

LE MIROIR DES MATHS



UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE



IREM DE CAEN NORMANDIE
UNICAEN - CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
BP 5186 - CS 14032 - 14032 CAEN Cedex
Tél. : 02 31 56 73 60
Adresse électronique : sciences.irem@unicaen.fr
Site web - <http://irem.unicaen.fr>

IREM DE CAEN NORMANDIE

NUMÉRO DIX-SEPT : septembre 2018
EN MÉMOIRE D'ÉRIC TROTOUX

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

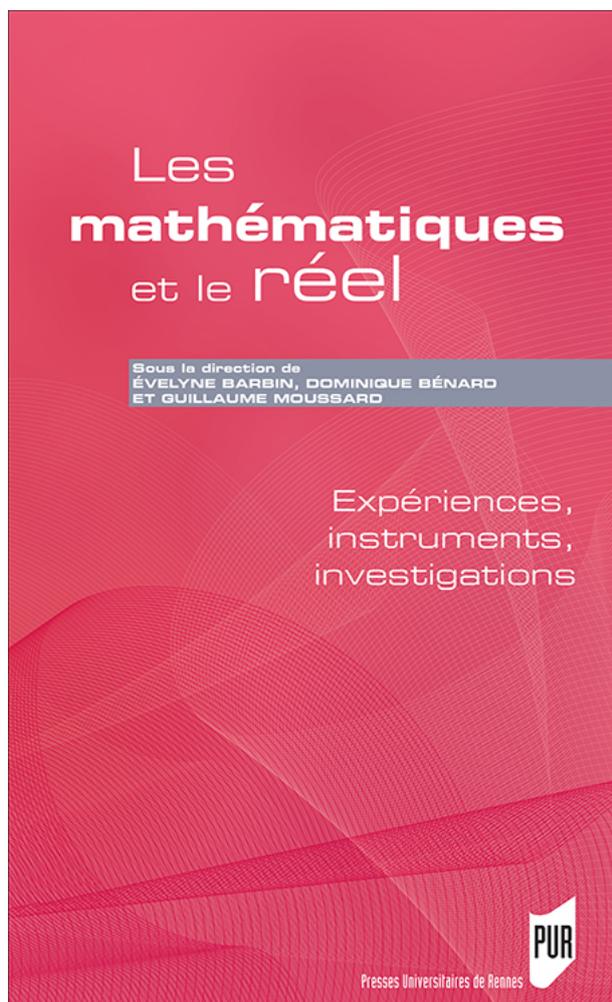
Nouveau livre

Évelyne Barbin, Dominique Bénard et Guillaume Moussard (dir.), *Les mathématiques et le réel – Expériences, instruments, investigations*, Presses universitaires de Rennes, 2018, 246 pages, 20 euros.

Cet ouvrage collectif rassemble quatorze contributions présentées au XXI^e colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, qui s'est tenu au Mans en mai 2015. En particulier, les deux derniers chapitres sont issus de travaux des membres du groupe d'histoire des sciences de l'IREM de Caen Normandie :

Chapitre XIII. **Mathématiques de la guerre souterraine : Bélidor dans l'Empire ottoman**, par Pierre Ageron, p. 211-224

Chapitre XIV. **Cancer et hasard : et les mathématiques ?**, par Jacques Faisant, Denis Lanier, Jean Lejeune, Rémy Morello et Didier Trotoux, p. 225-240



Soutenance de thèse

François Plantade, membre du groupe d'histoire des sciences de l'IREM de Caen Normandie, soutiendra le 31 octobre 2018 à l'université de Nantes sa thèse de doctorat en histoire des mathématiques, préparée sous la direction d'Évelyne Barbin et intitulée :

Jules Houël et la circulation des mathématiques dans la seconde moitié du XIX^e siècle : les réseaux français et européens d'un universitaire de province.

Rappelons qu'un des premiers articles de François sur ce sujet a été publié il y a quelques années par *Le Miroir des maths* et reste bien entendu téléchargeable sur le site irem.unicaen.fr :

François Plantade, « Jules Houël, un mathématicien humaniste au service de la science et de la France », *Le Miroir des maths* 10 (2012), p. 4-17.



La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques

Sommaire du numéro 111 – avril 2018

- **La géométrie euclidienne plane chez Al-Mu'taman Ibn Hud, roi de Saragosse (1081-1085)**
Youcef GUERGOUR, ENS de Kouba, Alger
- **Une expérience de formation des enseignants en géométrie non euclidienne**
El Hadji Malick DIA, UCAD / FASTEF / MATHS, Sénégal
- **Géométries non-euclidiennes et interdisciplinarité mathématique-philosophie**
Manuel BÄCHTOLD, Thomas FRANCOIS, Thomas HAUSBERGER, Patrice MARIE-JEANNE, IREM de Montpellier

Sommaire du numéro 112 – juillet 2018

- **Exemple d'EPI au collège : l'évolution des glaciers**
Stéphanie DEWYSPELAERE, Maëlle NODET, Jérôme CHARTON, Philippe GARAT, Frédérique LETUÉ, Caroline PÈS et Véronique VALES, IREM de Grenoble
- **Point de vue : l'interdisciplinarité est-elle une énigme pédagogique ?**
Henrique VILAS BOAS, IREM de Lyon
- **La mathématique sociale, un enseignement élémentarisé au service du citoyen**
Nicolas SABY et Cyril TÉJÉDO, IREM de Montpellier
- **Carte et boussole au service de la course d'orientation**
Marion QUESNEY-TROUDET, Marc TROUDET et David CHATELON, IREM de Grenoble

Éditorial

Ce numéro 17 du *Miroir des maths* est un numéro spécial en mémoire de notre ami et collègue Éric Trotoux, qui nous a quittés le 21 avril dernier suite à un accident de la circulation.

Pierre Ageron, aidé d'amis d'Éric, retrace sa vie et nous rappelle son engagement pour son métier et envers ses collègues ainsi que dans notre IREM.

Nous publions aussi, dans son intégralité, l'ultime contribution d'Éric au *Miroir* : *Amida-kujis, les mathématiques au service du « hasard »*. Partant d'un jeu asiatique destiné à répartir aléatoirement des tâches, Éric y développe les relations de ce jeu avec le groupe symétrique.

Deux autres articles complètent ce numéro. L'article de Danielle Salles nous propose des activités autour de pavages appelés « rosaces célestes ». Celui d'Olivier Longuet nous explique comment il a, dans une simple planche de bande dessinée, mélangé des problèmes ardues de mathématiques, un mathématicien célèbre et un des fondateurs du mouvement littéraire *OuLiPo*.

Voici pour finir quelques nouvelles de notre IREM.

L'édition 2018 du rallye mathématique « dynamique et virtuel » de l'IREM de Caen Normandie, conçu par Gerald Giangrande, Jérôme Huet et Thierry Mercier, s'est déroulée le vendredi 20 avril 2018. Cinquante-huit classes de Troisième et Seconde de l'académie de Caen étaient engagées. Les classes arrivées en tête de classement sont la Seconde 3 du lycée Louis Liard de Falaise et la Troisième Beauvoir du collège Charles Mozin de Trouville-sur-mer.

Comme chaque année, nos animateurs ont organisé différents stages au Plan académique de formation qui ont remporté un vif succès ; plusieurs devraient être reconduits cette année.

Cette année scolaire promet d'être riche en réflexion et travail au vu des réformes en cours, aussi bien au niveau national que régional.

Bonne lecture à tous.

André Sesboüé
directeur de l'IREM de Caen Normandie



Éric Trotoux (1954-2018)

In Memoriam Éric Trotoux



Éric et ses élèves lors d'une journée d'intégration

Le vendredi 23 mars 2018, peu avant 14h, en se rendant à l'assemblée générale de l'IREM de Caen, notre ami et collègue Éric Trotoux a été victime d'un accident de la circulation. Devant le campus Côte de Nacre, au débouché de la rue Colbert sur le boulevard du Maréchal Juin, son vélo s'est trouvé masqué par un fourgon utilitaire et a été renversé par un autre véhicule. Transporté en état d'urgence absolue au CHU, et malgré des soins de haute qualité, Éric n'a pu être réveillé et est mort le 21 avril. Lors de l'hommage qui lui a été rendu le 26 avril au cimetière de Vaucelles, les animateurs de l'IREM étaient très nombreux. Chacun appréciait sa gentillesse, son intelligence, son dynamisme, son ouverture.

Éric Trotoux, né en 1954, a grandi en banlieue parisienne et a fait ses études au lycée Condorcet de Paris, mais sa patrie de cœur et de famille est dans le Cotentin, à Carteret, puis Portbail. En 1973, il intégra l'École normale supérieure de l'enseignement technique, dite plus tard ENS de Cachan, dans la section des mathématiques. Il y rencontra Odile Bruneau, qu'il épousa en 1976 ; ils auront trois enfants : Sandrine, Nicolas et Yannick. Dans la même promotion, Pierre Vallois, aujourd'hui professeur à l'université de Lorraine, se souvient :

« Entrer dans cet établissement, c'était bien sûr voir ses efforts couronnés de succès, mais c'était aussi l'occasion de quitter le foyer familial et de vivre en toute liberté. Liberté financière, avec le pécule que nous recevions, mais surtout intellectuelle. Dès la première année, des petits groupes se constituèrent par affinité. Éric a aussitôt joué un rôle fédérateur ; nous nous retrouvions à plusieurs pour prendre le café dans sa chambre. J'ai apprécié sa discrétion, sa gentillesse, sa franchise ; nous nous sommes rapidement liés d'amitié. Nous partageons la passion du sport : il m'a ouvert de nouveaux horizons en m'initiant au cross, au ski, au tennis et à la voile, toujours avec beaucoup de pédagogie, de gentillesse et d'indulgence pour le néophyte. Nous avons préparé ensemble l'agrégation de mathématiques en 1976 ; juste avant les épreuves écrites, nous avons réalisé avec Odile un beau circuit cycliste dans les Vosges. En termes d'éclectisme sportif, on ne peut guère faire mieux ! »

Autre ancienne de cette promotion, Danièle Gibbons, professeur dans l'Isère, confirme : « Éric était un donneur de tout, sauf... de leçons ! Sa générosité était désintéressée et humble : avec une patience et une bienveillance souriantes, il partageait tant son amour de la bonne cuisine et des chansons de Boulat Okoudjava que ses talents de danseur, d'automobiliste et de barista ».

Après son succès à l'agrégation, Éric suivit en quatrième année un DEA – on dirait aujourd'hui un master 2. Il n'a pas souhaité continuer dans la recherche. « J'ai trouvé que c'était dommage, poursuit Pierre Vallois, car il avait de réelles capacités mathématiques ».

Éric Trotoux devint donc professeur. Au début de sa carrière, il enseigna au lycée Salvador Allende d'Hérouville Saint-Clair. En 1990, il fut affecté dans les classes préparatoires économiques et commerciales – on disait alors prépas HEC – du lycée Charles de Gaulle de Caen. Il accéda à la chaire supérieure en 2001 et devint responsable de la deuxième année. Interviewé en 2009 par le magazine *Challenges*, il décrivait son établissement comme une « prépa familiale de province » où un suivi attentif, des journées d'intégration et un stage en entreprise permettaient aux élèves de remarquables résultats aux concours. Professeur d'élite, il n'en tirait aucune fierté particulière. Son collègue Jérôme Jousset, professeur dans les classes secondaires du même lycée, insiste sur sa simplicité et sa générosité bienveillante :

« Quand il a fallu enseigner à nouveau les lois statistiques, Éric nous a donné en interne une formation ; il était tellement modeste qu'il nous faisait toujours penser que c'étaient nous, les collègues, qui étions les plus intelligents – plus que lui ! C'était toujours ainsi lorsque nous lui demandions une aide en mathématiques. »

Éric fut admis à la retraite à la fin de l'année 2015. Jérôme Jousset raconte : « Lors de son départ, il a offert

un ballotin de chocolats à chacun des agents de service du lycée. Ils ont été très touchés de sa gentillesse qui se manifestait encore une fois et pour la dernière fois dans le cadre du lycée. »



Éric entouré de collègues du lycée Charles de Gaulle

Éric a sans relâche participé au comité de la régionale caennaise de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) et la présida de 1994 à 1999. Muriel Alliot qui lui succéda témoigne : « Il était convaincu de l'importance du partage de connaissances et d'expériences entre collègues de tous horizons, savait nous suggérer des idées nouvelles ou des personnes pour les conférences de nos journées régionales, relayait les nouveaux textes administratifs avec ses remarques pertinentes et argumentées ». Il aimait à rédiger les solutions des problèmes proposés dans *Les Maths : L'Omega ?*, la feuille de chou(let) de la régionale, éditée de 2006 à 2012. Il participait souvent aux journées nationales de l'APMEP et contribua beaucoup à la réussite de celles qui se sont tenues à Caen en 2005.

Au sein de l'APHEC (Association des professeurs des classes préparatoires économiques et commerciales), Éric s'impliqua dans la réflexion sur les programmes de mathématiques de ces classes entrés en vigueur en 2014, comportant des travaux pratiques avec Scilab. Il contribua à l'élaboration de ressources pour la formation en ligne des professeurs concernés.

L'IREM de Basse-Normandie fut pour Éric comme une seconde famille. Dès 1993, son cadet Didier, auparavant dans le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Rouen, avait rejoint le groupe homologue à Caen. Pour Éric, les premiers contacts avec l'IREM semblent dater de 1994, avec sa participation à l'université d'été nationale organisée à Caen sur le thème *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*. À la rentrée, il rejoignit le groupe « Informatique et outil pédagogique » qu'animaient de-

puis quelques années Guy Juge, Gilbert Lecler et Bernard Genetay. Commença alors entre les quatre amis, rejoints en 2000 par Jérôme Jousset, une collaboration durable sur l'utilisation dans l'enseignement des mathématiques des logiciels de calcul formel (Maple, Derive), de géométrie dynamique (Geoplan), de traitement de texte (LaTeX) ainsi que des tableurs, des calculatrices graphiques et d'Internet. Plus tard, ils réfléchirent sur le projet jamais mis en œuvre d'épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat S. Sollicité pour des stages de formation continue, le groupe peinait à faire face : il y eut d'abord deux stages par an, puis trois, quatre, cinq, sept... Malgré les dédoublements de certains d'entre eux, il n'était pas possible de satisfaire toutes les demandes. Parmi les stages animés par Éric, je relève dans nos archives : *Internet pour le professeur de mathématiques* (2000-2001), *Réalisation de documents scientifiques avec LaTeX* (2002-2003, avec Guy Juge) et *Outils informatiques pour enseigner l'analyse* (2003-2004). En 2005-2006, il avait préparé un stage *Utilisation du logiciel et du serveur WIMS*, « annulé alors qu'il y avait 34 inscrits ». Gilbert Lecler, qui a co-animé d'autres stages avec lui, se rappelle à quel point il savait « se montrer disponible, ouvert et très respectueux de tous, se mettre à l'écoute et à la portée de tous, quelles que soient les compétences et les difficultés de chacun ».



Éric (à droite), en compagnie de Gilbert Lecler

En 2007, le groupe d'informatique se trouvait affaibli par l'effet de départs en retraite. En décembre, je proposai à l'IREM de Basse-Normandie, dont j'étais devenu directeur, de se doter d'un périodique ayant l'ambition d'être une vitrine de ses activités. Un vote entre plusieurs propositions trancha la question du titre : ce serait *Le Miroir des maths*. Éric fut aussitôt volontaire pour en prendre les rênes avec moi. Ainsi commença une aventure qui aura duré plus de dix ans : l'édition d'un périodique certes modeste et imparfait, mais produit avec soin par une toute petite équipe. Je garderai de cette collaboration le souvenir de bien des échanges riches, amicaux et qui m'ont beaucoup appris.

Dès le début, Éric décida que le *Miroir* serait composé en LaTeX ; il opta pour une mise en page bicolonnée et une couverture sobre dont la palette de couleurs évoluerait à chaque numéro. Ces choix graphiques sont restés inchangés. Son travail était multiple : il détectait erreurs mathématiques, ambiguïtés, fautes de frappe ou

d'orthographe, proposait des clarifications, convertissait des documents d'un format à un autre, se battait avec les graphiques, les tableaux, les photographies floues... Avec bien plus de patience et de compétence que moi, il mettait en forme les articles les plus divers, en relation suivie avec des auteurs qui ne comprenaient pas toujours très bien pourquoi il se donnait toute cette peine !

À tout cela, il faut ajouter qu'après la mort de son ami Guy Juge en 2011, Éric a repris la charge du site Internet de l'IREM de Basse-Normandie, le faisant migrer vers le système de gestion de contenu dynamique SPIP.

La profonde gentillesse d'Éric et sa capacité à se mettre au service de tous n'empêchaient pas de solides convictions. Lorsqu'il pensait devoir prendre la défense d'un enseignement public auquel il était très attaché, il pouvait faire preuve d'une saine et déroutante franchise. Lorsqu'un article proposé au *Miroir* lui paraissait insuffisamment travaillé, il n'hésitait pas à le dire, sachant parfaitement discerner les cas où bienveillance et générosité étaient utiles de ceux où elles ne s'imposaient pas.

Quand l'accident d'Éric est survenu, nous avons depuis plusieurs semaines commencé à travailler sur ce dix-septième numéro du *Miroir des maths*. Je l'ai fini seul, avec l'assistance LaTeX d'André Sesboué. L'ar-

ticle sur les amida-kujis qu'on trouvera dans les pages qui suivent est le dernier qu'Éric ait écrit. Vu sa longueur, nous avions prévu de le scinder et de le publier dans deux numéros consécutifs du *Miroir*. Après qu'il nous ait quittés, j'ai pensé préférable de le publier en une seule fois dans le cadre d'un numéro spécial à la pagination plus importante que d'habitude. Ne disposant pas du fichier source, j'ai choisi de publier telle quelle la dernière version qu'il m'a envoyée au format pdf. Déjà relue et modifiée plusieurs fois, elle portait entre nous le nom de code $n + 2$ et est datée du 4 mars 2018. Il y aurait eu, sans nul doute, une version $n + 3$, puis une $n + 4$... car si nombre de corrections avaient déjà été faites, certaines, mineures, restaient nécessaires. De même, la mise en page sur deux colonnes n'était pas encore réalisée. On voudra bien, en parcourant cet article posthume, tenir compte des circonstances particulières de sa publication, qui n'empêchent pas sa lecture d'être agréable et extrêmement stimulante. On trouvera aussi, ci-dessous, une liste aussi complète que possible des travaux qu'Éric a rédigés : de la géométrie euclidienne aux probabilités en passant par l'arithmétique, l'analyse et la théorie des groupes, elle suggère bien quelle était sa curiosité pour tout le champ des mathématiques.

Pierre Ageron

avec les contributions de Jérôme Jousset, Muriel Alliot, Gilbert Lecler, Danièle Gibbons et Pierre Vallois

Liste des publications d'Éric Trotoux

1. dans les travaux du groupe informatique de l'IREM Basse-Normandie :

- Bernard Genetay, Éric Trotoux et Gilbert Lecler, « Tables rondes (comptes-rendus) », in : *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*, actes de l'université d'été (29 août-2 septembre 1994), IREM de Basse-Normandie, Caen, 1994, p. 225-228

- Bernard Genetay, Guy Juge, Gilbert Lecler et Éric Trotoux, *Quelques thèmes mathématiques du lycée présentés avec le logiciel MAPLE*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1997.

- Guy Juge et Éric Trotoux, « Présentation de quelques thèmes de mathématiques des programmes de lycée en utilisant la TI-92 pour présenter des imagiciels », in : *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*, actes du colloque francophone européen de La Grande-Motte, IREM de Montpellier, 1999.

2. dans *Les Maths : l'Oméga ?*, bulletin de la régionale de Caen de l'APMEP (tous les numéros 1 à 13 sont sur le site apmep.fr) :

- « Problème de l' Ω n°3 – solution », *Les Maths : l'Oméga ? 3* (2007), supplément, p. 1-7.
- « Généralisation d'une solution de l'exercice proposé dans l' Ω n°7 », *Les Maths : l'Oméga ? 8*, p. 4-5, septembre 2009.
- « Solutions de l'exercice du numéro 8 : solution géométrique, compléments », *Les Maths : l'Oméga ? 9* (2010), p. 4-5 et supplément p. 1-5.
- « Solution complète de l'exercice de l' Ω 10 », *Les Maths : l'Oméga ? 12* (2011), p. 4.
- « Solution d'un exercice du *Bulletin de l'APMEP* 495 », *Les Maths : l'Oméga ? 13* (2012), p. 11-12.

3. dans *Le Miroir des maths*, journal de l'IREM de Caen Normandie (tous les numéros 1 à 17 sont sur le site irem.unicaen.fr) :

- « Une approche globale des systèmes de numérations », *Le Miroir des maths* 1 (2008), p. 8-10.
- « Problème d'aire autour d'un triangle équilatéral », *Le Miroir des maths* 6 (2010), p. 13-19.
- (avec Pierre Ageron et Gilbert Lecler), « In memoriam Guy Juge », *Le Miroir des maths* 9 (2012), p. 4-7.
- « Un approfondissement pour l'accompagnement personnalisé en Terminale S : approximation de $n!$ et formule de Stirling », *Le Miroir des maths* 11 (2013), p. 26-31.
- « Distance entre la moyenne et la médiane d'une variable aléatoire », *Le Miroir des maths* 13 (2014), p. 25-26.
- « Amida-kujis, les mathématiques au service du "hasard". Du jeu à l'étude de sa relation au groupe symétrique », *Le Miroir des maths* 17 (2018), p. 7-31.

4. dans le *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public* (tous les numéros sont progressivement mis en ligne sur le site apmep.fr) :

- « Approximation de $n!$ et formule de Stirling », *Bulletin de l'APMEP* 505 (2013), p. 435-446.
- « Une variante directe pour la suite des "non carrés" », *Bulletin de l'APMEP* 519 (2016), p. 381-382.

Amida-kujis, les mathématiques au service du « hasard »

Du jeu à l'étude de sa relation au groupe symétrique

La conférence présentée par Stéphane Gaussen¹ aux journées nationales de l'APMEP² à Lyon est à l'origine de cet article, présentant un sujet qui a piqué ma curiosité. Nous verrons notamment comment les Asiatiques tirent au hasard dans une famille qui doit faire la vaisselle, qui doit sortir les poubelles, qui doit promener le chien... grâce aux amidakujis. Je vais pour commencer citer une partie d'un beau travail fait par des collégiens, que j'ai découvert via l'Internet suite à cette conférence. Il a été impulsé par l'association Math.en.JEANS³ et réalisé par des élèves du collège de Montbrison (Loire), encadrés par leurs professeurs et par Stéphane Gaussen. Voici comment ces élèves introduisent le sujet :

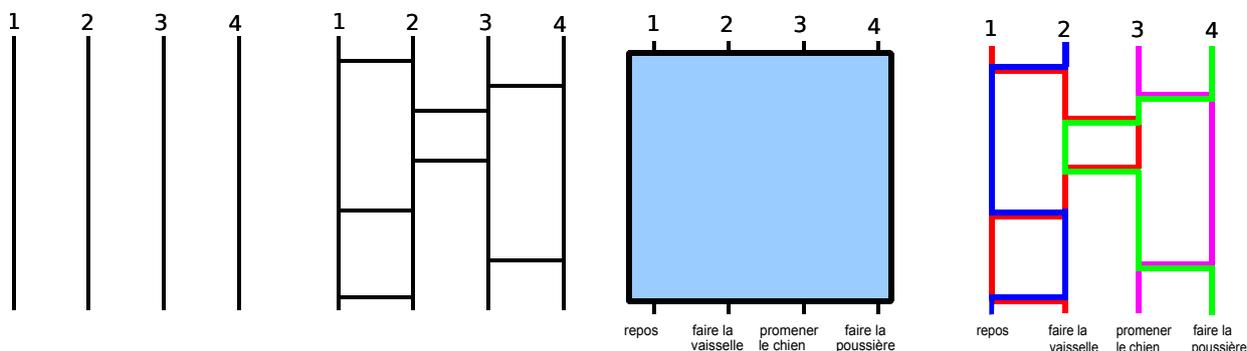
« Les amidakujis sont un jeu de hasard japonais tout comme la courte paille ici en France. Ce jeu permet de décider au hasard qui va gagner un lot ou de choisir qui va faire les tâches ménagères. Il permet une distribution aléatoire.

Principe : On place des traits verticaux, ils doivent être parallèles (on en place autant que l'on veut). Au-dessus des barres vous placez des nombres (1,2,3,4,5,...) ou bien des prénoms.

Vous placez ensuite des traits horizontaux : ils doivent être placés au hasard. Mais attention, deux traits ne doivent jamais être au même niveau. On place ensuite au hasard en bas des barres verticales des lots, des tâches ménagères... tout en ayant pris soin de couvrir l'amidakuji.

Pour savoir qui fait quoi, on dévoile barres et traits, puis on trace les chemins⁴. Lorsque que l'on descend le long des barres verticales en partant des nombres, on doit obligatoirement emprunter les barres horizontales rencontrées. On glisse le long des barres (toujours en descendant) jusqu'à une tâche.

Ici, sur la figure suivante : repos – faire la vaisselle – promener le chien – faire la poussière



Donc le 1 va faire la vaisselle, le 2 va se reposer, le 3 va promener le chien et le 4 va faire la poussière. »

Dans la partie I de cet article, je citerai, avec très peu de commentaires personnels, le travail des collégiens de Montbrison qui ont étudié trois questions posées par Stéphane Gaussen au sujet de ces figures. Dans la partie II, nous étudierons, sous une forme généralisée que j'ai développée dans l'esprit des questions initiales, les liens qu'elles entretiennent avec le groupe symétrique. Je propose dans cette partie la construction de quelques algorithmes permettant de produire des amidakujis associés à la donnée de permutations d'un ensemble d'objets. Enfin, dans une partie III plus algébrique et théorique, nous définirons le groupe des amidakujis, en incluant notamment une présentation par générateurs et relations de ce groupe.

Ainsi, un procédé ludique banalement employé en Extrême Orient met-il en lumière de belles mathématiques.

1. Stéphane Gaussen est professeur à l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne. Il est membre de l'équipe Algèbre, Géométrie et Logique de l'Institut Camille Jordan (UCBL). Son domaine de recherche concerne la théorie des représentations. Il s'agit d'une branche des mathématiques fondamentales née à la fin du XIXe siècle avec les travaux de Frobenius et de Burnside et qui s'est développée au XXe siècle par des contributions de Schur et Weyl. Ce secteur très actif à l'heure actuelle se situe aux confluent de l'algèbre, de la géométrie, de la théorie des groupes, de l'analyse et de la combinatoire. Par ailleurs, il est très impliqué dans la diffusion des mathématiques et dans le programme Math.en.JEANS.

2. Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.

3. L'association Math.en.JEANS impulse et coordonne des ateliers de recherche qui fonctionnent en milieu scolaire, de l'école primaire jusqu'à l'université, et qui reconstituent en modèle réduit la vie d'un laboratoire de mathématiques.

4. J'ai ici précisé le retrait du cache et permuté les couleurs des chemins 3 et 4 du document original pour une meilleure lisibilité du dessin.

I – Des collégiens⁵ exposent leur travail de recherche sur les amidakujis.

Les participants

Élèves : AIRED A. (4ème 3) BAROU C. (4ème 2) BLANC A. (4ème 9) BOS T. (4ème 3) BRUYERE T. (4ème 9) CHAUMETTE C. (4ème 9) CHERMANNE M. (3ème 5) CHILLET A. (3ème 4) COUILLOT M. (4ème 2) DE HARO C. (4ème 3) DEHEEGER L. (4ème 9) DUFOURD C. (4ème 9) EYRAUD S. (4ème 3) FAURE D. (4ème 9) GAY Y. (4ème 13) GUENOT J. (4ème 3) JUNHKE E. (4ème 9) JUNHKE G. (3ème 12) MAISONNEUVE J. (3ème 4) MARTIN L. (4ème 9) PAGLIARINI L. (3ème 4) POYET L. (4ème 7) QUINTEIRO P. (4ème 9)

Professeurs : CASSE G., GERENTES JB., SIBILLE JF.

Chercheur : GAUSSENT S. (Université St-Étienne)

Les questions

Le sujet traite de l'étude des Amida-Kuji, jeu de hasard japonais. Le but de la recherche a été de démontrer le bon fonctionnement du jeu, puis de trouver une technique pour maîtriser ce qui apparaît au départ comme du hasard.

Stéphane GAUSSENT nous a proposé trois questions :

- 1) Pourquoi deux chemins n'arrivent-ils jamais au même endroit ?
- 2) Comment placer les barres pour obtenir un résultat voulu ?
- 3) Pour une permutation donnée, comment trouver le dessin avec un minimum de barres qui donne cette permutation ?

Nous avons trouvé une solution à la première question et nous l'avons démontrée :

« Il n'y a jamais deux chemins en même temps sur une jambe. »

Pour la deuxième question, nous avons trouvé plusieurs méthodes de résolution et nous en présentons trois dans cet article.

Enfin, nous avons émis une conjecture pour la troisième question, que nous ne sommes pas parvenus à démontrer : « A chaque permutation donnée, il existe un dessin qui permet de réaliser cette permutation avec un minimum de barres. »

Lexique⁶ des termes utilisés dans la suite :

Jambe : Segment vertical fixe qui soutient les barres horizontales.

Barre : Segment horizontal fixe reliant deux jambes.

Trajet : Déplacement d'une jambe de départ jusqu'à une jambe d'arrivée en suivant les règles des amidakujis.

Escalier : Trajet particulier descendant ou ascendant non nécessairement achevé, vers la droite ou vers la gauche.

Chemin : Trajet achevé.

Question 1

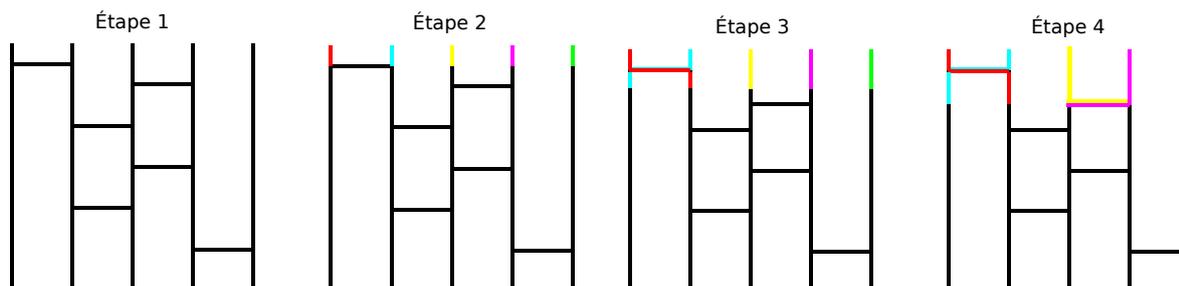
Pourquoi deux chemins n'arrivent-ils jamais au même endroit ? (« Pourquoi deux personnes ne feront-elles pas la même tâche ménagère ? »)

Lorsqu'on effectue un trajet, on est obligé de suivre les barres rencontrées. Lors d'un trajet, quand on prend une barre, le trajet de la jambe d'à côté prend la barre en sens inverse ce qui fait permuter les deux trajets. Ainsi, deux trajets ne sont jamais sur la même jambe et n'arrivent donc pas au même endroit. Deux chemins pourraient arriver au même endroit si deux barres étaient situées au même niveau⁷. Mais cela serait contraire aux règles du jeu des amidakujis.

5. Session MeJ 2012/2013 - Collège Mario Meunier – Montbrison (Loire 42) professeurs : CASSE G., GERENTES JB., SIBILLE JF. et un groupe de leurs élèves (18 en quatrième et 5 en troisième) – Le document original repris ici est disponible à l'url : <https://www.mathenjeans.fr/content/les-amida-kuji-collège-mario-meunier-montbrison>

6. Je précise ici sans citer explicitement leur document, qu'avant d'aborder les réponses aux questions, les élèves prennent soin de définir dans un lexique les termes utilisés dans la suite, schéma à l'appui. Voir leur document original disponible à l'url : <https://www.mathenjeans.fr/content/les-amida-kuji-collège-mario-meunier-montbrison>

7. Note des élèves : Si deux barres étaient situées au même niveau en ayant une jambe en commun, même en supposant que chaque trajet ne prenne qu'une seule barre et que le trajet de la jambe du milieu choisisse une des deux barres.



Étape 1 : Situation initiale

Étape 2 : Tous les chemins partent en même temps mais le bleu et le rouge rencontrent une barre et s'intervertissent.

Étape 3 : Les chemins continuent.

Étape 4 : Les chemins magenta et jaune rencontrent à leur tour une barre et s'intervertissent.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que les chemins arrivent en bas. Il n'y a donc jamais deux couleurs en même temps sur une même jambe.

Question 2

Comment placer les barres pour avoir le résultat voulu ?

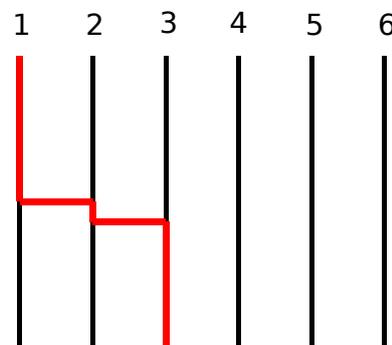
(« Comment placer les barres pour que le 1 fasse la vaisselle, que le 2 se repose ... ? » ou « Comment maîtriser le hasard ? »)

Nous avons trouvé trois solutions⁸ :

Solution 1

Étape 1 :

- Je commence par créer le chemin du 1.
- Je mets une barre au milieu des jambes (1 et 2).
- Je fais un escalier descendant vers la droite.

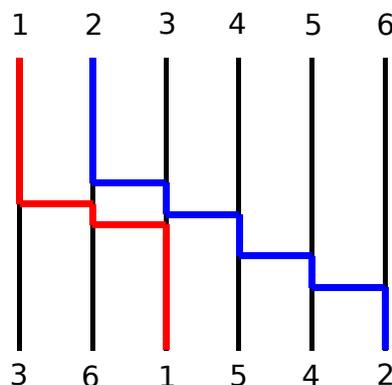


3 6 1 5 4 2

Étape 2 :

- Je vérifie si le chemin du 2 n'est pas déjà tracé. Ici le chemin du 2 n'est pas déjà tracé : on doit le créer.
- Pour créer ce chemin on fait des escaliers descendants vers la droite qui sont toujours au-dessus des autres.
- Je crée un escalier descendant pour obtenir le 2.

En partant du 2, je vais faire un escalier descendant à droite au-dessus de celui du 1, et à chaque fois que je mets une barre, je vérifie si le chemin est tracé sinon je continue à rajouter des barres.



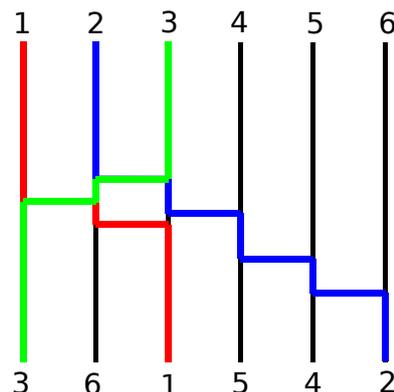
3 6 1 5 4 2

8. Les élèves présentent trois démarches conduisant à deux réponses de formes distinctes (2 et 3 fournissent des réponses géométriquement superposables via des glissements verticaux de certaines barres). Nous pouvons identifier les trois méthodes présentées en "méthode gauche-droite (resp. droite-gauche) depuis la ligne du haut" pour la solution 1 (resp. 2), et "méthode droite-gauche depuis la ligne du bas" pour la solution 3.

Étape 3 :

Je vérifie si le chemin du 3 n'est pas déjà tracé.

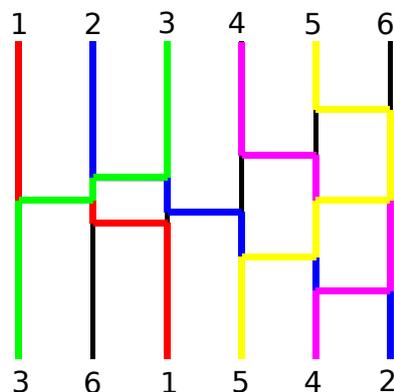
Ici le chemin du 3 est déjà tracé.



Étape 4 :

- Je répète la même procédure pour le 4 et le 5.

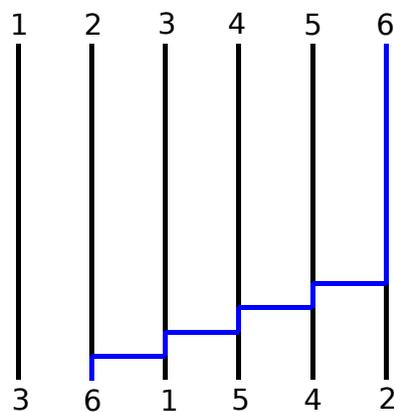
- Le chemin du 6 sera forcément bon !! (d'après la question 1)



Solution 2

Étape 1 :

- Je commence par créer le chemin du 6.
- Je mets une barre au milieu des jambes (5 et 6).
- Je fais un escalier descendant vers la gauche.



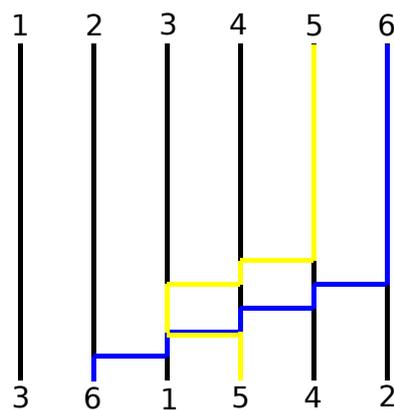
Étape 2 :

- Je vérifie si le chemin du 5 n'est pas déjà tracé. Ici le chemin du 5 n'est pas déjà tracé : on doit le créer.

- Pour créer ce chemin on fait des escaliers descendants vers la gauche qui sont toujours au-dessus des autres.

- Je crée un escalier descendant pour obtenir le 5.

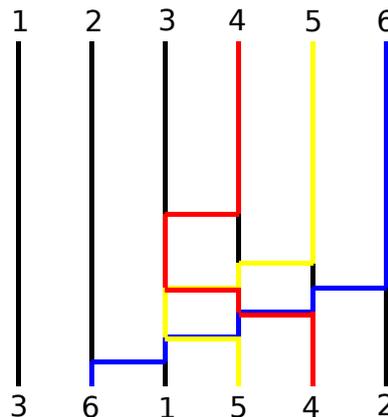
En partant du 5 : à chaque fois que je mets une barre, je vérifie si le chemin est tracé sinon je continue à rajouter des barres.



Étape 3 :

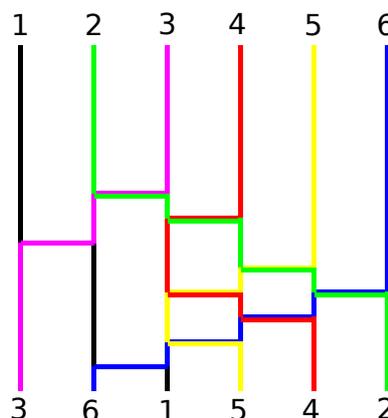
- Je vérifie si le chemin du 4 n'est pas déjà tracé. Ici le chemin du 4 n'est pas déjà tracé : on doit le créer.
- Pour créer ce chemin on fait des escaliers descendants vers la gauche qui sont toujours au-dessus des autres.
- Je crée un escalier descendant pour obtenir le 4.

En partant du 4 : à chaque fois que je mets une barre, je vérifie si le chemin est tracé sinon je continue à rajouter des barres.



Étape 4 :

- Je répète la même procédure pour le 3 et le 2.
- Le chemin du 1 sera forcément bon ! (d'après la question 1)

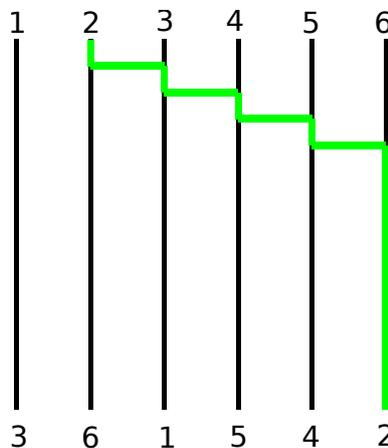


Solution 3

C'est la solution avec laquelle nous avons continué nos recherches :

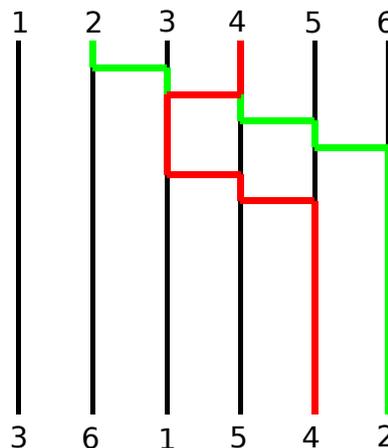
Étape 1 :

- On commence par créer le chemin du 2 (le nombre en bas à droite), puis on fera le chemin du 4, puis du 5, ensuite du 1, etc.
- Les barres permettant de créer le chemin du 2 seront les plus hautes, en dessous il y aura les barres du 4, etc.
- Les barres permettant de construire le chemin du 3 seront les plus basses. Pour créer le chemin du 2, on part d'en haut et on fait un escalier descendant vers la droite.
- Pour créer le chemin du 2, on part d'en haut et on fait un escalier descendant vers la droite.



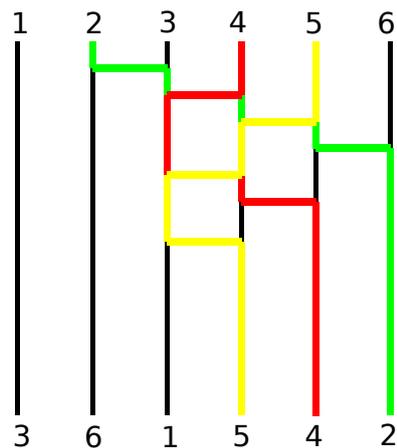
Étape 2 :

- On veut créer le chemin du 4.
- On vérifie s'il n'est pas déjà tracé : ici ce n'est pas le cas.
- On part du 4 (en haut), on emprunte le chemin du 2 et on ajoute des barres (en dessous de celle du 2).
- A chaque barre ajoutée, on vérifie si le chemin est tracé ou pas.



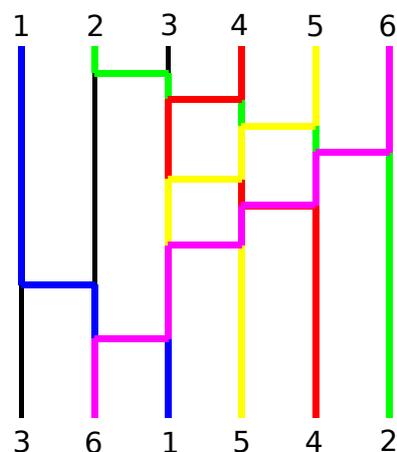
Étape 3 :

- On veut créer le chemin du 5.
- On vérifie s'il n'est pas déjà tracé : ici ce n'est pas le cas.
- On part du 5 (en haut), on emprunte le chemin du 2 et du 4, on ajoute des barres (en dessous de celle du 2 et du 4).
- A chaque barre ajoutée, on vérifie si le chemin est tracé ou pas.



Étape 4 :

- On réitère la procédure pour le 1, puis pour le 6.
- Enfin le chemin du 3 sera déjà tracé (d'après la question 1)



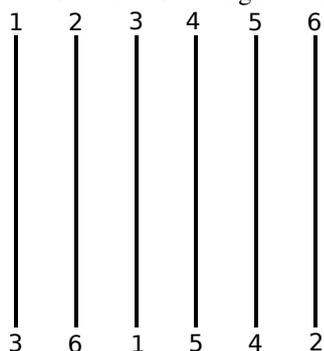
Question 3

Pour une permutation donnée, comment trouver le dessin avec un minimum de barres qui donne cette permutation ? C'est la même question que la question 2) avec une condition supplémentaire : on veut mettre le minimum de barres.

Nous avons remarqué⁹ que parmi nos méthodes, la méthode n° 3 nous permettait d'obtenir le plus petit nombre de barres. Stéphane Gaussent nous a confirmé que cette méthode donnait le nombre minimum de barres, mais nous ne savons pas l'expliquer ou le démontrer.

Nous avons cependant trouvé une méthode qui permet de calculer ce nombre minimum de barres. Tout d'abord, le résultat d'un amidakuji dépend de deux choses :

- le décalage ;
- le nombre¹⁰ de nombres inférieurs à droite sur la ligne d'en bas.



Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

a) Le décalage est l'écart entre la position de départ d'un nombre et sa position d'arrivée.

Sur cet exemple, le 1 a un décalage de 2 par rapport au 1 d'arrivée. Ce résultat peut se vérifier grâce à une formule qui consiste à faire le nombre du haut moins le nombre du bas. Par exemple, pour savoir le décalage du 4, il suffit de faire $5 - 4$ c'est à dire 1. Pour le 6, on fera $2 - 6$ c'est-à-dire un décalage de -4.

Il existe deux types de décalages :

- Le décalage sur la droite qui donne un décalage positif. (exemple : le 1 et le 2)
- Le décalage sur la gauche qui donne un décalage négatif. (exemple : le 3 et le 6)

b) Passons maintenant au nombre de nombres plus petits qu'un nombre, à droite sur la ligne du bas. Pour cela, il nous suffit de prendre un nombre, de compter combien de nombres inférieurs il y a à sa droite sur la ligne du bas.

Le 3 a deux nombres inférieurs à lui à droite sur la ligne du bas : le 1 et le 2.

Au final pour savoir le nombre minimum de barres pour placer correctement un nombre, il faut ajouter¹¹ le décalage et le nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas.

Ainsi sur notre exemple, pour placer le 5 il faut placer 1 barre, pour le 4 il faut 2 barres. Sur cet exemple, le 5 aura besoin d'une barre pour arriver à son point car $-1+2=1$

Ainsi donc pour connaître le nombre minimum de barres pour compléter un amidakuji, il nous suffit d'ajouter ces totaux¹².

Sur l'exemple précédent il faut $0 + 0 + 2 + 1 + 2 + 4 = 9$ barres au minimum pour le compléter.

9. Je cite le texte des élèves. Ici les deux types de réponses proposées à la question 2 conduisent à neuf barres, ce qui ne permet pas d'en privilégier une parmi elles.

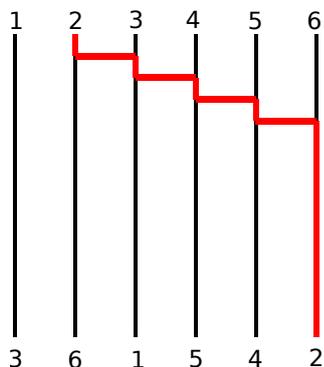
10. Autrement dit, le nombre des inversions dans la permutation.

11. La ligne "Total" peut simplement – sans passer par les décalages – être obtenue de droite à gauche en comptant directement le nombre de nombres plus grands qu'un nombre, à gauche sur la ligne du bas, i.e. les inversions de la permutation.

12. Les élèves n'ont pas vu que la somme algébrique des décalages est toujours nulle. Sa prise en compte est donc inutile ici, seule compte la somme du nombre des inversions.

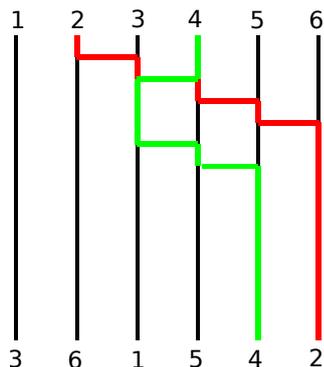
Retour question 2 : En calculant le minimum de barres horizontales, il est très facile de les placer. On commence toujours par le dernier nombre de bas à droite donc le 2.

Pour le 2, il faut 4 barres horizontales en escalier ascendant à gauche le plus haut possible à partir du 2 du bas.



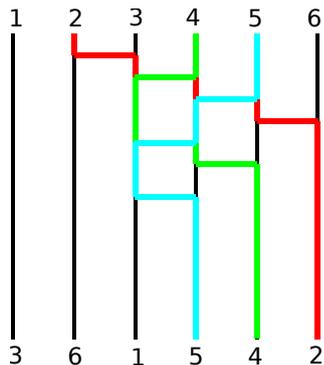
Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

Pour le 4, il faut 2 barres horizontales en escalier ascendant à gauche en dessous des barres du 2 à partir du 4 du bas.



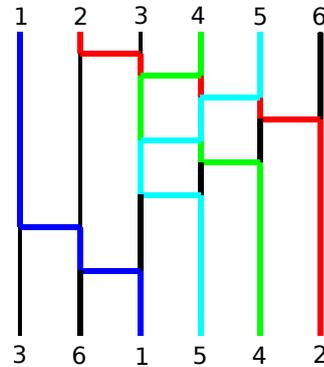
Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

Pour le 5, il faut 1 barre horizontale en escalier ascendant à gauche en dessous des barres du 4 à partir du 5 du bas.



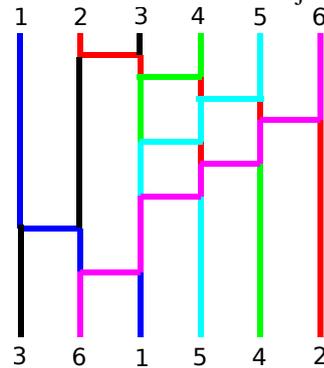
Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

Pour le 1, il faut 2 barres horizontales en escalier ascendant vers la gauche à partir du 1 du bas.



Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

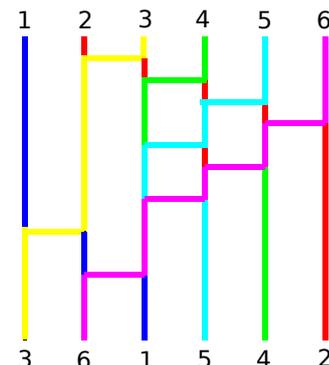
Pour le 6, il ne faut aucune barre horizontale car il arrive déjà à son point à partir du 6 du bas.



Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4

Et pour le 3, d'après la question 1, il ira directement à son point d'arrivée sans ajouter de barre horizontale à partir du 3 du bas.

Ligne du bas	3	6	1	5	4	2
Décalages	-2	-4	+2	-1	+1	+4
nombre de plus petits à droite sur la ligne du bas	2	4	0	2	1	0
Total	0	0	2	1	2	4



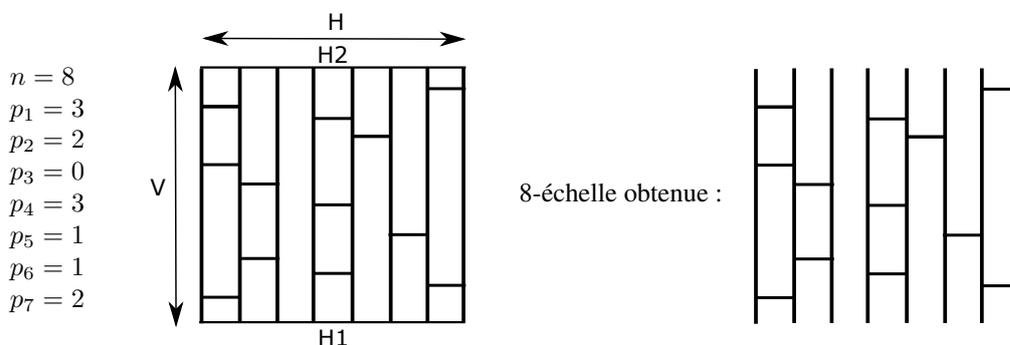
II – Les amidakujis et leur relation avec le groupe symétrique \mathfrak{S}_n

1. Amidakujis ou n -échelles : définitions, vocabulaire et usage

Ces figures, comme nous l’avons constaté dans la section précédente, permettent de représenter des applications (injectives) de l’ensemble E des n objets placés aux extrémités hautes des n segments verticaux, vers l’ensemble F ¹³ des objets placés aux extrémités basses des n segments verticaux. Dans la suite, nous choisirons toujours $F = E$, ainsi les différents chemins de l’amidakuji étudié représenteront des bijections de E dans E , autrement dit des permutations de E .

Nous précisons d’abord la définition des figures et les termes employés à leur sujet.

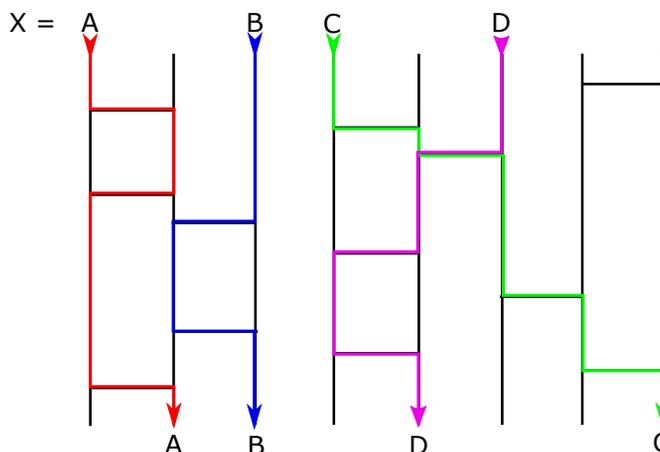
Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , l’axe (O, \vec{i}) donne la direction horizontale et l’axe (O, \vec{j}) donne la verticale. Nous considérons un rectangle R de hauteur V , dont $H1$ et $H2$ sont les deux côtés horizontaux de longueur H , et un entier n tel que $n \geq 2$. Nous subdivisons alors R en $n - 1$ rectangles $R_i (1 \leq i \leq n - 1)$ de dimensions $V \times (\frac{H}{n-1})$. De plus, dans chaque rectangle R_i nous plaçons p_i (éventuellement aucun) segments horizontaux de longueur $\frac{H}{n-1}$ de telle sorte que les p ($p = \sum_i p_i$) segments rajoutés soient situés à des distances de $H1$ deux à deux distinctes appartenant à l’intervalle $]0, V[$.



Définition 1 – n -échelle¹⁴ : C’est l’ensemble constitué des n segments verticaux (appelés aussi **montants**) et des **barres** horizontales les reliant que l’on extrait du rectangle R en retirant les côtés horizontaux. Voir figure ci-dessus.

Définition 2 – point de jonction : Les points extrémités des barres horizontales sont appelés points de jonction.

Définition 3 – Chemin sur une n -échelle : Soit X l’extrémité haute d’un montant. Le chemin issu de X est la ligne brisée obtenue en parcourant, de haut en bas ou horizontalement, tous les segments délimités par les points de jonction rencontrés jusqu’à l’extrémité basse d’un montant. Le chemin change impérativement de direction (verticale ou horizontale) à la rencontre de chaque point de jonction et se poursuit sans ambiguïté car les barres se situent à des niveaux distincts. Voir figure ci-dessous



13. Nous pouvons affecter plusieurs fois le même objet aux n places disponibles, par exemple pour une loterie où il y a plusieurs perdants. Ainsi $1 \leq \#(F) \leq n$

14. C’est la dénomination suggérée par le dessin que j’ai choisie pour franciser le terme japonais amidakuji.

2. Propriétés des n -échelles et des chemins associés

Prop. 1 - Injectivité du procédé : Nous généralisons le résultat de la question 1 de l'atelier MATH.en.JEANS relaté dans la section I. Nous énonçons la proposition suivante.

Considérons une n -échelle et n objets X_1, X_2, \dots, X_n que nous plaçons aux extrémités hautes des n montants, et auxquels nous associons n chemins issus de ces objets. Choisissons un montant quelconque de cette n -échelle.

Un point quelconque de ce montant est un point de jonction ou ne l'est pas. Dans le premier cas, il est le point de passage de **deux chemins exactement** issus d'objets X_k et X_l . Dans l'autre cas, il est le point de passage d'**un unique chemin** issu de l'un des objets X_1, X_2, \dots, X_n . En particulier, l'extrémité inférieure d'un montant est le point d'arrivée d'un unique chemin.

Corollaire : Les chemins de toute n -échelle représentent une application injective de l'ensemble des n objets X_1, X_2, \dots, X_n placés aux extrémités hautes des n montants dans l'ensemble des objets affectés aux extrémités basses des n montants.

Preuve : Nous raisonnons par récurrence sur le nombre de barres, noté p . Le résultat est immédiat pour $p = 0$ car il n'y a aucun point de jonction, et ainsi les chemins sont les n montants. Pour $p = 1$, seuls deux montants possèdent un unique point de jonction par lequel passent seulement les deux chemins issus de ces montants. Les autres points des montants sont, soit sur un de ces deux montants (au dessus ou en dessous d'un point de jonction, soit sur un montant sans point de jonction qui correspond à un seul des chemins possibles.

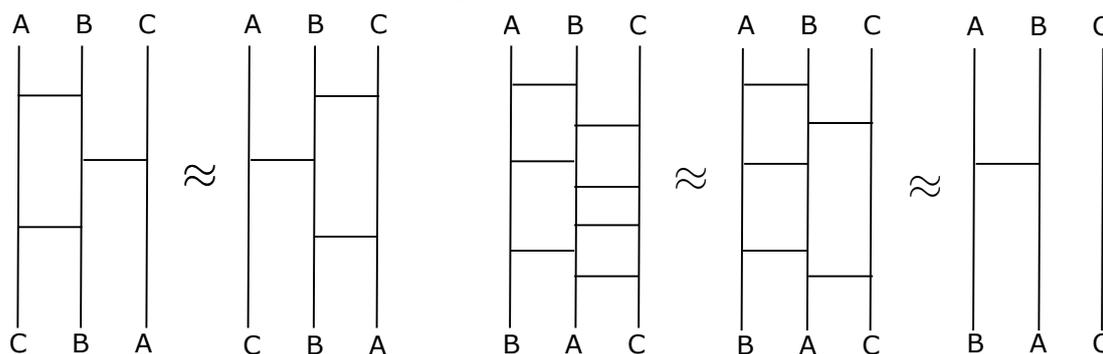
Pour établir le caractère héréditaire du prédicat sur p entier naturel, $\mathcal{H}(p)$: "pour tout $k \leq p$ toute n -échelle à k barres satisfait à la proposition 1 énoncée ci-dessus", il suffit de "scier" les montants au dessus de la dernière barre du bas, puis d'appliquer l'hypothèse de récurrence conjuguée avec le résultat vu pour $p = 1$.

Nous pouvons maintenant affirmer que toute n -échelle représente une permutation de l'ensemble E des n objets X_1, X_2, \dots, X_n placés aux extrémités hautes des n montants.

Prop. 2 – n -échelle sans barre : Une n -échelle sans barre représente la permutation identité.

Prop. 3 – n -échelle avec une seule barre : Une n -échelle avec une seule barre représente la transposition des éléments associés aux deux montants reliés.

Prop. 4 – Plusieurs représentations pour une permutation : Comme le montrent les exemples suivants, une permutation donnée peut être représentée par plusieurs n -échelles distinctes.



Prop. 5 – Chemins croisés : Nous énonçons la proposition suivante.

Si deux chemins issus des objets X et Y se croisent alors le(s) croisement(s) se recouvrent sur des barres horizontales. La position relative des objets X et Y (X à droite ou à gauche de Y) est conservée (resp. inversée) dans la permutation finale lorsque le nombre de croisements de ces deux chemins est pair (resp. impair).

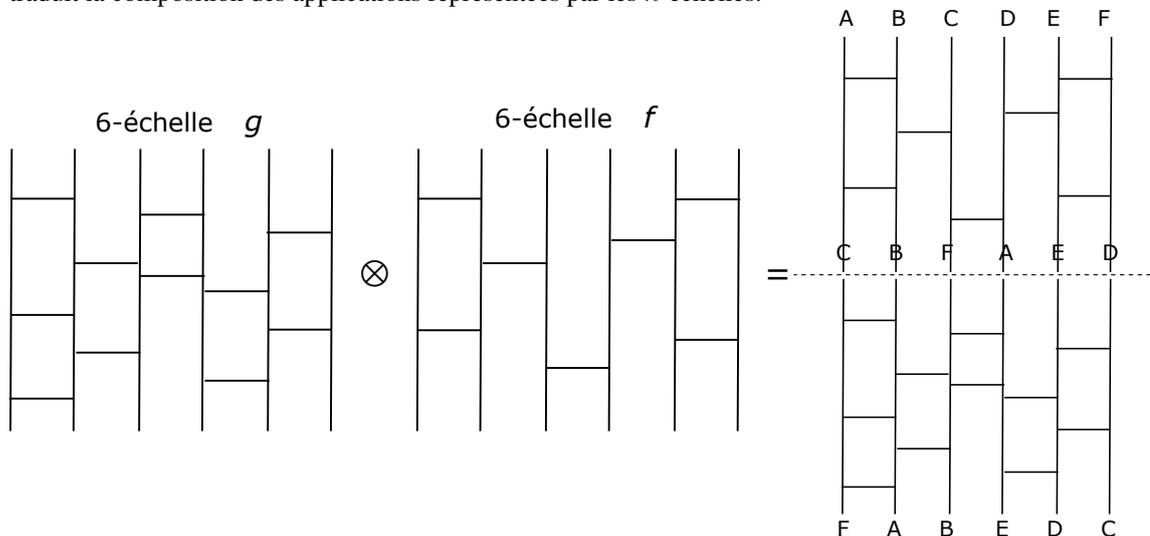
Corollaire : Une n -échelle ayant une seule barre représente une permutation qui possède une unique inversion.

Prop. 6 – Opération \otimes sur l'ensemble \mathcal{E}_n des n -échelles : Définition et propriétés.

L'assemblage par mise bout à bout des montants de deux n -échelles produit une nouvelle n -échelle. Plus précisément, soient f_{n,p_1} et g_{n,p_2} deux n -échelles. Nous notons $g \otimes f$ la n -échelle h_{n,p_1+p_2} obtenue en joignant les extrémités **inférieures** des montants de f aux extrémités **supérieures** des montants de g , ce qui

s'écrit¹⁵ $h = g \otimes f$. Nous pouvons aussi définir $k = f \otimes g$. C'est une n -échelle, en général distincte de h , pour $n \geq 3$. L'opération est « visiblement » associative. L'opération n'est pas commutative pour $n \geq 3$. La n -échelle sans barre est un élément neutre pour cette opération. Nous sommes en présence d'une structure de monoïde.¹⁶

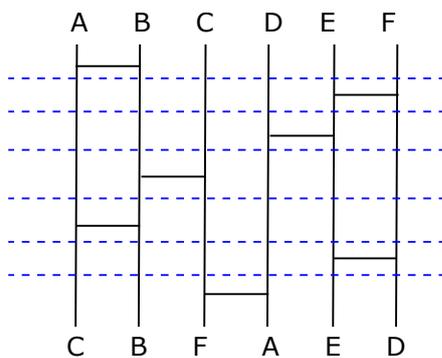
La correspondance de (\mathcal{E}_n, \otimes) dans (\mathfrak{S}_n, \circ) est un morphisme. En effet la mise "bout à bout" des montants traduit la composition des applications représentées par les n -échelles.



Une remarque : Si nous calculons $h_1 = f' \otimes f$ où f' est la n -échelle obtenue comme image de f par symétrie axiale horizontale, l'axe étant la droite joignant le bas des montants de f , nous constatons que h_1 représente la permutation identité. Idem si l'on calcule $h_2 = f \otimes f'$.

Il est aussi possible de décomposer une n -échelle en un produit de deux n -échelles en sciant les montants à un niveau intermédiaire entre deux barres.

Prop. 7 – Décomposition d'une n -échelle en produit de p " n -échelles" à une seule barre : Considérons une n -échelle ayant p barres où $p \geq 2$. Nous pouvons itérer la décomposition en produit de deux mentionnée à la fin de la prop. 6 précédente. Nous saucissonnons notre n -échelle en tranches de n -échelles à une barre et le tour est joué.



Nous pouvons en tirer deux conséquences intéressantes.

- La permutation représentée par la n -échelle ainsi décomposée est le produit de composition de p transpositions¹⁷.
- D'après la prop. 5, chaque produit \otimes à gauche par une nouvelle n -échelle à une barre augmente **au plus**¹⁸ le nombre d'inversions de la permutation obtenue dans le produit partiel, **de une unité**. Il s'ensuit que le nombre des inversions de la permutation représentée par notre n -échelle à p barres est inférieur ou égal au nombre¹⁹ de barres.

15. ce qui correspond de haut en bas à f suivi de g .

16. Ensemble muni d'une loi de composition interne associative ayant un élément unitaire

17. Il s'agit de transpositions du type $s_i = (i, i + 1)$ où $1 \leq i \leq n - 1$ lorsque $E = \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous retrouvons ici le résultat de la prop. 1 qui énonce que toute n -échelle représente une permutation de $\mathfrak{S}_n(E)$.

18. À l'étape k où $1 \leq k \leq p$, le nombre d'inversions N_k du produit partiel vaut $N_k = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i = \pm 1$). Il peut éventuellement diminuer lorsque k croît.

19. Pour une permutation représentée par une n -échelle, il est supérieur ou égal au nombre d'inversions de la permutation. Nous ne pouvons pas représenter celle-ci par une n -échelle avec moins de barres que le nombre d'inversions.

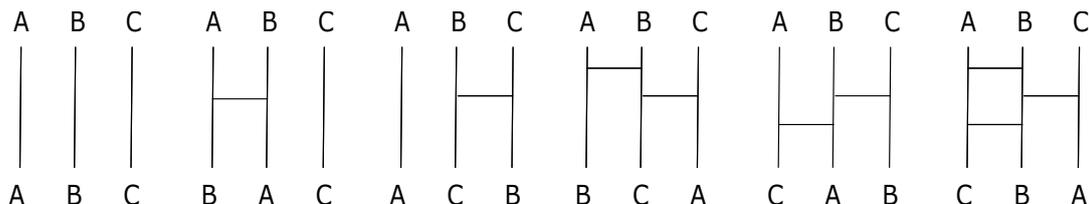
3. Représentation des permutations de \mathfrak{S}_n par des n -échelles

Il nous reste à examiner les questions 2 et 3 que Stéphane Gaussent a posées aux collégiens, dans le cadre de notre généralisation où $\#(E) = n$.

a) Existence d'une représentation pour une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_n(E)$

Nous commençons par nous demander si la réponse est connue pour des cas particuliers.

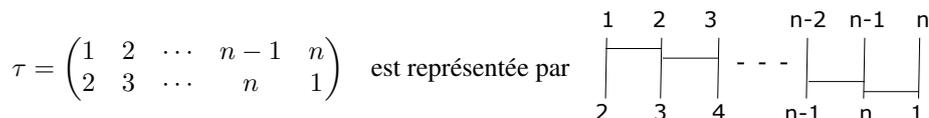
- Lorsque $n = 2$, nous avons à représenter l'identité et la transposition $s_1 = (1, 2)$. La réponse est immédiate : la 2-échelle sans barre et la 2-échelle à une seule barre.
- Pour $n = 3$, nous passons aussi rapidement en revue les six permutations, d'où la réponse :



Nous observons que les deux figures en escalier (descendant et montant) à deux barres correspondent aux deux 3-cycles de \mathfrak{S}_3 . Cette situation apparaît être généralisable.

Une autre remarque : Dans le cas de la transposition s_1 qui laisse invariant l'objet C, nous pouvons nous ramener au cas $n = 2$ en plaçant un montant sans point de jonction sous C, pour construire un 3-échelle qui convient.

- La permutation circulaire de longueur n , $\tau = (1, 2, \dots, n - 1, n)$ de \mathfrak{S}_n est représentée par une n -échelle à $n - 1$ barres disposées en "escalier descendant de gauche à droite" entre tous les montants.



Nous voyons également (cf. prop. 6 fin) que τ^{-1} est représentée par une n -échelle à $n - 1$ barres disposées en "escalier montant de gauche à droite" entre tous les montants.

Nous pouvons dès lors représenter τ^k et τ^{-k} pour tout entier naturel k .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver par récurrence sur $n = \#(E)$ que toute permutation de E possède une représentation par une n -échelle. Énonçons le prédicat \mathcal{H} portant sur n où $n \geq 2$:

$\mathcal{H}(n)$: "pour tout k , $2 \leq k \leq n$, toute permutation de $\mathfrak{S}_k(E)$ où $\#(E) = k$ se représente par une k -échelle"

1. Nous avons vu au début du 3-a) que $\mathcal{H}(2)$ est vrai.
2. Le caractère héréditaire du prédicat sur n entier naturel se déduit des remarques précédentes.

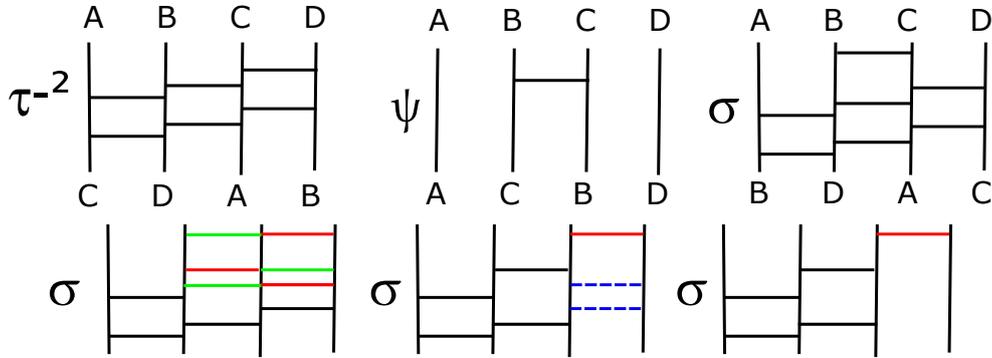
Soit $n \geq 2$ et $E = \{a_i \mid i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket\}$ tel que $\#(E) = n + 1$. Nous supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vrai. Soit σ une permutation quelconque de $\mathfrak{S}_{n+1}(E)$. Les remarques précédentes nous incitent à ramener la question de l'existence d'une représentation de σ dans le cas $n + 1$ au cas n en utilisant une permutation auxiliaire ψ ayant le point a_1 invariant ($\psi(a_1) = a_1$). k étant le rang de a_1 dans la liste $[\sigma(a_i) \mid i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket]$, nous itérons la permutation circulaire τ , $k - 1$ fois, sur la liste $[\sigma(a_i) \mid i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket]$ pour obtenir une liste commençant par a_1 .

Considérons alors la permutation $\psi = \tau^{k-1} \circ \sigma$. Posons $E' = \{a_i \mid i \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket\}$. Alors $\#(E') = n$, $\psi(a_1) = a_1$ et $\psi(E') = E'$. D'après l'hypothèse de récurrence, nous savons représenter la restriction de ψ à E' par une n -échelle pour en déduire ensuite, une $n + 1$ -échelle, notée m , associée à ψ sur E , en lui rajoutant à gauche un montant sans point de jonction. Nous désignons par q une $(n + 1)$ -échelle représentant τ^{1-k} . Comme $\sigma = \tau^{1-k} \circ \psi$, il s'ensuit que $q \otimes m$ est une $(n + 1)$ -échelle qui représente σ , CQFD.

Le raisonnement par récurrence est ainsi validé, donc pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{H}(n)$ est vrai.

Toute permutation de $\mathfrak{S}_n(E)$ possède une représentation par une n -échelle.

Illustration du passage de n à $n + 1$ pour $n = 3$: $\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix}$. Ici $k = 3$, nous calculons :
 $\tau^2 [B \ D \ A \ C] = [A \ C \ B \ D]$ d'où $\psi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}$ qui vérifie $\psi(A) = A$. Nous représentons τ^{-2} et ψ et $\sigma = \tau^{-2} \circ \psi$ par les 4-échelles respectives $q, m, q \otimes m$:



Nous remarquons que la 4-échelle obtenue pour σ n'est pas minimale. Nous pouvons trouver en remplaçant dans la première représentation de σ la "fourchette" verte par la rouge, puis en supprimant les deux barres bleues pointillées, une 4-échelle équivalente ayant 5 barres. Dans la suite, nous allons répondre à cette généralisation de la question 3 de la première section.

b) Un algorithme récursif de construction d'une n -échelle minimale représentant une permutation quelconque

Reprenons l'exemple précédent avec $\sigma = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix}$. L'idée simple de l'algorithme consiste à placer les premières barres d'une 4-échelle correspondant à une permutation σ_1 pour obtenir l'image $B \ ? \ ? \ ?$ où les trois "?" découlent du choix des barres pour que $\sigma_1(A) = B$.

Notons l'inversion (B, A) dans l'image $(B \ D \ A \ C)$ de σ . Pour la réaliser, il nous suffit de placer une barre entre les deux montants issus de A et B, en prenant $\sigma_1 = (A, B)$ (transposition).

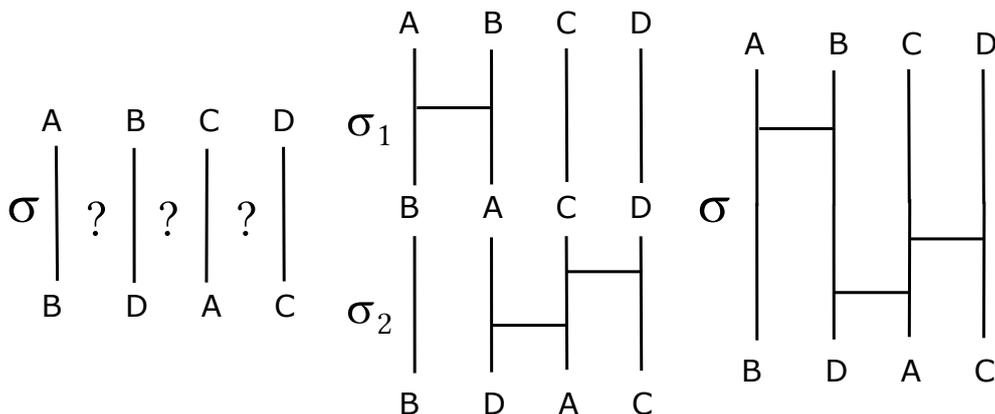
Nous avons $\sigma_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$.

Nous allons maintenant créer des barres correspondant à une permutation σ_2 pour obtenir l'image $(B \ D \ ? \ ?)$ où les deux "?" découlent du choix des barres pour que $\sigma_2(B) = B$ et $\sigma_2(A) = D$. Nous pouvons constater qu'il suffit de travailler avec la restriction de σ_2 à $(A \ C \ D)$ pour obtenir $(D \ ? \ ?)$.

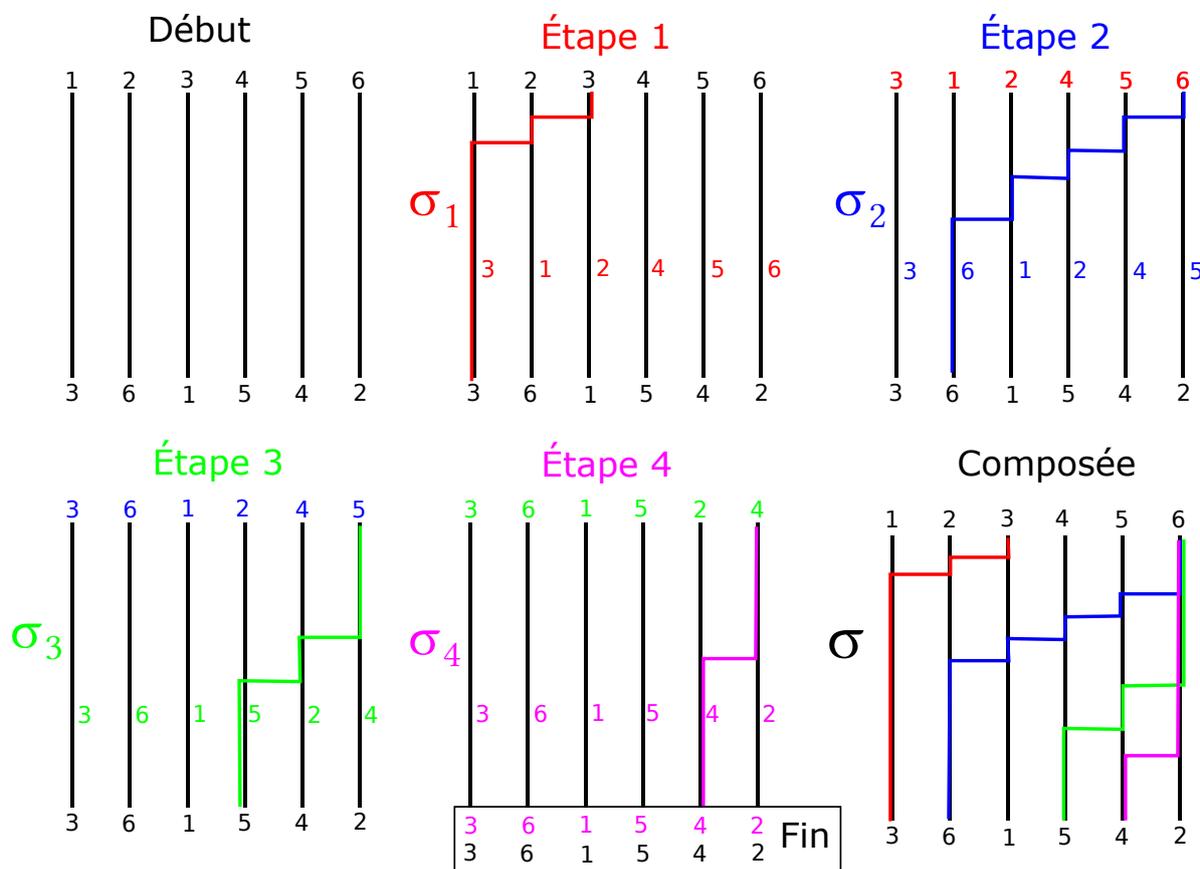
C'est le même travail – récursion – que celui du départ avec une taille de données qui est **passée de 4 à 3**. Ici nous notons deux inversions (D, A) et (D, C) dans l'image $(B \ D \ A \ C)$ que nous réalisons à l'aide de deux barres "en escalier montant de gauche à droite" entre les trois montants issus de A, C et D.

Avec ce choix, nous avons $\sigma_2(B, A, C, D) = (B, D, A, C)$. Donc $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ et nous avons représenté σ par une 4-échelle à trois barres. Le nombre total d'inversions dans l'image $(B \ D \ A \ C)$ vaut 3.

Donc, d'après la remarque de la prop. 7 (II-2) nous avons affaire à une représentation minimale.



Voici l'application de l'algorithme à l'exemple choisi par les élèves pour les questions 2 & 3. Nous retrouvons une 6-échelle analogue à celle que les élèves ont obtenue comme solution 1 de la question 2. À chaque étape nous introduisons un nombre de barres correspondant au nombre d'inversions (dans la ligne du bas) de l'élément choisi. Nous vérifions ici que nous avons un total de neuf barres, ce qui correspond au nombre des inversions de la permutation. La représentation est minimale au sens du nombre (ici 9) de barres utilisées. Nous pouvons cependant écrire $\sigma = (1, 3) \circ (2, 6) \circ (4, 5)$ qui est le produit de seulement 3 cycles disjoints d'ordre 2.



L'algorithme procède par un balayage de gauche à droite sur la ligne du bas, alors que celui proposé par les collégiens en réponse à la question 3 procède de façon similaire mais de droite à gauche.

Passons à la description et la preuve générale de cet algorithme, à la suite de cette première approche informelle sur deux exemples.

Entrées : Un ensemble fini $E \mid \#(E) = n$ et un couple (L, M) d'arrangements de n éléments de E . L est la liste source et M la liste but. Dans le dernier exemple, $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $L = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ et $M = [3, 6, 1, 5, 4, 2]$.

Sortie : Nous convenons que les montants d'une n -échelle sont numérotés de 1 à n (gauche vers droite) et que la position d'une barre joignant les montants i et $i + 1$ est numérotée i pour $1 \leq i \leq n - 1$. L'algorithme doit retourner une liste S d'entiers pris dans $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, qui définit du haut vers le bas lorsqu'elle est lue de gauche à droite, les positions numérotées des barres d'une n -échelle réalisant via ses chemins l'application de L sur M . Dans le dernier exemple, $S = [2, 1, 5, 4, 3, 2, 5, 4, 5]$.

Traitement des données : La liste L induit une relation d'ordre "inférieur à" sur E pour laquelle la suite indexée des éléments de L est strictement croissante. Un couple (i, j) d'éléments distincts de E est dit "en inversion" lorsque j est inférieur à i . Nous supposons que les listes intervenant dans ce qui suit sont indexées à partir de 0. Nous allons construire la liste S en deux temps.

Tout d'abord, nous allons mémoriser dans une n -liste R les nombres d'inversions des couples (i, j) pour chaque élément i de M , j parcourant les éléments de M d'index strictement supérieur à celui de i (autrement dit situés à droite de l'élément i), en considérant pour le dernier élément i de M (d'index $n - 1$) que ce nombre est 0.

Le passage par cette étape intermédiaire va nous permettre trouver une solution minimale. Pour créer R , nous parcourons M de gauche à droite. Une fonction récursive terminale²⁰ permet de construire cette liste R . En pseudo-code, nous écrivons à partir des n -listes L et M :

```

E : Ensemble de cardinal  $n$  ;
L : Arrangement de  $n$  éléments de E ; M : Arrangement de  $n$  éléments de E ;

Fonction INVERSIONS (L : liste, M : liste) : liste
  Si (longueur(M)==1) Alors
    | Retourner [0] ;
  Sinon
    |  $k \leftarrow$  Nb d'inversions du premier élément de M ;
    |  $L' \leftarrow$  L privée du premier élément de M ;
    |  $M' \leftarrow$  M privée du premier élément de M ;
    | Retourner  $[k] \oplus$  INVERSIONS ( $L', M'$ ) ; [ $\oplus$  : concaténation]
  Fin Si
Fin

```

Application de la fonction INVERSIONS de l'algorithme à $L = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ et $M = [3, 6, 1, 5, 4, 2]$.

Listes $M' = M_i$	Inversions	k	Liste R	Listes $L' = L_i$	Index
$M = [3, 6, 1, 5, 4, 2]$	(3, 1); (3, 2)	2	$R = [2, \dots]$	$L = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$	2
$M_1 = [6, 1, 5, 4, 2]$	(6, 1); (6, 5); (6, 4); (6, 2)	4	$R = [2, 4, \dots]$	$L_1 = [1, 2, 4, 5, 6]$	4
$M_2 = [1, 5, 4, 2]$	\emptyset	0	$R = [2, 4, 0, \dots]$	$L_2 = [1, 2, 4, 5]$	0
$M_3 = [5, 4, 2]$	(5, 4); (5, 2)	2	$R = [2, 4, 0, 2, \dots]$	$L_3 = [2, 4, 5]$	2
$M_4 = [4, 2]$	(4, 2)	1	$R = [2, 4, 0, 2, 1, \dots]$	$L_4 = [2, 4]$	1
$M_5 = [2]$	\emptyset	0	$R = [2, 4, 0, 2, 1, 0]$	$L_5 = [2]$	0

Nous remarquons que l'index dans la liste L , de l'élément de M sélectionné à chaque étape est égal au nombre k des inversions comptées pour cet élément. En effet, les listes L' restent ordonnées par valeurs croissantes et sont indexées à partir de 0. Cela nous fournit une méthode générale pour obtenir le nombre k des inversions à chaque étape.

Connaissant la liste R , il nous faut maintenant en déduire une liste S correspondant à une n -échelle qui applique L sur M . Nous allons procéder en considérant des cycles²¹ successifs représentés par des n -échelles qui vont **progressivement** appliquer les éléments de L sur ceux de M . En assemblant ensuite, via l'opération \otimes ces différentes n -échelles, nous obtiendrons une solution satisfaisant aux contraintes voulues.

Nous utilisons les notations suivantes pour désigner les éléments de M et R : $M = [m_0, m_1, \dots, m_j, \dots, m_{n-1}]$ et $R = [r_0, r_1, \dots, r_j, \dots, r_{n-1}]$. Toutes les n -listes considérées sont indexées par les entiers de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour une n -liste X , $X[i]$ est l'élément d'index i et $X[i : j]$ est la séquence des éléments d'index $k | i \leq k \leq j$. Ainsi $M[0] = m_0$, $R[j] = r_j$ et $M[0 : 2] = (m_0, m_1, m_2)$.

Partant de la liste L , nous construisons²² à l'aide de la liste R , une suite (finie de longueur n) de n -listes T_0, T_1, \dots, T_{n-1} avec les règles qui suivent :

1. $T_0 = L$
2. Si $r_0 = 0$ (c.-à-d. $m_0 = L[0] = T_0[0]$, car le nombre $r_0 = 0$, des inversions pour m_0 est égal à l'index de cet élément dans la liste L) alors $T_1 = T_0$,
sinon $T_1 = [\sigma_0(T_0[0 : r_0]), T_0[r_0 + 1, n - 1]]$ où σ_0 est la permutation circulaire de longueur $r_0 + 1$ qui transforme $T_0[0 : r_0]$ en $[T_0(r_0), T_0[0 : r_0 - 1]]$.

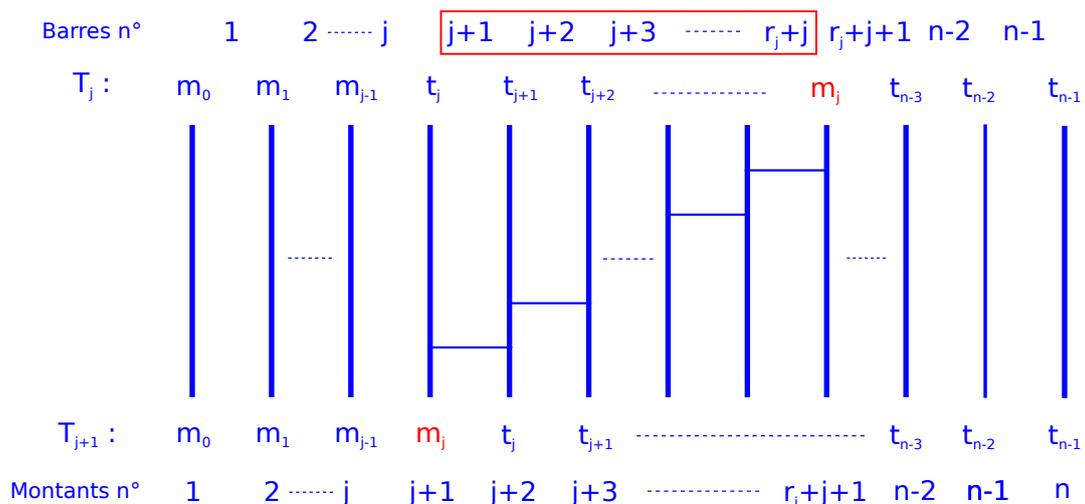
20. Dans ce cas, la récursion équivaut à l'itération.

21. Des permutations circulaires sur des listes extraites de L associées aux éléments non nuls de R .

22. Dans l'exemple p. 15, $T_0 = L, T_1 = [3, 1, 2, 4, 5, 6], T_2 = [3, 6, 1, 2, 4, 5], T_3 = T_2, T_4 = [3, 6, 1, 5, 2, 4], T_5 = [3, 6, 1, 5, 4, 2]$.

Donc $T_1 = [m_0, L[0], \dots, L[r_0 - 1], L[r_0 + 1 : n - 1]]$, car $T_0 = L$ et $L[r_0] = m_0$ (le nombre r_0 d'inversions pour m_0 est égal à l'index de cet élément dans la liste L , comme vu précédemment dans l'algorithme INVERSIONS). Dans ce cas, les éléments de T_1 d'index supérieur ou égal à $r_0 + 1$ sont ceux de T_0 . La permutation circulaire agit sur les éléments de T_0 d'index compris entre 0 et r_0 . Une n -échelle à r_0 barres ayant pour numéros $[r_0, r_0 - 1, \dots, 2, 1]$ va représenter la transformation de T_0 en T_1 .

3. Pour tout $j \in \llbracket 1, n - 2 \rrbracket$, si $r_j = 0$ alors $T_{j+1} = T_j$,
 sinon $T_{j+1} = [T_j[0 : j - 1], \sigma_j(T_j[j : r_j + j]), T_j[r_j + j + 1 : n - 1]]$ où σ_j est la permutation circulaire de longueur $r_j + 1$ qui transforme $T_j[j : r_j + j]$ en $[T_j(r_j + j), T_j[j + 1 : r_j + j - 1]]$. Dans ce cas, les j premiers éléments et ceux d'index supérieur ou égal à $r_j + j + 1$ de T_{j+1} sont ceux de T_j . La permutation circulaire agit sur les éléments d'index compris entre j et $r_j + j$. Une n -échelle à r_j barres ayant pour numéros $[r_j + j, r_j + j - 1, \dots, j + 2, j + 1]$ va représenter la transformation de T_j en T_{j+1} .



Pour représenter par une n -échelle la transformation de T_0 en T_{n-1} , nous composons via l'opération \otimes les différentes n -échelles que l'on sait produire pour représenter les transformations de T_j en T_{j+1} pour j tel que $j \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$ et $r_j \neq 0$. Pour obtenir la liste des numéros de barres utilisés dans l'assemblage de ces n -échelles il nous suffit de concaténer dans l'ordre, de gauche à droite, les listes de numéros obtenues dans les représentations des passages de T_j à T_{j+1} lorsque $r_j \neq 0$.

L'algorithme fournissant la liste S des numéros de barres de la n -échelle qui représente la transformation de T_0 en T_{n-1} s'exprime en pseudo-code par :

```

Entrée : R : n-liste des inversions (de gauche à droite) ;
Sortie : S : liste des numéros de haut en bas pour lecture de gauche à droite ;

Fonction NUMEROS_BARRES (R : liste) : liste
    S ← [] ;
    Pour i de 0 à (longueur(R)-1) faire
        Si (R[i] ≠ 0) Alors
            S ← S ⊕ [R[i]+i, R[i]+i-1, . . . , i+1] ; [ajout progression arithmétique de ri termes (raison = -1)]
        Fin Si
    Fin Pour
    [⊕ : concaténation]
    Retourner S ;
Fin
    
```

Prouvons pour terminer que l'algorithme donne une représentation qui correspond à la permutation de L en M , et que celle-ci est bien minimale.

Il nous faut d'abord établir que $T_{n-1} = M$: Nous procédons par récurrence en établissant que pour tout $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $T_i = [m_0, m_1, \dots, m_{i-1}, L'_i]$ où L'_i est la liste L privée des éléments m_k pour $0 \leq k \leq i - 1$.

Pour tout $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, T_{j+1} est défini en fonction de T_j , par une règle qui permute éventuellement les éléments de T_j , donc les éléments de T_{j+1} sont les mêmes à l'ordre près que ceux de T_j . Comme $T_0 = L$, les éléments de T_j sont ceux de la liste L . Considérons le prédicat $\mathcal{P}(i) : T_i = [m_0, m_1, \dots, m_{i-1}, L'_i]$ sur $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Vu la remarque précédente, nous savons déjà que L'_i est la liste L privée des éléments m_k pour $0 \leq k \leq i-1$.

1. Nous avons vu que $\mathcal{P}(1)$ est vrai, car en définissant T_1 , nous avons vu que $T_1[0] = m_0$.

2. Soit k fixé tel que $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ et $T_k = [m_0, m_1, \dots, m_{k-1}, L'_k]$ (Hypothèse de récurrence).

Nous avons vu dans les remarques sur le calcul de la liste R que le nombre r_k , des inversions pour m_k est égal à l'index de cet élément dans la liste L'_k , donc son index dans T_k est $k + r_k$.

Si $r_k = 0$, nous avons $T_k[k] = m_k$ donc ayant $T_{k+1} = T_k$, il s'ensuit que $T_{k+1} = [m_0, m_1, \dots, m_k, L'_{k+1}]$.

Si $r_k \neq 0$ nous avons $T_k[k+r_k] = m_k$, il s'ensuit par construction de T_{k+1} , que $T_{k+1} = [m_0, m_1, \dots, m_k, L'_{k+1}]$.

Donc \mathcal{P} est héréditaire sur $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$.

Puisque $\mathcal{P}(1)$ est vrai et \mathcal{P} est héréditaire, nous en déduisons que $\mathcal{P}(i)$ est vrai pour tout i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Nous avons donc bien $T_{n-1} = [m_0, m_1, \dots, m_{n-1}] = M$, car $L'_n = []$.

La liste S donne bien une solution transformant L en M . Montrons pour finir, que nous obtenons un nombre minimal de barres. Nous avons vu dans l'étude des n -échelles que le nombre total des inversions de M minorait toujours le nombre de barres.

Ici, pour notre solution associée à la liste S , nous avons construit S par étapes, en partant de la liste $[\]$, par concaténations successives de listes de longueur $R[i] = r_i$ pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Donc le nombre d'éléments de S , c.-à-d. le nombre de barres, vaut $\sum_{i=0}^{n-1} r_i$. Or cette dernière somme, la somme de tous les éléments de R , est aussi le nombre total des inversions de M . La solution trouvée par l'enchaînement de nos deux algorithmes précédents est donc minimale.

Cette étude nous permet de conclure que le groupe $\mathfrak{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est engendré par les $n-1$ transpositions $s_i = (i, i+1)$. Toute permutation dont le nombre d'inversions vaut p peut s'exprimer minimalement comme un produit de p transpositions s_i .

Voici un script Python donnant une solution S obtenue par l'algorithme précédent.

```
# produit pour chaque élément de M la liste des nb d'inversions
#en balayant M de gauche à droite. Modifie L et M.
def inversions0(L,M):
    if len(L)==1: return [0]
    else:
        x=M.pop(0)
        k=L.index(x)
        del L[k]
        return [k]+inversions0(L,M)

#pour conserver les listes X et Y d'origine passées en paramètres
def INVERSIONS_gd(X,Y):
    L=X[:];M=Y[:];
    return inversions0(L,M)

#"NUMEROS_gd" produit dans l'ordre (haut vers bas en lisant de gauche à droite)
#les numéros des montants portant le point de jonction gauche de la barre
#à partir de la liste R des nb d'inversions produite par "INVERSIONS_gd".
# Suite d'escaliers "montants".

def NUMEROS_gd(R):
    S=[]
    for i in range(len(R)):
        S=S+list(range(R[i]+i,i,-1))
    return S

X=[1,2,3,4,5,6];Y=[3,6,1,5,4,2]
S=NUMEROS_gd(INVERSIONS_gd(X,Y));S
```

c) Une version droite-gauche de cet algorithme de construction d'une n -échelle minimale représentant une permutation quelconque

Comme l'ont fait les élèves dans leur recherche, nous pouvons aussi envisager le balayage de la liste M en partant de la droite, c.-à-d. du dernier élément de la liste M .

Tout d'abord, nous allons mémoriser dans une n -liste R ²³ les nombres d'inversions des couples (i, j) pour chaque élément i de M , j parcourant les éléments de M d'index strictement inférieur à celui de i (autrement dit situés à gauche de l'élément i), en considérant pour le premier élément i de M (d'index 0) que ce nombre est 0. En pseudo-code, nous écrivons à partir des n -listes L et M :

```

E : Ensemble de cardinal  $n$  ;
L : Arrangement de  $n$  éléments de E ; M : Arrangement de  $n$  éléments de E ;

Fonction INVERSIONS_bis (L : liste, M : liste) : liste
  Si (longueur(M)==1) Alors
    | Retourner [0] ;
  Sinon
    |  $k \leftarrow$  Nb d'inversions du dernier élément de M ;
    |  $L' \leftarrow$  L privée du dernier élément de M ;
    |  $M' \leftarrow$  M privée du dernier élément de M ;
    | Retourner  $[k] \oplus$  INVERSIONS_bis (L', M') ; [ $\oplus$  : concaténation]
  Fin Si
Fin
    
```

Le calcul du nombre d'inversions de l'élément i de M est donné par $k = l - p - 1$ où l est la longueur de la liste L' et p est l'index de l'élément i dans la liste L' . En effet, au cours de l'exécution de l'algorithme, les listes L' qui restent ordonnées par valeurs croissantes, sont indexées à partir de 0 et nous dénombrons les éléments de M plus grands que i dont l'index est strictement inférieur à celui de l'élément i .

De façon similaire à ce qui a été fait précédemment pour l'algorithme NUMEROS_BARRES, nous construisons une liste S ²⁴ déduite de la liste R produite par INVERSIONS_bis(L, M). Cela revient à créer une n -échelle présentant du haut vers le bas, une suite d'escaliers descendants aboutissants sur des montants de numéros décroissants. Nous obtenons aussi une solution contenant un nombre minimal de barres égal au nombre d'inversions de la permutation $L \mapsto M$. En pseudo-code, nous écrivons à partir de la liste R :

```

Entrée : R :  $n$ -liste des inversions (de droite à gauche) ;
Sortie : S : liste des numéros de haut en bas pour lecture de gauche à droite ;

Fonction NUMEROS_BARRES_bis (R : liste) : liste
  |  $p \leftarrow$  longueur(R) ;
  |  $S \leftarrow []$  ;
  | Pour  $i$  de 0 à (longueur(R)-1) faire
  | | Si (R[ $i$ ]  $\neq$  0) Alors
  | | |  $S \leftarrow S \oplus [p-i-R[i], p-i-R[i]+1, \dots, p-i-1]$  ; [ajout progression arithmétique de  $r_i$  termes (raison 1)]
  | | Fin Si
  | | Fin Pour
  | | [ $\oplus$  : concaténation]
  | Retourner S ;
Fin
    
```

23. Dans l'exemple traité par les collégiens, $R = [4, 2, 1, 2, 0, 0]$ qui est obtenue via les "décalages", dans l'ordre inverse sur la ligne "Total", question 3 pp. 7-9.

24. L'exemple traité par les collégiens donne $S = [2, 3, 4, 5, 3, 4, 3, 1, 2]$ qui se déduit de $R = [4, 2, 1, 2, 0, 0]$.

Voici un script Python donnant par cet algorithme, une solution S d'un type différent de celui obtenu en II-b). C'est le type de celle donnée par les élèves comme réponse à la question 3 : $S = [2, 3, 4, 5, 3, 4, 3, 1, 2]$

```
# produit pour chaque élément de M la liste des nb d'inversions
# en balayant M de droite à gauche. Modifie L et M

def inversions1(L,M):
    if len(L)==1: return [0]
    else:
        x=M.pop(-1)
        p=L.index(x)
        k=len(L)-p-1
        del L[p]
        return [k]+inversions1(L,M)

# pour conserver les listes X et Y d'origine passées en paramètres

def INVERSIONS_dg(X,Y):
    L=X[:];M=Y[:]
    return inversions1(L,M)

# "NUMEROS_dg" produit dans l'ordre (haut vers bas en lisant de gauche à droite)
# les numéros des montants portant le point de jonction gauche de la barre
# à partir de la liste R des nb d'inversions produite par "barres_dg".
# Suite d'escaliers descendants.

def NUMEROS_dg(R):
    S=[]
    p=len(R)
    for i in range(p):
        S=S+list(range(p-i-R[i],p-i))
    return S

X=[1,2,3,4,5,6];Y=[3,6,1,5,4,2]
S=NUMEROS_dg(INVERSIONS_dg(X,Y));S
```

Nous pouvons maintenant grâce à l'extension "*matplotlib*" de Python, obtenir directement le dessin de n -échelles associées à un couple (L, M) d'arrangements de n éléments d'un ensemble E à n éléments.

Préambule nécessaire pour la suppression des axes du graphique

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# pour supprimer les axes de coordonnées
fig, ax = plt.subplots()

ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['left'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_visible(False)
#ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
#ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.yaxis.set_ticks([])
ax.xaxis.set_ticks([])
```

La procédure graphique

```

def ECHELLE(S,X,Y):# S est la liste des "barres"
    n=len(X)
    #montants verticaux: traits   lw=2 pour n>=7
    for i in range(1,n+1):
        plt.plot([i,i],[0,len(S)+1],color='b',lw=2)

    #barres horizontales : traits   lw=2 pour n>=7
    for i in range(len(S)):
        plt.plot([S[i],S[i]+1],[len(S)-i,len(S)-i],color='b',lw=2)

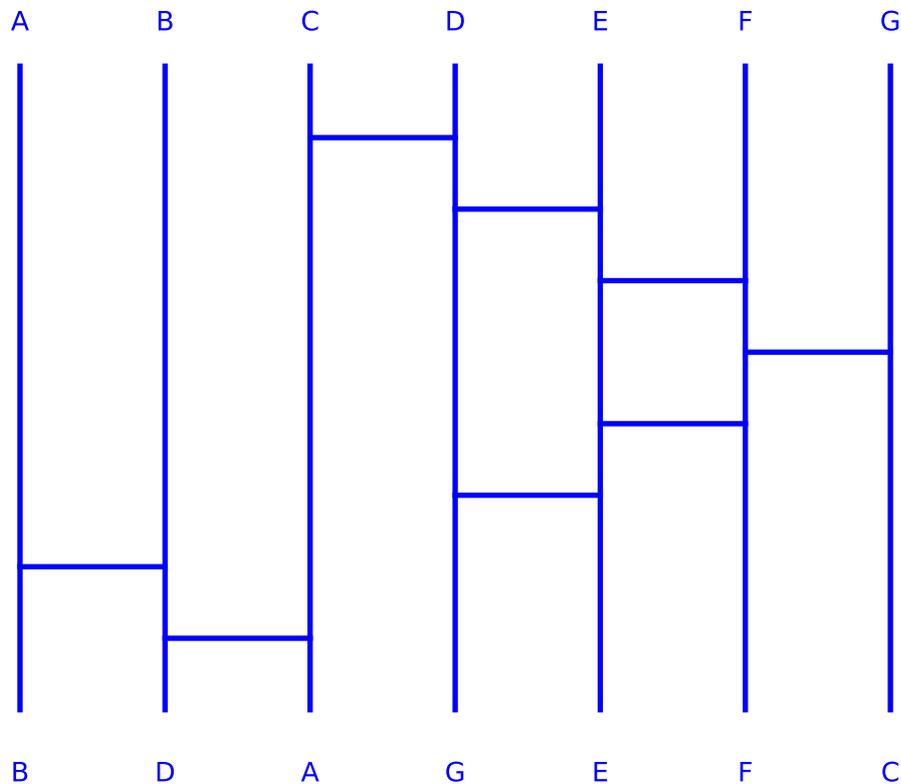
    #affichage des données X et Y: fontsize=10 et ordonnée-1 pour Y (n<=10)
    # ordonnée à modifier pour n>=15
    for i in range(1,n+1):
        plt.text(i,len(S)+1.5,str(X[i-1]),color='b',horizontalalignment='center',fontsize=10)
        plt.text(i,-1,str(Y[i-1]),color='b',horizontalalignment='center',fontsize=10)

    #Pour obtenir directement l'image au format voulu (extension .png, .eps, .pdf, etc.)
    # plt.savefig("n-echelle.png") # à supprimer pour activer.

    plt.show()

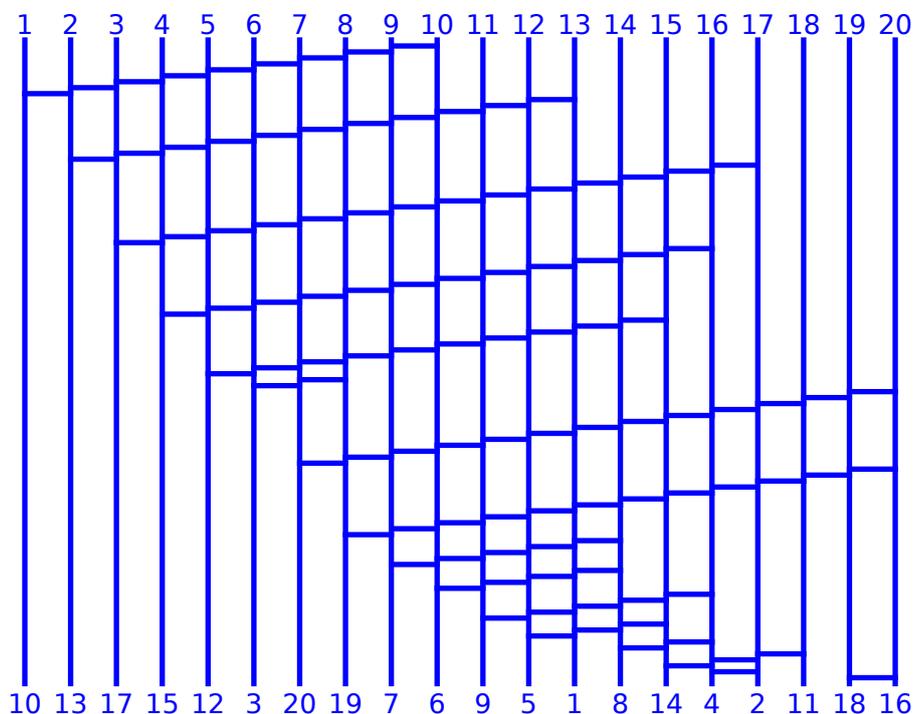
X=['A','B','C','D','E','F','G'];Y=['B','D','A','G','E','F','C']
# On a d'abord obtenu S par S=NUMEROS_dg(INVERSIONS_dg(X,Y))
S=[3,4,5,6,5,4,1,2]
ECHELLE(S,X,Y)

```

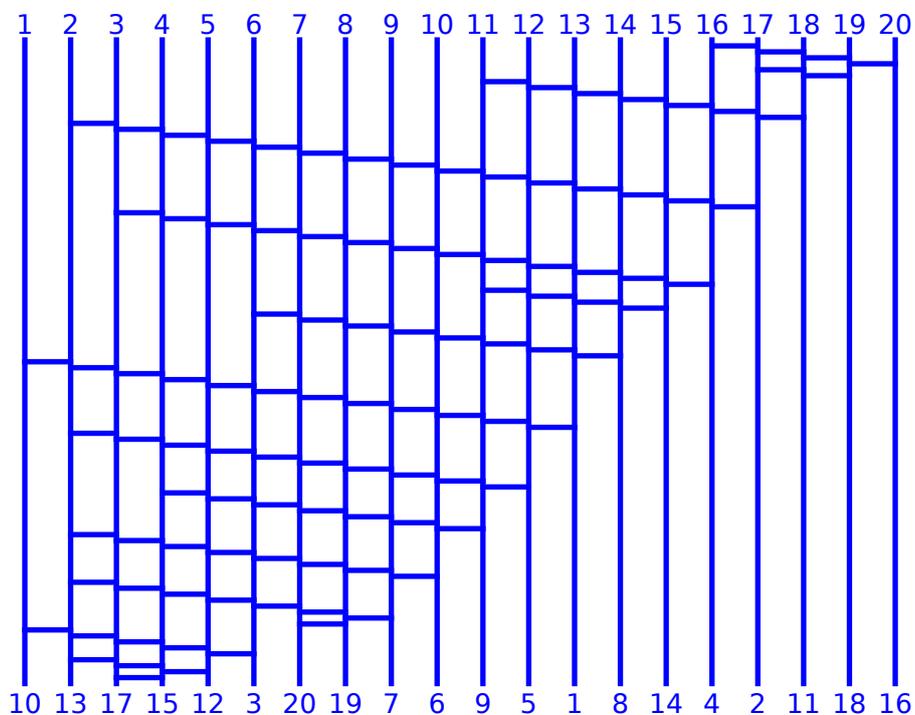


7-échelle : Graphique obtenu avec le script qui précède.

Représentations²⁵ de la permutation $Y = [10, 13, 17, 15, 12, 3, 20, 19, 7, 6, 9, 5, 1, 8, 14, 4, 2, 11, 18, 16]$ par deux 20-échelles construites par les programmes précédents. Cette permutation possède 107 inversions (nombre minimum de barres). La forme²⁶ des solutions obtenues sera exploitée dans la partie III pour le cas "droite-gauche".



20-échelle obtenue avec le script "gauche-droite".



20-échelle obtenue avec le script "droite-gauche".

25. Ce cas particulier se généralise : le groupe $\mathfrak{S}_n([1, n])$ est engendré par les $n - 1$ transpositions $s_i = (i, i + 1)$. Toute permutation dont le nombre d'inversions vaut p peut s'exprimer minimalement d'au moins deux manières comme un produit de p transpositions s_i .

26. Des escaliers descendants (resp. montants) aboutissant sur des (resp. partant de) montants d'échelle de numéros décroissants (resp. croissants) dans le cas "droite-gauche" (resp. "gauche-droite").

III – Le groupe (E_n, \cdot) des n -échelles (ou amidakujis) associé au monoïde ²⁷ (\mathcal{E}_n, \otimes) . Une présentation de ce groupe isomorphe à \mathfrak{S}_n par générateurs et relations.

1. Une relation d'équivalence \approx définie sur \mathcal{E}_n . L'espace quotient E_n

Nous considérons la relation binaire \approx définie sur \mathcal{E}_n par :

$\forall f \in \mathcal{E}_n, \forall g \in \mathcal{E}_n \quad f \approx g \quad \text{SSI} \quad f \text{ et } g \text{ représentent la même permutation } \sigma \text{ de } \mathfrak{S}_n.$

La relation binaire \approx ainsi définie est une relation d'équivalence (preuve laissée au lecteur).

Nous étudions maintenant la compatibilité de la relation \approx avec la loi de composition \otimes :

Soient f_1 et $g_1 \in \mathcal{E}_n$ telles que $f_1 \approx g_1$ (f_1 et g_1 représentent la même permutation σ_1)

Soient f_2 et $g_2 \in \mathcal{E}_n$ telles que $f_2 \approx g_2$ (f_2 et g_2 représentent la même permutation σ_2)

Alors, $f_2 \otimes f_1$ représente la permutation $\sigma_2 \circ \sigma_1$. Il en est de même pour $g_2 \otimes g_1$, donc $f_2 \otimes f_1 \approx g_2 \otimes g_1$.

Il s'ensuit que la loi de composition \otimes passe au quotient. En la notant " \cdot " nous constatons que (E_n, \cdot) est un monoïde (nous notons " $\mathbf{1}$ " la classe de \mathcal{E}_n représentée par la n -échelle f_0 sans barre associée à la permutation identité).

De plus, pour toute n -échelle $f \in \mathcal{E}_n$, il existe une n -échelle $f' \in \mathcal{E}_n$ telle que $f' \otimes f \approx f \otimes f' \approx f_0$. Nous en déduisons que (E_n, \cdot) est un groupe.

Par ailleurs, par passage au quotient, le morphisme de \mathcal{E}_n dans \mathfrak{S}_n définit un morphisme de groupes entre (E_n, \cdot) et (\mathfrak{S}_n, \circ) . Ce dernier est évidemment injectif vu la définition de la relation \approx . Nous avons prouvé dans la partie II que toute permutation pouvait être représentée par une n -échelle, donc ce morphisme est aussi surjectif. Cela établit l'isomorphisme entre (E_n, \cdot) et (\mathfrak{S}_n, \circ) .

2. Générateurs de (E_n, \cdot) . Relations satisfaites par ces générateurs.

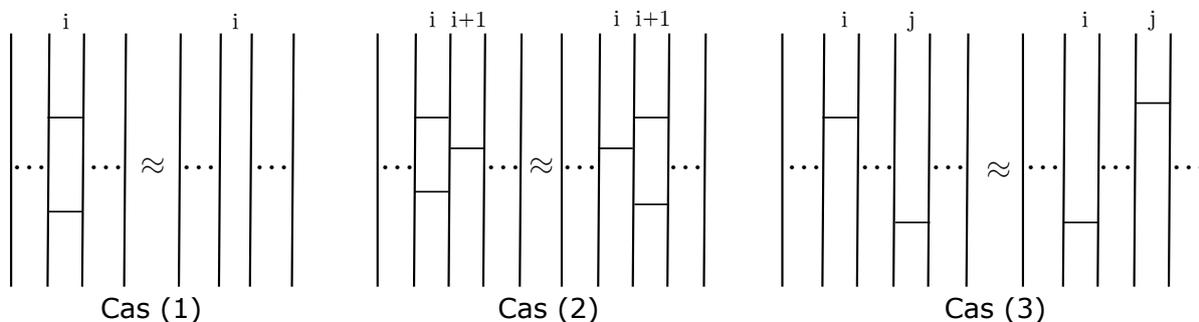
Nous avons vu dans la partie II que toute n -échelle de \mathcal{E}_n est un produit (\otimes) de k (entier naturel) n -échelles à une seule barre. Notons b_1 (resp. b_i où $1 \leq i \leq n - 1$) l'élément de E_n représentant la n -échelle ayant une unique barre placée en position n° 1 (resp. en position n° i). Il s'ensuit que tout élément x de E_n peut s'écrire $x = b_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdot \dots \cdot b_{i_k}$ où $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket^k$. Autrement dit $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ est une partie génératrice de E_n .

Enfin nous avons constaté sur quelques exemples de la partie II, que ces générateurs de E_n satisfaisaient les relations suivantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \quad b_i \cdot b_i = b_i^2 = \mathbf{1} \tag{1}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n - 2 \rrbracket \quad b_i \cdot b_{i+1} \cdot b_i = b_{i+1} \cdot b_i \cdot b_{i+1} \tag{2}$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket^2, |i - j| \geq 2 \quad b_i \cdot b_j = b_j \cdot b_i \tag{3}$$



27. Ensemble muni d'une loi de composition interne associative ayant un élément unitaire.

3. Présentation abstraite de (E_n, \cdot) par générateurs et relations.

Nous allons prouver que le groupe G_n défini par l'ensemble des générateurs $X = \{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\}$ auxquels on impose, en substituant g_i à b_i , de satisfaire les relations (1), (2) et (3), est isomorphe à E_n .

Nous pouvons déjà en employant la propriété universelle du groupe G_n , affirmer que l'application de X dans E_n qui envoie g_i sur b_i pour $1 \leq i \leq n-1$, se prolonge en un unique morphisme φ de G_n dans E_n puisque les relations (1), (2) et (3) sont satisfaites dans les deux groupes. De plus, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ est une partie génératrice de E_n . Il en découle que le morphisme φ est surjectif. Il nous reste à établir que c'est un isomorphisme. Pour ce faire, nous allons majorer le cardinal de G_n par celui de E_n qui vaut $n!$.

Nous conjecturons en nous inspirant de la forme²⁸ du résultat fournie pour tout élément de E_n par l'algorithme « droite-gauche » (cf. II.3.c, p. 26-28) que tout élément de G_n peut s'exprimer comme un mot formé d'une succession de paquets P_k où $1 \leq k \leq n-1$ et $P_k = g_k g_{k-1} \cdots g_{i_k}$ les index étant décroissants et consécutifs avec $i_k \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Plus précisément, nous énonçons un lemme que nous établissons ensuite par récurrence sur n .

Lemme : Tout élément $w \in G_n$ s'exprime sous la forme :

$$w = \cdots \underbrace{g_k g_{k-1} \cdots g_{i_k+1} g_{i_k}}_{P_k} \cdots \underbrace{g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_{i_{n-2}+1} g_{i_{n-2}}}_{P_{n-2}} \cdots \underbrace{g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{i_{n-1}+1} g_{i_{n-1}}}_{P_{n-1}}$$

où pour $1 \leq k \leq n-1$, $1 \leq i_k \leq k+1$ avec la convention que le paquet P_k ne figure pas si $i_k = k+1$.

Ainsi w est un mot d'au plus $n-1$ paquets où chaque paquet P_k écrit est le mot $g_k g_{k-1} \cdots g_{i_k}$ où les index sont décroissants et consécutifs avec $i_k \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Dit autrement, tout élément de G_n s'obtient en supprimant²⁹ dans l'ordre, les dernières lettres de chaque paquet, en partant de la décomposition de l'élément le plus long contenant $n-1$ paquets P_k de longueur k pour $1 \leq k \leq n-1$:

$$\underbrace{g_1}_{P_1} \underbrace{g_2 g_1}_{P_2} \underbrace{g_3 g_2 g_1}_{P_3} \cdots \underbrace{g_k g_{k-1} \cdots g_1}_{P_k} \cdots \underbrace{g_{n-2} g_{n-3} \cdots g_1}_{P_{n-2}} \underbrace{g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_1}_{P_{n-1}}$$

Nous notons pour $n \geq 2$, $\mathcal{H}(n)$ le prédicat énoncé au départ.

Pour $n = 2$, le résultat est évident car $G_1 = \{g_1, 1\}$ où 1 correspond au mot vide.

Nous supposons $\mathcal{H}(n)$ vrai et procédons en deux étapes pour montrer que \mathcal{H} est héréditaire à partir de $n = 2$. Soit w un élément quelconque G_{n+1} .

Étape A : Nous établissons que w peut s'écrire avec au plus une occurrence de g_n . Supposons que w ait une écriture contenant un nombre minimal d'occurrences de g_n supérieur ou égal à 2.

Dans ce cas, il existe $w' \in G_n$ et $x, y \in G_{n+1}$ tels que : $w = x g_n w' g_n y$

1. Si w' contient une occurrence de g_{n-1} , nous avons d'après l'hypothèse de récurrence

$$w' = w'' g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{i_{n-1}+1} g_{i_{n-1}} \text{ où } w'' \text{ ne contient pas d'occurrences de } g_{n-1}.$$

D'après les relations (3), w'' et g_n commutent ainsi que g_i pour $i \leq n-2$. Dans ce cas, nous avons :

$$w = x g_n w'' g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{i_{n-1}} g_n y = x w'' g_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{i_{n-1}} y. \text{ Avec les relations (2) il vient}$$

$$w = x w'' g_{n-1} g_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{i_{n-1}} y.$$

Nous avons mis en évidence une écriture de w contenant une occurrence de g_n en moins. Cela contredit la minimalité supposée des occurrences de g_n .

2. Sinon $w' = w''$ où w'' ne contient pas d'occurrences de g_{n-1} . D'après les relations (1) et (3) :

$$w = x g_n w'' g_n y = x w'' g_n^2 y = x w'' y \text{ (} g_n^2 = 1 \text{ - mot vide). Cela met en évidence une écriture de } w \text{ contenant deux occurrences de } g_n \text{ en moins, qui contredit la minimalité supposée des occurrences de } g_n \text{ dans l'écriture de } w.$$

Ainsi l'étape A est validée. Cette étude nous permet de conclure que le groupe $\mathfrak{S}_n(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est engendré par les $n-1$ transpositions $s_i = (i, i+1)$. Toute permutation dont le nombre d'inversions vaut p peut s'exprimer minimalement comme un produit de p transpositions s_i .

Étape B : Soit $w \in G_{n+1}$

1. Si w s'écrit sans occurrences de g_n , alors $w \in G_n$ et d'après l'hypothèse de récurrence w peut s'écrire sous la forme voulue (ici sans paquet P_n).
2. Si w s'écrit avec une seule occurrence de g_n , alors $w = x g_n y$ où $x, y \in G_n$. Ayant $y \in G_n$, d'après l'hypothèse de récurrence nous pouvons affirmer que l'on a soit $y = z g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{i_{n-1}}$, soit $y = z$ avec $z \in G_{n-2}$. Comme z et g_n commutent, nous avons $w = x z g_n y'$ où l'on a soit $y' = g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{i_{n-1}}$,

28. $S = [2, 3, 4, 5, 3, 4, 3, 1, 2]$ est associée à $\underbrace{b_2 b_1}_{P_2} \underbrace{b_3}_{P_3} \underbrace{b_4 b_3}_{P_4} \underbrace{b_5 b_4 b_3 b_2}_{P_5}$ en renversant l'ordre des éléments.

29. Éventuellement tous les générateurs g_k d'un paquet, ce qui le fait disparaître.

soit $y' = 1$ (y' mot vide). Sachant que $xz \in G_n$, nous pouvons d'après l'hypothèse de récurrence, l'écrire sous la forme voulue qui dans les deux cas, conduit pour w à une forme satisfaisant le prédicat \mathcal{H} en jeu. Nous avons établi que \mathcal{H} est héréditaire à partir de $n = 2$.

Majoration du cardinal de G_n .

D'après le lemme précédent, chaque élément de G_n est le "produit" de $n - 1$ paquets P_k où $1 \leq k \leq n - 1$, chacun étant soit absent(vide), soit constitué d'au plus k générateurs g_i d'index décroissants et consécutifs ($P_k = g_k g_{k-1} \cdots g_{i_k}$). Cela conduit à un maximum de $k + 1$ écritures possibles pour chaque valeur de k .

Donc $\#(G_n) \leq \prod_{k=1}^{n-1} (k + 1) = 2 \times 3 \cdots \times n = n!$. Il s'ensuit que $\#(G_n) \leq \#(E_n)$. Par conséquent le morphisme surjectif φ de G_n dans E_n est un isomorphisme.

Nous avons ainsi réciproquement, présenté (E_n, \cdot) et le groupe isomorphe (\mathfrak{S}_n, \circ) par un ensemble de $n - 1$ générateurs assujettis aux relations (1), (2) et (3).

Liens web sur les amidakujis et bibliographie

Une vidéo "youtube" présentant les amidakujis : [vidéo](#)

Le document original, reproduit ici p. 7-14, de l'atelier MeJ : [Amidas-Kuji-Montbrison-2013](#)

La conférence de Stéphane Gaussent aux journées nationales APMEP Lyon 2016 : [JN Lyon 2016](#)

Un autre travail du collège de Montbrison sur les amidakujis : [Amidas-Kuji-Montbrison-2014](#)

Shuttle Puzzle : [page du site "cut-the-knot"](#) avec applet java

Pour la partie III-3), Jérôme Germoni - Université Claude Bernard-Lyon I

Je me suis inspiré de ce document pdf (obtenu sur internet) en l'adaptant à mon exposé sur les n -échelles.

Dans ce document, trois références de livres sont indiquées :

Josette Calais, *Éléments de théorie des groupes*, PUF, chap. IX.

Jean-Yves Mérindol, *Nombres et Algèbre*, EDP Sciences.

Nathan Jacobson, *Basic Algebra II*.

Le chef d'œuvre du compagnon : *une activité constructive de pavage sous forme historique*

Un article paru en 2015 dans la presse espagnole [1] nous a permis de découvrir l'extraordinaire pavage, récemment rénové, du sol de l'église Santa María de Mahón à Minorque (archipel des Baléares).

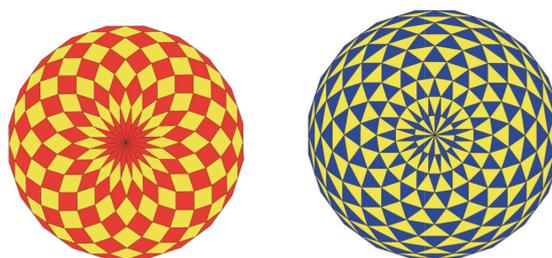


Profondément admiratifs, nous avons voulu étudier de plus près la géométrie très particulière à laquelle ce pavage est soumis. Le motif du pavage, situé en haut de la photo, est un pentagone étoilé (ou étoile à cinq branches) de couleur blanche, entouré de cinq losanges rouge foncé. Nous considérons l'étoile rouge centrale comme un simple décor et ne la prenons pas en compte dans cette approche. Nous avons montré [2] que les cinq triangles isocèles formant les branches de l'étoile sont des *triangles d'or obtus*, ce qui veut dire que le rapport de la longueur du grand côté à celle des deux côtés égaux est égal au nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De même, les losanges du pourtour sont formés de deux *triangles d'or aigus*, ce qui veut dire que le rapport de la longueur des deux côtés égaux à celle du petit côté est égal au nombre d'or [4].

En généralisant cette construction au cas d'une étoile à sept branches, puis à un nombre quelconque de branches, nous avons défini ce que nous appelons les « rosaces célestes ». Celles-ci sont des pavages du plan obtenus à partir d'un polygone régulier étoilé à n côtés en construisant successivement des polygones réguliers étoilés de même centre et de même nombre de côtés de la façon suivante : à chaque étape, on insère entre

deux pointes consécutives du premier polygone étoilé un losange dont deux côtés coïncident avec les côtés de l'angle rentrant du polygone étoilé précédent. On continue le processus « centrifuge » jusqu'à ce que le contour du polygone obtenu soit convexe.

Voici un exemple de rosace céleste obtenue avec GeoGebra et colorié de deux manières différentes :



Dans la figure de gauche, on est parti d'un polygone étoilé à vingt côtés (c'est l'étoile rouge au centre) et la construction de la rosace a demandé huit étapes. La figure de droite révèle comment le polygone étoilé de départ a été construit : dans un polygone convexe à vingt côtés, on a colorié alternativement en jaune et en bleu les vingt petits triangles inscrits ayant pour sommet le centre du polygone, puis on a tracé les triangles symétriques à ceux-ci pour obtenir un polygone étoilé de rayon double. Cette seconde figure donne de plus une autre visualisation de la rosace, obtenue en coloriant en bleu tous les demi-losanges extérieurs.

Les rosaces célestes sont des extensions de certains pavages, dits « quasi-périodiques », découverts en 1974 par Roger Penrose et aujourd'hui bien connus de certains amateurs d'art, architectes et, bien sûr, d'un grand nombre de mathématiciens de tous niveaux : voir notamment [3] et [5]. Ce mathématicien, physicien et philosophe anglais a exploré un nombre impressionnant de domaines ; il enseignait à Londres où l'on peut observer plusieurs façades ornées de ses pavages, notamment à proximité du dôme du millénaire. Sachant qu'il a abondamment utilisé le pentagone et le nombre d'or dans ses constructions, il nous a semblé naturel de nous demander si ses études pouvaient être généralisées aux heptagones, aux octogones, dodécagones et au-delà.

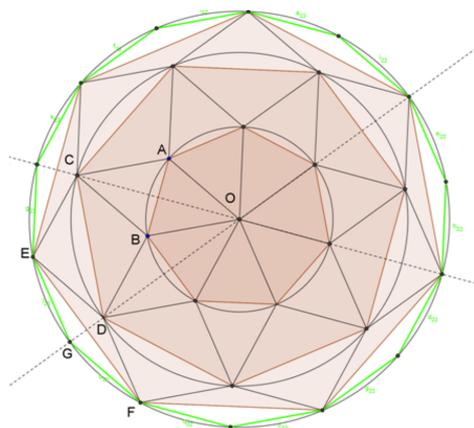
Nous proposons dans la suite une activité géométrique amusante accessible aux collégiens dès la classe de Quatrième, susceptible d'intéresser aussi les professeurs en formation et les non-spécialistes.

Matériel

Feuilles de papier fort de format A3, rapporteur, compas, double-décimètre, ciseaux, crayons, si possible plan de travail en bois, logiciel GeoGebra.

I - Activité préparatoire pour tous

Avec GeoGebra, construire une rosace céleste à sept branches comme dans la figure suivante.



On pourra s'aider des consignes suivantes :

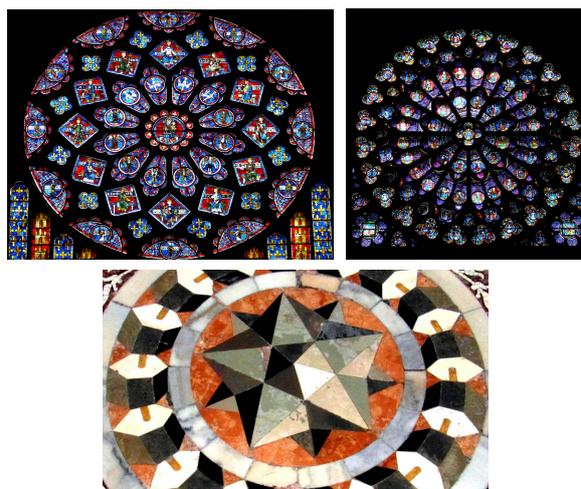
- Tracer, avec l'ordre POINT, deux points A et B dont la distance sera le côté de l'heptagone.
- Cliquer sur POLYGONE RÉGULIER, sur les deux points A et B , puis sur 7. On obtient l'heptagone convexe du centre de la figure.
- Rechercher le centre O de cet heptagone en traçant en pointillés, avec l'ordre MÉDIATRICE, les médiatrices de deux côtés contigus de l'heptagone.
- Tracer, à l'aide de l'ordre SYMÉTRIE AXIALE, les points C et D symétriques de O du polygone par rapport à deux côtés contigus de l'heptagone.
- Tracer, à l'aide de la commande POLYGONE RÉGULIER, l'heptagone de côté $[CD]$.
- Pour finir, construire par symétrie axiale comme plus haut le point G symétrique de D par rapport à (EF) .

Comme dans le cas du pentagone, le processus s'arrête dès la première étape, car le polygone à 14 côtés obtenu est convexe.

II - Activité pour les élèves à partir de la Quatrième

1. Préambule (il pourra être lu à haute voix à la classe par le professeur ou un élève)

Un compagnon tailleur de pierre, chargé par le Service des monuments historiques de refaire le sol d'une belle petite chapelle en rotonde, eut envie de laisser, comme les bâtisseurs de cathédrales, sa marque dans l'histoire : ce serait, de plus, son chef d'œuvre de réception de compagnon. Il décida donc de paver la rotonde avec une « rosace céleste ». Il fallait bien sûr que ce travail fût réalisable et il dut pour s'en assurer faire quelques calculs. La chapelle avait un diamètre de 4 m, mesuré au décimètre souple des maçons. Voici comment il procéderait pour tracer la rosace : il tracerait sur le sol en ciment de son atelier un cercle de diamètre 4 m, puis un polygone régulier, comme savaient le faire tous les bâtisseurs de cathédrale pour leurs roses en vitrail (souvent des dodécagones) et leurs pavages de nefs. Regardez quelques exemples, pour voir comme c'est beau !



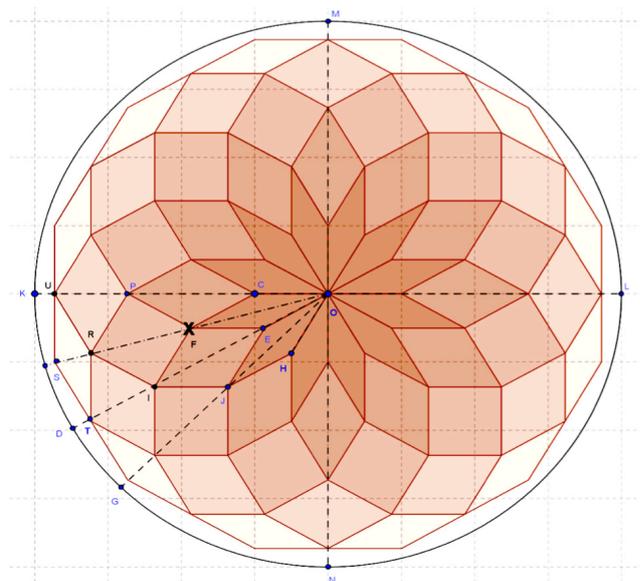
à gauche : Cathédrale Notre-Dame de Chartres, rose du nord

à droite : Cathédrale Notre-Dame de Paris, rose du midi

en bas : Basilique Saint-Marc de Venise, pavage attribué à P. Ucello

2. Fiche à distribuer aux élèves après lecture de l'histoire du compagnon

Le compagnon trace dans son atelier un cercle de diamètre 4 m, qui reproduit à l'échelle 1 le pourtour du sol de la chapelle. À la façon des anciens bâtisseurs, il reporte plusieurs fois sur le périmètre de ce cercle une règle plate de longueur 50 cm, pour calculer combien de pavés il devra utiliser. En effet, il a décidé qu'il utiliserait des pavés de 50 cm de côté, ce qui est commode pour le marbrier. Il constate qu'il peut reporter 24 fois sa règle, et qu'il reste même un peu de place. Il en déduit qu'il pourra placer 12 pavés à la périphérie de la rosace, comme dans la figure ci-dessous, et décide de paver la chapelle avec une rosace céleste à 12 côtés. On vous demande de construire sur papier la rosace céleste du compagnon, puis de l'aider à faire les calculs pour vérifier qu'elle va bien « rentrer » dans la chapelle.



La rosace du compagnon, dessinée avec GeoGebra. Une unité de la grille représente 50 cm, le cercle est de diamètre 4 m.

Voici les consignes. Certaines sont accompagnées de questions. Vous pouvez vous aider de la figure précédente.

1) Sur une feuille de papier fort de format A4, tracez un demi-cercle de diamètre 40 cm. Quelle est l'échelle de votre représentation du sol de la chapelle ?

2) Tracez deux diamètres orthogonaux $[MN]$ et $[KL]$, puis deux rayons $[OK]$ et $[OD]$ d'angle 30° avec le rapporteur. Reportez au compas sur les côtés de l'angle deux segments $[OC]$ et $[OE]$ d'origine O et de mesure 5 cm. Tracez au compas deux arcs de cercle de centre C et E , de rayon 5 cm, qui se rencontrent en F . Que représente la droite (OF) pour l'angle KOD ?

3) Tracez le losange $OCFE$: son angle de sommet O mesure 30° par construction. Quelle est la mesure de l'angle FEO ?

4) Tracez le losange $OEJH$ symétrique du losange $OCFE$ par rapport à (OD) .

5) Tracez le rayon $[OG]$ du cercle qui passe par J . Que représente (OG) pour l'angle EOH ?

6) Tracez deux arcs de cercle, de centres respectifs F et J et de rayon 5 cm, qui se rencontrent en I : nous obtenons le losange $EFIJ$. Pourquoi le point I se trouve-t-il sur $[OD]$?

7) Tracez deux arcs de cercle de centre F , de rayon 5 cm qui rencontrent $[OK]$ en P : nous obtenons le losange $FPRI$. Tracez avec la même méthode le losange $RUST$.

8) Le quartier de disque KOG contient tous les types de pavés utiles pour paver le sol de la chapelle. Combien y a-t-il de types de pavés ?

9) Le compagnon se demande s'il a bien calculé ses mesures et si la rosace va bien « rentrer » dans la chapelle. Calculez le périmètre de la chapelle et celui du dodécagone. La rosace rentre-t-elle dans la chapelle ?

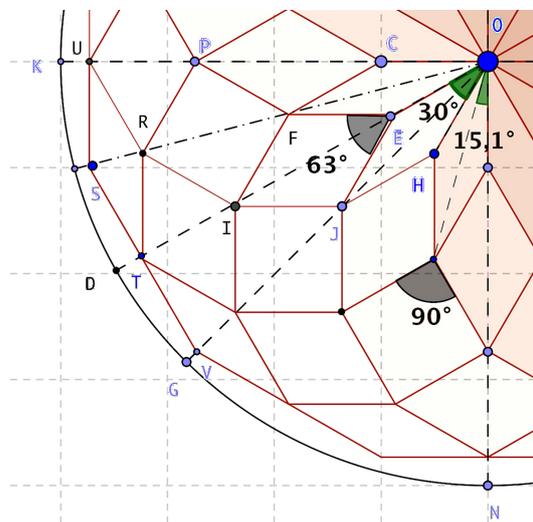
Les deux questions qui suivent sont réservées aux plus grands.

10) Il nous faut prévoir la fourniture des pavés par le marbrier. Calculez les mesures des angles des pavés (on rappelle que l'angle COE mesure 30°). Quels sont les différents types de pavés à prévoir, et combien de pavés faut-il en tout ?

11) Observez le triangle STO rectangle en T d'angle au sommet O de 15° . En utilisant le sinus de l'angle de mesure 15° dans le triangle rectangle STO , où T est le milieu de $[SV]$, calculez la mesure de $[OS]$, demi-diagonale du dodécagone. Le dodécagone « rentre-t-il » dans la chapelle ?

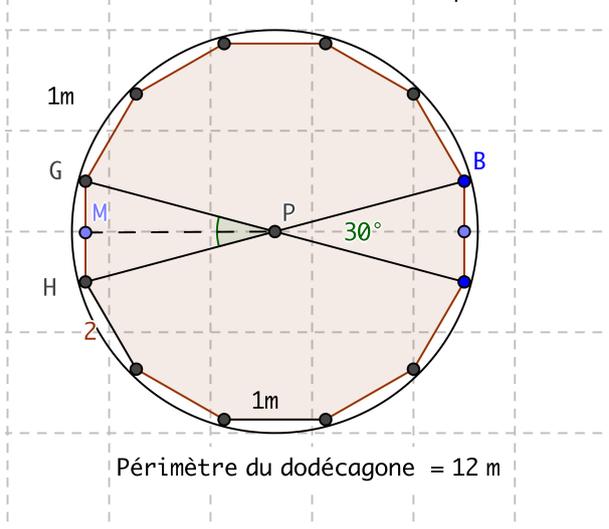
Réponses abrégées aux questions précédentes

- 1) c'est 40 cm pour 4 m, soit $\frac{1}{10}$.
 → 2) c'est sa bissectrice, comme diagonale du losange $OCFE$.
 → 3) c'est $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, car la somme des angles d'un losange est 360° .
 → 5) c'est sa bissectrice.
 → 6) parce que (OD) est la bissectrice de l'angle FEJ .
 → 8) nous observons *a priori* cinq types de pavés, mais nous verrons que sur les cinq, seuls trois sont différents
 → 9) : le périmètre de la chapelle circulaire est $4\pi \simeq 12,56$ m au centième près, et le périmètre du dodécagone est 12 m ; puisqu'ils ont le même centre, le dodécagone peut s'insérer dans la chapelle.
 → 10) il faut trois types de pavés différents : vingt-quatre pavés d'angles 30° et 150° , vingt-quatre pavés d'angles 60° et 120° et douze pavés carrés, soit en tout soixante pavés.
 → 11) $\frac{ST}{SO} = \sin 15^\circ$; $SO = \frac{50}{\sin 15^\circ} \simeq 192,30$ cm $<$ 2 m ; le dodécagone « rentre » donc dans la chapelle.



Agrandissement d'un quart de rosace, avec les mesures des angles trouvées par GeoGebra. Attention, elles ne sont pas très précises...

Cercle de diamètre 4m à l'échelle 1cm pour 1m
Intérieur du mur de la chapelle



III - Étude prolongée pour les élèves professeurs

Raisonnons sur les résultats obtenus.

a) Nous avons obtenu des types de pavés qui peuvent être utilisés deux fois. Pourquoi ? Quelle est la condition sur le nombre de côtés p de la rosace pour que ce phénomène se produise ?

b) Pourrions-nous obtenir pour une autre dimension de la chapelle un type de pavé utilisable trois fois ?

c) Pouvons-nous utiliser ces trois types de pavés pour paver avec une rosace céleste une chapelle de diamètre plus petit ?

d) L'un des pavés est un carré. Est-ce toujours possible ?

e) Si le compagnon achète ses pavés au mètre carré (en moyenne 50 euros le mètre carré), quelle dépense doit-il prévoir ? Quelle est l'aire de la surface restante à couvrir de ciment-pierre entre le dallage et le mur de la chapelle ?

Indications de solutions

a) Si p est premier, aucun pavé ne se retrouve deux fois, car tous les nombres inférieurs à p sont alors premiers avec p . Considérons maintenant le cas où p est impair, mais non premier, et prenons $p = 9$ pour fixer les idées. Les couples de mesures d'angles obtenus sont : $(\frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}), (\frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}), (\frac{6\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}), (\frac{8\pi}{9}, \frac{\pi}{9})$. Ces quatre couples et ceux qu'on obtient en inversant l'ordre des termes sont tous différents, car le premier terme de ces quatre couples correspond à un entier pair et le second correspond à son complément à 9, donc à un entier impair. Par conséquent, si le tailleur de pierre veut pouvoir utiliser deux fois un même type de pavé, il faut tracer une rosace avec un nombre pair de côtés.

b) Il est impossible d'utiliser trois fois le même type de pavé, car chaque pavé est utilisé une fois dans un sens et la fois suivante après une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

c) Si l'on veut paver une rosace de diamètre inférieur, le nombre de pavés au centre de la rosace sera plus petit, donc le petit angle au centre de la rosace sera plus grand. Le petit pavé d'angle 30° ne sera donc pas utilisable ; on utilisera seulement les pavés d'angles 60° et 120° et les pavés carrés.

d) Pour que le pavage contienne un carré, il faut que l'un des couples d'angles relatifs à la rosace d'ordre $2n$ soit de la forme $(\frac{n\pi}{2n}, \frac{n\pi}{2n})$ par exemple $(\frac{7\pi}{14}, \frac{7\pi}{14})$. Il faut donc que la rosace ait un nombre pair de côtés. Est-ce suffisant ? Non, puisque l'exemple précédent de l'hexagone ne comporte pas de carré. De manière générale, pour une rosace à $2r$ côtés, les couples d'angles sont $(\frac{2\pi}{2r}, \frac{(2r-2)\pi}{2r}), (\frac{4\pi}{2r}, \frac{(2r-4)\pi}{2r}), (\frac{6\pi}{2r}, \frac{(2r-6)\pi}{2r}), \dots$. Pour obtenir parmi eux le couple $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, il faut qu'il existe $p \geq 1$ tel que le couple $(\frac{2p\pi}{2r}, \frac{(2r-2p)\pi}{2r})$ vérifie $\frac{\pi}{2} = \frac{2p\pi}{2r} = \frac{(2r-2p)\pi}{2r}$. La première équation exige d'avoir $2r = 4p$, et la seconde équation est alors satisfaite puisqu'on a dans ce cas $2r - 2p = 2p$. En résumé, il faut et il suffit, pour que le pavage contienne un carré, que le nombre de côtés de la rosace soit un multiple de 4.

Ce n'est pas le cas dans un hexagone, mais c'est le cas dans un dodécagone.

e) Calculons la surface totale de la chapelle : son rayon est 1,9 m, donc sa surface est $\pi R^2 \simeq 11,34 \text{ m}^2$. Rappelons que le tailleur de pierre a besoin de 24 pavés d'angles 30° et 150° , 24 pavés d'angles 60° et 120° et 12 pavés carrés. Or l'aire d'un losange est donnée par $A = 2a^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$, où a est le côté et α, β les deux angles. L'aire de la surface du premier type de pavé, qui a pour angles $\frac{2\pi}{12}$ et $\frac{10\pi}{12}$, est donc : $2 \times 0,5 \times 0,5 \times (\cos \frac{\pi}{12}) \times (\cos \frac{5\pi}{12}) = 0,5 \times \cos \frac{\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = 0,125 \text{ m}^2$. De même, l'aire de la surface du second type de pavé est : $0,5 \times \cos \frac{2\pi}{12} \times \cos \frac{4\pi}{12} \simeq 0,2165 \text{ m}^2$. Enfin, l'aire de la surface du pavé carré est $0,25 \text{ m}^2$. L'aire totale de la surface pavée est donc : $24 \times (0,125 + 0,2165) + 12 \times 0,25 = 11,196 \text{ m}^2$, ce qui représente une dépense d'environ 560 euros. La différence avec l'aire du sol de la chapelle est très petite : il ne reste qu'environ $0,145 \text{ m}^2$ à cimenter.

Conclusion

Depuis plusieurs années, les enseignants des écoles primaires, des collèges et des lycées sont encouragés à rendre les mathématiques plus attrayantes et en prise avec les sciences, les arts et les techniques. Les opportunités ne manquent pas, et l'étude des pavages du plan nous semble en être une particulièrement féconde. Les structures fractales et les pavages de l'espace par les quasi-cristaux, dont nous nous préoccuperons dans un prochain article, sont également à même de fournir des activités riches et motivantes pour les publics scolaires.

Danielle Salles-Legac

avec la collaboration de Ruben Rodriguez Herrera,
Philippe Langlois et Éric Trotoux

Bibliographie

- [1] Elena Soto, « Un singular pavimento matemático », *El Mundo*, seccion Baleares, 3 de Marzo 2015. En ligne sur le site elmundo.es/Hemeroteca.
- [2] Ruben Rodriguez Herrera et Danielle Salles-Legac, *Activité autour des triangles d'or et des pavages de type 3 au sens de Roger Penrose*, IREM de Basse-Normandie, 2016. En téléchargement sur le site irem.unicaen.fr.
- [3] Thomas Fernique, Evgeny Poloskin, « Un parquet de Penrose », *Images des mathématiques*, CNRS, 2017. En ligne sur le site images.math.cnrs.fr.
- [4] Ruben Rodriguez Herrera et Danielle Salles-Legac, *Le nombre d'or, nouveautés mathématiques ludiques*, IREM de Basse-Normandie, 2015. Ouvrage disponible auprès de l'IREM.
- [5] Claudine Hervieu, Roger Leger, Françoise Debart, Brigitte Rozoy et Paulette Trinquet, *De M.C. Escher aux... dessins à motifs répétitifs*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1982. En téléchargement sur le site numerisation.irem.univ-mrs.fr. Version papier disponible auprès de l'IREM.

Comment j'ai dessiné une de mes planches¹ : *Une rencontre imaginaire*

En 1960, l'écrivain Raymond Queneau et le mathématicien François Le Lionnais fondaient l'OuLiPo : l'Ouvroir de littérature potentielle. Ce groupe constitué à la fois de littéraires et de scientifiques se proposait d'écrire des textes à partir de contraintes, souvent mathématiques. Raymond Queneau énonçait : « Nous appelons littérature potentielle la recherche de formes, de structures nouvelles et qui pourront être utilisées par les écrivains de la façon qu'il leur plaira ». Les oulipiens aimaient à se décrire comme « des rats qui ont à construire le labyrinthe dont ils se proposent de sortir ». Leurs écrits avaient donc un côté ludique, qui apparaît par exemple dans le sous-titre d'une de leurs premières anthologies : *Créations Re-créations Récréations*. Les contraintes, classifiées dans la « table de Queneleiev », pouvaient porter tant sur les constituants formels d'un texte (lettres, signes de ponctuation, syllabes, mots, phrases, vers, chapitres) que sur des unités de sens (personnages, lieux, actions, sentiments, objets, durées).

Parmi les œuvres les plus célèbres créées au sein de l'OuLiPo, on peut citer *Cent mille milliards de poèmes* de Raymond Queneau, *La Disparition* et *La Vie mode d'emploi* de Georges Perec, *Si par une nuit d'hiver un voyageur* d'Italo Calvino, ainsi que de nombreux ouvrages collectifs.

Certaines formes de contraintes sont assez connues. Le palindrome est une phrase qui peut se lire dans les deux sens, comme : « Engage le jeu que je le gagne ! » Le lipogramme est un texte où on s'interdit l'usage d'une lettre : c'est le cas de *La Disparition*, roman dépourvu de la lettre e. La méthode $S + 7$ consiste à substituer à chaque nom commun d'un texte donné le septième substantif qui le suit dans un dictionnaire choisi ; « la cigale et la fourmi » peut ainsi devenir « la cimaise et la fraction ». On peut souvent associer une notion mathématique à une contrainte : dans les cas cités, ce sont respectivement la symétrie, la soustraction, l'addition.

L'OuLiPo existe toujours, et a maintenant de nombreuses petites sœurs dans différents domaines : l'OuMuPo (Ouvroir de musique potentielle), l'OuPeinPo (Ouvroir de peinture potentielle), l'OuLiPoPo (littérature policière) ou encore l'OuBaPo (bande dessinée). Pour chacun de ces moyens d'expression, il est possible de jouer avec tous les éléments de la grammaire qui lui est propre. À l'OuBaPo par exemple, en plus du jeu sur le texte, on peut trouver des contraintes sur le dessin, les cases, les strips, les planches. Certaines bandes de l'OuBaPo ont une inspiration mathématique certaine et assumée, en particulier les travaux d'Étienne Lécroart (*Contes et décomptes*) et de Jason Shiga (*Vanille ou Chocolat*).

La Vie mode d'emploi

C'est l'un des romans les plus ambitieux de Georges Perec. Par sa structure utilisant un immeuble en coupe, il peut presque être visualisé comme une grande planche de bande dessinée. Cet aspect a attiré les auteurs de bande dessinée oubapienne, et un projet nommé *L'Immeuble* est en gestation au sein de l'OuBaPo depuis de nombreuses années. En tant que dessinateur amateur de l'esprit oubapien, j'ai voulu dessiner une planche présentant ce roman en utilisant les mêmes contraintes. Je présente ici ma démarche, en espérant qu'elle puisse servir en tant qu'exemple de construction de labyrinthe. Chaque planche est une aventure : celle-ci a été riche de recherches et de surprises combinatoires et esthétiques que je voudrais humblement partager.

En bon oulipien, Georges Perec avait tout d'abord défini son cahier des charges, autrement dit les contraintes devant structurer son roman. Celui-ci devait se composer de cent chapitres (il y en a en fait 99) décrivant chacun une pièce d'un immeuble. Dans chaque chapitre devaient apparaître deux mots choisis respectivement dans deux listes pré-établies de dix mots chacune, selon les contraintes d'un carré gréco-latin d'ordre 10. De plus, l'ordre des chapitres devait être agencé par la course polygraphique d'un cavalier sur un damier.

Précisons les choses. Construire un carré gréco-latin d'ordre n , aussi appelé bi-carré latin orthogonal à n lignes et n colonnes, consiste à placer des couples formés d'une lettre grecque et d'une lettre latine, choisies parmi n lettres grecques et n lettres latines, dans chaque ligne et chaque colonne de telle manière que chaque couple de lettres soit placé une fois et une seule dans le carré et que chaque lettre, grecque ou latine, soit placée une seule fois par ligne et une seule fois par colonne.

Quant au problème de la polygraphie du cavalier, très connu des amateurs d'échecs, il consiste à faire parcourir au cavalier toutes les cases d'un échiquier ou d'un damier une fois et une seule. Le cavalier, rappelons-le, ne se déplace qu'en L : deux cases dans une direction, puis une perpendiculairement.

Ces problèmes célèbres ont tous deux été étudiés par Leonhard Euler (1707–1783). J'ai donc imaginé une rencontre entre lui et Georges Perec (1936–1982).

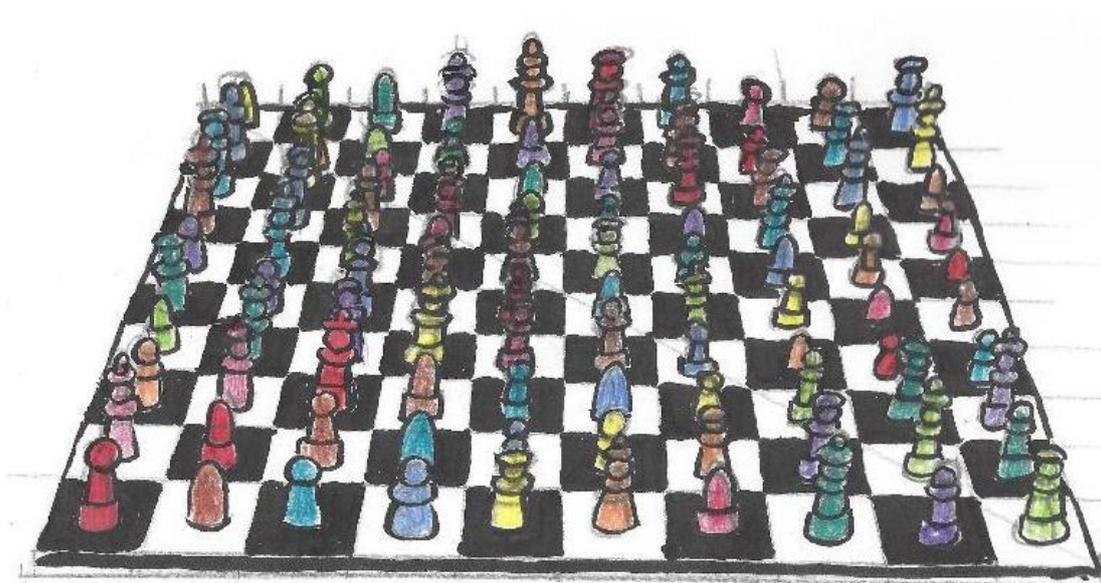
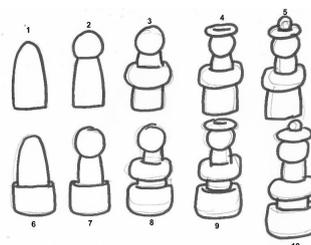
Euler avait vainement essayé de disposer 36 officiers (6 grades différents de 6 régiments différents) dans un carré d'ordre 6 de sorte qu'il y ait un seul officier de chaque grade et de chaque régiment sur chaque ligne et chaque colonne. Il conjectura qu'une telle disposition est impossible. Plus généralement, il conjectura qu'elle est impossible dans un carré de côté n si n est congru à 2 modulo 4 – par exemple dans un carré de côté 10 ou 14.

1. En référence à *Comment j'ai écrit certains de mes livres* de Raymond Roussel, précurseur (ou plagiaire par anticipation ?) de l'OuLiPo.

Mais en 1960, à l'aide d'ordinateurs, les chercheurs Bose, Parker et Shrikhande trouvèrent une solution pour le problème des 100 officiers (ou du carré gréco-latin d'ordre 10), réfutant ainsi la conjecture d'Euler.

1	A	7	6	5	0	9	8	2	3	4
8	G	2	1	7	6	0	9	3	4	5
9	F	8	3	2	1	7	0	4	5	6
0	E	9	8	4	3	2	1	5	6	7
2	K	0	9	8	5	4	3	6	7	1
4	J	3	0	9	8	6	5	7	1	2
6	H	5	4	0	9	8	7	1	2	3
3	B	4	5	6	7	1	2	8	9	0
5	C	6	7	1	2	3	4	9	0	8
7	D	1	2	3	4	5	6	0	8	9
	D	E	F	G	A	B	C	J	K	H

Pour dessiner cette solution, que l'on a retrouvée dans un document de la main de Georges Perec, j'ai choisi un symbole pour chaque officier et une couleur pour chaque arme, ce qui m'a amené à représenter la solution à la manière d'un jeu.



★
★ ★

Ensuite, j'ai décidé d'organiser ma planche à la manière du roman, c'est-à-dire sous la forme d'un carré gréco-latin, en me demandant comment la course du cavalier pourrait s'y dérouler. Pour dessiner les cases, j'ai dessiné un *gaufrier* (terme de bande dessinée désignant une répartition régulière en cases identiques, qui ressemble donc à une gaufre) de 3×3 cases. Si j'avais choisi davantage de cases, 4×4 par exemple, elles auraient été plus petites et moins lisibles.

Pour organiser ce carré gréco-latin d'ordre 3, il fallait choisir six mots. Certains étaient évidents, au vu de la thématique : livre, officiers, cavalier. Les trois autres sont des éléments de décor : tasse, chat, fenêtre. Je me suis permis de faire figurer ces mots soit en les écrivant en toutes lettres, soit en les dessinant, afin de rendre le décryptage plus ludique. Chaque mot est présent dans

une seule case sur chaque ligne et sur chaque colonne.

Le problème des neuf officiers admet une solution unique. Aux permutations des lettres près, il existe deux manières de placer les trois lettres dans ces deux cases.

A	B	C
C	A	B
B	C	A

Je vous invite à les retrouver sur une feuille de papier, le jeu est amusant et très facile.

A	B	C
B	C	A
C	A	B

En combinant les lettres latines et grecques, on obtient le carré gréco-latin d'ordre 3 :

A α	B β	C γ
C β	A γ	B α
B γ	C α	A β

En prenant la correspondance

A : Livre α : Cavalier
 B : Chat β : Fenêtre
 C : Tasse γ : Officiers

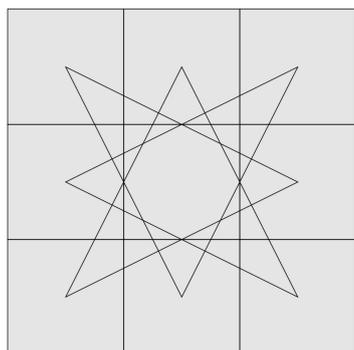
on obtient la répartition de mes mots dans mes cases.

Livre Cavalier	Chat Fenêtre	Tasse Officiers
Tasse Fenêtre	Livre Officiers	Chat Cavalier
Chat Officiers	Tasse Cavalier	Livre Fenêtre

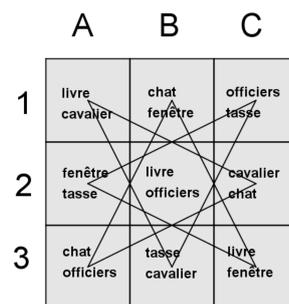
J'ai choisi la première ligne assez naturellement, en me basant sur les mots dont j'avais le plus besoin pour définir l'histoire. Ensuite, placer les mots dans les bonnes cases a guidé la mise en scène de la planche et m'a donc aidé à sa conception. La contrainte libère la créativité, thèse qu'aime à défendre les oulipiens. D'autant qu'en sachant que la règle du jeu est une partie de l'intérêt de la planche, on dessine assez rassuré sur son contenu, en se concentrant juste sur les détails.

La polygraphie du cavalier est un problème bien connu depuis très longtemps : on doit lui faire parcourir l'échiquier 8×8 ou le damier 10×10 de telle manière que chaque case soit traversée une fois et une seule. En 1759, Euler a étudié le problème et trouvé de multiples solutions sur l'échiquier et le damier. Perec, amateur de jeux, a lui aussi cherché sa solution. Parmi les solutions d'Euler, les plus impressionnantes sont celles qui font un cycle, revenant sur la case de départ à la fin du parcours.

Mais les damiers ne sont pas tous parcourables par le cavalier : le damier 3×3 , en particulier, ne l'est pas, car il n'est pas possible d'atteindre la case centrale. Il existe un cycle, unique au sens de parcours près, qui permet de relier toutes les autres cases ; je le trouve très esthétique.



En comparant le cycle et les mots du carré gréco-latin, on s'aperçoit de quelques propriétés intéressantes.



En suivant le parcours et en partant du mot cavalier dans la case B3, on visite toutes les cases avec le mot cavalier, avant d'arriver à la case cavalier-chat, puis on visite toutes les cases chat, puis de même toutes les cases fenetre, puis toutes les cases tasse. Les cases livre et officiers, dont la case centrale, ne sont pas prises en compte dans ce parcours, mais sont liées à des mots opposés dans ce cycle, ce que j'ai représenté sur cette figure :



Au-delà de cette constatation, j'aurais sans doute pu créer une seconde façon de lire la bande dessinée, en suivant le chemin du cavalier pour obtenir une autre progression logique des cases et une autre histoire ; le ton imposé ne permettait sans doute pas ce pas de côté.

Olivier Longuet

Bibliographie

- Raymond Queneau, *Cent mille milliards de poèmes*, Gallimard, 1961.
- Georges Perec, *La Vie mode d'emploi*, Hachette, 1978.
- Georges Perec, « Quatre figures pour *La Vie mode d'emploi* », *L'Arc* 76 (1980), p. 50–54.
- Georges Perec, *La Disparition*, Gallimard, 1969.
- Italo Calvino, *Si par une nuit d'hiver un voyageur*, trad. fr. par D. Sallenave et F. Wahl, Le Seuil, 1981.
- OuLiPo, *La Littérature potentielle – Créations Récréations*, Gallimard, 1973.
- Anthologie de l'OuLiPo*, édition de Marcel Bénabou et Paul Fournel, Gallimard, 2009.
- Leonhard Euler, « Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse », *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1759, vol. 15, p. 310-337, 1766.
- OuBaPo, *OuPus*, 6 vol., L'Association, 1996–2005.
- Étienne Lécroart, *Contes et Décomptes*, L'Association, 2012.
- Jason Shiga, *Vanille ou Chocolat*, Cambourakis, 2008, nouvelle version 2011.

UNE RENCONTRE IMAGINAIRE (CARRÉ GRÉCO-LATIN ORTHOGONAL D'ORDRE 3)



CAVALIER - TASSE - OFFICERS - CHAT - FENÊTRE - LIVRE.



LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

— Annonces : nouveau livre, soutenance de thèse	2
— Éditorial, par André Sesboüé	3
— <i>In Memoriam</i> Éric Trotoux, par Pierre Ageron	4
— Amida-kujis, les mathématiques au service du « hasard » : du jeu à l'étude de sa relation au groupe symétrique, par Éric Trotoux	7
— Le chef d'œuvre du compagnon : une activité constructive de pavage sous forme historique, par Danielle Salles-Legac	32
— Comment j'ai dessiné une de mes planches : <i>Une rencontre imaginaire</i> , par Olivier Longuet	36