LE MIROIR DES MATHS

UNIVERSITÉ DE CAEN
BASSE - NORMANDIE

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 74 02** - Fax. : **02 31 56 74 90**
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO TROIS : Mars 2009

LE MIROIR DES MATHS

NUMÉRO TROIS : Mars 2009

Sommaire

Éditorial

L'IREM de Basse-Normandie a effectué sa rentrée les 10 et 11 octobre 2008 à la ferme du Lotérot à Cahagnes (Calvados). Nous avons eu le grand plaisir d'y accueillir Ludovic Degraeve, nouvellement nommé IA-IPR dans l'académie de Caen. La région, parfois appelée Prébocage, est séduisante et reposante : une promenade sur les sentiers nous a menés jusqu'au château d'Aubigny (belle façade symétrique du XVII^{e} siècle) et au bourg de Cahagnes (église de la Reconstruction de forme polygonale, avec un fin clocher séparé). Quant au programme de nos travaux, il fut comme toujours d'une grande variété et source de riches échanges. Ce troisième numéro du *Miroir des maths* ainsi que le quatrième (à paraître en juin 2009) sont un reflet des exposés présentés lors de ce week-end de rentrée, ou lors de nos assemblées de décembre, mars et juin.

Le numéro que vous avez commencé à lire s'ouvre sur une réflexion collective, résumée par Odile Jenvrin, sur ce qu'est l'enseignement des mathématiques en langue étrangère en tant que "discipline non linguistique" dans les sections européennes des lycées. L'intuition essentielle est qu'il ne saurait être une simple transposition de l'enseignement de base donné dans la langue nationale, mais offre la possibilité d'une dimension culturelle spécifique. Sur l'impulsion commune de l'IREM et de l'Inspection pédagogique régionale, notamment M. Ludovic Degraeve, un groupe de travail sur les mathématiques en anglais est né en novembre 2008 : *le Miroir* renverra régulièrement une image du travail de ce groupe dynamique.

C'est vers une autre langue et vers une autre culture, souvent mal connue de nous, que nous conduit Mohammed Ghassan Alaouf. Son article nous fait entrer, et c'est passionnant, dans l'enseignement des mathématiques en Arabie saoudite. Plus précisément, il a choisi pour nous d'étudier la présentation des nombres entiers relatifs à travers une comparaison systématique des manuels français et saoudiens. Avec lui et d'autres, nous espérons créer des liens avec les enseignants de mathématiques des pays arabes d'Orient, et appelons ceux que cette idée intéresse à prendre contact avec l'IREM.

Enfin vous découvrirez ici le deuxième épisode du feuilleton que Jean-Pierre Le Goff consacre à l'histoire de la courbe que nous appelons aujourd'hui *sinusoïde*. Après sa première apparition comme *compagne de la roulette* chez Roberval au dix-septième sicle, il nous en révèle ici la deuxième, liée à une question de géométrie dans l'espace : il s'agit d'un mémoire de 1724 d'un certain Henri Pitot. *Le Miroir* en reproduit le texte, suivi du commentaire de Jean-Pierre Le Goff. L'histoire des mathématiques, l'adoption d'une perspective historique dans leur enseignement sont des axes forts de la recherche à l'IREM de Basse-Normandie. Notez dès maintenant un grand rendez-vous dans ce domaine : le XVIII^{e} colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques aura lieu à Caen les 28 et 29 mai 2010, sur le thème "Circulation, héritage et transmission en mathématiques".

Je finis cet éditorial sur quelques informations ou rendez-vous plus proches :

— le site Internet du groupe **jeux2maths** de l'IREM de Basse-Normandie vient tout juste d'être mis en ligne : chacun des quinze jeux créés par ce groupe est désormais accessible , avec le matériel à imprimer et découper, la règle du jeu et parfois des démonstrations, à partir de l'adresse `www.math.unicaen.fr/irem` ;

— la cinquième édition du **rallye dynamique et virtuel de mathématiques** de l'IREM de Basse-Normandie aura lieu le 24 avril 2009 de 14h à 16h dans les académies de Caen et de Rennes : les inscriptions sont closes et l'heure est maintenant à l'entraînement !
On accède au site du rallye à partir de l'adresse `www.math.unicaen.fr/irem/sommaire.html` ;

— la **rencontre des IREM du Grand Ouest** (Rouen, Caen, Rennes, Brest, Nantes et Poitiers), dont le but est de se tenir mutuellement au courant du travail effectué dans nos groupes, aura lieu à Rennes les 15 et 16 mai 2009 ;

— le XVI^{e} **colloque de la CORFEM** (commission inter-IREM de recherche sur la formation des enseignants de mathématiques) aura lieu à Caen les 18 et 19 juin 2009 et portera comme il est de tradition sur deux thèmes distincts :
a) le calcul algébrique et la formation des professeurs : entre sens et technique ;
b) le devenir de la formation professionnelle dans la réforme de la formation des enseignants. Le deuxième de ces thèmes est à l'évidence d'une actualité toute brûlante : dans ce dossier compliqué de la formation des maîtres, il est naturel et important que les IREM soient une force de vigilance, mais aussi de proposition. L'IREM de Basse-Normandie entend y prendre sa part.

Pierre Ageron

Repères IREM *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

Sommaire du numéro 73 Octobre 2008

Sommaire du numéro 74 janvier 2009

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http ://www.univ-irem.fr/ *puis cliquez sur REPERES (dans bandeau gauche vertical), ensuite sur CONSULTATION. (Les nombres en rouge indiquent qu'au moins un article de ce numéro a été mis intégralement en ligne ; les nombres en vert indiquent que tous les articles de ce numéro sont intégralement en ligne)*
Pour soumettre des articles au comité de rédaction de Repères IREM, contacter : yves.ducel@univ-fcomte.fr
Pour vous abonner à Repères IREM ou acheter séparément des numéros, contacter :
TOPIQUES Éditions, 71, rue de Queuleu, 57000 METZ, France
Téléphone & télécopie : 09 71 29 86 58, adresse électronique : topiqueseditions@wanadoo.fr
Prix d'un abonnement (4 numéros par an) : Métropole : Établissements, 40 euros ; Particuliers, 32 euros
DOM-TOM ou Etranger (par avion) : Etablissements, 51 euros ; Particuliers, 43 euros

Prix au numéro : 11 euros + frais d'expédition si envoi par avion.

Les mathématiques en Discipline non linguistique, à notre avis, ce sont ...

Un groupe de travail de l'IREM de Basse-Normandie sur l'enseignement des mathématiques en langue étrangère en section européenne (ou en section internationale) de lycée s'est constitué dans l'académie et il se réunit depuis novembre 2008. Certains de ses membres participent aussi au collectif national de l'APMEP sur le même sujet, formé lors des Journées Nationales 2007 à Besançon. Le texte qui suit, élaboré par ce collectif, a servi de base de réflexion pour le lancement du groupe bas-normand.

Des différences importantes. Les témoignages de chacun sur les modalités de ce cours permettent de constater combien chaque lycée fonctionne différemment de celui de l'académie voisine sur autant de points que l'horaire hebdomadaire, la collaboration avec le collègue de langue, la répartition des élèves selon les filières à partir de la première, l'existence d'un échange avec l'étranger ou non, l'évaluation à l'épreuve du bac, la concertation avec les IPR de math, la formation continue... A ce jour, le B. O. ne fixe pas de cadre précis à tous ces points et laisse une grande marge de liberté selon les moyens locaux.

L'épreuve du baccalauréat. Rappelons dans un premier temps la forme de l'épreuve orale de DNL au bac, fixée par le B. O. : un sujet à préparer en vingt minutes et à présenter devant deux examinateurs, l'un pour les mathématiques et l'autre pour l'anglais. Le sujet est composé d'un texte en langue étrangère inconnu, court, environ une quinzaine de lignes, suivi dans de nombreuses académies de quelques questions mathématiques, le tout tenant en gros sur une page A4. Le candidat expose le fond mathématique du sujet, éventuellement en s'appuyant sur les questions, quand elles existent. Si le candidat est issu de filière L, ce contenu mathématique peut aussi être de la culture mathématique. Les examinateurs posent des questions plus larges dans un souci permanent d'interdisciplinarité sur les sujets étudiés en classe pendant l'année en s'appuyant sur la liste fournie par le candidat. Cette note d'oral compte pour 80% de la note finale et la note de contrôle continu donnée par son enseignant habituel pour 20%.

Ce que l'enseignement de DNL apporte aux élèves. Nous sommes plusieurs enseignants de DNL mathématiques en exercice à penser que l'usage d'une langue étrangère non maîtrisée par les élèves peut devenir un support pour acquérir de nouveaux contenus mathématiques sous un angle nouveau et à un rythme différent que ces mêmes contenus s'ils étaient dispensés en français. Dans la communication du savoir, l'usage de la langue étrangère permet une approche différente et peut évoquer des aspects mathématiques inattendus chez l'élève qu'il lui appartiendra ensuite de s'approprier puis de restituer. Il améliorera ensuite naturellement autant la précision mathématiques que sa maîtrise linguistique. Nous tentons, modestement, dans le suite de ce texte d'exposer des pistes qui sous-tendent la préparation de nos cours de DNL.

Le contenu mathématique. Il s'appuie sur le programme officiel de la classe sans pour autant y être strictement limité. On peut proposer des extensions aux notions enseignées « hors programme » dans la mesure où elles sont jugées facilement accessibles aux élèves. Ainsi, si on présente des statistiques en seconde, on pourra proposer aussi les quartiles à la suite de la médiane, bien que ceux-ci figurent au programme de première. Ce cours de DNL, quand il s'inscrit en heures supplémentaires sur le temps réglementaire de mathématiques de la classe, devient une opportunité pour accorder du temps à l'expérimentation, à la conjecture sans la contrainte du programme annuel à boucler. C'est par exemple l'occasion de construire réellement en carton les objets étudiés en géométrie dans l'espace pour les observer et les décrire ensuite. On peut aussi proposer une connaissance culturelle du contexte de la notion étudiée, par exemple sur le thème des solides de Platon en seconde, découvrir les symboles que les Grecs leur avaient associés dans l'Antiquité, ou encore la vision qu'avait Kepler du mouvement des planètes connues au seizième siècle. Cela peut faire l'objet de dossiers par groupes dans la classe puis de communication par exposés, notamment en exploitant des thèmes d'histoire des mathématiques ou des interviews de mathématiciens.

Il est nécessaire lorsqu'on choisit un sujet de s'assurer qu'il offre bien l'occasion de parler en classe en langue étrangère, ce qui privilégie des thèmes qui ont un arrière-plan culturel plutôt que des questions purement techniques.

D'un point de vue linguistique, il est important que le contenu mathématique soit nouveau pour les élèves afin qu'ils ressentent quasi physiquement qu'ils peuvent acquérir des connaissances par le vecteur d'une langue étrangère. On souhaite éviter la sensation de traduire en français des contenus déjà connus. A aucun moment, il ne s'agit d'apprendre la langue en elle-même ; à tout moment, il s'agit d'utiliser cette langue étrangère, y compris de façon imparfaite. Dans ce but, on ne corrige pas les fautes de grammaire des élèves tant qu'ils restent compréhensibles. Il s'agit avant tout de les faire parler et écrire par eux-mêmes. Cela passe souvent dans un premier temps par la reformulation, voire la répétition à voix haute en classe de la conjecture qui vient juste d'être émise. Le vocabulaire mathématique nouveau dans la langue émerge au fur et à mesure du déroulement du temps de la classe et dans l'idéal, devient leur demande (« Madame, how do you say dénominateur ? »). Ces nouveaux mots ont plus de chance d'être réinvestis à l'avenir quand ils émergent du vécu des élèves. On leur demande aussi d'en mémoriser quelques uns par séance, éventuellement interrogation rapide de vocabulaire à l'appui.

Le travail des élèves et son évaluation. L'expérience montre en classe de seconde que les élèves utilisent les interrogations de vocabulaire pour se rassurer sur leur travail en DNL. Ils mettent du temps à modifier leurs façons de travailler en vue d'un compte-rendu et ils se montrent plus volontaires au début si on présente l'activité à réaliser pendant le cours de façon scolaire, en faisant évoluer la méthode de façon progressive. La classe de seconde en DNL semble faire l'objet d'une pédagogie un peu à part utilisant de préférence des thèmes courts sur une ou deux séances. Les deux années suivantes de première et terminale deviennent alors le temps de thèmes plus étalés sur le temps, sur lesquels on pourrait présenter des aspects différents. C'est aussi à partir de la première qu'on peut commencer à orienter quelques cours vers la forme de l'épreuve orale au baccalauréat.

L'évaluation du travail des élèves nous semble difficile à uniformiser à ce stade. Elle peut dépendre aussi de l'existence ou non d'un échange avec un groupe d'élèves d'un pays étrangers d'une part, de la présence d'une collaboration avec le collègue de langue d'autre part. Plusieurs suggèrent pour les travaux écrits une double correction du type annotée en rouge pour les mathématiques et en vert pour les corrections linguistiques. On peut envisager cette double correction en collaboration avec le collègue de langue.

Un enseignement différent La DNL selon nous, ce n'est pas traduire mot à mot toutes les questions détaillées pour faire une étude de fonction par exemple comme cela est fréquent pour la préparation au baccalauréat en France. Ce n'est pas non plus demander des séries de calculs techniques comme le calcul de fonctions dérivées. L'évaluation au cours de l'année peut être différente du devoir surveillé en classe rédigé en temps limité et de façon strictement individuelle. Au contraire, on peut la rapprocher des pratiques de TPE où la production serait écrite sous forme de compte-rendu documentaire et/ou orale sous forme d'exposé à la classe.

Pour résumer la réalité pratique de tous les enseignants de DNL mathématiques, sachez qu'il faut se documenter et réaliser ses séquences de cours de A à Z : il n'existe à ce jour aucun manuel scolaire sur lequel on puisse se reposer. On ne peut compter son temps ni sa peine pour la préparation de ce cours, qui, une fois réalisée, s'avère souvent pleine de surprises en classe. Les réactions des élèves sont très souvent différentes de ce qu'on avait prévu. Notre collectif s'est muni d'un espace internet de mutualisation des travaux de tous afin de nous permettre de mieux gérer le temps investi, puisque tous les enseignants de DNL ont aussi la plus grande part de leur service sur des cours en français.

Pour le collectif, Odile Jenvrin

Nombres relatifs dans les manuels scolaires français et saoudiens[1]

Cet exposé s'inscrit dans le cadre d'un questionnement général sur la manière dont les manuels scolaires contemporains, dans les pays arabes du Golfe et notamment en Arabie saoudite, prennent en compte les changements fondamentaux dans le domaine didactique. Dans le système scolaire français, ces changements ont été considérables au cours des deux dernières décennies, suite à des travaux de recherches très importants en didactique des mathématiques et des sciences. En revanche, il est important de constater que les manuels scolaires de mathématiques de niveau collège, en Arabie saoudite ou dans les autres pays arabes, reflètent une grande différence par rapport aux manuels scolaires français tant par le contenu que la forme. Cette différence se manifeste par la persistance de la terminologie ensembliste, aussi bien en algèbre qu'en géométrie, et par des activités d'initiation restant très limitées. Ceci dit, l'ensemble des pays arabes du Golfe se réfère principalement aux programmes américains et à ceux de pays anglo-saxons, ce qui rend notre tache délicate et nous suggère un champ de recherche assez vaste.

L'analyse que nous avons menée à travers des manuels saoudiens et divers manuels français concernant la forme, notamment les contenus et les méthodes pédagogiques, nous a permis d'approfondir les différences existant entre les deux institutions éducatives française et saoudienne. Ainsi et dans les manuels saoudiens nous constatons l'influence de la religion et de son patrimoine historique sur la façon dont les rédacteurs de ces manuels conçoivent l'enseignement des mathématiques. Nous avons remarqué que la théorie des ensembles a servi comme outil au service de la religion et des pratiques religieuses. Elle a pris sens par référence à des attentes dogmatiques qui ont influencé sensiblement le choix d'activités et d'exercices, sans exclure, bien sûr, les repères de la vie quotidienne. Ce rapport au savoir semble favoriser davantage, dans les manuels saoudiens, une pédagogie basée sur les convictions religieuses. La dimension patrimoniale, historiquement très riche, a été, elle-aussi, bien présente à travers de multiples activités et exercices portant sur les valeurs, la culture et l'identité musulmane, en voici deux exemples :

Texte arabe	عيّن ما يمثل "مجموعة" من بين العبارات التالية: 1) أشهر السنة الهجرية. 2) حكام الدولة السعودية الأولى. 3) المساجد الواسعة في مدينة تبوك
Traduction	*Parmi les phrases suivantes, quelles sont celles qui représentent un ensemble :* 1. *Les mois de l'année hégirienne* (l'année musulmane) 2. *Les gouverneurs du premier état saoudien.* 3. *Les mosquées spacieuses à Tabuk (Ville d'Arabie saoudite)*
Page	6
Type d'activité	Exercices (1-1)
Notion mathématique	Les ensembles
Curriculum caché	Identité saoudienne et musulmane

[1] Cet exposé s'inscrit dans une étude beaucoup plus large qui a fait l'objet de notre thèse de doctorat intitulée : « *L'enseignement des nombres relatifs. Evolution curriculaire dans les pays du Golfe et en France, étude comparative et propositions didactiques* » (université de Rouen, 2006)

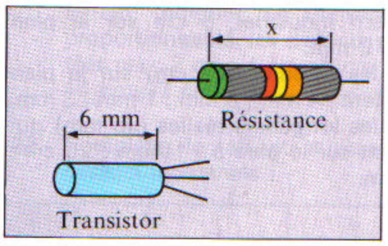
Texte arabe	ذكر عناصر المجموعة التالية : مجموعة الخلفاء الراشدون
Traduction	*Cite les éléments de l'ensemble suivant :* *Ensemble des Califes Rashidûn* (bien dirigés, inspirés) *;*
Page	4
Type d'activité	Exercice d'entraînement
Notion mathématique	Les éléments de l'ensemble
Curriculum caché	Rappel historique des quatre premiers Califes prestigieux de l'Islam

Tableaux 1 - Extraits textuels, manuel saoudien de 5° (garçon) 1ère partie. Edition 1998.

En France, les rédacteurs des manuels ont pleinement profité des travaux en didactique, produits notamment par différents IREM, en respectant rigoureusement les ambitions pédagogiques prescrites dans les programmes. Ainsi, nous avons constaté que les manuels français consacrent la partie la plus importante aux activités pratiques, alors qu'ils réduisent à l'essentiel la partie théorique, et contrairement au style magistral dominant dans les manuels saoudiens, ils nous semblent offrir plus de place à la découverte. Nous soulignons aussi que la question du sens a pris une place primordiale dans les manuels français, dans la mesure où on propose des activités et des exercices qui sont en interaction avec les autres disciplines et avec la vie quotidienne, comme le montrent les exemples suivants :

<table>
<tr><td>Texte</td><td>

c/ Agrandissement



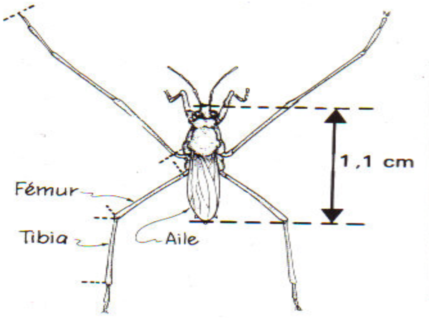
Le dessin du transistor mesure 1,2 cm, celui de la résistance mesure 1,6 cm. Quelle est la longueur réelle de la résistance ?

<table>
<tr><td>Plan (cm)</td><td>1,2</td><td>1,6</td></tr>
<tr><td>Réalité (mm)</td><td>6</td><td>x</td></tr>
</table>

$1{,}2 \times x = 1{,}6 \times 6$ d'où $x = \dfrac{1{,}6 \times 6}{1{,}2}$ soit $x = 8$ mm.

</td></tr>
<tr><td>Page</td><td>113</td></tr>
<tr><td>Type d'activité</td><td>Exemple</td></tr>
<tr><td>Notion mathématique</td><td>Echelles</td></tr>
<tr><td>Rapport au réel</td><td>Physique/technologie</td></tr>
</table>

Tableau 2 - Extraits textuels, manuel français de 5°. Pythagore 1991.

<table>
<tr><td>Texte</td><td>Le gerris est un petit insecte qui vit à la surface de l’eau des bassins.
Déterminer l’échelle du dessin, sachant que le corps de l’insecte a une longueur de 1,1 cm.


1. Un gerris adulte (Gerris Remigis).
a) Compléter le tableau
<table><tr><td></td><td>Fémur</td><td>Tibia</td><td>Aile</td><td>Grande patte avant</td></tr><tr><td>Longueur réelle : (mm)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Page</td><td>118</td></tr>
<tr><td>Type d’activité</td><td>Exercice (chercher)</td></tr>
<tr><td>Notion mathématique</td><td>Echelles</td></tr>
<tr><td>Rapport au réel</td><td>S.V.T (sciences de la vie et de la terre)</td></tr>
</table>

Tableau 3 - Extraits textuels, manuel français de 5°. Pythagore 1991.

Texte	***Alice aux pays des merveilles*** *Au cours de ses aventures, Alice a été maintes fois agrandie ou rapetissées.* *Au début de l’histoire, elle mesure 144 cm. A la première aventure, sa taille est divisée par 12, à la suivante, multipliée par 3, puis divisée par 6 et encore divisée par 2 puis remultipliée par 5 et enfin par 10.* *a. Ecrire une expression qui permet d’obtenir la taille d’Alice à la fin de l’histoire.*
Page	15
Type d’activité	Exercice de base, n°14
Notion mathématique	Convention de propriétés

Tableau 4 - Extraits textuels, manuel français de 5°. Coll. Transmaths 2001.

Les nombres relatifs dans les manuels scolaires français et saoudiens

Les manuels scolaires français (édités entre 1990 et 1994) ne définissent pas tous les nombres relatifs de la même manière. Ainsi nous dénombrons trois présentations différentes, bien qu’elles soient mathématiquement équivalentes :

1ère présentation : On définit les nombres relatifs sans faire intervenir la notion de distance ni celle de valeur absolue. Dans ce cas, on définit le nombre relatif comme étant un nombre, entier ou décimal, précédé par un signe (+ ou -) :

1 Les nombres relatifs

Les nombres précédés du signe – sont des nombres négatifs.

Les nombres précédés ou non du signe + sont des nombres positifs.

Les nombres positifs ou négatifs s'appellent des nombres relatifs.

....

Figure 1 (Maths 6°, Hachette : 2000)[2]

Cette présentation est aussi adoptée par le manuel saoudien. Comme le montre l'extrait arabe suivant :

وفي الحياة أمثلة كثيرة تُعبر عن وضعين متعاكسين، منها:

الربح (+) ، والخسارة (−) . الارتفاع فوق سطح البحر (+) ، والانخفاض تحت سطح البحر (−) .

تُسمى الأعداد المسبوقة بإشارة (+) **الأعداد الموجبة** ، والأعداد المسبوقة بإشارة (−) **الأعداد السالبة** ، فمثلاً:

(+٧) ، (+٢٠) ، (+١) ، .... أعداد موجبة ، والأعداد (−١) ، (−٧) ، (−٤) ، ...... أعداد سالبة.

مجموعة الأعداد الصحيحة ٢٣

Figure 2 (Manuel saoudien 5°, 2002)

Traduction de la définition : *On appelle les nombres précédés par le signe (+) nombres positifs, et les nombres précédés par le signe (-) nombres négatifs.*

2ème présentation : On définit les nombres relatifs en faisant intervenir la notion de valeur absolue. Ainsi, le nombre relatif est déterminé par son signe + ou – et par un nombre que l'on appelle valeur absolue :

1. Nombres relatifs

- Un **nombre relatif** s'écrit avec un **signe + ou –** suivi d'un nombre appelé **valeur absolue** du nombre relatif.

Exemples : $+\ 12$; $-\ 3{,}7$; $+\ 0{,}07$; $-\ \frac{1}{3}$ sont des nombres relatifs.

Un nombre relatif est positif si son signe est +
Un nombre relatif est négatif si son signe est –

Remarques :

- Les nombres positifs s'écrivent souvent sans le signe +

Exemple : $+\ 7 = 7$

Figure 3 (Math 6°, Belin : 1990)

[2] C'est la même présentation que celle de l'édition de 1996.

3ème présentation : On définit les nombres relatifs en faisant intervenir la notion de distance. Dans ce cas, le nombre relatif est déterminé par son signe positif ou négatif, et par sa distance à zéro :

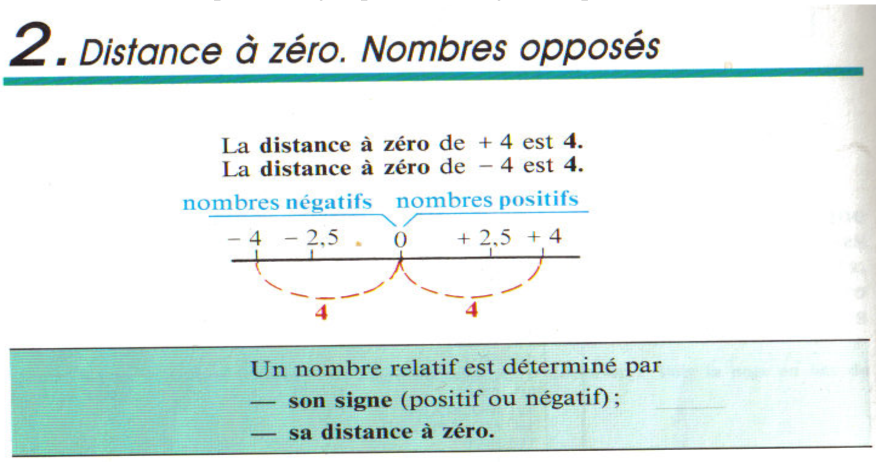


Figure 4 (Mathématiques 6°, Hachette : 1990)

Il est bien clair que la plupart des manuels scolaires, correspondant aux nouveaux programmes (édités à partir de 1996), ont adopté une présentation proche de celle de la première. C'est-à-dire sans prendre appui sur la notion de valeur absolue ni celle de distance. C'est le cas pour les collections : *Cinq sur cinq 6°* (Hachette ; 1996, 2000), *Maths 6°*(Bordas ; 1996, 2000), *Transmath 6°*(Nathan ; 1996) et *Maths 6°* (Magnard ; 2000). Cette tendance est bien compréhensible dans la mesure où l'emploi de la notion de valeur absolue, dans la définition des nombres relatifs, relève de la mathématique formelle. Ces manuels répondent donc fidèlement aux exigences consignées par les rédacteurs des programmes.

Quant à l'addition des relatifs, nous avons constaté que les manuels français et saoudiens ont adopté la même pédagogie afin d'illustrer la comparaison et l'addition des nombres relatifs, en faisant intervenir des problèmes de bilan : gains / pertes, avant / après J.-C., ainsi que les températures, le niveau de la mer, le déplacement sur la droite graduée, etc. Néanmoins, les manuels français n'adoptent pas tous la même pédagogie pour représenter l'addition des relatifs, ainsi nous distinguons, là aussi, trois méthodes différentes :

1ère méthode : des manuels qui s'appuient sur la notion de distance pour définir l'addition des relatifs, comme nous le montre l'extrait suivant :

1 Addition de deux nombres relatifs

Règle 1 : **Pour additionner deux nombres relatifs de même signe :**
- **on additionne d'abord les distances à zéro des deux nombres ;**
- **on donne ensuite au résultat le signe commun aux deux nombres.**

(− 2,5) + (− 4) = − 6,5 (+ 2,5) + (+ 4) = + 6,5

on calcule 2,5 + 4 = 6,5
et on écrit le signe commun devant ce résultat

Règle 2 : **Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires :**
- **on soustrait d'abord la plus petite distance à zéro de la plus grande ;**
- **on donne ensuite au résultat le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.**

Figure 5 (Maths 5°, Hachette : 1997)

Ici, l'addition et la soustraction se font à l'aide de la distance à zéro, et pour additionner deux nombres relatifs de même signe, on additionne leurs distances à zéro, c'est-à-dire les valeurs ou les nombres, sans tenir compte de leurs signes. Ensuite, si les deux nombres sont positifs, la somme l'est aussi, sinon elle est négative.

2ème méthode : des manuels qui s'appuient indirectement sur la notion de distance comme méthode pour expliquer l'addition de deux nombres relatifs de signes contraires :

1. Calculer la somme de deux nombres relatifs

a) Les deux nombres sont de même signe

Exemple : calculer $A = 13 + 2{,}5$; $B = -7 + (-5)$.

Méthode

Si les deux nombres sont de **même signe**, leur somme a le **même signe** qu'eux. Il suffit d'additionner les nombres sans leur signe.
$A = 13 + 2{,}5 = \mathbf{15{,}5}$; le résultat est positif.
$B = -7 + (-5) = \mathbf{-12}$; -7 et -5 sont négatifs, le résultat est négatif.

b) Les deux nombres sont de signes contraires

Exemple : calculer $C = 7 + (-11)$; $D = -15 + 20$.

Méthode

Si les deux nombres sont de **signes contraires**, repérer d'abord celui qui est le plus éloigné de zéro. Le résultat aura le signe de ce nombre. Il faut soustraire les nombres écrits sans leurs signes.
$C = 7 + (-11) = \mathbf{-4}$; $11 > 7$, le résultat est négatif.
$D = -15 + 20 = \mathbf{5}$; $20 > 15$, le résultat est positif.

Figure 6 (Math 5°, Bordas : 2001)

Dans l'extrait précédent, les rédacteurs n'emploient pas directement le mot *distance.*En revanche, ils écrivent : *si les deux nombres sont de signes contraires, repérer d'abord celui qui est le plus éloigné de zéro.* Ce qui veut dire clairement : repérer la distance à zéro.

3ème méthode : ceux qui expliquent l'addition à partir d'exemples numériques :

E.S.S.E.N.T.i.E.L

1 ■ *Addition de deux nombres relatifs*

Addition de deux nombres de même signe

Exemples : $(+4{,}5)+(+2{,}3) = +6{,}8$
$(-4{,}5)+(-2{,}3) = -6{,}8$

on calcule $4{,}5+2{,}3 = 6{,}8$
on donne à la somme le signe commun aux deux nombres

Addition de deux nombres de signes contraires

Exemples : $(+4{,}5)+(-2{,}3) = +2{,}2$ ← on met + car $4{,}5 > 2{,}3$
on calcule $4{,}5-2{,}3 = 2{,}2$
$(-4{,}5)+(+2{,}3) = -2{,}2$ ← on met − car $4{,}5 > 2{,}3$

La somme de deux nombres opposés est **zéro** : $(+4)+(-4) = 0$.

Figure 7 (Pythagore 5°, Hatier : 1991)

Ainsi et pour éviter l'emploi de la notion de distance dans l'introduction de l'addition des relatifs, les rédacteurs français ont préféré recourir à la comparaison des nombres décimaux auxquels les élèves sont habitués (Figure 7). Ici, on schématise les opérations afin que l'élève visualise mieux cet algorithme d'addition.

En poursuivant les différents schèmes d'addition et de soustraction des nombres relatifs, proposés par les rédacteurs des manuels scolaires, nous nous rendons compte qu'il est pratiquement impossible de se passer de la notion de distance comme invariant opératoire "didactique".

Dans le manuel saoudien, les supports utilisés pour l'introduction à l'addition sont le repérage sur une droite graduée, mais aussi un jeu de jetons en plastique de diverses couleurs dont le principe est simple : un jeton rouge représente le nombre entier négatif (-1), et un jeton blanc représente le nombre (+1). Le fait que le nombre (-1) soit l'opposé de (+1), et que leur somme soit égale à zéro, cela se traduit au niveau des jetons par la règle suivante : un jeton rouge annule un jeton blanc et vice-versa. Ainsi, si l'on a 3 jetons rouges et 5 blancs à additionner, 3 jetons rouges et 3 jetons blancs s'annulent mutuellement, les deux jetons restants, de couleur blanche, signifient que le résultat de cette addition est (+2). Comme le montre l'extrait suivant

(٦-٣) جمع الأعداد الصحيحة

(١) الجمع باستخدام قطع العد:

لاكتشاف قواعد جمع الأعداد الصحيحة، سنستخدم بعض قطع العد بلونين مختلفين. سنختار القطع الحمراء لتمثل الأعداد الصحيحة السالبة، والقطع البيضاء لتمثل الأعداد الصحيحة الموجبة. فكل قطعة حمراء تمثل −١ ، و كل قطعة بيضاء تمثل +١ ، وبما أنهما تمثلان عددين كلا منهما معكوس الآخر ، فإن مجموعهما يساوي الصفر، وتكون أحداهما ألغت الأخرى ونعبر ذلك بالشكل:

نشاط (١)

– اكتب عدد قطع العد البيضاء .

– اكتب عدد قطع العد الحمراء .

– إذا أخذنا بمبدأ حذف كل زوج من القطع المتعاكسة ، فما العدد الذي تمثله القطع مجتمعة؟

– إذا اخترنا عدداً من القطع الحمراء مساوياً لعدد القطع البيضاء ، فما العدد الذي تمثله القطع مجتمعة؟

– إذا اخترنا مجموعتين من قطع العد الحمراء فما العدد الذي تمثله القطع مجتمعة ؟

– إذا اخترنا مجموعتين من قطع العد البيضاء فما العدد الذي تمثله القطع مجتمعة ؟

من النشاط السابق نستطيع استخدام قطع العد لتمثيل عملية جمع الأعداد الصحيحة وإيجاد حاصل الجمع

مثال (١)

(+٣) + (+٤) تعني:

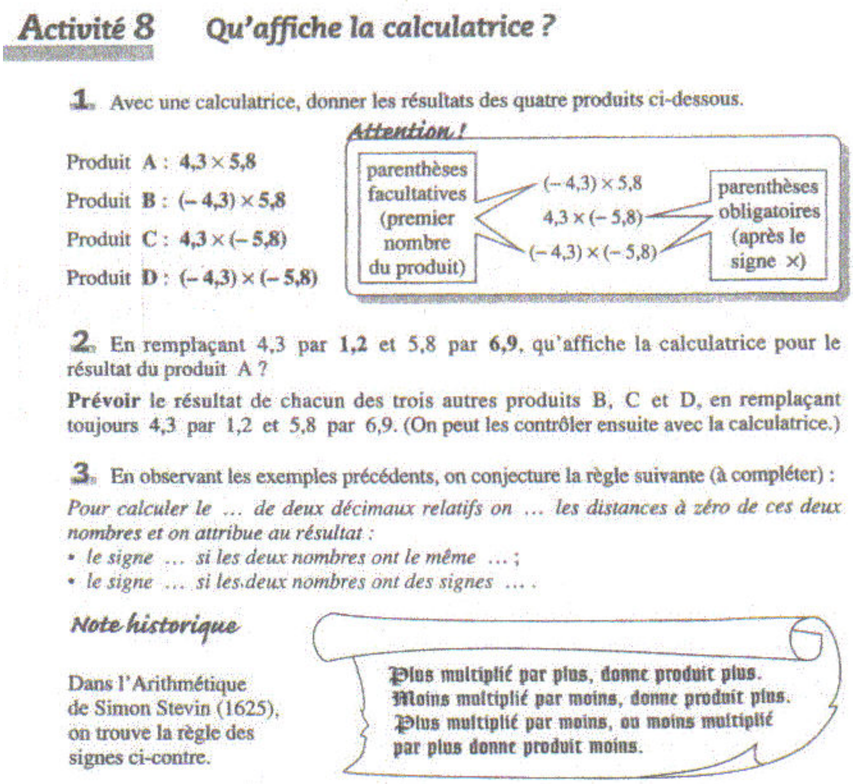
أي إن : (+٣) + (+٤) = (+٧)

Figure 8 (Manuel saoudien 5°, 2002)

En effet, l'apprentissage de l'addition des nombres relatifs à l'aide de jetons leur permet d'acquérir un *statut de nombre*, et stimule aussi l'image mentale de l'élève. En revanche, l'utilisation d'un tel mode pour illustrer la soustraction de deux nombres relatifs de signes contraires, est beaucoup moins évidente. Prenons par exemple l'opération (-6) - (+2), qui est d'ailleurs proposée par le manuel saoudien. (-6) représente 6 jetons rouges, (+2) représente 2 blancs. Que dire aux élèves ? Enlevez 2 jetons blancs à 6 rouges ? Une phrase qui n'a pas de sens. Devant une telle difficulté, le manuel en effet détourne la question, en proposant toute une série de questions visant à faire construire une configuration de 8 jetons rouges et 2 jetons blancs, donc équivalente à celle de 6 jetons rouges, mais dont il est possible d'ôter 2 jetons blancs.

En fait, c'est dans les activités d'introduction à la multiplication de deux nombres négatifs que la différence se creuse entre les deux pays, car on a du mal à trouver un modèle dit « concret » ou « commercial » valable aussi bien dans le champ conceptuel des structures additives que dans le champ conceptuel des structures multiplicatives. En d'autres termes, pour additionner deux nombres négatifs, on peut aisément trouver toute une panoplie de modèles du genre : gain/dette, thermomètre, représentation graphique. . .etc., tels qu'ils sont déjà présentés dans les manuels scolaires actuels. Mais n'est-ce pas précisément ces modèles qui font obstacle à la multiplication de deux nombres négatifs ? Sinon, comment expliquer à nos élèves qu'en multipliant 1000 euros de dette par 1000 euros, nous parviendrons, semble-t-il, à avoir une fortune de 1000.000 euros ? !

Eu égard à cet obstacle épistémologique, et pour justifier la règle des signes dans les manuels scolaires français, les rédacteurs passent d'une simple manipulation de la calculatrice au recours à un petit récit d'histoire, comme le montrent les extraits suivants :



Activité 8 *Qu'affiche la calculatrice ?*

1. Avec une calculatrice, donner les résultats des quatre produits ci-dessous.

Produit **A** : **4,3 × 5,8**
Produit **B** : **(– 4,3) × 5,8**
Produit **C** : **4,3 × (– 5,8)**
Produit **D** : **(– 4,3) × (– 5,8)**

Attention !
parenthèses facultatives (premier nombre du produit) — (– 4,3) × 5,8 ; 4,3 × (– 5,8) ; (– 4,3) × (– 5,8) — parenthèses obligatoires (après le signe ×)

2. En remplaçant 4,3 par **1,2** et 5,8 par **6,9**, qu'affiche la calculatrice pour le résultat du produit A ?
Prévoir le résultat de chacun des trois autres produits B, C et D, en remplaçant toujours 4,3 par 1,2 et 5,8 par 6,9. (On peut les contrôler ensuite avec la calculatrice.)

3. En observant les exemples précédents, on conjecture la règle suivante (à compléter) :
Pour calculer le … de deux décimaux relatifs on … les distances à zéro de ces deux nombres et on attribue au résultat :
- *le signe … si les deux nombres ont le même … ;*
- *le signe … si les deux nombres ont des signes … .*

Note historique

Dans l'Arithmétique de Simon Stevin (1625), on trouve la règle des signes ci-contre.

Plus multiplié par plus, donne produit plus.
Moins multiplié par moins, donne produit plus.
Plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus donne produit moins.

Figure 9 (Hachette 4°, 1998)

Dans l'extrait précédent, on introduit la multiplication des nombres relatifs en s'appuyant directement sur les résultats fournis par la calculatrice, ensuite et après quelques calculs, les élèves constatent la règle des signes, celle-ci est aussitôt admise pour ces nouveaux nombres et puis appliquée.

1 / NOMBRES RELATIFS

3 Produit de deux nombres négatifs

Quand les mathématiciens ont inventé la multiplication des nombres relatifs, ils ont voulu que les règles de calculs connues pour les nombres positifs s'appliquent aussi aux nombres négatifs.
Par exemple : $a \times 0 = 0$ et $k(a + b) = ka + kb$.
Comme nous allons le voir, ceci les a amenés à adopter une règle surprenante : « le produit de deux nombres négatifs est positif ».

A. Les tracas d'un certain Stendhal

L'écrivain STENDHAL (1783-1842) aimait beaucoup les mathématiques. Il raconte ici l'insatisfaction d'un élève auquel on n'a jamais expliqué pourquoi le produit de deux négatifs est positif.

Lire ce texte de STENDHAL.

[...] personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus ($- \times - = +$). C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle algèbre.
On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.
M. Chabert (1) pressé par moi s'embarrassait, répétait sa leçon, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « *Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange* (2), *qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise...* » [...]
J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que « − par − donne + » soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables (3).

(1) M. CHABERT était le professeur de mathématiques.
(2) EULER et LAGRANGE sont deux grands mathématiciens du 18ᵉ siècle.
(3) Indubitable : dont on ne peut douter.

B. Cherchons à comprendre

1. Lire le texte suivant.

On se demande combien vaut $(-3) \times (-2)$.
Appelons p ce mystérieux produit.
D'une part, on a :

$$(-3) \times (-2 + 2) = (-3) \times 0 = 0 \longleftarrow \text{car } a \times 0 = 0$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}(-3) \times (-2 + 2) &= (-3) \times (-2) + (-3) \times 2 \longleftarrow \text{car } k \times (a + b) = ka + kb \text{ (distributivité)} \\ &= p + (-6) \\ &= p - 6\end{aligned}$$

Donc $p - 6 = 0$. Donc $p = 6$. Conclusion : $(-3) \times (-2) = 6$.

2. Sur ce modèle, démontrer que $(-7) \times (-6) = 42$.
3. Trouver les nombres x et y tels que $(-4) \times x = 20$ et $y \times (-9) = 90$.
(On pourra vérifier avec une calculatrice.)

10

Figure10 (Pythagore 4°, Hatier 98)

Dans la démarche épistémologique ci-dessus, on exclut le recours à la calculatrice, en laissant le narrateur, en l'occurrence *Stendhal* lui-même, expliquer aux élèves la logique bien fondée de l'acceptation de la règle :

moins par moins donne plus. Ensuite on leur présente une preuve algébrique homologue à celle proposée par le mathématicien allemand Hermann Hankel (1839), qui a mis fin à l'épopée de la règle des signes.

Nous trouvons aussi, dans d'autres manuels, des situations dans lesquelles on développe une démarche consistant à prolonger la règle de construction d'une table de multiplication :

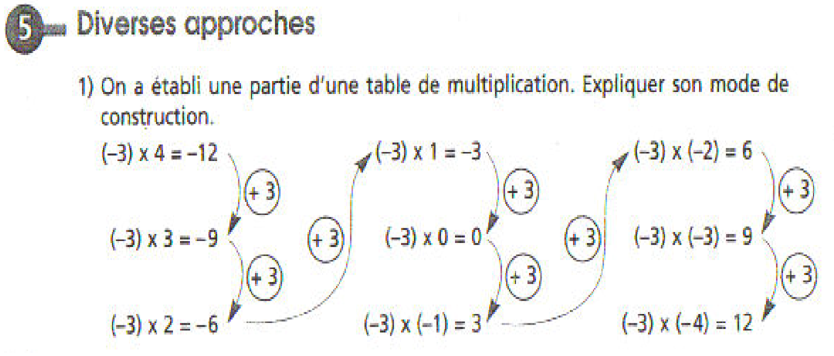


Figure 11 (Maths 4°, Magnard 2002)

Cette démarche qui a été proposée par l'APMEP[3] (1980), a été adoptée aussi par le manuel saoudien mais après une légère modification[4] :

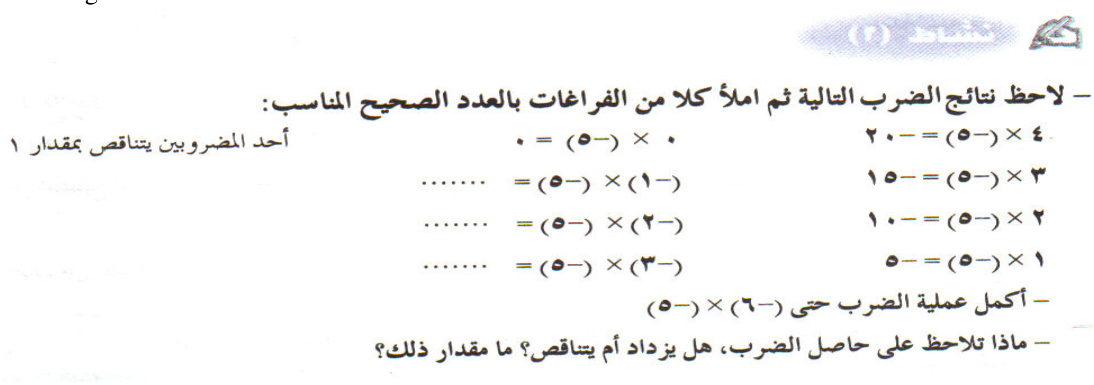


Figure 12 (Manuel saoudien de 5°, 2002)

En effet, l'idée précédente consiste à faire une transition de l'espace multiplicatif vers l'espace additif, afin de déduire le résultat d'un produit de deux nombres négatifs. Ici par exemple, -12, -9, -6, -3, 0, 3,. . ., (dans le manuel saoudien : -20, -15, -10, -5, 0,. . .)appartiennent au champ conceptuel des structures additives, on ajoute donc à chaque fois le nombre 3 (5 dans le manuel saoudien), pour passer d'un terme au terme suivant. Cette démarche est aussi basée sur la notion de suite numérique qui est loin d'être nouvelle pour les élèves français de 4e, parce qu'ils sont familiers, dès le primaire, de phénomènes qui se répètent sans cesse selon une même loi : la succession des jours, des années, les marées, la croissance annuelle d'un arbre...etc.

En conséquence, il est incontestable que les rédacteurs des programmes français ont toujours une certaine sensibilité voire hésitation envers l'algèbre depuis l'époque des mathématiques modernes. Ainsi, et malgré les derniers changements des programmes français, nous avons constaté un éloignement démesuré du calcul algébrique, créant une rupture au sein de l'enseignement des nombres relatifs au secondaire. Ceci en dépit des travaux qui ont été faits depuis en didactique des mathématiques. Dans l'institution saoudienne, le problème est bien différent, car les mathématiques modernes sont toujours présentes dans les programmes, et le calcul algébrique fait partie intégrante des programmes mathématiques, mais la question du sens reste toujours posée. Cela devrait relancer de nouveau le débat sur l'enseignement des nombres relatifs, en France comme en Arabie saoudite. Il s'agit de s'interroger convenablement sur le rétablissement du lien entre le réel et l'algèbre, de manière progressive dès l'école primaire. Cela donnera sens au calcul mathématique dans ses rapports avec le réel et évitera de se priver de la puissance et de la clarté du calcul algébrique.

Mohamed Ghassan ALAOUF

[3] Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.

[4] Les chiffres « • ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ » dits chiffres *hindi* (indiens) sont actuellement employés dans les pays arabes orientaux, ils correspondent, dans l'ordre, aux chiffres arabes « 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ».

La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez (II)
Deuxième partie : la sinusoïde selon Pitot, de l'espace au plan

Deuxième apparition : ***Le développement du cylindre et d'une de ses sections.***

La deuxième apparition explicite d'une courbe sinusoïde est due au mathématicien Pitot. Cette fois elle est reconnue comme la courbe que l'on obtient en développant un cylindre droit à base circulaire sur lequel est tracé une ellipse par intersection d'un plan non parallèle au plan de la base, mais Pitot reprend la dénomination de Roberval, au nom près de la *Roulette*, devenue *Cycloïde* : la sinusoïde reste pour lui la *Compagne de la Cycloïde*.

Qui est ce M. Pitot ? L'*Index biographique de l'Académie des Sciences*[5] nous apprend qu'il se prénommait "Henri" et que :

"PITOT (*Henri*), [*est*] né à Aramon, Languedoc [Gard], le 29 mai 1695 ; — [*qu'il devient*] adjoint mécanicien, le 9 juin 1724, en remplacement de Beaufort, promu associé mécanicien ; — [*qu'il est promu lui-même*] associé mécanicien, le 20 juillet 1727 ; en remplacement de J[*ean*].-N[*icolas*]. de La Hire [*dit le cadet*], décédé ; — [*qu'il devient*] pensionnaire géomètre, le 18 mars 1733, en remplacement de [*Thomas Fantet de ?*] Lagny, nommé vétéran ; — [*puis*] pensionnaire vétéran, le 17 avril 1742 ; — [*qu'il est*] mort à Aramon, le 27 décembre 1771."

Cet index le présente comme : "*— Physicien. Directeur du canal du Languedoc.*" Son *Éloge* sera lu par Grandjean de Fouchy, le 14 novembre 1772. L'article de l'index est signé : AP.

La sinusoïde fait cette fois l'objet d'un mémoire de Pitot[6], paru en 1724 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* et dont on trouvera plus loin le texte. En effet, celui-ci est introduit par une notice, insérée comme à l'accoutumée dans l'*Histoire de l'Académie... pour la même Année*, dans les pages consacrées à la *Géométrie*, et dont le lecteur trouvera ci-après la teneur.

*
* *

[*Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Année M. DCCXXIV* (1724).]

DES SCIENCES.
GEOMETRIE. // p. 65 //

SUR LA QUADRATURE
de la moitié d'une Courbe, qui est la COMPAGNE
DE LA CYCLOIDE.

[En marge droite :] V. les M. // p. 107.

ON sçait que les Ordonnées de la Cycloïde, ou plustôt de la demi-Cycloïde, paralleles à sa Base, sont égales chacune à l'Ordonnée correspondante du demi-Cercle generateur, plus l'Arc du même demi-Cercle correspondant à l'Ordonnée, pris depuis l'origine du demi-Cercle. On a imaginé une autre Courbe, dont les Ordonnées, posées comme celles de la Cycloïde par rapport au même demi-Cercle generateur, ne seroient égales qu'aux Arcs correspondants du même demi-Cercle. On la peut appeller *Compagne de la Cycloïde*. Il est évident que l'une & l'autre sont Mechaniques, puisque les Ordonnées de la Cycloïde sont en une de leurs parties, & les Ordonnées de la Compagne en leur entier, des Arcs circulaires qu'on suppose rectifiés, & qu'on n'a pas en Geometrie ces rectifications. La derniére & plus grande Ordonnée de l'une & de l'autre Courbe est la même, le

[5] Paris, Institut de France et Gauthier-Villars, 1979, p. 418.

[6] M. PITOT. "Quadrature de la moitié d'une Courbe des arcs, appellée la Compagne de la Cycloide", in *Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Année M. DCCXXIV* (1724). *Avec les Memoires de Mathematique & de Phisique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Academie.* A Paris, De l'Imprimerie Royale, M. D C C X X V I (1726), pp. 65-67 de l'*HARS*, pp. 107-113, planches 8 et 9, p. 112 des *MMPARS*.

demi-Cercle generateur étant le même, car dans la Cycloïde cette derniére Ordonnée est la derniére Ordonnée du demi-Cercle, qui est alors zero, plus une ligne égale à la circonference de ce demi-Cercle, & dans la Compagne c'est cette circonference seule, ce qui est la même chose. La Compagne devient de concave qu'elle étoit, convexe vers son axe, qui est le diametre du demi-Cercle generateur, ou, ce qui est le même, a un point d'inflexion, & ce point répond au centre du demi-Cercle generateur, & peut-être appellé par cette raison le point du milieu de la Courbe ; la Cycloïde n'a point d'inflexion. // p. 66 //

L'aire ou l'espace curviligne de la Compagne de la Cycloïde est renfermé entre le diametre du demi-Cercle generateur, la derniére & plus grande Ordonnée de cette Courbe, & sa circonference. L'aire du demi-Cercle generateur est comprise dans cet espace. Il s'agit d'en quarrer la moitié déterminée par l'Ordonnée de la Courbe qui part du centre du demi-Cercle generateur, cette moitié étant prise du côté de l'origine du demi-Cercle, & de la Courbe. M. Pitot croit que cette Quadrature n'a point encore été trouvée, quoi-qu'elle soit fort simple.

En effet dès qu'on prend à l'ordinaire la Differentielle de l'espace de la Courbe, qui est son Ordonnée indéterminée multipliée par une des portions infiniment petites & égales de son axe, & qu'on integre cette quantité selon les Regles, on a une expression indéterminée de l'espace, où il entre sous differents signes de plus & de moins differents produits d'Abscisses, ou d'Ordonnées, & du rayon du demi-Cercle qui est la seule grandeur constante & connuë. Or la Courbe n'est point quarrable, tant qu'il subsiste dans cette expression quelqu'une de ses Ordonnées, parce qu'elles sont toutes égales à des Arcs circulaires, dont on ne connoît par la grandeur. Mais si dans cette même expression generale & indéterminée, on suppose l'Abscisse égale au rayon du demi-Cercle generateur, les grandeurs qui comprenoient des Ordonnées disparoissent, parce qu'elles sont alors affectées de signes contraires, & il ne reste que le quarré du rayon du demi-Cercle, ce qui fait voir que l'espace curviligne de la moitié de la Courbe, telle que nous venons de la poser, est égal à ce quarré.

M. Pitot apporte encore une autre preuve tirée de ce que cette Courbe est la Compagne de la Cycloïde. Une demi-Cycloïde étant décrite avec son demi-Cercle generateur, si l'on fait un parallelogramme rectangle, dont un des côtés soit le diametre du demi-Cercle, & l'autre la Base ou derniére Ordonnée de la Cycloïde égale à la circonference de ce demi-Cercle, il est très facile de voir que cet espace rectiligne est quadruple du demi-Cercle generateur. Dans cet espace total // p. 67 // sont compris 3 espaces curvilignes partiaux ; le 1er est le demi-Cercle generateur, le 2^{d} est entre la circonference de ce demi-Cercle, la circonference concave de la Cycloïde, & sa base, le 3^{me} est entre la circonference convexe de la Cycloïde, & les deux côtés du rectangle total. Il est démontré que ce 3^{me} espace est égal au demi-Cercle generateur, d'où il suit que le 2^{d} est égal à deux fois ce demi-Cercle.

Chaque Ordonnée de la Cycloïde ayant deux portions, dont l'une est une Ordonnée du demi-Cercle generateur, & l'autre est égale à l'Arc circulaire correspondant, le 2^{d} espace partial que nous considerons ici n'est rempli que des secondes portions des Ordonnées de la Cycloïde égales aux Arcs circulaires. L'espace de la Compagne de la Cycloïde n'est pareillement rempli que d'Ordonnées de la même grandeur. De part & d'autre ces lignes paralleles sont séparées entre elles par le même intervalle toûjours égal, qui est l'infiniment petit du diametre du demi-Cercle generateur, ou, ce qui est la même chose, celles d'une part font de petits parallelogrammes rectangles toûjours égaux à ceux des correspondants de l'autre part. Elles sont de part & d'autre en nombre infini égal. Donc le 2^{d} espace partial de la Cycloïde est égal à l'espace total de la Compagne de la Cycloïde. Or M. Pitot démontre aisément que si de cet 2^{d} espace partial de la Cycloïde on en prend la moitié comme nous avons pris celle de la Compagne, cette moitié est égale au quarré du rayon du demi-Cercle generateur.

Il suit de cette démonstration que l'espace total de la Compagne de la Cycloïde est double du demi-Cercle, & comme dans cet espace est compris le demi-Cercle, si on l'en retranche, le reste lui est égal.

Nous ne dirons rien d'une troisiéme preuve un peu plus compliquée, d'où M. Pitot tire une Regle pour mesurer la force de la Vis. On peut pardonner à l'Art de passer quelquefois les bornes de la necessité absoluë.

[...]

*
* *

Commentaire de la notice de l'*Histoire de la Académie…*

Sans figure, le texte n'est pas très explicite : le lecteur pourra se reporter aux textes de Roberval (dans le premier épisode de ce feuilleton). Il constatera en outre ci-dessous que le *Mémoire* d'Henri Pitot constitue bien une nouveauté quant à la cycloïde ou plutôt quant à sa *compagne*, car il ne s'agit pas pour lui de donner la *n*-ième quadrature relative d'une arche ou d'une demi-arche de cycloïde ou de sa *compagne*, voire d'en faire la rectification, mais bien plutôt de quarrer un certain espace sous la sinusoïde dont l'aire est équivalente au carré du rayon du cercle générateur ; il s'agit donc, cette fois, d'une quadrature absolue, et non d'une quadrature relative. Précisons :

– une quadrature absolue est celle qui permet d'exprimer l'aire limitée par des lignes mixtes, droites ou courbes, par un rapport rationnel avec l'aire d'un carré donné (d'où le mot de "quadrature") : par exemple, lorsque Pitot montre que l'aire "sous" la *Compagne de la Cycloïde* est égale à celle d'un carré construit sur le rayon du cercle générateur, ou lorsqu'Archimède montre qu'un "segment" de parabole vaut les 4/3 d'un certain triangle qu'il contient, ils réalisent l'un comme l'autre une quadrature absolue ; dans le second cas, l'on sait en effet réaliser la quadrature absolue d'un triangle. L'impossibilité, parfois, de réaliser une quadrature ressortit à l'impossibilité de construire, à la règle et au compas, le rapport qui existe entre l'aire cherchée et le carré qui pourrait la "commensurer" : c'est le cas pour celle d'un cercle, que l'on ne peut "rapporter" au carré de son rayon, dans la mesure où le rapport π qui existe entre eux n'est pas constructible, comme il l'aurait été, si c'eût été 22/7 ou 355/113, nombres rationnels ;

– une quadrature relative est celle qui exprime une aire limitée par des lignes mixtes, par un rapport rationnel avec une autre aire limitée par des lignes mixtes : par exemple, lorsque Roberval montre que l'aire comprise entre la *Roulette* et sa *Compagne* est égale à celle d'un demi-cercle générateur, du fait que les deux surfaces comportent les mêmes *indivisibles*, il réalise une quadrature relative. Une quadrature relative peut présenter un intérêt, même si on sait, par ailleurs, réaliser la quadrature absolue de la seconde aire, auquel cas l'on a réalisé du même coup une quadrature absolue de la première. Cela explique les nombreuses tentatives pour réaliser la "quadrature du cercle" (sous-entendu : "absolue"), en se servant d'autres courbes mixtilignes, telles que les lunules, par exemple, ou ce que les Anciens nommaient "quadratrices", obtenues par exemple par composition de mouvements.

D'autre part, on pourrait croire que seules les deux premières méthodes de Pitot ont un intérêt et que la troisième relève du "supplément d'âme" ou de "l'art pour l'art", si l'on en croit les derniers mots de la notice ; c'est vrai, si l'on considère que le but proposé est aisément atteint par les deux premières voies. Mais on va voir que la troisième méthode est intéressante à plus d'un titre : d'une part, Pitot y considère une courbe tracée sur un cylindre qu'il aplanit – on dirait aujourd'hui qu'il le développe – puis une hélice formée dans ce même cylindre, soulignant fort à propos et en digne *neveu* de Descartes, qu'il serait bon que les géomètres s'occupassent de telles courbes qu'il nomme *à double courbure* ; on sait que c'était l'un des travaux que Descartes laissait à sa descendance spirituelle et qu'Alexis-Claude Clairaut s'y attellera en 1732, se signalant ainsi au monde savant ; les seuls à avoir abordé cette question dans quelques cas particuliers sont Leibniz, Bernoulli et Philippe de La Hire, auxquels il faut donc ajouter Pitot. D'autre part, il montre que la sinusoïde peut être obtenue comme "développée" – au sens du développement-plan d'une surface cylindrique – d'une ellipse. La démonstration du fait que l'ellipse de section du cylindre, *EAQD* (*Figure 3* du *Mémoire*), se transforme en sinusoïde – ou plutôt en *compagne de la Cycloïde* – lorsque l'on développe le cylindre, n'est pas explicite, mais c'est bien le constat qui résulte de l'*Avertissement* et des *Remarques* qui le suivent. Enfin, il applique certaine conséquence de son étude à la mécanique des vis (conçues comme vis de pressoir). En revanche, Pitot ne dit pas un mot d'une éventuelle rectification de la sinusoïde, dont on est en droit de penser pourtant qu'il a pu percevoir qu'elle a même longueur que l'arc d'ellipse dont elle est la "développée plane", dès lors que l'on admettrait, ou démontrerait, bien sûr, qu'un tel "développement-plan" ne modifie pas la longueur de la courbe. Est-ce à dire qu'il était bien conscient que la rectification "générale" de la sinusoïde – *i. e.* le calcul de la longueur de l'un quelconque de ses arcs – pose les mêmes problèmes que celle de l'ellipse – qui relève de ce que l'on appellera plus tard "les intégrales elliptiques" ? Ou est-ce que le problème ne l'intéressait pas ? On peut penser pourtant que la question a pu l'effleurer : pour chaque courbe étudiée, il était devenu habituel, à la fin du XVIIème siècle, d'en chercher toutes les caractéristiques métriques, et en particulier la longueur ; dans le cas de la cycloïde, c'est Wren, l'architecte anglais, qui l'a rectifiée le premier, lorsqu'il répondit au concours roulant sur les propriétés de cette courbe que Blaise Pascal nomme "la roulette" ; ce concours avait été proposé à la sagacité du monde savant et primé par Amos Dettonville, *alias* Blaise Pascal – en effet, Amos Dettonville est l'anagramme transparent de Louis de Montalte, nom sous la signature duquel les *Provinciales* étaient parues. Pascal le rapporte en ces termes dans son *Histoire de la Roulette* (1658) : "*Mais entre tous les écrits qu'on a reçus de cette sorte, il n'y a rien de plus beau que ce qui a été envoyé par M. Wren. Car outre la belle manière qu'il donne de mesurer le plan de la roulette, il a donné la comparaison de la ligne courbe même et de ses parties avec la ligne droite. Sa proposition est que la ligne de la roulette est quadruple de son axe, dont il a envoyé l'énonciation sans démonstration. Et comme il est le premier qui l'a produite, c'est sans doute à lui que l'honneur de la première invention en appartient*". Le lecteur intéressé par cette question de la rectification de la cycloïde trouvera quelques éléments, et en particulier la version que donne John Wallis de la démonstration de Wren, dans un article à paraître : il pourra y constater que le résultat de Wren est beaucoup plus général que ne le laisse entendre Pascal.

Voici maintenant le texte du *Mémoire* de Pitot.

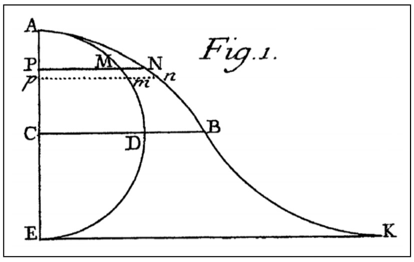
* * * * *

[*Memoires de Mathematique & de Phisique* [sic], *pour la même Année* (1724).]

QUADRATURE
DE LA MOITIE'
D'UNE COURBE DES ARCS,
APPELLE'E
LA COMPAGNE DE LA CYCLOIDE.
Par M. PITOT.

[En marge droite :] 12 Juillet // 1724. // Fig. 1.

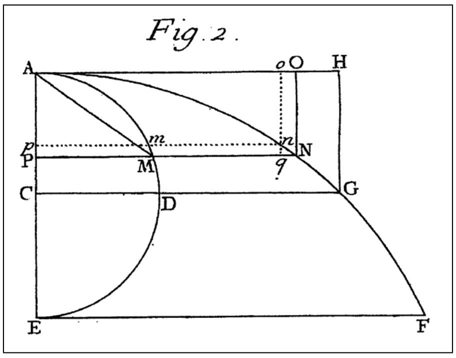
LA Courbe *ABK* est telle que chaque Ordonnée *PN* est égale à l'Arc correspondant *AM* du demi-Cercle *ADE*. Cette Courbe est connuë des Geometres, mais personne, que je sçache, n'a parlé de la Quadrature de l'espace *ACB* renfermé par sa moitié *AB* : cet espace est égal au quarré du Rayon *AC* ; ce que je démontre par trois voyes differentes.



[Figure 1 de la Planche 8.]

1.° Soit le Rayon *AC* = *a*, la Coupée *AP* = *x*, l'Arc *AM*, ou l'Ordonnée *PN* = *z* : on aura *zdx* égale à la differentielle de l'espace *APN*, dont on trouvera l'integrale $xz + a \times \sqrt{2ax - xx} - az$ par les methodes expliquées dans l'Analyse démontrée pages 761 & 794 : mais lorsque *x* = *a*, on a pour la quadrature de l'espace *ACB*, le quarré du Rayon *AC* = *aa*. // p. 108 //

[En marge gauche :] Fig. 2.

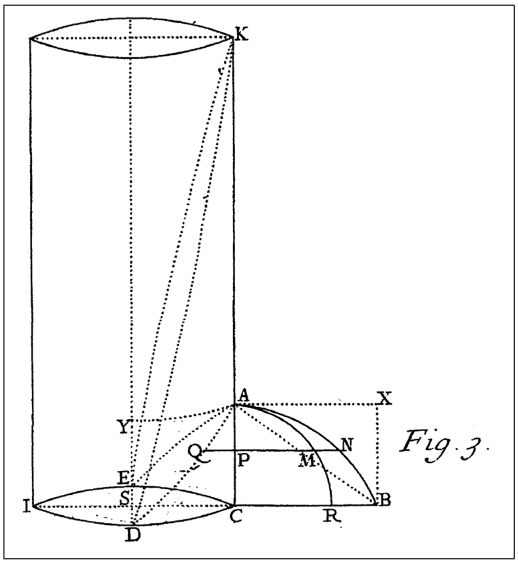


[Figure 2 de la Planche 8.]

2.° Par les proprietés de la Cycloïde ou Roulette simple, comme *AGF*, toutes les lignes *MN* sont égales aux arcs de Cercle correspondant[s] *AM* ; d'où il suit que l'espace *ADG* est égal à celui de la Courbe *ABC (Fig. 1.)*

Entre plusieurs maniéres de démontrer que l'espace *ADG*, formé par le Quart de Cercle *AD*, la droite *DG*, & la portion *AG* de la Cycloïde, est égal au quarré du Rayon, voici la plus simple que nous ayons trouvé[e].

Ayant mené *NO* parallele à *AP*, on tirera les paralleles infiniment proches *pn*, *no* ; mais à cause de la Cycloïde, *Nn* est parallele à *AM*, ainsi les Triangles *Nqn*, *MPA*, sont semblables, d'où l'on tire *Nq* ou *Oo* . *qn* ou *Pp* : : *MP* . *PA* ou *NO* & *Oo* ′ *NO* = *MP* ′ *Pp*. L'on voit par-là que l'élement *No* de l'espace *AGH* étant égal à l'élement *Pm* du Quart de Cercle *AD*, cet espace est égal au Quart de Cercle. Maintenant si l'on fait *CA* ou *CD* = *a*, l'arc *AD* = *DG* = *z*, on aura la superficie du rectangle *CH* = *aa* + *az*, duquel il faut retrancher l'espace *AGH* & le Quart de Cercle *ACD* qui lui est égal : on ôtera donc le demi-Cercle *ADE* = *az* du rectangle *CH* = *aa* + *az*, pour avoir l'espace *ADG* = *aa*. Donc, &c.



[Figure 3 de la Planche 8.]

[En marge gauche :] Fig. 3.

3.° Si on coupe un Cylindre *IK* par un plan incliné à son axe de 45 degrés, on aura la portion cylindrique ou onglet *AEDC*, dont la hauteur *CA* est égale au rayon *CS*. Or il est évident que la superficie de la moitié *ADC* de l'onglet, est égale à la somme de tous les arcs *AM* du Quart de Cercle *AMR* ; c'est-à-dire, que les arcs *PQ* qui composent la demi-superficie *ADC* de l'onglet, sont égaux aux arcs *AM*, & par conséquent aux Ordonnées *PN* de la Courbe *(Fig. 1.)* ainsi la superficie de l'espace *ACB* de la Courbe est égale à celle de la moitié *ADC* de l'onglet. Mais les Geometres sçavent presentement que si l'on prend un onglet *KEDC*, dont la hauteur *CK* soit égale à la circonference du Cercle [*CEID*][7], sa superficie sera égale à celle d'une Sphere inscrite dans le Cylindre. Ainsi nommant toûjours le Rayon *CS* = *CA (a)*, la circonference *CEID* ou *CK (c)*, au aura 2*ac* pour la // p. 109 // superficie de la Sphere inscrite égale à celle de l'onglet *KEDC*, mais cette superficie est à celle de l'onglet *ARDC*, comme *CK* est à *CA* ou *CK (c)* . *CA (a)* : : *KEDC*, 2*ac* . *AEDC*, 2*aa*. On voit par-là que la moitié *ADC* de la superficie de l'onglet *AEDC* = *aa* = la superficie *ACB* de la Courbe *(Fig. 1.)*

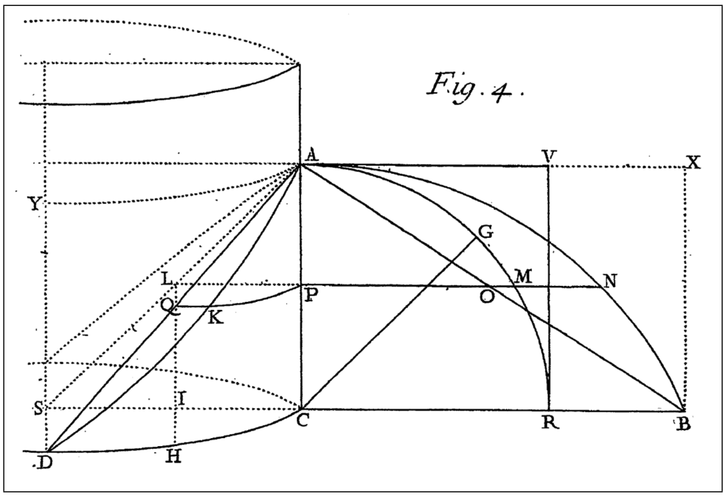
A V E R T I S S E M E N T.

[En marge droite :] Fig. 3. // & 4.

Après la lecture de ce Memoire, on m'objecta que je n'avois pas démontré suffisamment dans ma troisiéme Methode que chaque arc PQ *est égal à l'Arc correspondant* AM, *ou à l'Ordonnée* PN, *& que même il paroissoit vrai-semblable que le parallelogramme* ACBX *étant appliqué sur le cilindre en* ACDY, *puisque la base* CB *est égale au quart de Cercle* CHD, *la diagonale* AB *devroit y representer la Section ou l'Ellipse* AQD, *& que par consequent si cette Section est développée, comme il a été dit, tous les points* Q *devroient former sur le plan la diagonale* AB, *au lieu de la courbe* ANB ; *ainsi la superficie* AQDC *de la moitié de l'onglet seroit égale à la moitié du parallelogramme* ACDY, *ou* ACBX, *ou au triangle* ABC ; *ce qui renverseroit totalement nôtre Memoire, puisque la surface de ce triangle n'est pas indépendante de la Quadrature du Cercle, ayant sa base* CB *égale au quart de Cercle* CHD. *C'est pourquoi j'ai crû qu'il étoit à propos de lever ces apparences trompeuses, puisqu'elles ont séduit même des Geometres du premier ordre.*

[7] Le texte donne : "*CELD*".

[Figure 4 de la Planche 9.]



[En marge droite :] 17 Fevr. // 1725. // Fig. 4.

POUR démontrer que chaque arc *PQ* est égal à l'Arc correspondant *AM*, si par un point *P* du rayon *CA*, on coupe le Cylindre par un plan parallele à sa base, la diagonale *AS*, ou le demi-grand-axe de l'Ellipse, sera coupée au point *L*, & on aura *AP* = *PL*, car les triangles *ACS*, *APL*, sont semblables, rectangles & isosceles, puisque *CA* = *CS*.

Soit mené *LI* parallele à *AC*, il est clair que *CI* = *PL*, & par conséquent l'arc *PQ* égal à l'arc *CH* ; & puisque *AP* = *PL*, & que *PL* = *CI*, *AP* & *CI* sont égales. Ce qui montre clairement que l'ordonnée *IH* est égale à l'ordonnée // p. 110 // *PM*, & l'arc *AM* égal à l'arc *CH*, ou à l'arc *PQ* = *PN*. Donc, &c.

REMARQUE I.

[En marge gauche :] Fig. 4.

Si l'on applique sur le cylindre le triangle rectangle *ACB*, dont la base *CB* est égale au quart de Cercle *CHD*, ou *AMR* ; il faut voir ce que devient la diagonale *AB* : en quoi la courbe *AKD* qu'elle forme sur le cylindre differe de l'Ellipse, & les proprietés de cette courbe. Pour trouver tous les points *K* de la courbe *AKD*, il faut mener *PO* parallele à *CB*, & faire l'arc *PK* égal à *PO*, car on aura *AC* à *CB*, ou au quart de Cercle *CHD* : : *AP* . *PO*, ou à l'arc *PK* ; & si l'on fait *AC* au quart de Cercle *AMR*, ou *CHD* : : *AP* à l'arc *AG*, on aura l'arc *AG* égal à l'arc *PK*, mais l'arc *PQ* = l'arc *AGM* = *PN*, & l'arc *PK* = l'arc *AG* = *PO*, donc l'arc *QK* = l'arc *GM* = *ON*.

Puisque le triangle *ACB* occupe sur le cylindre l'espace *ACHDKA*, il s'ensuit que cet espace est égal au triangle, mais la superficie du coin cylindrique *ACHDQA* est égale au quarré *CV* du rayon, & à celle de la Courbe ou de la Compagne de la Cycloïde *ANBCA*, ainsi que nous l'avons démontré ; d'où l'on voit que l'espace *AKDQA* = l'espace *AGMRVA* = au segment *ANBOA* = au triligne *ANBRMGA*. Tous ces espaces égaux ne meritent pas qu'on s'y arrête davantage, n'étant pas indépendant[s] de la Quadrature du Cercle.

REMARQUE II.

[En marge gauche :] Fig. 5.

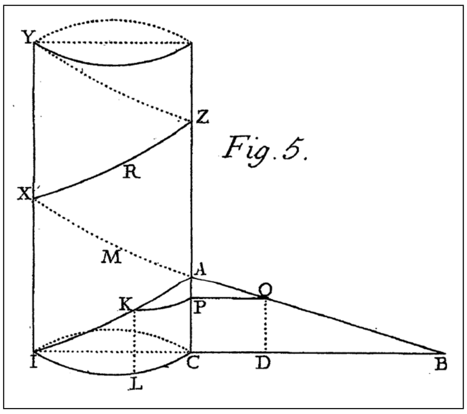
On peut prendre la base du triangle *ABC* égale à la circonference de celle du cylindre, ou de tel arc de cette circonference qu'on voudra : nous la prendrons ici égale à la demi-circonference. La Courbe formée par la diagonale sera *AKI*, dont on trouvera tous les points, en prenant de même que ci-dessus l'arc *PK* égal à *PO* ; mais l'arc *CL* étant égal à l'arc *PK*, l'arc *IL* est égal à *DB*, & *LK* à *DO*. Or *BD* . *DO* : : *BC* . *CA* ; donc *IL* . *LK* : : *IC* . *CA*. Cette // p. 111 // proportion donne une manière facile de trouver tous les points de la Courbe, car si sur un point quelconque *L* de la circonference de la base du cylindre on éleve *LK* perpendiculaire sur le plan de cette base, & qu'on fasse *LK* quatriéme proportionnelle à *IC*, *CA* & *IL*, le point *K* sera un des points de la Courbe.

Si l'on prend l'arc *IL* plus grand que la demi-circonference *IC*, on aura toûjours cette proportion *IC* . *CA* : : *IL* . *LK* ; & la courbe *IKA* pourra toûjours être continuée autour du cylindre comme en *AMX*, &c. Lorsque l'arc *IL* sera pris égal à toute la circonference de la base, le point *K* sera au point *X*, le point *L* au point *I*, & la Courbe aura fait une révolution entiére autour du Cylindre, sçavoir *IKAMX*. On peut faire faire autant de révolutions qu'on voudra à cette courbe autour du Cylindre, comme *XRZ*, &c. en prenant l'arc *IL* plus grand que la circonference de la base, car il peut être pris double, triple, &c.

REMARQUE III.

[En marge droite :] Fig. 5.

[Figure 5 de la Planche 9.]



Pour trouver la longueur de cette Courbe, comme de la partie ou demi-révolution *IKA*, soit la demi-circonference *ILC* = *c*, *CA* = *a*, l'arc indéterminé *IL* = *x*, & *LK* = *y*. Puisque *IC (c)* . *CA (a)* : : *IL (x)* . *LK (y)* . $\frac{ax}{c} = y$,& $\frac{adx}{c} = dy$, dont il faut quarrer chaque membre pour avoir $\frac{aadx^2}{cc} = dy^2$, & substituer $\frac{aadx^2}{cc}$ à la place de dy^2 dans la formule de la rectification des Courbes $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ pour avoir[8] $\sqrt{\frac{ccdx^2 + aadx^2}{cc}} = \frac{dx}{c}\sqrt{aa + cc}$, dont l'integrale est $\frac{x}{c}\sqrt{aa + cc}$, & lorsque $x = c$, on a $\sqrt{aa + cc}$ pour la longueur de la demi-révolution *IKA*. Si on veut avoir la longueur d'une révolution entiére *IKAMX*, il faut mettre *(2a)* à la place de *(a)*, & *(2c)* à la place de *(c)* dans // p. 112 // $\sqrt{aa + cc}$ pour avoir $\sqrt{4aa + 4cc} = 2\sqrt{aa + cc}$, ce qui est la même chose que de prendre le double de *IKA* pour une révolution entiére ; on prendra de même le triple ou $3\sqrt{aa + cc}$ pour une révolution & demie, le quadruple pour deux révolutions, &c.

REMARQUE IV.

Il est facile de voir par la seconde Remarque, que la courbe *IKAM*, &c. est la même que celle des filets ou spires de la vis : or on sçait par les principes des mécaniques que la force de la Vis est à la puissance qui lui est appliquée, comme la longueur d'un tour ou d'une révolution des filets ou spires est à la hauteur d'un des pas ; ou comme la longueur entiére de tous les contours des filets est à la hauteur de la Vis. D'où nous déduirons de la troisiéme Remarque la Regle suivante, pour mesurer la force absoluë de la Vis, ou pour avoir le rapport de la force absoluë à la puissance qu'on y applique. J'estime même qu'il vaut mieux, pour trouver ce rapport le plus juste qu'il soit possible, comparer la longueur totale de la courbe des spires avec la somme de tous les pas, ou la hauteur de la Vis, que de comparer la longueur d'une révolution à la hauteur d'un des pas.

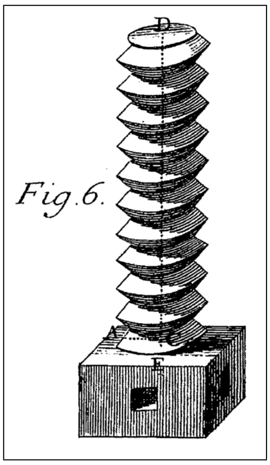
Regle pour mesurer la force de la Vis.

[En marge gauche :] Fig. 6.

Prenés la circonference du Cercle dont le rayon est *CA* depuis l'axe du Cylindre ou de la Vis jusqu'au point *A* du milieu de l'arête des pas : multipliés cette circonference par le nombre des pas de la Vis ; au quarré de ce produit il faut ajoûter le quarré de la hauteur *DE*, la racine quarrée de la somme sera à la hauteur de la Vis *DE*, comme la force absoluë de la Vis est [à] la puissance qui lui est appliquée. On sçait que cette force est augmentée suivant la raison réciproque du rayon *CA*, à la longueur du bras ou levier qu'on ajoûte ordinairement à la Vis, mais qu'elle est diminuée par les frottements. // p. 113 //

[8]Le texte donne : "$\sqrt{\frac{dx^2 + aadx^2}{cc}}$" ; on peut aussi corriger en : "$\sqrt{dx^2 + \frac{aadx^2}{cc}}$".

EXEMPLE.



[Figure 6 de la Planche 9.]

Soit 10 le nombre des pas de la vis dont la hauteur *DE* est de 3 pieds & demi, ou 42 pouces : le rayon *CA* de 3 pouces & demi, sa circonférence sera de 22 pouces, qu'il faut multiplier par le nombre des pas 10, pour avoir 220, dont le quarré est 48400, auquel il faut ajoûter le quarré de la hauteur 42 ou 1764 pour avoir 50164, dont la racine quarrée sera à peu-près 224 pour l'expression de la force de la vis à la puissance 42, ce qui se réduit comme 16 à 3 ; ainsi 3 de puissance produisent 16 de force par le moyen de la vis proposée dans cet Exemple.

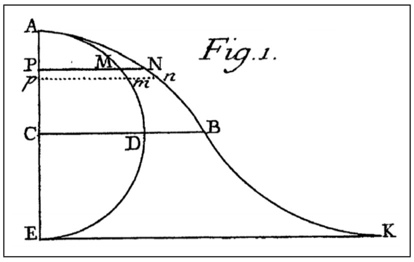
Cette Regle peut aussi servir pour mesurer les contours des rampes des Escaliers à vis ; la longueur des Courbes rampentes autour des Noyaux, lorsque les Escaliers à vis sont à jours, &c.

Les Anciens ont nommé cette Courbe *Spirale* ou *Helice*, parce que sa formation sur le cylindre suit la même analogie que la formation de la spirale ordinaire sur un plan ; mais elle est bien differente de la Spirale ordinaire, étant une des Courbes à double courbure, ou une des lignes qu'on conçoit tracée sur la surface courbe des Solides. Peut-être que ces sortes de Courbes à double courbure, ou prises sur la surface des Solides, feront un jour l'objet des recherches des Geometres. Celle que nous venons d'examiner est, je crois, la plus simple de toutes.

Nous donnerons dans la suite les mêmes Rgles pour cette Courbe prise autour du Cone. [. . .]

*
* *

Commentaire du texte de Pitot.



[Figure 1 de la Planche 8.]

La courbe *ABK* est définie ainsi (fig. 1) : le point courant *N* est tel que *PN* = *arc* (*AM*) du demi-cercle *ADE*. Il s'agit donc bien d'une sinusoïde, puisque le point *N* a pour abscisse *PN*, soit un arc, c'est-à-dire encore un angle inscrit (*ACM*), mesuré par exemple en radians et en prenant le rayon comme unité, et pour ordonnée *BP*, c'est-à-dire un sinus *CP*, à une translation près (de longueur *BC*). L'équation de cette courbe dans le repère (*E*, [*EK*), [*EA*)), $CA = CB = R$ étant le rayon du cercle générateur, *EK* étant égal à πR, est : $y = R\ (1 + \cos\ (x/R)$ sur l'intervalle $[0, \pi R]$. Avec les choix de Pitot, en matière de repère et de données (*le Rayon AC* = *a*, *la Coupée*, *AP* = *x*, *l'Arc AM*, *ou l'Ordonnée PN* = *z*, ce qui fait de *A* l'origine, de [*AB*) l'axe des abscisses et de [*EK*) la direction de l'axe des ordonnées), on obtient : $z = a$. Arccos $(1 - x/a)$ sur l'intervalle $[0, 2a]$.

La première méthode consiste à intégrer la fonction entre 0 et *a*, puisque Pitot cherche l'aire du segment de sinusoïde *ANBCPA*. Ce qu'il appelle la *différentielle de l'espace APN* est bien sûr l'augmentation infinitésimale d'aire ; sur la figure, c'est le pseudo-rectangle infiniment petit *PNnp*, d'aire *zdx*, *z* étant la longueur *PN* et *dx* étant la largeur infiniment petite $Pp = dx$. Ce faisant, il applique des méthodes mises en lumière par Leibniz à la fin du XVIIème siècle et devenues classiques avec la publication de l'*Analyse des Infiniments Petits* du

Marquis del'Hospital[9]. Il s'agit donc d'intégrer $z = a$. Arccos $(1 - x/a)$ sur l'intervalle $[0, a]$. Une *intégrale* de zdx, c'est-à-dire une primitive de z, est : xz, produit qui doit être diminué d'une primitive de xdz, soit :

$$F(x) = x \,.\, a \,.\, \text{Arccos}\,(1 - x/a) - \int x \frac{-a \times \left(-\frac{1}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}}\, dx$$

$$= x \,.\, a \,.\, \text{Arccos}\,(1 - x/a) - \int \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}\, dx$$

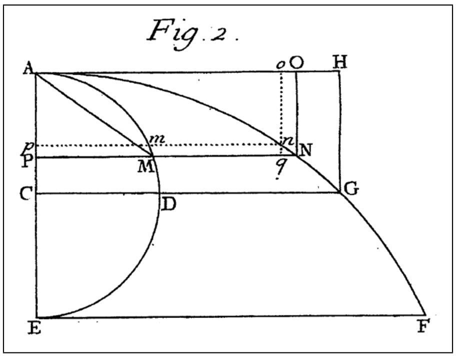
$$= x \,.\, a \,.\, \text{Arccos}\,(1 - x/a) - a \left[- \int \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}\, dx + \int \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}\, dx \right]$$

$$= xz + a \times \sqrt{2ax - x^2} - az \text{ , puisque } \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} \text{ est la dérivée de } z\,;$$

on reconnaît là la méthode d'intégration par parties, qui résulte de ce que $d(zx) = zdx + xdz$. Faisant $x = 0$ et $x = a$ dans cette primitive, on obtient, par différence :

Aire (*ANBCPA*) = $F(a) - F(0) = [az(a) + a^2 - az(a)] - [0]$ puisque $z(0) = 0$; d'où l'égalité entre ce segment de sinusoïde et un carré construit sur le rayon du cercle.

La deuxième méthode relève de la même heuristique, mais est expliquée plutôt dans les termes qu'auraient employés Cavalieri ou Roberval, puisqu'elle ressortit à la méthode dite *des Indivisibles*. Sur la figure 2, c'est une cycloïde qui est représentée ; le segment *ANGCPA* de cette courbe est composé de deux morceaux : le quart de cercle *AMDCPA*, d'aire connue et le segment *ANGDMA*, compris entre la cycloïde et le cercle et composé, par construction, de lignes comme *MN*, de même longueur que les arcs de cercle *AM*, pour toute position de *P* sur [AC] et de *M* sur le quart de cercle.



[Figure 2 de la Planche 8.]

Comme il en va de même pour la sinusoïde (fig. 1), à ceci près que les lignes égales aux arcs de cercle *AM* sont les lignes *PN*, *toutes les lignes du segment ANGDMA* [de la figure 2] *sont égales à toutes les lignes du segment ANBCPA* [de la figure 1], comme aurait dit Roberval, et ces deux segments sont égaux. Il ne reste plus qu'à montrer que le segment *ANGDMA* a même aire que le carré construit sur *a*, rayon du cercle. Pitot trace des lignes *pn* et *no* parallèles à *PN* et *NO*, passant par un point *n* infiniment proche de *N* sur la cycloïde ; (*no*) coupe *PN* en *q* ; le "triangle" *qNn*, considéré comme tel car *Nn* est assimilé à une droite (la tangente à la courbe dans la méthode de L'Hospital), est semblable au triangle *PMA*, car il est bien connu de Pitot, depuis les travaux de Roberval, de Descartes ou de Fermat, que la tangente en *N* à la courbe, ici confondue avec *nN*, est, par construction, parallèle à la corde *AM* du quart de cercle (de même que *EM* est parallèle à *IN*, menée par le point I de contact du cercle générateur sur la base *EF* lorsque ce cercle, en roulant, amène le point *A* au point *N*). Cette similitude est le fondement même de la méthode pour tracer des tangentes : *qNn* est le fameux triangle caractéristique que Pascal utilise dans sont *Traité des Sinus du Quart de Cercle* et dont Leibniz dit qu'il lui a donné l'idée de son algorithme pour les calculs différentiel et intégral.

On a donc : *Nq*/*qn* = *MP*/*PA*, ou : *Oo*/*Pp* = *MP*/*PA* = *MP*/*NO*, et en faisant le produit des extrêmes et des moyens : *Oo* ´ *NO* = *MP* ´ *Pp*. Ce qui revient à dire que les rectangles infinitésimaux *oONq* et *pPMm* sont égaux. Il s'ensuit, les *Indivisibles* aidant, que le segment *ANGHOA* situé au-dessus de la cycloïde a même aire que le quart de cercle *AMDCPA*, puisque leurs *rectangles élémentaires* sont égaux et se cumulent le long des lignes coordonnées de *G*, *AH* et *AC* ; c'est le principe du calcul infinitésimal, sans l'algorithme leibnizien et cette égalité n'est rien d'autre que l'effet d'un changement de variable.

Comme le rectangle *ACGH* a pour côtés $AC = a$ et $CG = CD + DG = a + arc\,(AD) = a + z$ (avec $z = \pi a/2$), son aire

[9] Guillaume François Antoine de L'Hospital, Comte d'Autremont, Marquis de Sainte-Mesme (1661-1704) est l'auteur de l'*Analyse des infiniment* Petit, parue en 1696. Voir les différentes éditions dans la bibliographie.

vaut : $a^2 + az$ (avec $az = \pi a^2/2$) ; or le segment *ANGDMA* est la différence entre le rectangle en question et deux segments d'aire égale à celle du quart de cercle, *ANGHOA* dont on vient de montrer qu'il vaut un quart de cercle et *AMDCPA* qui est un quart de cercle. Donc *aire* (*ANGDMA*) = $a^2 + az - az$ puisque deux quarts de cercle valent un demi cercle, soit encore $az = \pi a^2/2$. Par conséquent *aire* (*ANGDMA*) = a^2, c. q. f. d.

La troisième méthode nous amène au résultat qui nous intéresse : la sinusoïde est la courbe obtenue en "développant" une ellipse, ce qui fait d'elle la *compagne* d'une autre courbe "issue" du cercle puisque l'ellipse est transformée du cercle par perspective parallèle ou par affinité.

Pitot coupe un cylindre de base circulaire *IDCE* (fig. 3) par un plan incliné à 45°. De ce fait la courbe elliptique *EAQD* obtenue est de demi-grand axe $AS = a\sqrt{2}$ et de demi-petit axe $ES = ED = SC = AC = a$, rayon du cercle de base. La demi-ellipse *EAQD* forme avec le demi-cercle *DCE* un segment de surface cylindrique *EAQDCE*, qui délimite, avec le plan de base et le plan de coupe, ce que l'on appelle un onglet ; ce genre de solide est connu depuis Archimède, au moins ; on retrouve cette ligne elliptique, ce segment de surface cylindrique et un volume analogue dans l'intersection de deux cylindres de même rayon et d'axes perpendiculaires, en particulier en architecture, lorsqu'il s'agit de voûtes d'arête ou de voûtes en arc de cloître (à la croisée de deux voûtes en berceau), par exemple dans les traités du peintre et mathématicien Piero della Francesca au Quattrocento, de l'architecte Philibert de L'Orme, au XVIème siècle, du géomètre Caravelli[10] au XVIIIème siècle ou de l'insolite comte Léopold Hugo, avec ses curieuses théories sur les cristalloïdes et autres *équidomoïdes*[11].

Si l'on coupe le cylindre par un plan parallèle à la base et selon un cercle qui coupe *AC* en *P*, ce cercle coupera l'ellipse en *Q*.

La figure 3 est erronée, de ce point de vue, car *PQ* semble être en prolongement de *NMP*, alors que Pitot parle d'un arc de cercle tracé sur le cylindre ; le tracé est meilleur sur la figure 4. Pitot indique, sans justification, que cet arc *PQ* est égal, d'évidence, à l'arc *AM* du quart de cercle *AMR* de même rayon (*CA*) que le cercle de base. Le lecteur aura compris que le rectangle *ACBX* de la figure 3 est le rectangle *ACBX* de la figure 1 (*X* n'y figurant pas) et que la courbe *ANB* de la figure 3 est le même arc de sinusoïde que la courbe *ANB* de la figure 1. Les points *P*, *M* et *N* jouent donc le même rôle sur les deux figures, 1 et 3.

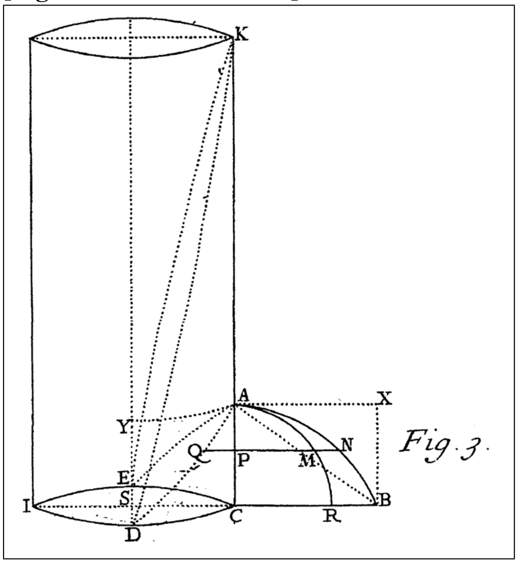
Pour se convaincre de l'égalité, affirmée par Pitot, entre l'arc *PQ* tracé sur le cylindre et l'arc *AM* du quart de cercle, il suffit de considérer que le quart de cercle *AMRCA* est la projection orthogonale dans le plan de base (et en vue du dessus) du quart d'ellipse *AQDSA*, c'est-à-dire une représentation du quart de cercle *CQ'DSC*, où *Q'* est la projection orthogonale de *Q* sur l'arc *CD*. Dès lors et pour parler comme Roberval, *toutes les lignes PQ de la face cylindrique APCDQA d'un demi-onglet sont égales à toutes les lignes AM, arcs du quart de circonférence AR, soit encore à toutes les lignes droites PN comprises entre AC et la sinusoïde ANB*, comme cela a été montré précédemment, et l'aire cylindrique du demi-onglet est égale à l'aire du segment *ANBCPA* de la sinusoïde. Il serait pour nous assez naturel de conclure en disant que, l'aire sous la sinusoïde étant connue, on peut en déduire l'aire latérale du demi-onglet, allant ainsi du plus simple (une aire de figure plane aujourd'hui élémentaire) au plus complexe (l'aire d'une surface non-plane) ; en vérité, les voies de l'heuristique primitive sont plus tortueuses : l'aire latérale d'un demi-onglet est connue depuis des lustres puisqu'avant notre ère, tandis que la *compagne de la cycloïde* n'est entrée dans l'histoire que depuis quelques décennies lorsque Pitot rédige ce mémoire.

L'aire du segment de sinusoïde résultera donc de la connaissance que tout un chacun, tant soit peu géomètre, pouvait avoir du résultat suivant : *Dans un cylindre droit dont la hauteur CK est égale à la circonférence de la base circulaire CEID (soit $2\pi a$), l'aire cylindrique latérale de l'onglet EKCD sera égale à l'aire de la sphère de même rayon a que le cylindre*. Ici, cette aire vaut $4\pi a^2$; or, c'est une affinité de rapport *CK*/*CA* qui fait passer de la demi-ellipse *EAQD* à la demi-ellipse *EKD* ; donc les aires cylindriques latérales des deux onglets sont dans ce même rapport : *aire* (*EKCD*)/*aire* (*EAQDC*) = *CK*/*CA* = 2π ; donc *aire* (*EAQDC*) = $2a^2$; et finalement, pour le demi-onglet, *aire* (*AQDC*) = a^2. D'où le résultat pour le segment *ANBCPA* de sinusoïde.

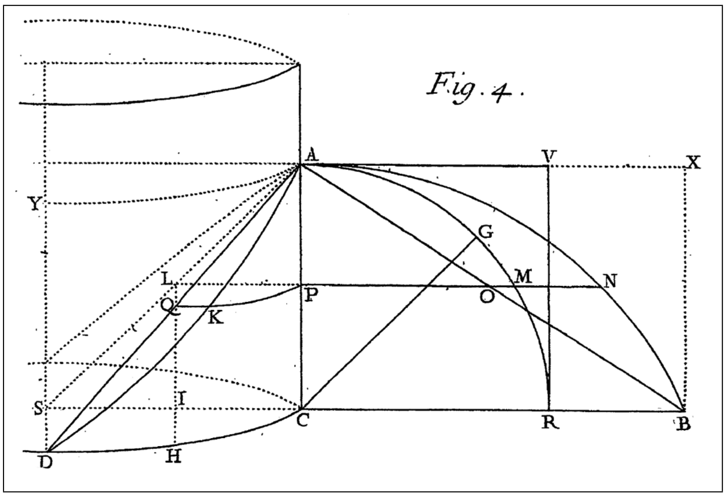
[10] Vito Caravelli (1724-1800) est un géomètre italien ; il publia, en 1751, un *Traité* sur les *Hosoèdres*, solides mixtes de l'espace, qui généralisent les onglets et autres solides étudiés primitivement par Archimède, puis par les auteurs de traités d'architecture roulant sur les voûtes à symétrie d'ordre 3, 4 (comme la voûte en arc-de-cloître) ou plus, autour d'un axe central vertical, formées de surfaces planes, sphériques et/ou cylindriques. *Cf. :* CARAVELLI, Vito. *Le Traité des Hosoèdres*. Trad. du latin en fr. par P. Ver Eecke, publication extraite de *Mathesis*. Paris, 1959.

[11] *Cf.*, les œuvres de Léopold Hugo, en bibliographie.

[Figure 3 de la Planche 8.]



[Figure 4 de la Planche 9.]



Le manque de justification de l'égalité entre la ligne droite *PQ* et la ligne circulaire *AM* aura sans doute été reproché à Pitot lors de la séance du 12 juillet 1724, puisque le 17 février 1725, il y revient ; et il y revient d'autant plus que les académiciens protestataires – des *Geometres du premier ordre*, nous dit Pitot – avaient avancé une autre hypothèse sur le développement de l'ellipse tracée sur le cylindre : selon eux, elle devait devenir la diagonale rectiligne *AB* du rectangle *ACBX*, preuve s'il en est que la "vision dans l'espace" n'est pas la chose la mieux partagée du monde… des géomètres, encore à cette époque. Pitot s'emploiera donc, avec la figure 4 et la démonstration qui fait suite à son *Avertissement*, à montrer la dite égalité par des considérations de géométrie plane ; nous avons explicité cette égalité plus haut par la voie des projections, qui nous paraît si simple aujourd'hui. Le reste du *Mémoire* roule sur des questions annexes qui ont cependant l'intérêt de montrer que Pitot était un géomètre de qualité et qu'il participe de l'esprit du temps, en particulier au sein de l'Académie, qui cherchait à montrer l'utilité pratique des spéculations et l'application possible de la théorie.

*
* *

Bibliographie succincte
Sources des textes & sources secondaires

CARAVELLI, Vito. *Le Traité des Hosoèdres* (1751). Éd. consultée : trad. du latin en fr. par P. Ver Eecke, publication extraite de *Mathesis*. Paris, Blanchard, 1959.

HUGO, Léopold (comte –). Éd. consultées : exemplaires de la BnF sur microfilms ou microfiches.

—. *Essai de Géométrie polyédrique. Théorie des cristalloïdes élémentaires*. Paris, 1867 ;

—. *Les cristalloïdes à directrice circulaire. Études géométriques*. Paris, 1867.

—. *Les cristalloïdes complexes à sommet étoilé*. Paris, 1872.

—. *Essai sur la géométrie des cristalloïdes*. Paris, 1873.

—. *Une réforme géométrique. Introduction à la géométrie descriptive des cristalloïdes*. Paris, 1874.

—. *Géométrie Hugodomoïdale, anhellénique, mais philosophique et architectonique. La question de l'équidomoïde et des cristalloïdes géométriques*. Paris, 1875.

L'HOSPITAL, Guillaume, François, Antoine (de –, Comte d'Autremont, Marquis de Sainte-Mesme, dit le Marquis de –). *Analyse des Infiniment Petits, Pour l'Intelligence des Lignes Courbes*, A Paris, De L'Imprimerie Royale. M. DC. XCVI. Éd. *princeps* : 1696, par les soins de Jean Anisson (1642—1721). Éd. consultée : reproduction en fac simile par ACL-éditions, suivie des *Eclaircissemens sur l'Analyse des Infiniment Petits*. de Varignon (Paris, 1725). Paris, 1988.

—. *Analyse des Infiniment Petits, Pour l'Intelligence des Lignes Courbes, Par M. le Marquis De l'Hospital, Seconde Edition*, Paris, chez François Montalant, à l'entrée du Quay des Augustins du côté du Pont S. Michel, 1715. Réimpr. : Paris, François Montalant, 1716 & Paris, É. Papillon, 1716. Éd. consultée : rééd. en fac-similé par l'IREM de Dijon. Dijon, s. d.

—. Éd. anglaise par Edmund Stone : *The Method of Fluxions, Both direct and inverse, the Former being a Translation from the celebrated Marquis de l'Hospital's* Analyse des infiniment petits, *and the latter supply'd by the Translator, E. Stone, …* London, W. Innys, 1730.

—. *Analyse des Infiniment Petits, par M. le Marquis de l'Hôpital, Suivie d'un nouveau Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage. Par l'Auteur du Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des Leçons de Mathématique de M. l'Abbé de La Caille*, *Paris, Moutard, 1758.* Éd. consultée : troisième édition française, avec des *Notes* du père Aimé-Henri Paulian, s. j.

—. *Chez la Veuve Girard & François Seguin, Impr. Libraires, près la Place St. Didier, à Avignon. Se trouve à Paris, chez Jean Desaint, Libraire, rue du Foin S. Jacques, chez Charles Saillant, Libraire, rue S. Jean de Beauvais, chez C. Joseph Panckoucke, Libraire, rue, & à côté de la Comedie Françoise, et chez Durand Neveu, Libraire, rue S. Jacques,*

—. *Analyse des Infiniment Petits, suivie d'un nouveau Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage. Par l'Auteur* [l'abbé Aimé-Henri Paulian] *du Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des Leçons de Mathématiques de M. l'Abbé de la Caille*. *3ème éd. Chez la Veuve Girard & François Seguin, Impr. Libraires, près la Place St. Didier, à Avignon. Se trouve à Paris, chez Jean Desaint, Libraire, rue du Foin S. Jacques, chez Charles Saillant, Libraire, rue S. Jean de Beauvais, chez C. Joseph Panckoucke, Libraire, rue, & à côté de la Comedie Françoise, et chez Durand Neveu, Libraire, rue S. Jacques*. *M. D C C. L X V I I I.* (1768). Éd. consultée : réimpression à Avignon & Paris de la 3ème édition.

—. *Analyse des Infiniment Petits, pour l'Intelligence des Lignes Courbes, par M. le Marquis de l'Hospital, Nouvelle édition, revue et augmentée par M. Le Fèvre…* Paris, A. Jombert, 1781. Quatrième édition.

PASCAL, Blaise. *Histoire de la Roulette* (1658). Éditions critiques *in* :

—. *Œuvres complètes*. Éd. établie par Jacques Chevalier. Coll. "*La Pléiade*". Paris, Gallimard, 1954. En particulier : *V.* [Histoire de] *La Roulette et Traités connexes*, pp. 173-312.

—. *Œuvres complètes*. Éd. établie par Michel Le Guern. 2 volumes. Coll. "*La Pléiade*". Paris, Gallimard, 1998-2000. En particulier : Vol. II (2000). *Œuvres mathématiques d'Amos Dettonville (sur la Roulette)*, pp. 317-524.

—. *Œuvres complètes*. Éd. chronologique établie par Jean Mesnard, 4 vol. Coll. "*Bibliothèque européenne*". Paris, Desclée de Brouwer, 1964-1970-1991-1992. En particulier : Vol. IV (1992), essentiellement depuis XIII. *Écrits relatifs au Concours de la Roulette (fin juin 1658-20 janvier 1659)*, jusqu'à XXXII. *Extrait d'une Lettre de Sluse à Huygens (20 août 1660)*, pp. 147-925.

PITOT, Henri. "Quadrature de la moitié d'une Courbe des arcs, appellée la Compagne de la Cycloide", in *Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Année M. DCCXXIV* (1724). *Avec les Memoires de Mathematique & de Phisique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Academie.* A Paris, De l'Imprimerie Royale, M. D C C X X V I (1726), pp. 65-67 de l'*HARS*, pp. 107-113, planches 8 et 9, p. 112 des *MMPARS*. Éd. consultées : exemplaires de la Bibliothèque Emmanuel Liais de Cherbourg et de la BnF. Édition critique par J.-P. Le Goff, Caen, pré-publication de l'IREM de B.-N., 2002.

Ouvrages de référence

COLLECTIF (Institut de France. Dir. : P. G. & R. C., *i. e.* : Pierre GAUJA – & Robert COURRIER –). *Index biographique de l'Académie des Sciences du 22 décembre 1666 au 1er octobre 1978.* Paris, Gauthier-Villars, 1979, p. 418.

COLLECTIF (BESSOT, D., LANIER, D., LE GOFF, J.-P. & *alii* (Cercle d'Histoire des Sciences de l'IREM de Basse-Normandie). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Recueil de textes, d'Euclide à Pascal, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 1999. En particulier : pp. 91-98, 176-180 & 225-227.

COLLECTIF (HEMILY : ARSAC, Cécile, ARSAC, Gilbert & KELLER, Olivier, IREM de Lyon). *Textes fondateurs du Calcul infinitésimal*. Recueil de textes, introduits, commentés, avec des exercices et leurs corrigés. Paris, Ellipses, 2006.

*

* *

À suivre : *Troisième partie : la sinusoïde selon Jacques Bernoulli, devenue cycloïde du cercle*.

Jean-Pierre LE GOFF, IREM de B.-N.