouve à égale distance de B et C, il est aussi sur la médiatrice de [BC]. Il suffit donc de construire ces deux médiatrices à la règle et au compas, selon un principe qui s'enseigne de nos jours en classe de Sixième. On les prolonge jusqu'à leur point d'intersection, lequel sera le centre cherché. La même méthode permet d'ailleurs de retrouver le centre d'un cercle déjà tracé, en y choisissant, comme le dit Bessard, « trois poincts semez à l'aventure ». Cependant, si A, B et C sont presque alignés, le rayon du cercle est très grand : son centre risque alors de se trouver trop éloigné pour être pratiquement construit. C'est ce qui conduit Bessard à proposer une autre méthode, de type mécanique et non géométrique *stricto sensu* puisqu'elle ne peut réalisée à la règle et au compas ordinaire. Le principe mathématique sous-jacent, qu'il n'explicite pas clairement dans l'opuscule, en est dans la proposition 21 du livre III des *Éléments* d'Euclide : *dans un cercle, les angles qui s'appuient sur un même segment sont égaux*. Plus précisément, c'est une forme de réciproque de cette proposition qui est en œuvre : l'arc de cercle passant par A, B et C est l'ensemble des points M tels que les angles AMC et ABC soient égaux (c'est ce qu'on appellera au XVII^e^ siècle l'arc capable de l'angle ABC). Une manière simple de tracer cet arc est de découper dans du carton un triangle ayant un angle égal à ABC entre deux côtés supérieurs ou égaux à AC : on fait alors glisser ce triangle de sorte qu'à tout instant, l'un des deux côtés s'appuie sur A et l'autre sur C ; son sommet décrit alors l'arc de cercle voulu. On trouve cette idée dans le *Cours de mathématiques* de Jacques Ozanam [12], puis chez plusieurs auteurs de géométrie pratique ou d'architecture aux XVIII^e^ et XIX^e^ siècles. Mais nous n'avons pu la trouver dans aucune source antérieure à Bessard. Or ce qui est particulièrement remarquable chez celui-ci, c'est qu'il a voulu construire un instrument universel, permettant de s'adapter à toutes les valeurs possibles de l'angle ABC – même si, bien entendu, il ne peut servir que pour une valeur limitée de la longueur AC. Son aigle-compas est une sorte de fausse équerre, dont l'angle, réglable à volonté, est maintenu fixe par une tige (« la queue de l'aigle ») liée aux branches de l'équerre (« les ailes ») dans laquelle coule une mortaise bloquée par une vis. Une fois la vis serrée, on fait glisser les ailes contre les deux pointes, fichées en A et C, d'un compas ordinaire courbé ; le « bec de l'aigle » décrit alors l'arc requis. Les applications envisagées par Bessard sont la gravure des lignes d'un astrolabe et le tracé d'une arche plus longue que haute. Nous n'avons pu repérer d'instrument fondés sur le même principe que chez peu d'auteurs ultérieurs. Pour le polissage d'une lentille sphérique, Chérubin d'Orléans a proposé un compas plat ouvert et « affermy suivant cette ouverture, tellement qu'il ne la puisse varier », mais sans préciser le dispositif d'affermissement [13]. Beaucoup plus tard, pour le dessin d'un pont suspendu, Pierre Prévost a imaginé ce qu'il appelle un gôniostat, dont l'angle est fixé au moyen d'une « vis de pression, ou tout autre meilleur moyen » [14]. Enfin, Otto Möllinger a donné une description technologique précise d'un *Universalzirkel* (compas universel) dont l'utilisation soit réellement pratique [15].

12. Jacques Ozanam, *Cours de mathématiques*, Paris, Jombert, 1693, p. 208-209.
13. Chérubin d'Orléans, *La Dioptrique oculaire*, Paris, Jolly & Benard, 1671, p. 408-410.
14. Pierre Prévost, « Description d'un arc dont le centre est inaccessible », *Bibliothèque universelle des sciences, belles-lettres et arts*, XVII^e^ année, Sciences et arts, t. XLIX, Genève, 1832.
15. « Über eine zweckmässige Verbesserung des gewöhnlichen Zirkels, damit er zur Konstruktion von Kreisen und Kreisbögen mit beliebig grossen Radien benützt werden kann », *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft* 35, 1850, p. 52-56.



Portrait de Toussaint de Bessard en tête de son *Dialogue de la longitude* (Rouen, 1574)

3. Une inscription énigmatique

Nous terminerons en commentant l'« ichno-graphie de l'autheur » qu'on trouve en ouverture du *Dialogue de la longitude*, en fait un portrait de trois-quarts à mi-corps [16]. Toussaints de Bessard y est représenté livre en main, « en son ans sept fois sept », donc à l'âge de 49 ans. Au-dessus du portrait, à gauche, inscrit dans un carré, un entrelacs à deux brins et six croisements, dont un brin est circulaire et l'autre en forme de triangle équilatéral. C'est une représentation diagrammatique de l'ordonnancement du monde tel que Bessard l'expose dans son livre : aux trois côtés du triangle sont le nombre, le poids et la mesure, par quoi toutes choses consistent [17] et retournent à leur état initial, et aux quatre angles du carré sont les sciences du quadrivium – arithmétique, géométrie, astronomie, musique. À droite, une représentation du micomètre inventé par Bessard. Au-dessous du portrait, cette inscription énigmatique : CHÉ YTAYGAIP AMOÉ. On a voulu y voir soit un anagramme, soit des « termes mêlés de dialecte normand » [18] : pour nous, ces hypothèses ne tiennent

16. Notons l'usage impropre du mot ichnographie, qui renvoie normalement à un plan ou tracé au sol de bâtiment ou de ville ignorant l'élévation.

17. Allusion à un verset biblique (Sagesse, XI, 20) souvent cité par les mathématiciens.

18. Thérèse REDIER et Marie-Josèphe BEAUD-GAMBIER, *Portraits singuliers* : *hommes et femmes de savoirs dans l'Europe de la Renaissance*, 1400-1650, Paris, Les Belles-Lettres, 2007, p. 58.

pas un instant. Après avoir envisagé et éliminé celle, *a priori* moins absurde, d'un cryptogramme [19], nous nous sommes convaincus qu'il s'agit d'une formule en tupinambá, la langue aujourd'hui éteinte parlée sur les côtes du Brésil au XVI^{e} et XVII^{e} siècles avec laquelle les Normands communiquaient avec les « anthropophages » [20].

En consultant les lexiques anciens, nous avons constaté que *ché* correspond au pronom personnel moi ou au possessif *mon*, que *yta* (habituellement transcrit *itá*) est la pierre, le métal ou tout matériau très solide, que *yga* (*igá*) est le bateau, habituellement une pirogue, que le suffixe *ip* a parfois le sens de « endroit où » et que *amoé*, ou *ramoé*, signifie « en tant que, en qualité de ». Nous pensons donc que Bessard révèle ici le nom que les indigènes lui avaient donné : *Ytaygaip*, « De-là-où-est-le-bateau-très-solide », en référence au fort où il résidait, à proximité du mouillage de son navire [21].

Pierre Ageron

N.B. Les sections 1 et 3 de cet article sont extraites de l'article suivant : Pierre Ageron, « Des mathématiques en Normandie des dernières années du règne de Charles IX à la mort de Louis XIII (1572-1643) », *Bulletin de la Société des antiquaires de Normandie*, t. LXXIV, 2017, p. 71-100 ; la section 2 a été rédigée spécialement pour *le Miroir des maths*.

Carte de l'Atlantique (détail) par Pierre de Vaulx, Le Havre, 1613 (BnF)

19. Nous avons utilisé un logiciel de décryptage des textes chiffrés par les méthodes de César et Bellaso-Vigenère, seules connues à l'époque.
20. Beatriz Perrone-Moisés, « L'alliance normando-tupi au XVI^{e} siècle : la célébration de Rouen », *Journal de la Société des américanistes*, 94-1, 2008, p. 45-64.
21. Les vestiges d'un fort appareillé en arête-de-poisson tenu par les Normands à Cabo Frio jusqu'en 1575 ont été découverts en 1985.

Point de vue : le vocabulaire des mathématiques

Les mots structurent la pensée, et les pensées structurent l'humain en devenir !

L'enseignement des mathématiques n'a pas pour unique finalité l'enseignement de contenus. Il stimule l'esprit par la logique, par le raisonnement rigoureux, par l'exactitude des notions et par leur articulation, et contribue ainsi à la formation d'êtres humains autonomes et lucides. Mais s'il revendique cette ambition, il ne peut pas être lui-même imprécis, inexact ou manquer de rigueur et de cohérence. Or il nous semble que l'utilisation très répandue de certains mots « magiques » nuit à la compréhension mathématique des élèves sur le long terme. Des mots non appropriés aux mathématiques tendent à un enseignement « en surface » basé sur l'apprentissage par cœur, à une pensée floue et à une compréhension erronée des choses. Quelle que soit la pratique didactique menée par ailleurs, on ne peut faire l'économie d'une réflexion sur le vocabulaire adéquat qui l'accompagne.

Cet article se borne à quelques remarques sur des mots ou expressions d'usage courant au collège, qui, à notre avis, risquent de donner une perception inexacte des enjeux de la discipline.

1. Passer de l'autre côté

Cette expression est notamment utilisée pour résoudre une équation du type $x + b = c$. Certes, l'enseignant connaît parfaitement l'opération mathématique qu'elle dissimule. Mais il n'en va pas de même pour l'élève : au mieux, il entendra, une seule fois, dans un cadre théorique, qu'il s'agit de soustraire un nombre de chaque côté de l'égalité. Mille fois ensuite, on lui dira seulement qu'il s'agit de« passer de l'autre côté » ce qui risque d'entraver sa compréhension des mathématiques sur le long terme. Lorsque les problèmes se compliqueront (du type $ax + b = c$, $x^2 + b = c$, etc.), il sera confronté à une accumulation de règles comme : « avec un $+$ ou un $-$, je passe de l'autre côté et je change le signe » si c'est une multiplication, « je passe de l'autre côté, en bas, et sans changer le signe » et si c'est un carré « je passe l'exposant de l'autre côté et il devient une racine carrée » et ainsi de suite. À chaque situation particulière sa petite technique particulière. Toutes ces techniques relèvent davantage de la dextérité que de la logique cérébrale. Dans cette apparente absence de logique, les élèves qui rencontrent le plus de difficultés en mathématiques ont bien du mal à s'y retrouver. Et comment résoudre $e^x = 5$ en Terminale lorsqu'on « passe de l'autre côté » depuis le collège ?

Sous cette forme, l'apprentissage des mathématiques apparaît comme un assemblage peu intelligible de techniques, sans lien entre elles. C'est selon nous la notion d'équilibre dans l'égalité qui devrait être mise en avant et non le déplacement de termes. En vérité, la seule action qu'il soit possible d'effectuer sur une égalité tout en la conservant est d'effectuer la même opération (ou d'appliquer la même fonction) de chaque côté de l'égalité. Cet unique principe, très simple, reste valable quel que soit le niveau d'enseignement.

2. Simplifier

Les mathématiques laissent peu de place à la subjectivité. Or ce qui est simple pour quelqu'un est parfois compliqué pour un autre. Ainsi, notre expérience nous suggère que *simplifier une fraction* ou *simplifier une expression algébrique* sont des manières de parler qu'il conviendrait d'éviter.

On a $\frac{68}{100} = \frac{17}{25}$. Mais peut-on affirmer que la fraction $\frac{17}{25}$ est plus simple que $\frac{68}{100}$? Nos élèves auraient plutôt tendance à considérer $\frac{17}{25}$ comme un problème de calcul et 0,68 comme sa solution. Comment justifier alors l'utilisation du verbe simplifier ? Il nous semble qu'il est préférable de se forcer à utiliser l'expression *réduire la fraction*, d'autant que l'adjectif irréductible est courant tandis qu'insimplifiable est pratiquement inusité.

Par ailleurs, voici l'énoncé d'un exercice tiré d'un manuel scolaire de Seconde générale :

Simplifier l'expression $3x^2 - x(2x + 5) + 4$.

Le corrigé donne $x^2 - 5x + 4$, mais devrait-on invalider la réponse d'un élève doué qui factoriserait le polynôme et obtiendrait $(x-1)(x-4)$? Quelle est la forme la plus simple ?

3. Barrer, enlever, supprimer

Tous les enseignants de mathématiques ont rencontré le type de production suivant :

$$\frac{3+5}{4+5} = \frac{3}{4}$$

« Oui, Madame, j'ai barré les 5 ! J'ai toujours appris à faire comme ça : quand y a un 5 en haut et un 5 en bas, on peut les barrer, enfin les supprimer quoi, vous voyez bien ce que je veux dire, non ? On fait comme ça, on les enlève ! »

Voici un autre exemple. Il s'agit d'une production d'une élève de Terminale S ayant de très bons résultats en mathématiques depuis le collège :

$$\frac{4u_n + 5}{u_n + 8} = \frac{4+5}{8}$$

Sur la feuille, cette élève a barré les u_n. Elle avait pourtant réussi de manière irréprochable tout le début d'un exercice difficile sur les suites, sujet dont elle a acquis une compréhension assez profonde. Son erreur pourrait laisser croire, à tort, qu'elle n'a pas le niveau lui permettant d'être en Terminale S. Elle provient d'une compréhension antérieure erronée des fractions. Au collège, elle apprenait que « lorsqu'il y a une multiplication, on barre, mais lorsqu'il y a une addition, on ne barre pas ». Règle apprise le temps d'un contrôle, pour la bonne note, puis oubliée, aussi rapidement qu'elle avait été enregistrée.

Pour éviter ces automatismes incertains consistant à « barrer », « enlever », « supprimer », etc., je propose de mener les calculs de façon à mettre en évidence le rôle du nombre 1. On peut par exemple raisonner ainsi :

$$\frac{15}{20} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

Cette procédure permet à l'apprenant de comprendre qu'on ne réduit pas $\frac{3\times5}{4\times5}$ de la même manière que $\frac{3+5}{4+5}$ – qui est d'ailleurs irréductible !

4. Changer, mettre, sortir

Les élèves apprennent qu'il faut « changer les signes dans une parenthèse » lorsqu'il y a un signe moins devant. Voici un résultat typique de cet enseignement. Il s'agit de la production d'un élève très appliqué à ce qu'on lui enseigne qui écrit : $-(a-b) = -(-a+b)$. Il le justifie ainsi : « Bah oui monsieur, j'ai changé les signes dans la parenthèse ! ».

Les élèves apprennent aussi à « mettre le carré » sur chaque terme de la parenthèse lorsqu'il s'agit d'une multiplication, mais à ne pas le mettre lorsqu'il s'agit d'une addition. Ils apprennent encore à « sortir » un 9 d'une racine carrée et que « le 9 se transforme en 3 ». Des apprentissages de ce type les éloignent des mathématiques qui sont en jeu et les emmènent encore sur le terrain de la dextérité.

Dans tous ces cas, nous pensons que formuler explicitement des règles de distributivité apporte davantage de logique et d'universalité : distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, distributivité unilatère de la puissance par rapport à la multiplication. Ces règles sont claires, susceptibles d'être entendues par tous. De plus, comme nous l'a fait remarquer Ruben Rodriguez, elles se prêtent bien au travail de correspondance entre univers des figures géométriques et univers des nombres et des calculs.

Conclusion

Le vocabulaire que nous remettons en question est très largement utilisé en classe, ainsi que dans les manuels scolaires. De bonne foi, on recourt à des mots d'apparence non technique, apparemment plus audibles, plus abordables, plus aimables. Nous avons souvent croisé des élèves ayant un grand sens de la logique, qui étaient considérés comme rencontrant des difficultés en mathématiques. Ne serait-ce pas plutôt une certaine absence de logique dans les modes d'enseignement des savoirs et savoir-faire qui est à la source de leurs difficultés ?

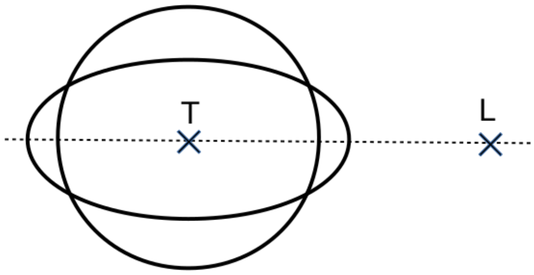
On découvre régulièrement que les connaissances les plus élémentaires des étudiants ou autres postbacheliers scientifiques sont parfois très fragiles : l'accumulation de mots imagés et de recettes techniques telle qu'on la connaît au collège ne ferait-elle pas obstacle à la construction de connaissances solides ? Une finalité de l'enseignement des mathématiques est d'élever l'esprit logique de tous. Pour tous les élèves, nous pensons qu'un vocabulaire approprié et précis est souhaitable, au bénéfice de leurs capacités de raisonnement et d'argumentation.

Aurélien Detey

Les marées

I – Formation des marées sur la Terre, un cas idéal et théorique : l'action de la Lune

La figure ci-dessous représente la Terre vue du dessus, le cercle correspondant à l'équateur, le point L étant la Lune. Le « ballon de rugby » donne l'image de l'effet que l'attraction lunaire engendrerait si la Terre n'était qu'un océan : formation d'une marée haute aux points situés au plus près et à l'opposé de la Lune, et d'une marée basse aux point situés sur la perpendiculaire à la ligne TL. Sans autre effet, le marnage, différence de niveau de la mer entre marée haute et marée basse, ainsi engendré serait de 54 cm.



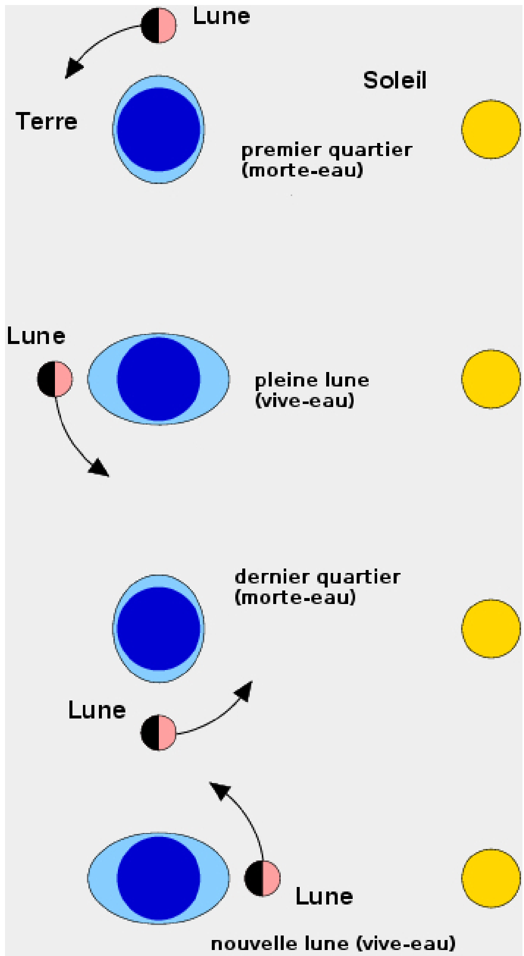
En raison de l'attraction de la Lune, chaque point de l'équateur subirait deux marées hautes et deux basses par jour. Et sa hauteur varierait suivant une fonction sinusoïdale de période 12 h 25 min, le décalage de 25 min étant dû au déplacement journalier de la Lune par rapport à la Terre. On peut s'étonner de cette forme en ballon de rugby car, quand on pense à l'effet de l'attraction d'un astre sur la Terre, on imagine plutôt une marée haute du côté de l'astre et une marée basse de l'autre côté. En fait, il faut considérer que l'astre et la Terre forment un système qui tourne autour de son centre de gravité. Dans le cas de la Terre et de la Lune, ce point se situe un peu en dessous de la croûte terrestre (il varie selon les positions respectives des deux astres). La rotation autour de ce point engendre une force centrifuge qui provoque également une marée haute au point opposé à l'astre.

II – Action du Soleil

Le Soleil aussi provoque une attraction sur la Terre. Comme il est beaucoup plus gros que la Lune, on pourrait penser que son effet est plus fort. Ce n'est pas le cas, car il en est beaucoup plus éloigné : si l'attraction est proportionnelle à la masse, elle est inversement proportionnelle au cube de la distance qui sépare les astres.

La marée solaire est ainsi environ deux fois plus faible que la marée lunaire (2,15 fois en moyenne).

Ces deux mouvements se conjuguent pour former des marées importantes dites de vive eau lorsque le Soleil et la Lune sont alignés avec la Terre, c'est-à-dire aux pleines Lunes et aux nouvelles Lunes, et des marées plus faibles dites de morte eau lorsque la Lune est en premier ou en dernier quartier car dans ces périodes la Lune est à la perpendiculaire de l'axe Terre-Soleil. À l'approche des équinoxes, lorsque le Soleil est dans le plan de l'équateur et donc à peu près dans celui de la Lune, les grandes marées seront encore plus fortes.



Lorsqu'on s'éloigne de l'équateur, d'autres forces viennent interférer car la force d'attraction, dirigée vers l'astre n'est plus verticale et provoque une onde supplémentaire. Lorsque on s'approche des pôles cette onde devient diurne, car la force centrifuge ne s'exerce plus. Sa période est alors de l'ordre de 24 h. Les quatre principales ondes prises en compte dans les calculs sont donc les deux ondes semi-diurnes lunaires et solaires et les deux ondes diurnes correspondantes plus faibles.

III – Action ou réaction provoquées par la forme des continents

Tout se passerait de façon relativement simple, s'il n'y avait pas... les continents !

Les ondes lunaire et solaire sont ainsi stoppées et renvoyées, provoquant selon les endroits des effets de résonance pouvant augmenter ou diminuer les amplitudes. En certains points, ce marnage est même nul. D'autre part, les hauts fonds, en freinant le déplacement de l'onde, peuvent également provoquer une forte augmentation d'amplitude ; c'est le cas de la Manche dont la profondeur ne dépasse jamais 200 m. Ces augmentations dépendent beaucoup de la forme des rivages : plus de 12m dans la baie du Mont Saint-Michel contre environ 2m sur la côte anglaise en face.

Pour faire des prévisions précises, il faut encore tenir compte d'autres forces dues à de légères variations du mouvement de la Lune : ellipticité de l'orbite, variation de cette orbite par rapport au plan de l'équateur...

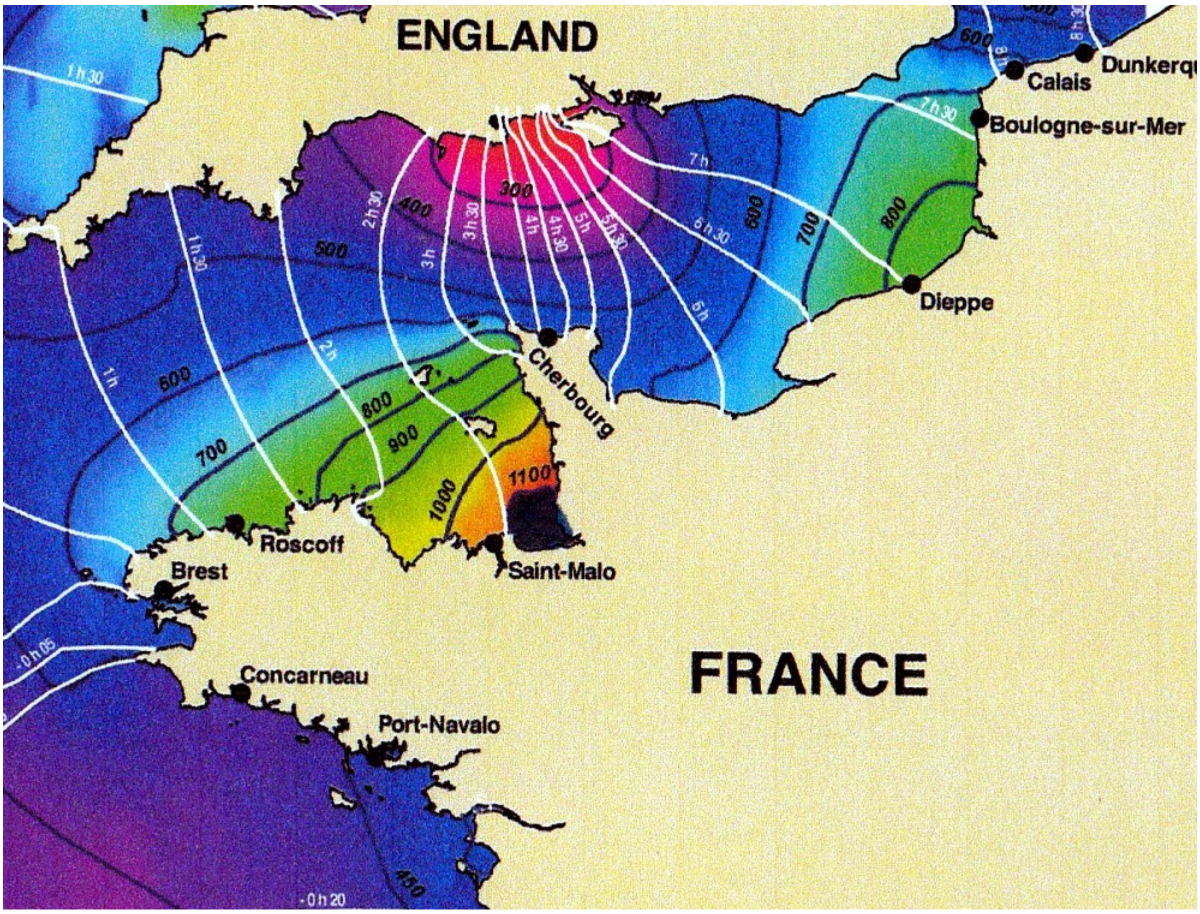
Une légère différence d'attraction entre les deux sommets du ballon de rugby engendre la formation de nouvelles ondes diurnes. Toutes ces ondes diurnes sont peu perceptibles dans l'Atlantique, mais observables en certains endroits du Pacifique.

Ajoutez un zeste de force de Coriolis (ces forces faibles dues à la rotation de la Terre et qui s'expriment en particulier dans le sens de la spirale d'écoulement de l'eau dans un lavabo : le sens de la spirale dans l'hémisphère nord est opposé à celui de l'hémisphère sud), mélangez le tout, et vous aurez une idée de la complexité du problème.

Pour faire un calcul précis, il faut connaître le déphasage éventuel entre le passage de l'astre au zénith et l'heure de la marée haute réelle, ainsi que l'amplitude de chaque composante au point considéré : c'est le travail des services hydrographiques, les marins ne font jamais ces calculs et se munissent toujours d'annuaires — quand ils existent.

Sur la carte ci-dessous, les lignes blanches indiquent le décalage de l'onde de marée par rapport à celle de Brest, siège des services du SHOM (Service hydrographique et océanique de la Marine nationale, qui fait les calculs de prévisions de marées. À Ouistreham, une marée haute ou basse se produira 6 h après celle de Brest, à la pointe du Raz, elle se produira 15 min avant.

Les lignes noires indiquent la hauteur du marnage pour une marée moyenne de vive eau de coefficient 95, soit plus de 11 m à St Malo, moins de 3 m près de l'île de Wright.



IV – Les marées dans le monde

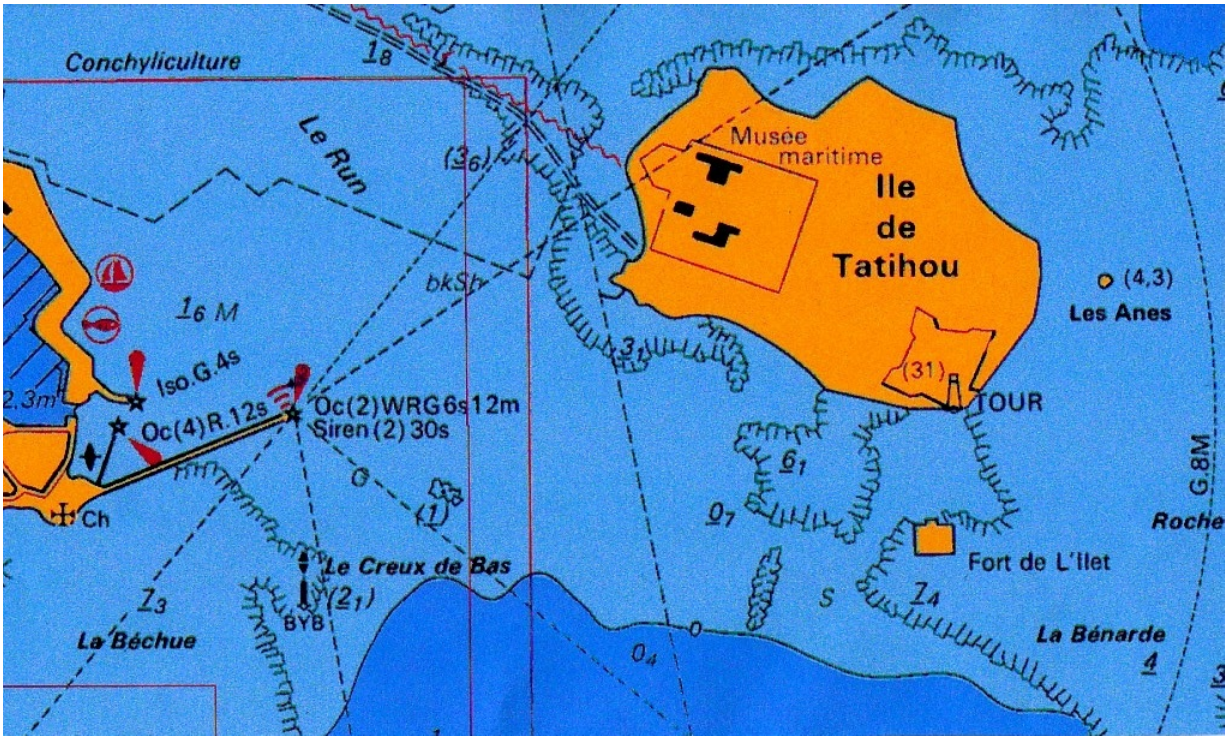
En certains endroits particuliers, il est possible de prévoir de façon approximative l'heure de la marée. Sur une île située non loin de l'équateur et entourée d'un océan profond (Tuamotu nord, îles du Cap vert) ou près d'une côte peu découpée (côte mauritanienne par exemple), vous pourrez vous attendre à observer le régime classique dit semi-diurne à dominante lunaire et prévoir que, en période de vive eau la marée sera haute aux alentours de midi (et de minuit) et que dans tous les cas de figure elle sera basse au moment du lever et du coucher de la Lune. D'une façon générale, surtout si on s'éloigne de l'équateur, lorsqu'on est sûr que le rythme est semi-diurne, ce qu'il faut connaître, c'est le déphasage éventuel entre la marée basse et le lever de la Lune ou, ce qui revient au même, le décalage entre le moment ou l'attraction est la plus faible et la basse mer réelle. Ce décalage, quand il existe, est à peu près fixe et cela permet de prévoir approximativement la marée dans les endroits pour lesquels il n'existe pas d'annuaire. Cela peut être utile pour entrer dans une passe d'un atoll des Tuamotu par exemple : le courant étant généralement sortant, il vaut mieux entrer lorsque la marée est haute, car le courant est plus faible ou nul.

Sur les côtes françaises, si vous vous souvenez de l'heure d'une marée de vive-eau en un endroit, vous pouvez prévoir que, à une heure près, toutes les autres marées de vive-eau se reproduiront dans les mêmes tranches horaires à cet endroit. Cela s'explique par le fait que les ondes solaires ont des périodes de 12 h et 24 h — donc pas de décalage journalier — et que ces marées de vive-eau sont précisément celles où la Lune s'accorde avec le Soleil.

Dans certains endroits du Pacifique sud, la marée solaire est prédominante, et donc la marée haute suit le Soleil. Elle est donc haute à midi et à minuit. C'est le cas dans l'archipel de la Société, à Papeete par exemple, alors qu'aux Tuamotu nord, à seulement 300 km, le régime est lunaire. Dans le pacifique nord ou près du Viet Nam, on trouve même des marées diurnes (une seule par jour) parce que les ondes diurnes à période deux fois plus longue peuvent s'y développer, c'est les cas également aux Antilles Françaises mais comme le marnage est faible le phénomène est peu perceptible.

V – Un cas concret : à quelle heure pourrez-vous entrer dans le port de Saint-Vaast-la-Hougue ? (et en sortir !)

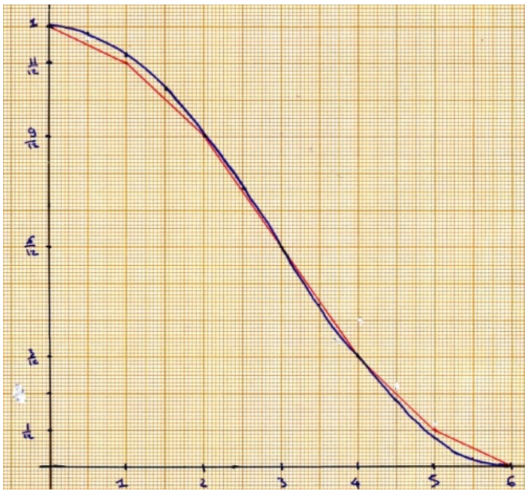
Le 24 septembre 2016, pour entrer au port de Saint-Vaast, vous avez besoin d'une hauteur d'eau d'au moins 4,50 m. Votre tirant d'eau est de 2m, le passage entre Tatihou et le port, découvert à marée basse, se situe à plus de 2m au dessus du 0 des cartes ; de plus, la sécurité impose de garder un pied de pilote (sécurité sous la quille) de 50 cm. L'indicateur des marées prévoit une marée basse à 11h05 avec une hauteur d'eau de 2,30m, et la pleine mer à 16h46 avec une hauteur d'eau de 5,60 m.



VI – Dans la pratique, les marins utilisent la règle des douzièmes : une approximation mathématique raisonnable

Cette règle permet de prévoir la hauteur d'eau dans un endroit donné en fonction de l'heure de la marée. Elle stipule que, si on connaît la durée de la marée d, différence entre l'heure de la marée haute et celle de la marée basse, il faut calculer d_m, « l'heure marée » égale à $\frac{d}{6}$, alors au cours de ces 6 « heures » ainsi définies, la variation de hauteur sera respectivement de 1,2,3,3,2,1 douzième du marnage.

Rappelons que le marnage m est la différence de hauteur entre la marée haute et la marée basse.



La figure ci-dessus met en évidence le fait que cette règle est une approximation linéaire par morceaux (en rouge) d'une fonction cosinus (en bleu). Avant l'invention des calculatrices, c'était un outil remarquable pour résoudre simplement ce type de problème. Désormais si on souhaite un calcul assez précis, il peut être plus simple de programmer la fonction.

Cette règle reste cependant excellente pour une évaluation grossière par calcul mental, évaluation souvent suffisante.

Pour faire « coller » la fonction cosinus à la règle des douzièmes, il suffit de chercher la fonction de type $f(t) = a\cos(\omega t) + b$ vérifiant $f(0) = m$ et $f(d) = 0$. On trouve $a = b = m/2$ et $\omega = \frac{\pi}{d_m}$.
Ceci donne $f(t) = \frac{m}{2}\cos(\frac{\pi t}{d}) + \frac{m}{2}$. Lors de la programmation de cette fonction sur une calculatrice, celle-ci doit être en mode radians et t et d_m doivent être exprimés dans la même unité (minutes ou heures).

Par exemple, si le marnage (différence de hauteur entre marée haute et marée basse) est de 6 m et la durée de la marée de 363 min, la hauteur d'eau sera de $f(t) = 3\cos(\frac{\pi t}{363}) + 3$.

Deux heures vingt minutes (soit 140 min) après l'heure de la marée haute, la hauteur d'eau sera $f(140) = 4,05$ m au dessus de celle de la basse mer indiquée sur l'annuaire. Afin de connaître la hauteur d'eau sous le bateau, et donc de vérifier avec le sondeur, cette hauteur devra être ajoutée à celle de la marée basse et à celle indiquée sur la carte à cet endroit.

Si la durée de la marée descendante n'est pas égale à celle de la marée montante, on utilisera deux fonctions. Avec une calculatrice en mode degrés, il faut bien sûr prendre $f(t) = \frac{m}{2}\cos(\frac{180t}{d}) + \frac{m}{2}$

Pour la même approximation, le SHOM propose $f(t) = m\cos^2(\frac{90t}{d})$. En appliquant la formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on peut vérifier que c'est la même fonction.

VII - Corrections liées à la météo

On ne doit pas perdre de vue que les estimations faites correspondent aux conditions atmosphériques des annuaires : pas de vent et pression normale. Près des côtes, un fort vent de terre peut faire baisser sensiblement le niveau de la marée, de même qu'une situation anticyclonique (haute pression). Il convient de prévoir 10 cm de hauteur d'eau en moins pour 10 hPa (hectopascals) en plus. Sous un anticyclone de 1040 hPa, il faudra retrancher 25 cm. Inversement, lors d'une dépression de 950 hPa, il faudrait ajouter 65 cm. Mais dans ce cas, la sécurité impose d'être rentré au port !

Bibliographie

Les marées, Guide du navigateur, Service hydrographique et Océanique de la Marine (ouvrage assez difficile d'accès, disponible dans les magasins spécialisés ou par internet ; De nombreux écrits sur ce sujet en proviennent, ce texte n'en est qu'une vulgarisation modeste et assez grossière).

Voineson G. & Jan G., *Notions fondamentales sur la marée*, diaporama disponible à l'url :
http ://refmar.shom.fr/documents/10227/146428/Voineson%26Jan_Journees-REFMAR-2013.pdf

Almanach du marin breton, éditions de l'Œuvre du marin breton.

Bloc marine (pour les horaires et coefficients, un grand classique de librairie maritime et un livre de référence pour les marins).

Michel Soufflet

Appendice : Didier Bessot traite les calculs détaillés du cas concret proposé au paragraphe **V**.

I – Par la méthode des « 1-2-3-3-2-1 »

Marée basse : 11h05, 2,30 m.
Marée haute : 16h46, 5,60 m.
Le marnage m est 3,30 m, soit 330 cm, et son douzième est $\frac{m}{12} = 27,5$ cm. La durée de la marée est : $d = 5$ h 41 min, soit 341 min arrondi à 342, qui est divisible par 6. On a $\frac{d}{6} = \frac{342}{6} = 57$, donc l'heure marée est d_m = 57 min.

Variation du temps	Heure	Cœff.	Variation de hauteur	Hauteur d'eau
	11h05			2,300 m
+ 57 min	12h02	1	+1×0,275	2,575 m
+ 57 min	12h59	2	+2×0,275	3,125 m
+ 57 min	13h56	3	+3×0,275	3,950 m
+ 57 min	14h53	3	+3×0,275	4,775 m
+ 57 mn	15h50	2	+2×0,275	5,325 m
+ 57 min	16h46	1	+1×0,275	5,360 m

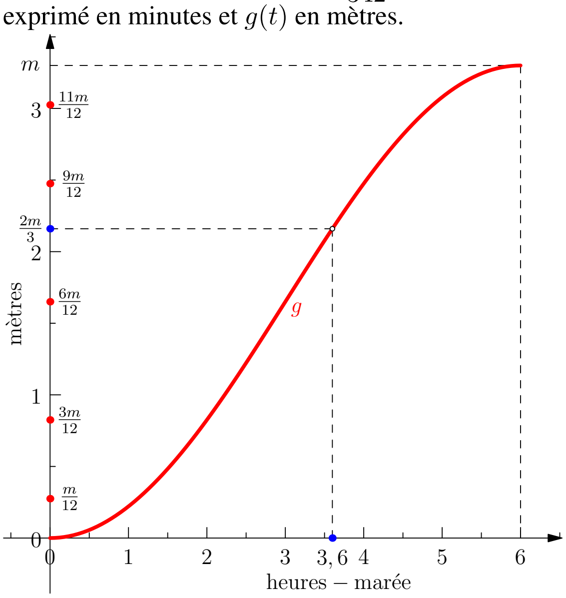
La hauteur d'eau de 4,50 m est atteinte entre 13h56 et 14h53. L'heure où cette hauteur est de 4,50 m peut être précisée par une interpolation linéaire :

$$\frac{4,50 - 3,950}{4,775 - 3,950} = \frac{0,55}{0,825} = \frac{2}{3}\,;$$
$$\frac{2}{3} \times 57 \text{ min} = 38 \text{ min}.$$

On obtient donc 13h56 + 38 min = 14h34.
L'entrée au port est possible à partir de 14h34.

II – Par l'usage de la fonction trigonométrique

La fonction $f(t) = \frac{m}{2}\cos(\frac{\pi t}{d}) + \frac{m}{2}$ est décroissante sur l'intervalle de temps considéré ; elle convient donc à une situation de marée descendante.
La fonction g de même type $g(t) = a\cos(\omega t + \varphi) + b$ exprimant la montée de la mer pendant la durée de la marée doit vérifier $g(0) = 0$ et $g(d) = m$, d'où $a = \frac{-m}{2}$, $b = \frac{m}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{d}$, $\varphi = 0$, puis $g(t) = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}\cos(\frac{\pi t}{d})$. Pour le cas étudié la fonction g devient $g(t) = 1,65 - 1,65\cos(\frac{\pi t}{342})$ où le temps t est exprimé en minutes et $g(t)$ en mètres.



Résolution graphique

Dans le cas d'espèce étudié, l'élévation de l'eau nécessaire pour atteindre une hauteur totale de 4,50 m est de 4,50 m – 2,30 m = 2,20 m, ce qui correspond aux deux tiers du marnage de 3,30 m. Cette élévation est atteinte à partir de 3,63 « heures-marées », soit 3,63×57 min, soit 207 min, soit 3 h 27 min après la basse mer. On obtient donc 11h05 + 3 h 27 min = 14h32.

La hauteur totale d'eau s'obtient en ajoutant la hauteur de l'eau à marée basse, soit ici 2,30 m donnant la fonction h définie par $h(t) = 3,95 - 1,65\cos(\frac{\pi t}{342})$.

La programmation de cette fonction sur Casio Graph 35® permet d'établir les tableaux ci-dessous, qui constituent une recherche par approximations successives.

Tableau 1

Durée t en min	Hauteur d'eau $h(t)$
0	2,300
57	2,521
114	3,125
171	3,950
228	4,775
285	5,379
342	5,600

Tableau 2

Durée t en min	Hauteur d'eau $h(t)$
171	3,950
190	4,237
209	4,514
228	4,775

Tableau 3

Durée t en min	Hauteur d'eau $h(t)$
195	4,311
200	4,384
205	4,457
210	4,529

Tableau 4

Durée t en min	Hauteur d'eau $h(t)$
205	4,457
206	4,471
207	4,486
208	4,500
209	4,514

La hauteur d'eau atteint et dépasse 4,50 m après 208 min, soit 3 h 28 min, de marée montante. La basse mer ayant eu lieu à 11h05, l'entrée au port est possible à partir de 14h33.

Une curiosité architecturale et mathématique d'un pavage de Penrose

Le pavage de l'église Santa Maria de Mahón à Minorque (Espagne)

Équipe Géométrie de l'IREM de Normandie-Caen

I – En partant d'un pentagone

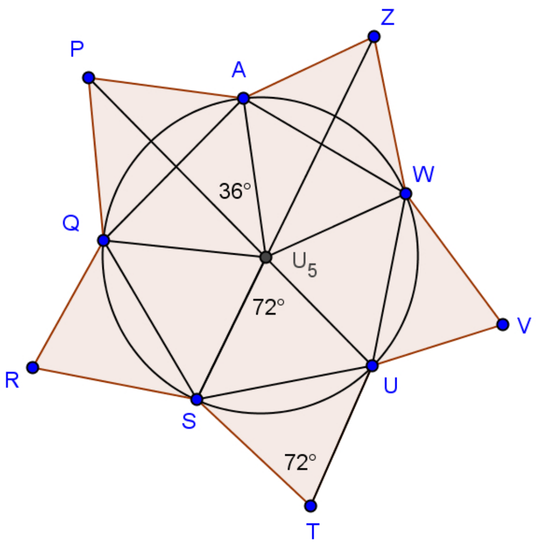
Nous avons présenté dans notre ouvrage *Le nombre d'or, nouvelles activités ludiques* (voir la bibliographie) des exemples de pavages réalisés à partir des triangles et rectangles d'or. Un article signalé par Ruben Rodriguez, tiré du journal espagnol *El mundo* et relatif à un dallage visible dans une église de Minorque, a piqué notre curiosité.

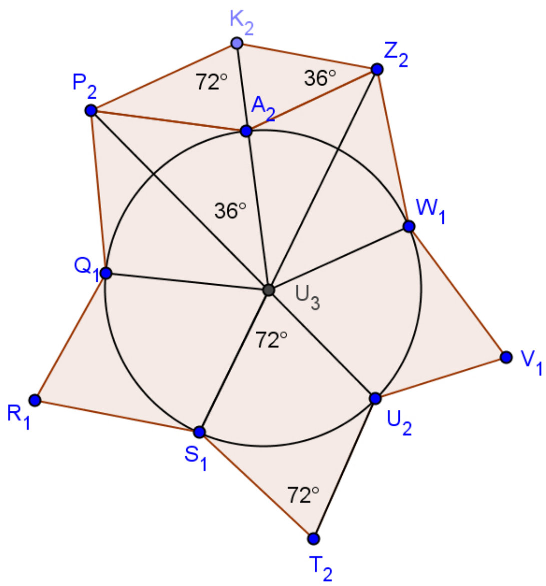
Dans ce papier, il était présenté comme un pavage de Penrose d'un type particulier : les pavés semblaient être disposés de façon aléatoire mais parfaite : côtés et sommets jointifs.

Nous présentons ci-dessous deux figures explicatives de la construction de ces deux losanges, avec les mesures d'angles obtenues par le calcul et le logiciel *GEOGEBRA*.

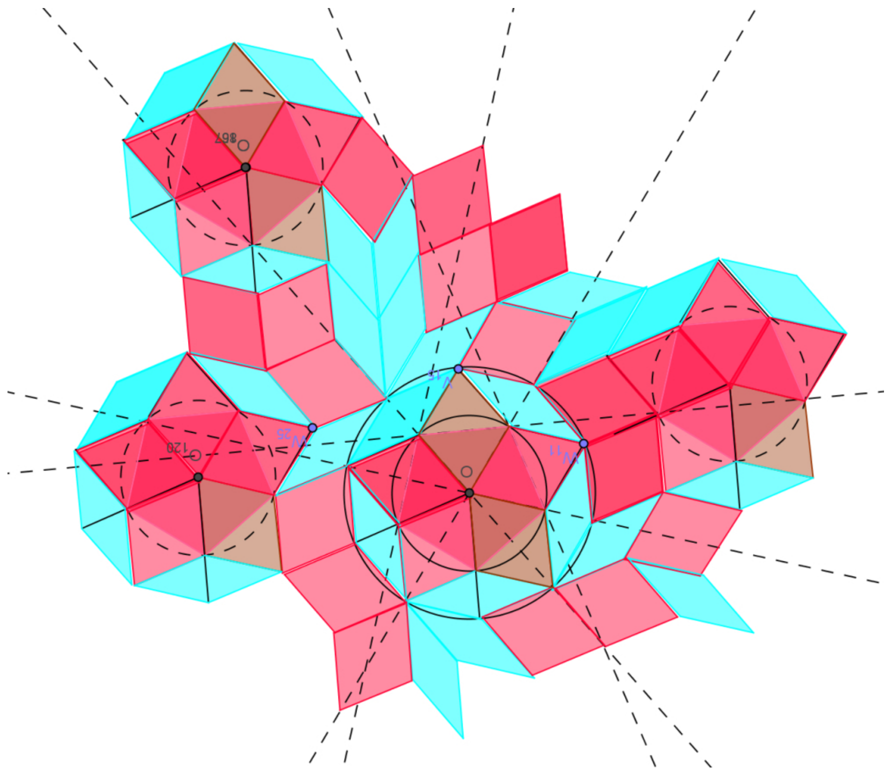
Voici ci-contre (sur la photographie du sol) un détail du centre de ce pavage. Remarquons que cette partie centrale est un pentagone régulier étoilé que nous avons tout d'abord cru être le pentagone étoilé régulier classique lié aux triangles d'or. Une observation plus précise nous en a dissuadé. Ce pavage est constitué de deux losanges : l'un assez proche du carré, l'autre plus étiré avec l'un de ses angles de mesure proche de π.

Il nous a semblé intéressant de présenter cette réalisation à des élèves de niveaux variés afin de voir ou revoir des constructions géométriques classiques puis d'effectuer des calculs sur ces constructions. **Une présentation détaillée avec exercices et corrigés** est disponible sur le lien : http ://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php ?article197





Nous avons ensuite réalisé un pavage aléatoire avec *GEOGEBRA* en traçant tout d'abord les deux pavés puis en utilisant les fonctions ROTATION et SYMETRIE du logiciel :

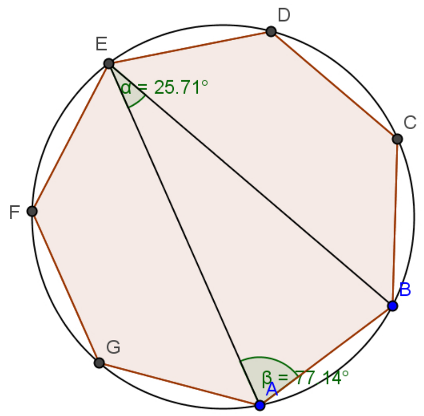


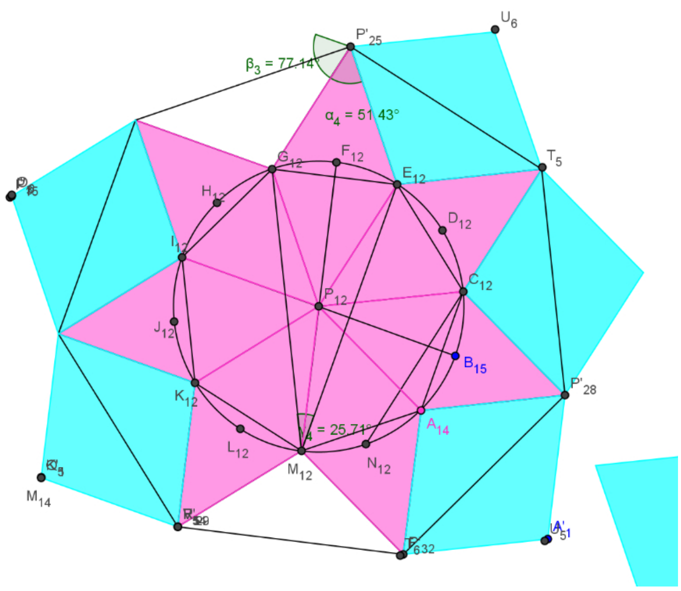
Remarque : à l'expérience nous constatons qu'il faut un peu de soin au cours de la construction afin de ne pas « arriver sur un cul de sac » mais il y a tout de même une grande liberté de pose.

II – En partant d'un heptagone

Nous nous sommes alors interrogé sur un cas qui ne semblait pas avoir été étudié :
Serait-il possible de construire un pavage aléatoire à partir d'un heptagone ?

Voici une partie de notre parcours de recherche avec l'affichage par *GEOGEBRA* des mesures d'angle que nous avons confirmé par le calcul :





Lorsque nous avons de nouveau essayé de paver le plan avec ces deux nouveaux losanges, nous avons eu une surprise : il y avait des trous ! Nous sommes revenu à nos calculs d'angles. Lors de la construction des losanges de Penrose que nous pouvons qualifier « d'or » car ils sont constitués de deux triangles d'or accolés, nous avions :
Deux triangles d'or obtus accolés par leur grand côté ;

Deux triangles d'or aigus accolés par leur petit côté.

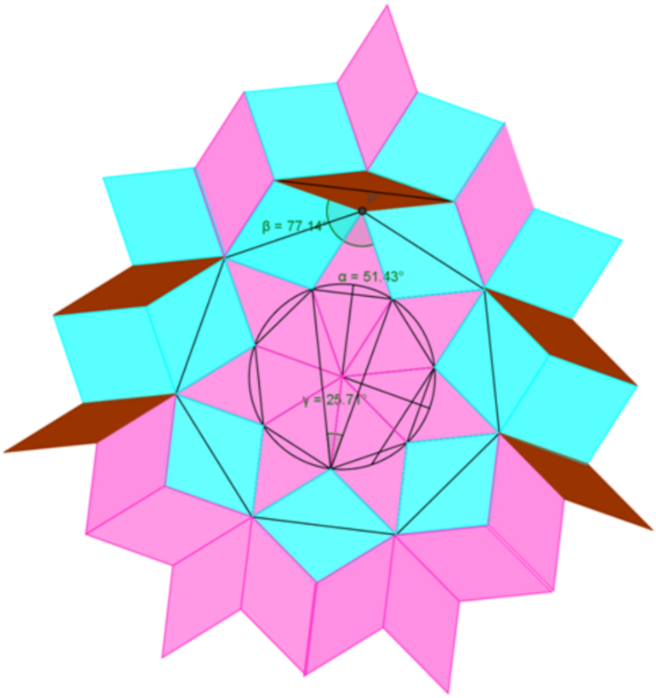
Les angles des deux losanges sont donc respectivement :
36° et 144° pour le premier soit $\pi/5$ et $4\pi/5$;
72° et 108° pour le second soit $2\pi/5$ et $3\pi/5$.

Nous disposons donc de tous les angles de mesure inférieure à π et multiples de $\pi/5$ regroupés par paires, dont la somme est π puisque nous utilisons des losanges.

Une étude simple permet de s'assurer que ces « angles physiques » permettent de paver le plan – avec soin cependant – de manière aléatoire. (Nous détaillons cette étude dans notre article en ligne sur le site de l'IREM de Normandie)

Qu'en est-il de l'heptagone ?

Voici ci-dessous, un exemple que nous avons essayé de rendre esthétique : Nous avons tracé l'heptagone étoilé de départ en rose puis les losanges suivants en turquoise et continué le processus : il apparaît alors des petits losanges bordeaux. Nous avons poursuivi par symétrie pour obtenir une certaine régularité.



Une extension du pavage de type 3 de Penrose à partir de l'heptagone.

Reprise de l'étude et généralisation

Lorsque $p = 5$ les multiples de $\pi/5$ inférieurs à π sont : $2\pi/5$ $3\pi/5$ $4\pi/5$ ceux-ci définissent seulement deux losanges car la somme des angles d'un losange est 2π. Ainsi seuls conviennent les couples : $\pi/5$ et $4\pi/5$; $2\pi/5$ et $3\pi/5$.

Lorsque $p = 7$ les multiples de $\pi/7$ sont : $2\pi/7$ $3\pi/7$ $4\pi/7$ $5\pi/7$ $6\pi/7$. Ces angles définissent 3 losanges grâce aux couples : $\pi/7$ et $6\pi/7$;$2\pi/7$ et $5\pi/7$; $3\pi/7$ et $4\pi/7$. Essayons de généraliser ce résultat : p étant premier tous les entiers qui lui sont inférieurs sont premiers avec lui. Il y en a $p - 1$. Ce nombre est pair car p est impair (sauf 2). Les losanges utilisés dans les pavages de ce type utilisent chacun une paire de mesure d'angles, de somme égale à π. Il y a $\dfrac{(p-1)}{2}$ paires possibles. Il y a donc, pour tout p premier, $\dfrac{(p-1)}{2}$ losanges possibles pour paver le plan de cette façon.

Danielle Salles-Legac avec la contribution de Ruben Rodriguez Herrera, Philippe Langlois, Mathieu Blossier.

Bibliographie

Rodriguez Herrera et Danielle Salles-Legac *Le nombre d'or, nouveautés mathématiques ludiques*, édition 2015 de l'IREM de Normandie.

Brigitte Rozoy, *De MC ESCHER aux dessins à motifs répétitifs*, brochure numérisée téléchargeable sur le site web de l'IREM de Normandie : http ://www.math.unicaen.fr/irem/

La version détaillée de cet aperçu se trouve à l'url : http ://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php ?article197

La première occurrence connue de l'héliocentrisme dans les pays musulmans

Lecteurs critiques de Ptolémée, les astronomes des pays musulmans élaborèrent des modèles de l'univers extrêmement raffinés. Cependant, ils restèrent très longtemps fidèles au dogme géocentrique qui place la Terre au centre du monde. La question se pose de savoir à quel moment les conceptions héliocentriques de Nicolas Copernic (1473-1543) s'y sont frayées un chemin. On a longtemps cru que c'était très tard, pas avant la fin du XVIII^{e} siècle. Or, dans un article retentissant paru en 1992, Ekmeleddin Ihsanoğlu signala une occurrence relativement précoce de l'héliocentrisme en pays d'Islam. Il annonça avoir trouvé une représentation figurée du système du monde selon Copernic dans un manuscrit du XVII^{e} siècle conservé dans la bibliothèque de l'observatoire de Kandilli, sur la rive asiatique d'Istanbul. Ekmeleddin Ihsanoğlu est un important historien des sciences turc, connu du grand public pour avoir été le principal concurrent de Recep Tayyip Erdoğan à l'élection présidentielle de 2014.

Le manuscrit exhumé par Ihsanoğlu, dont la cote est Kandilli 403, s'avère être une traduction en turc ottoman et en arabe d'un livre d'astronomie français. Ce livre n'a été correctement identifié par Ihsanoğlu qu'en 2004 ; il s'agit de : Noël Durret, *Nouvelle théorie des planètes (...) avec les tables richeliennes et parisiennes exactement calculées*, Paris, Alliot, 1635. Il existe en fait deux autres copies du même texte : l'une est aussi à l'observatoire de Kandilli (manuscrit 214), l'autre au célèbre palais de Topkapı (manuscrit H463). Mais ces deux-ci ne contiennent pas le diagramme héliocentrique de la première. D'ailleurs, aucune des trois copies ne semble complète et définitive et leurs contenus diffèrent en partie. Ainsi la *Préface au lecteur sur l'origine & certitude des tables astronomiques* de Noël Durret, traduite en turc, ne se trouve que dans le manuscrit Kandilli 403. Mais, par exemple, le chapitre III de la première partie, De *la Théorie du neuvième ciel*, est dans les trois manuscrits, et c'est en arabe qu'il est traduit.

La *Préface au lecteur* offre un intérêt majeur : le traducteur y prend, sur la fin, la parole. Au bas du verso du feuillet 1 du manuscrit Kandilli 403, il révèle son identité :

إبراهيم الشهير بتذكرجي السكتواري مولداً الاستانبولي مسكناً

« Ibrâhîm, dit Tezkireci [le secrétaire], de Szigetvar par la naissance, d'Istanbul par la demeure ». La ville de Szigetvar se trouve en Hongrie, et il est vraisemblable que cet Ibrâhîm ait été un converti à l'Islam. Il précise que son travail a été entrepris à Belgrade au début des années 1660 et présenté à l'astronome du sultan d'Istanbul en 1664. Sa traduction, relativement fidèle, mais abrégée et adaptée au contexte, s'intitule *Sajanjal al-aflâk fî ghâyat al-idrâk* [Le Miroir des orbes célestes dans la compréhension la plus accomplie]. Elle aurait d'abord été faite en arabe avant d'être transposée en turc, même si les manuscrits dont nous disposons contiennent des éléments dans les deux langues.

Un paradoxe avait échappé à Ihsanoğlu : le livre de Noël Durret est résolument géocentrique. Si le nom de Copernic y apparaît, aucune allusion n'est faite au système héliocentrique. *A fortiori* bien sûr, aucune représentation n'en est donnée. La figure du monde selon Copernic dans le manuscrit Kandilli 403 n'est donc pas tirée de ce livre, mais est un surprenant ajout, indépendant du reste. En réalité, ce sont trois systèmes du monde qui représentés sur le recto du feuillet 23. Bien qu'ils ne soient pas désignés par un nom particulier, il est aisé de les reconnaître. Le troisième est effectivement celui de Copernic, qui met le Soleil au centre de toutes les révolutions, hormis celle de la Lune. Le premier est celui de Tycho Brahé, compromis géo-héliocentrique où la Lune et le Soleil tournent autour de la Terre et toutes les autres planètes autour du Soleil. Entre les deux, ce n'est pas le système géocentrique de Ptolémée, contrairement à ce qu'a trop vite affirmé Ihsanoğlu : en regardant attentivement la figure, on voit que Vénus, Mercure et la Terre tournent autour du Soleil tandis que la Lune, Mars, Jupiter et Saturne tournent autour de la Terre. Ce système mixte a été décrit par Martianus Capella, un auteur encyclopédique qui vivait à Carthage (aujourd'hui en Tunisie) au V^{e} siècle après Jésus-Christ, mais aurait déjà été proposé par Héraclide de Pont (IV^{e} siècle avant Jésus-Christ), voire par les anciens Égyptiens.

De nombreuses notes en arabe ou en turc entourent les trois figures. Certaines en sont des commentaires succincts, d'autres sont sans rapport aucun avec la cosmographie. J'ai traduit ici (voir page 23) celles qui sont en arabe, laissant pour le moment de côté celles qui sont en turc, pour lesquelles je manque de compétence – je note néanmoins qu'on y repère les dates de 1104, 1105 et 1106, correspondant dans calendrier grégorien à 1694, 1695 et 1696, donc postérieures de 30 ans à l'achèvement du travail d'Ibrâhîm.

Quelle est la source de ces trois images ? Je n'ai pu l'identifier avec certitude et je penche pour une source orale plutôt que livresque. Ce qui n'empêcherait pas l'influence indirecte d'un livre encyclopédique tel que l'*Almagestum novum* du jésuite Giovanni Battista Riccioli (Bologne, 1651), dont les figures des pages 283, 287 et 300 du tome I ressemblent fort à celle du manuscrit (voir ci-dessous la première de ces figures), de même que la phrase latine « *Videlicet Sol centrum Planetariis systematis, Terra centrum Lunaris motus* » (p. 287) est voisine de la phrase arabe que je traduis par (voir page 23) « Sur ce dessin, le centre du Soleil est un centre pour tous les orbes célestes sauf la Lune. »

في المثل ربّ صلف تحت الراعدة

يُضرب للرجل يتوعّد ثمّ لا يقوم به

Le proverbe « le vantard est sous la nuée orageuse » est cité pour l'homme qui fanfaronne, puis n'agit pas.

ومركز الشمس في هذه الصورة

يكون مركزاً لجميع الأفلاك إلاّ القمر

Sur ce dessin, le centre du Soleil est un centre pour tous les orbes célestes sauf la Lune.

وَمَن يُهِنِ ٱللَّهُ فَما لَهُ مِن مُكرِمٍ

Celui que Dieu humilie, nul ne peut l'honorer
[fragment du verset coranique XXII, 18]

لمح إلى ادار الاكرام وهو مصدر

يضرب لمن كان على خلاف دين الله

Est cité pour celui qui s'oppose à la religion de Dieu.

صورة الأفلاك على رأي

Dessin des orbes célestes selon l'opinion de...

فلك الثوابت

Orbe des [étoiles] fixes.

فلك المشتري المرّيخ الزهرة عُطارد الأرض القمر

Orbes [de] Jupiter – Mars – Vénus – Mercure – la Terre [et la] Lune

والشمس في الوسط وهو مركز سائر الأفلاك

ومركزها يلزم أن يكون مركز العالم

والأرض متحركة حول مركز الشمس

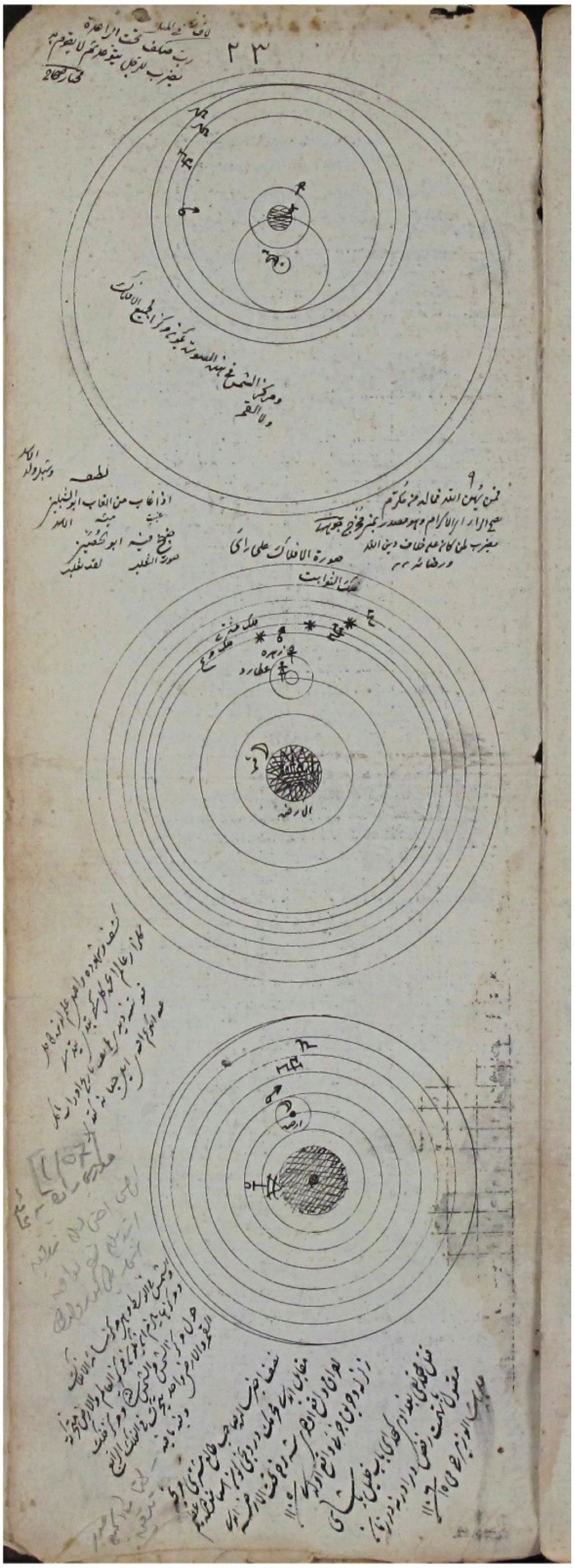
والشمس نفسه

ومركز فلك القمر والأرض واحد

يتحرك في الفلك الرابع

وفيه ما فيه

Le Soleil est au milieu et c'est lui le centre du reste des orbes célestes ; leur centre est nécessairement le centre du monde.
La Terre est mobile autour du centre du Soleil et du Soleil lui-même.
Le centre de l'orbe de la Lune et de la Terre est unique, et se meut dans le quatrième orbe.
Et ci-inclus ce qui y est inclus.



NUMÉRO SEIZE : mai 2017

ISSN : 1969-7929 (imprimé)
ISSN : 1760-6500 (en ligne)

LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

Comité de rédaction : Pierre Ageron & Éric Trotoux - Composition LaTeX.

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http://www.univ-IREM.fr/ Prix au numéro : 13 euros + frais d'expédition si envoi par avion.

Repères IREM