LE MIROIR DES MATHS

UNIVERSITÉ DE CAEN
BASSE - NORMANDIE

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 74 02** - Fax. : **02 31 56 74 90**
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO QUATRE : Juin 2009

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

NUMÉRO QUATRE : Juin 2009

ISSN : 1969-7929 (imprimé)
ISSN : 1760-6500 (en ligne)

LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

Éditorial

L'année scolaire et universitaire qui s'achève a été particulière. Pour beaucoup, elle laisse un puissant sentiment d'amertume. Des projets de réforme, caractérisés par un degré d'irréflexion rarement atteint, ont conduit à des conflits durs qui laisseront des traces. Lycées professionnels, lycées généraux, IUT, IUFM, UFR,... : peu d'éléments du système ont échappé à la tourmente.

Pourtant l'activité de l'IREM de Basse-Normandie n'a pas cessé. Le bâtiment du campus 2 qui nous abrite a été bloqué pendant quelques jours à la fin du mois d'avril : les animateurs en charge du rallye mathématique comme ceux qui proposent le stage d'histoire des mathématiques ont su improviser des solutions efficaces pour que ces événements se déroulent presque normalement. Qu'ils en soient ici félicités et remerciés. Vous trouverez dans les pages qui suivent un compte-rendu du rallye.

Lors de notre assemblée générale de mars, Pascal Langlois nous a, au nom du groupe **jeux2maths** de l'IREM de Basse-Normandie, présenté le tout nouveau site Internet de ce groupe, conçu notamment par Sylvain Bourdalé : chacun des quinze jeux créés au fil des années y est désormais accessible avec le matériel à imprimer et découper, la règle du jeu et parfois des démonstrations. L'accès se fait par l'adresse `www.math.unicaen.fr/irem`. Notre assemblée générale de juin nous a donné l'occasion d'accueillir un nouveau à l'IREM venant renforcer ce même groupe **jeux2maths** : il s'agit d'Olivier Longuet, qui nous a expliqué comment il a mis en place un atelier sur les polyèdres au collège Alain Chartier de Bayeux et comment ses élèves avaient participé à la Fête de la science.

Une rencontre des IREM du Grand Ouest, dont le but est de nous tenir mutuellement au courant du travail effectué dans nos groupes, s'est tenue à Rennes les 15 et 16 mai 2009 : l'IREM de Basse-Normandie y était bien représenté. Notre groupe de didactique, avec Cécile Bézard-Falgas, Loïc Coulombel, Jacques Duval et Claudine Plourdeau, a montré sur des exemples comment partir des productions des élèves peut permettre de faire vivre un débat en classe et de construire les notions noyaux du collège au sein d'apprentissages progressifs, organisés en spirale. Pierre Ageron, Odile Jenvrin et Jean-Pierre Le Goff ont animé un atelier intitulé *De l'architecture aux mathématiques : des lycéens sur le terrain*, rendant notamment compte d'une très belle expérience vécue par nous trois et par les élèves d'Odile dans la crypte de l'Abbaye aux Dames de Caen : nous vous en reparlerons dans un prochain numéro. Enfin Didier Bessot a proposé un atelier de lecture de textes du XVIIIe siècle centré sur la question : quelle définition les auteurs de traités et de manuels de cette époque donnent-ils de l'algèbre ?

Les 18 et 19 juin s'est tenu à l'IUFM de Caen le XVI^{e} colloque de la CORFEM (commission inter-IREM de recherche sur la formation des enseignants de mathématiques). La première journée était consacrée au calcul algébrique dans formation des professeurs : le débat sur la perte de sens induite par l'algèbre est aussi ancien que l'algèbre elle-même et pousse à explorer la dialectique complexe entre sens et technique. La deuxième journée, consacrée au devenir de la formation professionnelle dans la réforme de la formation des enseignants, s'intitulait : *Enseigner, un métier qui s'apprend.* J'ai eu l'occasion de réaffirmer la noblesse et la légitimité scientifique qu'il y a à enseigner l'art d'enseigner, à fournir des signes, des repères de tous ordres utiles à l'enseignant, et les moyens de se former sans cesse par la recherche. Les échanges furent extrêmement riches et l'organisation parfaite : merci notamment à Xavier Gauchard pour le travail fourni. Le XVII^{e} colloque aura également lieu à Caen en juin 2010.

Le dernier événement de l'année, c'est la sortie du quatrième numéro du *Miroir* que vous êtes en train de lire, grâce au patient travail de mise en page d'Éric Trotoux : outre le troisième épisode du feuilleton que Jean-Pierre Le Goff consacre à l'histoire de la *sinusoïde*, vous y trouverez une contribution de type didactique de Ruben Rodriguez, dont l'un des intérêts est de montrer sur un exemple la richesse du débat qui peut naître de la très grande diversité des animateurs de l'IREM. Il faut le rappeler, bien peu de structures de recherche au sein de notre l'université sont capables de rassembler et de faire interagir des expériences et compétences aussi variées.

Ralentie durant l'eté, notre activité n'en continuera pas moins : des livres à paraître prochainement se peaufinent, de nouveaux stages de formation continue se mettent en point, notre week end de rentrée se met en place (nous le prévoyons les 2 et 3 octobre en Suisse normande) et un grand rendez-vous s'organise : le XVIII^{e} colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, qui aura lieu à Caen les 28 et 29 mai 2010 sur le thème *Circulation, héritage et transmission en mathématiques.*

Enfin nous envisageons de lancer un groupe *Accompagnement des évolutions au lycée - algorithmique, logique, programmation* : que les collègues intéressés nous contactent sans crainte ! Que nous contactent aussi ceux qui auraient envie de rejoindre le groupe académique concoctant les sujets des Olympiades de Mathématiques, concours individuel qui concerne tous les lycéens des classes de Première de toutes les séries.

Bonne lecture et bonnes vacances à tous !

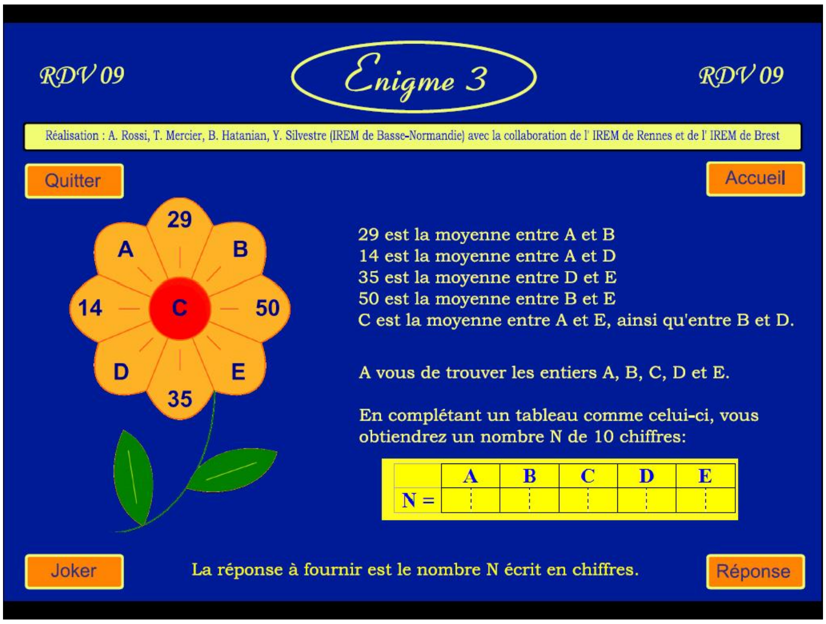
Pierre Ageron, juin 2009

Le Rallye Dynamique et Virtuel de l'IREM de Basse-Normandie

Cette année 2008/2009 a été celle de la 6ème édition du "R.D.V." le Rallye Dynamique et Virtuel de l'Irem de Basse-Normandie. Rappelons que cette épreuve met en compétition les classes de 3ème et de 2nde, autour de la recherche d'énigmes mathématiques, avec communication des réponses à ces énigmes via internet.

Pour la deuxième fois, en plus des classes de l'académie de Caen, celles de l'académie de Rennes ont été invitées à participer. Ainsi ce sont en tout 116 classes des deux académies qui se sont confrontées le vendredi 24 avril de cette année 2009.

Le principe est resté le même : chaque classe, sous la responsabilité d'un professeur, devait résoudre des énigmes mathématiques, dont les énoncés sont fournis sur ordinateur par un programme nommé rdv09 ; le site internet conçu spécialement pour ce rallye, permet aussi bien les inscriptions, les informations, le déroulement du rallye virtuel, et l'affichage des résultats. Ce site qui avait déjà été optimisé et amélioré dans les années précédentes grâce au travail de Nicolas Levasseur et de Jean-Philippe Métivier de l'université de Caen , a été actualisé et enrichi cette année par Yannick Sylvestre, doctorant au sein du "GREYC" groupe de recherche en informatique à l'université de Caen. Merci à lui pour la qualité du travail effectué afin que tout fonctionne au mieux. Voici un exemple d'énigme :



Cette année, la classe arrivée en tête du classement général, toutes académies confondues, a été une classe de seconde : la classe de 2nde 5 du Lycée Amiral Ronarc'h de BREST. Pour le niveau 3ème, la meilleure classe a été la classe de 3eme A du collège Anatole France de SARTILLY (Manche), qui termine 3ème du classement général, mais aussi première dans l'académie de Caen. La meilleure classe de 2nde pour l'académie de Caen a été la 2nde 2 du lycée Jean Guehenno de FLERS (4ème du classement général).

Dans l'académie de Caen, les élèves des classes arrivées en tête de leur catégorie, ont remporté pour eux ou pour leur établissement, selon les cas, des lots offerts par "Texas-instruments", ainsi que des brochures offertes par la régionale de l'APMEP en Basse-Normandie. D'autre part, le service des affaires culturelles du rectorat de Caen a offert à chacune des deux classes lauréates, la prise en charge d'une visite culturelle.

Une nouvelle édition devrait avoir lieu durant l'année 2009/2010, en collaboration avec nos collègues de l'académie de Rennes.

Thierry Mercier

Un conflit sociocognitif en didactique à propos de différentes médiations sémiotiques dans l'enseignement de la géométrie.

Lors des journées de rentrée 2008 de l'IREM de Basse-Normandie nous avons exposé un travail sur une séquence autour des procédures de construction d'une droite parallèle à une droite donnée (d) et passant par un point extérieur donné M, destinée aux élèves du collège. Les objectifs principaux d'apprentissage de cette séquence sont :

1. utiliser dans les diverses procédures les propriétés du programme du collège concernant la notion de parallélisme de droites.
2. choisir la bonne procédure et les propriétés à utiliser selon les différentes médiations sémiotiques : feuille de papier, règle non graduée et équerre ; feuille de papier et pliages ; triangle donné en matériel rigide ; disque donné en matériel rigide ; ordinateur et logiciels de géométrie dynamique.
3. maîtriser la langue française en géométrie lors des justifications et explications des étapes de la construction.

Une discussion s'est ouverte lors de l'échange qui a suivi la présentation de la séquence, on peut la qualifier de **conflit sociocognitif** en didactique. Nous avons la chance à l'IREM de pouvoir constituer dans ce type de rencontre un groupe très riche en profils d 'enseignants : formateurs IREM-IUFM, professeurs du collège, du lycée général, du lycée professionnel, professeurs et maîtres de conférences de l'université, ce qui est favorable à ce type d'échanges.

Le principal intérêt des situations nommées "conflit sociocognitif" est de faire apparaître chez chaque individu ses représentations sur la question ou notion étudiée.

Définition et origines du conflit socio-cognitif (in « Les modèles de l'apprentissage et les mathématiques » Laurent Dubois et Pierre-Charles Dagau, Université de Genève) Certaines recherches se sont penchées sur les bénéfices cognitifs résultant directement d'interactions entre pairs. Elles ont permis de remarquer que ces interactions génèrent un processus appelé "conflit sociocognitif " qui conduit l'apprenant à réorganiser ses conceptions antérieures et à intégrer de nouveaux éléments apportés par la situation.

Le conflit sociocognitif résulte de la confrontation de représentations sur un sujet provenant de différents individus en interaction. Diverses études ont mis en avant que cette réorganisation des représentations pouvait provenir de deux types de déséquilibre : l'inter-individuel, lorsqu'il y a opposition entre deux sujets ; l'intra-individuel, quand un sujet remet en question ses propres représentations.

Il s'avère que cette séquence suscite chez les enseignants une réaction qui positionne chacun selon des profils bien discriminés les uns par rapport aux autres. En effet nous avons exposé depuis cette séquence à d'autres publics d'enseignants, (formateurs, inspecteurs, professeurs du collège), et la réaction sur la partie où l'univers géométrique est celui du logiciel CABRI produit des discours fortement chargés de représentations individuelles, sur l'enseignement de la géométrie.

Nous vous proposons, afin de bien entrer dans la dynamique de cet article de réaliser les activités et tâches demandées dans chaque phase des différentes séances de la séquence proposée aux élèves du collège. C'est ainsi que nous avons procédé lors du travail des journées de rentrée IREM de Basse-Normandie et lors des journées de formation du plan académique.

Présentation des activités de la séquence lors de l'exposé interactif des journées IREM. Nous vous proposons tout d'abord, de réaliser la progression d'activités et tâches proposée.

> Didactique de la géométrie à propos de différentes médiations sémiotiques sur la notion de "droite parallèle à une droite donnée passant par un point extérieur donné"

A) L'exposé interactif

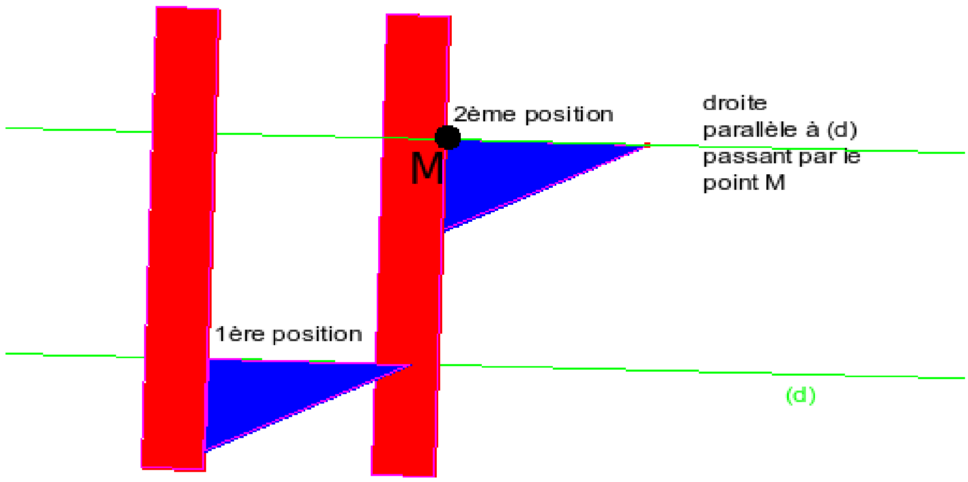
Nous continuons à utiliser notre modélisation des phénomènes d'apprentissage et enseignement basé sur le principe des psychomorfismes entre des univers différents. Ici les univers différents sont constitués par ce que certains chercheurs appellent "différentes médiations sémiotiques d'un concept mathématique dans l'apprentissage et l'enseignement ".

Pour nous, il s'agit dans notre exemple, des univers différents, (avec des opérations différentes, selon que l'on puisse plier une feuille, déplacer un figure sur écran d'ordinateur, tracer avec un gabarit d'angle,. . .), qui se trouvent en correspondance morphique. Pour cela nous avons choisi de vous présenter quelques exemples autour de la notion géométrique de "droite parallèle à une droite donnée (d), passant par un point donné M " Nous avons proposé aux participants de jouer le "jeu " d'un élève qui travaille chaque question.

Phase préliminaire : Obtenir une solution à l'aide d'une équerre et une règle, (sans les graduations).

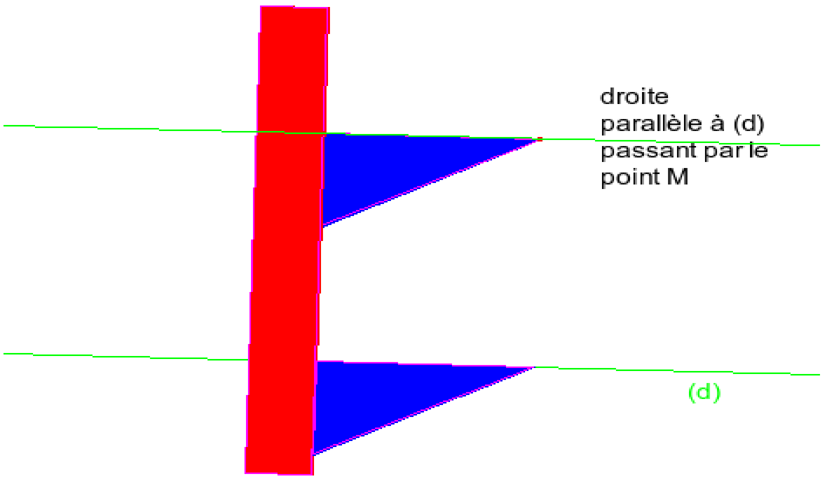
Une première solution est obtenue facilement par nos élèves du collège à l'aide d'une équerre et une règle. Deux savoirs procéduraux se présentent ici.

Procédure (a)



Au cours de cette procédure on glisse l'équerre et la règle "de gauche à droite" puis de "bas en haut" jusqu'à ce que l'équerre "touche le point M"

Procédure (b) – une autre procédure plus rapide que trouvent les élèves.



On glisse simultanément la règle et l'équerre de gauche à droite le long de (d) jusqu'à ce que la règle passe par M, puis on glisse l'équerre de bas en haut le long de la règle jusqu'à ce qu'elle passe par M.

Remarque : ici les "savoirs procéduraux " se basent sur le même "savoir déclaratif ".

A savoir :

« Si deux droites sont coplanaires et perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles »

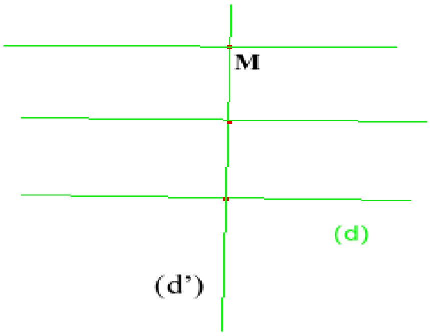
Les participants ont trouvé aussi très vite cette procédure.

Les autres phases

1) Construction seulement à l'aide des **pliages d'une feuille**.

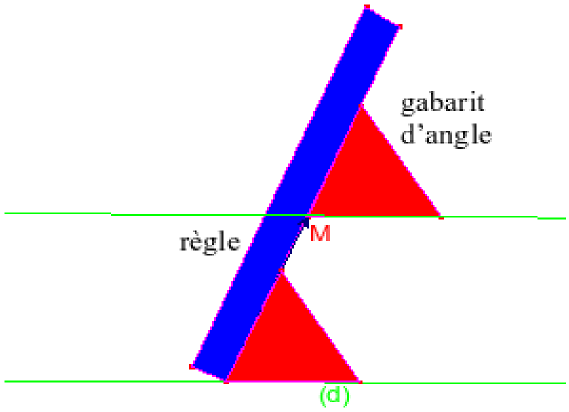
On plie la feuille trois fois afin d'obtenir "la perpendiculaire d'une perpendiculaire".

Le premier pli suit la droite (d) donnée.

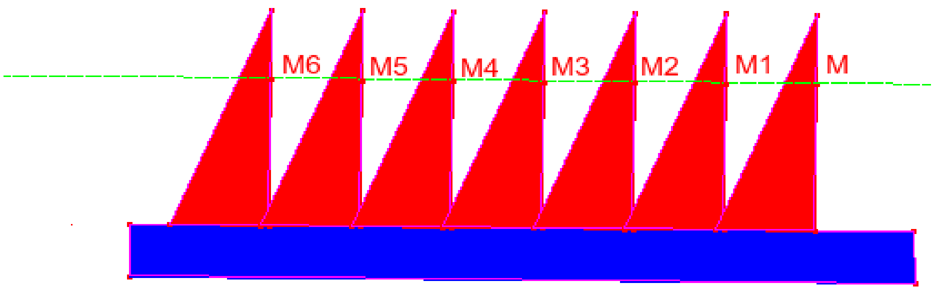


Le second est un pli sur le point M donné, (d) se superposant à elle-même, ceci afin d'obtenir la perpendiculaire (d') à (d) passant par M
Le troisième pli est sur M, (d') se superposant à elle-même, pour obtenir la perpendiculaire au deuxième pli passant par M. C'est ainsi que le dernier pli représente la droite parallèle à la droite (d) donnée, passant par le point donné.
Remarque : cette solution est, elle aussi, trouvée assez facilement.
2) Utilisation d'un **gabarit d'angle** ou d'un triangle donné.

La construction avec un gabarit d'angle utilise la propriété des angles correspondants relativement à des droites parallèles.



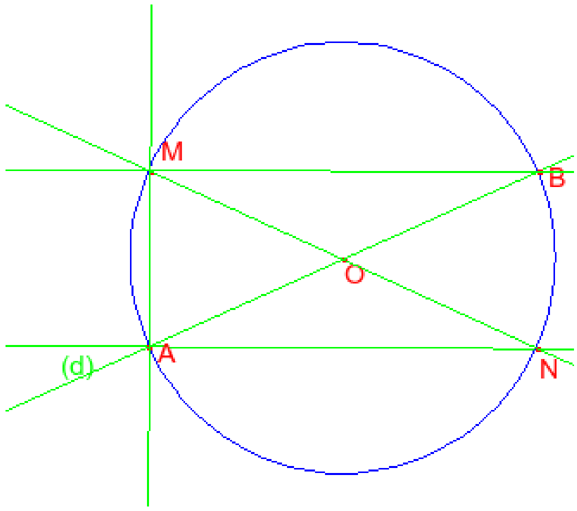
3) Utilisation « dynamique » d'un gabarit pour construire des parallèles. Cette utilisation est dynamique dans le sens que les élèves déplacent le gabarit par glissement du gabarit du triangle sur le bord de la règle. Ici les élèves repèrent un point sur le gabarit qui coïncide avec le point M au départ. Ensuite il glissent le gabarit le long du bord de la règle et tracent différents points M1, M2 , M3... à partir du point qu'ils ont marqué sur le gabarit. Ils constatent que les points M1, M2 ...sont alignés avec le point M et qu'ils déterminent la droite parallèle à (d) passant par le point M.



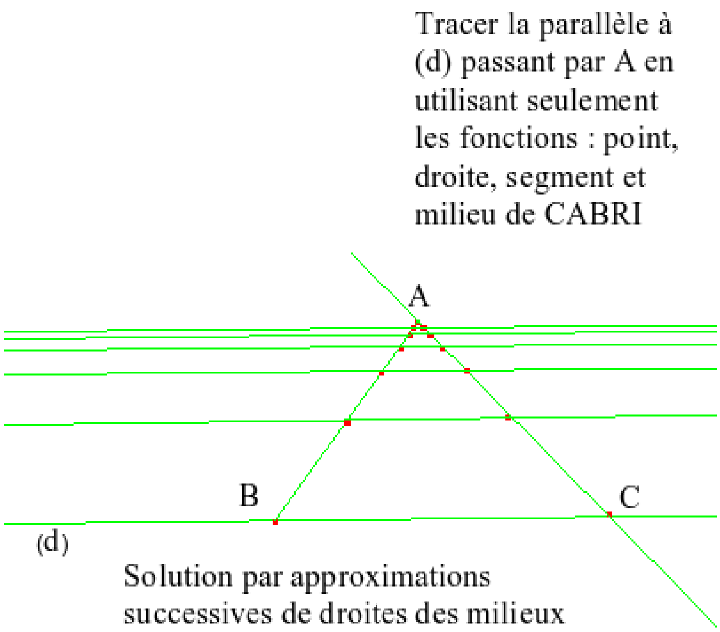
4) Utilisation d'un cercle donné (de rayon fixé) et centre donné. Les consignes sont : on peut seulement déplacer le cercle et tracer des droites avec le bord de la règle.

On donne un disque découpé en carton, assez grand pour qu'il puisse être **posé sur le point M et qu'il coupe en même temps la droite (d)** en un point distinct A.

Voici la figure qui correspond à une procédure proposée par les élèves et qui est utilisée par la suite en cours pour démontrer que la droite obtenue est bien la parallèle à (d) passant par le point M.

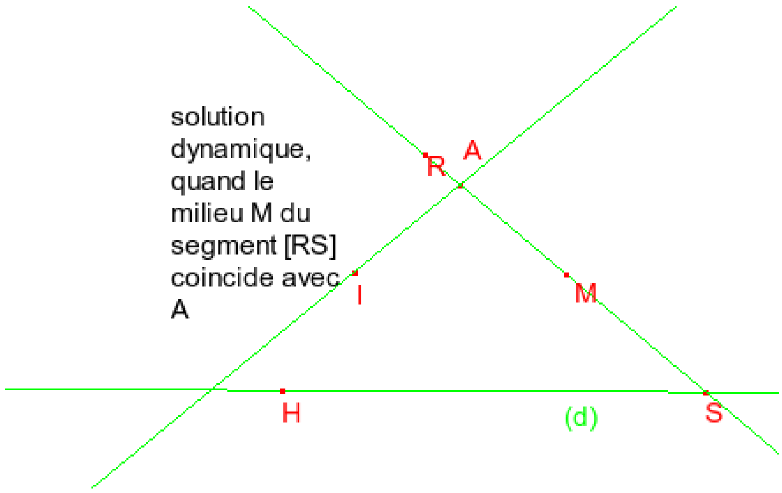


On place donc le cercle de telle sorte qu'il passe par M et rencontre (d) en A. On trace un diamètre [MN] puis un diamètre d'extrémité A : [AB] ; la droite (MB) est alors parallèle à (d) et passe par M.
On utilise les propriétés suivantes : "L'angle inscrit dans un demi-cercle est droit " et "deux droites coplanaires perpendiculaires à une même troisième sont parallèles"
Tracer la droite parallèle à (d) passant par le point A, utilisant seulement les fonctions : droite, segment, milieu du logiciel CABRI
5) Solution par approximations successives

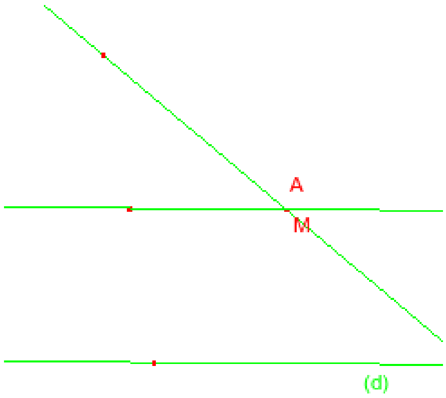


Les élèves placent deux points B et C sur (d) et construisent une première droite des milieux en utilisant ces deux points et le point A donné. Ensuite ils reprennent les deux milieux précédents et ils recommencent l'application de « la droite des milieux ». Ils ont bien compris que toutes les droites successives ainsi obtenues sont parallèles entre elles et parallèles à la droite (d) donnée. Ils ont compris aussi que, à chaque étape, on se

rapproche de plus en plus du point A donné.
Ils ont compris aussi qu'on ne peut pas atteindre le point A, mais que l'on peut être aussi proche que l'on veut.
6) Solution dynamique



On place un point R différent de A, un point H sur la droite donnée (d), et le point S intersection de (RA) et (d). La droite (IM) est définie par I milieu du segment [RH] et M milieu du segment [RS]. Quand on déplace le point R le point M se déplace aussi. On fait le déplacement pour que le point M coïncide avec A, on obtient des droites (IM) toujours parallèles à la droite (d) donnée. La conservation du parallélisme lors du déplacement est assurée par la propriété dite de la « droite des milieux ». C'est ainsi que la droite (IM) se déplace et quand M=A on obtient la droite solution de la construction.



Pour que A = M on utilise les coordonnées des points pour le déplacement de ces points à l'écran avec CABRI, afin d'arrêter le déplacement quand on est sûr que le point donné et le point mobile coïncident.
Puis avec un vecteur et la translation du point M sur A

Dans ce cas les coordonnées de M',(image de M dans la translation), et celles de A sont identiques après avoir effectué la translation de vecteur définie par M et A. On demande alors à CABRI de faire la translation de la droite auxiliaire des milieux, pour que le point M soit sur A. On n'a pas dessiné M' sur la figure car M' devient A après la translation. Dans ce cas la conservation de la configuration de base, d'après la structure de la géométrie dynamique de CABRI permet de prouver que l'on obtient la droite parallèle à (d) passant par A.

B) Echange entre collègues et « conflit sociocognitif » en didactique

L'échange entre les participants qui a eu lieu par la suite a été très intéressant car le public IREM est riche en profils : maître de conférences et professeurs universitaires, enseignants du collège et de lycée, formateurs IUFM, historiens des mathématiques.
Nous allons essayer d'être le plus proche possible de leurs interventions sans déformer leurs propos et en respectant leur chronologie.
Remarque : nos collègues participent tous à la formation initiale et/ou continue, donc nous allons donc simplement mentionner une autre des leurs principales fonctions professionnelles.

Notre collègue Philippe Langlois, professeur de collège, est contre le fait d'admettre que les élèves déplacent un point sur l'écran pour qu'il coïncide avec un autre point fixe donné, avec pour seul moyen de contrôle la perception visuelle. Même si la configuration de base, « les droites des milieux d'un triangle qui assurent le parallélisme » est conservée dans ce déplacement, son argument est basé sur ce que nous avons affirmé, dans notre ouvrage « Du dessin perçu à la figure construite » (Ed Ellipses 2005), (voir bibliographie n°5). Nous avons dit qu'une fois que l'élève de quatrième a bien compris qu'il faut mettre en doute ce que l'on voit sur une construction faite sur une feuille de papier, il faut le justifier ou démontrer à l'aide des propriétés.

Notre collègue Muriel Alliot, professeur de lycée est du même avis et ajoute qu'elle, avec ses étudiants du lycée, n'admet pas qu'ils affirment qu'un point est sur un autre sans utiliser, par exemple, la fonction (« sur le point ») du logiciel qui permet d'être sûr que le point est sur l'autre. Notre collègue Muriel, nous dit aussi que si l'on utilisait la possibilité du logiciel pour tester « si le droites sont parallèles » alors la réponse serait négative.

Notre collègue Eric Reyssat, professeur d'université nous fait remarquer que, même si la partie où les élèves superposent les points est basée sur la perception visuelle, il y a dans cette démarche, un fait important : les élèves affirment lors des ces justifications que « si les points sont superposés alors les droites seront parallèles ». Et que l'utilisation du « si.. ; alors » avec la propriété respective est un des objectifs fondamentaux du collège.

Notre collègue Claudine Plourdeau professeur du collège, souligne que les élèves avaient à résoudre une tache de construction au niveau de la quatrième. Ils ont trouvé une configuration de base à partir de l'application de la propriété du programme « droite des milieux dans un triangle », ils ont constaté que cette configuration se conserve par déplacement et alors ils ont déplacé le point auxiliaire jusqu'à le superposer à un point fixe de manière à obtenir la parallèle demandée. Cette démarche des élèves s'inscrit bien dans le niveau quatrième de la progression des apprentissages à la démonstration en géométrie.

Voici le texte que notre collègue à écrit à propos de l'échange : « Vous répondez avec votre niveau d'expertise qui n 'est pas celui de l'élève ! Quand on donne un problème de construction à un élève, on attend qu'il mobilise des savoirs de son champ de connaissances pour résoudre le problème posé sinon la tâche devient pour lui impossible. Dans le cas présent, l'élève de 4ème ou de 3ème anticipe comme savoir "le théorème des milieux" dans un triangle qui lui fournit comme configuration de base la figure attendue : la droite parallèle cherchée va donc être la droite des milieux. Il adapte alors ses actions à la performance de l'outil "Cabri". Grâce au menu "milieu d 'un bipoint", il construit la configuration de base du théorème des milieux, configuration de base qu'il veut conserver. Il choisit alors le point mobile qui convient pour faire passer la droite parallèle commandée par le point M proposé. »

Notre collègue Jean-Pierre Le Goff, formateur à l'IUFM et historien des sciences, nous expose rapidement que cette construction en géométrie dynamique à l'aide des logiciels est analogue à celle qui utilisaient les grecs. Il s'agit de déplacer des points sur des courbes données. Son point de vue est le suivant : « la véritable justification est au niveau de la géométrie analytique avec les équations ». Et que donc il ne faut pas mettre « la charrue avant les bœufs ». Le fait de faire travailler nos élèves du collège sur ce type de tâche est dommageable pour l'apprentissage de la géométrie.

Nous profitons ici pour vous signaler un site et un des problèmes résolus par des mathématiciens grecs, extraits de l'article de Patrice Debart, professeur agrégé retraité, ancien membre de l'IREM de Caen, sur son site de géométrie :

« Les grands problèmes de la géométrie grecque »

pagesperso-orange.fr/debart/histoire/grands_problemes.html

Les savants grecs n'avaient pas, évidemment, ni CABRI, ni GEOGEBRA, ni GEOPLAN, mais ils pouvaient, soit déplacer un segment représenté par une tige en bois ou bien le déplacer mentalement

Depuis les journées de rentrée de notre IREM nous avons eu l'opportunité de présenter la séquence et les propos de la discussion précédente à d'autres collègues.

Au cours des journées de l'INRP de Lyon qui avaient pour sujet « redonner du sens aux mathématiques enseignées dans le secondaire » , nous avons échangé nos points de vue sur le sujet avec l'inspecteur de mathématiques et avec quelques collègues chercheurs en didactique. Ceux-ci nous ont indiqué qu'à leur avis, cette utilisation didactique des logiciels, où les élèves du collège utilisent une configuration de base qui se conserve, était tout à fait dans l'esprit pédagogique des TICE dans l'enseignement à ce niveau de la quatrième.

Dans notre IUFM de Basse-Normandie notre collègue formateur Olivier Frémont qui est à l'origine des nombreux ressources TICE pour l'enseignement des mathématiques estime que, sûrement, la non acceptation au niveau de la quatrième de la démarche des élèves est due a une méconnaissance de cette exploitation pédagogique du logiciel. Dans une partie de la procédure les élèves utilisent l'invariance d'une configuration, et même si le fait qu'un point soit superposé à un autre est justifié seulement par la perception visuelle, ceci n'est pas très grave dans ce niveau du collège.

Dans une journée de formation continue du plan académique 2008-2009, sur les nouveaux programmes de la troisième, que nous avons animée à partir des activités de formation conçues par une équipe de formateurs qui travaille sous la direction de nos inspecteurs régionaux, nous avons constaté qu'une grand partie de nos collègues du secondaire refusaient la démarche de la « superposition des points justifié par la perception visuelle». Par contre, quand nous avons fait remarquer à nos collègues, que l'on pouvait soulever ce problème de simple perception avec les élèves et leur proposer d'utiliser par exemple, la fonction « symétrie centrale » du logiciel au lieu de la fonction « milieux », ils étaient d'accord pour dire que dans ce cas de figure ont ne faisait pas d'entorse à la rigueur géométrique.

Notre point de vue (1), utiliser la géométrie dynamique dans l'enseignement

Notre première remarque est que lorsque nos collègues ont résolu le problème de la parallèle par glissement de l'équerre le long de la droite donnée (d) jusqu'à (CE), pour qu'elle passe par le point donné M, aucun de nos collègues, ni dans les journées IREM, ni dans la formation PAF, n'a dit que la justification de « l'équerre passée par le point », était exclusivement visuelle. Quand nous l'avons signalé, ils ont été un moment dubitatifs et par la suite quelques collègues ont reconnu qu'il s'agissait d'une démarche visuelle similaire à celle des élèves quand ils déplacent le point sur l'écran de l'ordinateur le long d'une droite. Mais ils ont dit que le « glissement de l'équerre le long d'une droite sur une feuille » était rentré dans les habitudes depuis longtemps et que aucun professeur de mathématiques ne le remettait en cause, par contre qu'avec les TICE c'est tout nouveau encore et on ne le voit pas de la même manière.

Nous pensons que dans la progression de l'apprentissage à la démonstration en géométrie, il est important de faire cette utilisation didactique des logiciels de géométrie dynamique, ce que les chercheurs en didactique qualifient de « molle ».

Ce moment de la séquence est propice pour avancer dans le parcours de l'élève sur ce que résume bien le titre de notre ouvrage cité plus haut, « Du dessin perçu à figure construite ». En effet on peut agrandir quelques figures des « constructions-solutions » sur papier pour attirer l'attention de nos élèves sur le fait que les figures sur feuille sont toujours « imparfaites », même si l'on est très précis dans les tracés. D'autre part on peut s'intéresser aux avantages des logiciels et de l'ordinateur pour remarquer qu'il y a des fonctions qui permettent d'affirmer qu'un point et un autre sont « vraiment » superposés. Par exemple avec GEOGEBRA on peut afficher les coordonnées des points, de même qu'avec CABRI et dans ce cas, quand les coordonnées sont identiques les points sont superposés. De même, on peut utiliser les fonctions « vecteur » et « translation ». Alors, pour qu'un point A se déplace jusqu'à qu'il se superpose sur un point M il suffit de définir tout d'abord le vecteur d'origine A et d'extrémité M et d'appliquer la translation au point A de vecteur défini précédemment. Comme on le voit avec l'abscisse et l'ordonnée d'un point on reste encore dans le cadre du programme en vigueur au collège, par contre la translation n'est plus au programme. Ces deux procédures sont qualifiées de « dures », car on est sûr, grâce au logiciel, que les points sont superposés, il s'agit du même pixel sur l'écran.

Voici ici la solution par déplacement d'une droite auxiliaire jusqu'à qu'elle passe par le point M. Les élèves déplacent un point de cette droite jusqu'à que les coordonnées du point auxiliaire et celle du point M donné soient identiques à l'écran.

Dans une première phase les élèves construisent à partir de l'application de la propriété dite de « droite des milieux », une parallèle à (d) auxiliaire.

Par la suite ils déplacent à l'écran le point auxiliaire jusqu'au point M et quand les coordonnées du point mobile deviennent identiques à celles du point M, ils tracent la parallèle recherchée.

Les points coïncident quand leurs coordonnées sont identiques jusqu'au centième.

Quand on utilise la fonction de CABRI pour interroger si les deux droites sont parallèles, la réponse est positive.

Comme on le voit quand les élèves utilisent les coordonnées des points, ils arrivent à une solution bien précise à l'échelle de CABRI à deux chiffres après la virgule. Pour confirmer ceci, quand ils interrogent si les droites sont bien parallèles, la réponse de CABRI est positive.

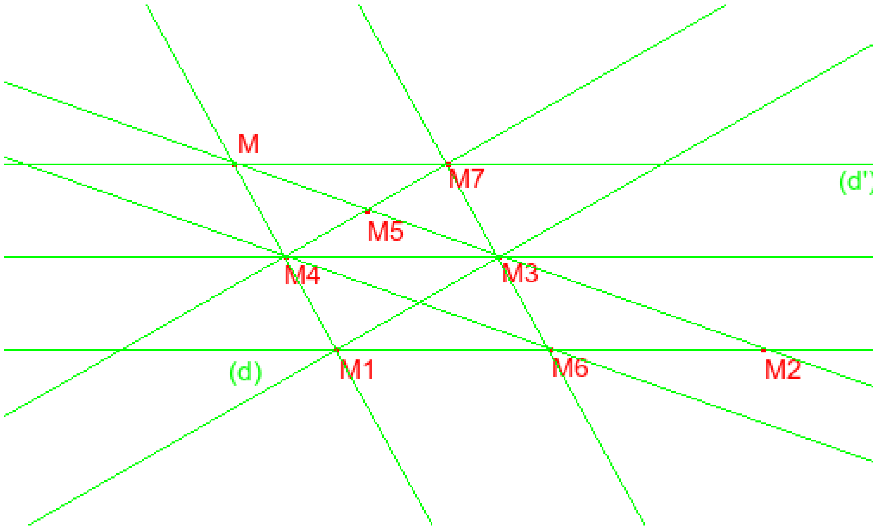
Au niveau des élèves du collège, on peut dire qu'ils ont travaillé parfaitement dans les objectifs de l'enseignement de la géométrie : ils utilisent la propriété de « droite des milieux », qui est à la base de l'invariance du parallélisme dans le déplacement, et aussi les coordonnées d'un point pour le repérer.

On peut dire aussi que si on veut résoudre cette construction dans la géométrie sur une feuille papier avec la seule possibilité de pouvoir tracer des segments et des milieux des segments, alors le problème devient plus difficile. En effet il s'agit alors de la constructibilité de cette parallèle dans la « géométrie des segments et milieux ».

La parallèle à une droite donnée (d) passant par un point extérieur M est-elle constructible seulement avec les tracés des segments et des milieux des segments ?

Ceci peut donner lieu à un problème posé dans un niveau supérieur :démontrer la constructibilité ou la non constructibilité par l'utilisation de la géométrie analytique et l'extension des corps. (voir bibliographie n°1)

Nous avons trouvé une solution élémentaire, avec les tracés des droites et des milieux et les propriétés du parallélogramme



1) On trace un point quelconque de (d) noté M1 et un deuxième point de (d) noté M2
2) On trace le milieu de M et M1 noté M4 et le milieu de M et M2 noté M3
3) On trace le milieu de M et M3 noté M5
4) On trace le milieu de M1 et M2 noté M6
5) On trace les droites (M6 M3) et (M4 M5) qui se coupent en M7
6) On trace la droite (M M7) qui est la parallèle recherchée.

CABRI nous dit que les « objets sont parallèles » c 'est-à-dire que les droites (M M7) et (d) sont bien parallèles.

La démonstration géométrique est aisée pour les élèves du collège, (en troisième ou en quatrième). En effet il s'agit d'utiliser des propriétés du parallélogramme et de la « droite des milieux ».

On vous rappelle qu'il est démontré qu 'il impossible avec uniquement une règle, (sans l'utiliser comme un « compas »...), de construire le milieu d 'un segment, de mener par un point une parallèle à une droite.

On vous rappelle que **si on donne déjà tracé deux droites parallèles quelque part dans le plan de la feuille**, alors le tracé de la parallèle aux droites parallèles données, passant par un point extérieur, est possible seulement avec la règle.

Notre point de vue (2), sur les différents « univers géométriques »

Différents univers géométriques ou différentes géométries **On peut dégager après l'analyse effectué une définition sur ce qu 'est FAIRE DE LA GEOMETRIE, pour un élève du collège.**

Selon les instruments de tracé permis ou selon les manipulations possibles autorisées, on peut dire qu'un élève de collège fait de la géométrie quand il est capable d'anticiper et de justifier l'aide des propriétés connues de la géométrie, chaque étape, afin de résoudre un problème de construction.

Exemples de différents univers géométriques

1) Dans la géométrie des pliages, une droite sera représentée par un pliage. Il est possible dans cette géométrie, de construire des perpendiculaires, des bissectrices d'angle, des médiatrices d'un segment, des parallèles. Alors si un élève construit par pliages le tracé d'une droite parallèle à (d) passant par un point extérieur M et il la justifia à l'aide des propriétés des parallèles et perpendiculaires, on peut affirmer qu'il a fait de la géométrie.

2) Une géométrie que j'ai crée pour la formation de professeurs utilise seulement le transport des distances et le tracé de segments, (seulement avec un bord de la règle en plastique on trace en crayon feutre effaçable les extrémités d'un segment et alors on peut tracer ailleurs dans le même plan de la feuille un autre segment isométrique) ;(voir bibliographie n°5). Le problème du tracé de la parallèle à (d) passant par M est possible dans cette géométrie. Alors celui qui trouve une solution, doit le justifier par des propriétés de la géométrie euclidienne classique. Dans cette géométrie la plupart de problèmes de construction classiques sont résolubles. L'intérêt en formation es t que comme le public de professeurs ou étudiants n'est pas habitué à cette géométrie ils sont placés tout naturellement dans une situation de recherche sur des problèmes de construction classiques. Par exemple construire la bissectrice d'un angle donne.

3) Dans l'univers géométrique donnée par une feuille quadrillée et la règle, les élèves travaillent aussi de problèmes de construction. Ils utilisent le quadrillage où il y a des parallèles, des angles droits, des carrés déjà tracés et ils justifient aussi avec des propriétés. Donc ils font de la géométrie !

4) Dans les univers de CABRI GEOMETRE, GEOGEBRA, GEOPLAN etc. de « géométrie dynamique », deux types de géométrie sont possibles.

Si on autorise tout déplacement sur l'écran, avec utilisation du logiciel pour s'assurer que par exemple deux points sont superposables ou confondus et que les élèves justifient à l'aide des propriétés, alors on fait de la géométrie, (au sens de géométrie « molle » sur un univers de géométrie dynamique). C'est dans ce sens que la solution proposée par déplacement, celle qui conserve le parallélisme de deux droites, justifiée par la propriété connue sur le nom de « la droite des milieux », (voir plus haut cette activité) est acceptable dans cet univers géométrique.

Si par contre, on interdit toute justification qui utilise des déplacements, alors on est dans un univers qui est parfaitement identique à celui de la géométrie classique euclidienne. Sauf que le logiciel de géométrie dynamique, trace les constructions à notre place ! C'est ainsi que le problème de la parallèle, peut être résolu à l'aide des fonctions de tracé par le logiciel : « milieux de deux points » et « droites ». La justification s'appuie dans les propriétés de la géométrie euclidienne et elle est réalisée de façon « classique » Cette utilisation « dure » des logiciels de géométrie dynamique, s'appuie sur les propriétés classiques des parallélogrammes ; (Voir notre solution plus haut).

Par contre si un élève propose une solution seulement parce qu'il a seulement « ajusté à l'oeil», une droite à peu près parallèle à (d), passant par M, alors il ne fait pas de la géométrie. Il est en train de faire un dessin et non une figure, il utilise l'écran comme peut le faire un élève de l'école primaire quand il n'a pas encore appris la différence entre dessin et figure. Si l'enseignant propose a l'élève d'interroger à l'aide du logiciel si les droites sont parallèles, la réponse sera très probablement négative, car il n'a utilisé aucune propriété géométrique.

Par contre si l'élève pour résoudre le problème se sert des propriétés : « si les côtés d'un quadrilatère sont de même longueur deux à deux alors il est un parallélogramme » et « un parallélogramme a les côtés opposés parallèles », et s'il construit un quadrilatère MABN avec A et B sur (d), puis il évalue les longueurs MA ;AB ;BN ; NM par la fonction « distance entre deux points » et qu'il raisonne avec des propriétés et des invariants pour bouger les points jusqu'à obtenir MA=BN et AB = NM alors il fait de la géométrie ,(« molle »). Comme il utilise des propriétés et des invariants dans le déplacement, alors dans ce cas quand il utilise la fonction d'interrogation du logiciel « les droites sont elles parallèles ? », la réponse est positive.

Voici une démarche possible de nos élèves.

Les élèves démarrent avec les point A, B sur (d) et un point N « à peu près à l'œil » pour obtenir « à peu près » AM=BN et AB=NM

Ils utilisent CABRI pour évaluer les distances, ils observent qu'il n'y pas d'égalité. Ils utilisent la fonction de CABRI les droites sont-elles parallèles ? CABRI répond que « les objets ne sont pas parallèles. Par la suite ils vont chercher à trouver les égalités des distances MA=BN et AB = NM. S'ils cherchent simultanément en bougeant les points c'est trop difficile. On cherche alors une autre solution où l'on peut travailler avec des invariants lors des déplacements.

Solution : On utilise le milieu O de M et B, la droite (AO), un point N « à l'œil » sur cette droite, et on le bouge (il sera toujours sur la diagonale (AO), jusqu'à obtenir AB = NM . Par la suite on interroge CABRI et il nous dit que les droites sont parallèles. La justification : Comme (AO) passe par A et le milieu de [MB] elle est une des diagonales d'un parallélogramme ABNM , si on a en plus MN=AB alors ABMN est un parallélogramme et (AB) parallèle à (NM). Cette démarche est faite dans une géométrie « molle » car on bouge le point N sur (AO) jusqu'à obtenir l'égalité. Par contre le fait qu'un élève cherche à démontrer correctement que si un quadrilatère MABN vérifie que : la diagonale (AN) passe par le milieu de [MB} ; que MN=AB alors ils est un parallélogramme est tout à fait un problème intéressant pour les élèves du collège.

5) Un autre univers géométrique est celui des « figures articulées telles que les côtés peuvent glisser et changer de longueur » comme par exemple une famille de quadrilatères ayant les quatre côtés de même longueur. Dans ma thèse aux années 70 « La pédagogie des mathématiques est-elle moderne ? », où nous avons travaillé sur l'hypothèse que : un enseignement des mathématiques dites « modernes » réalisé avec une pédagogie classique, produisait des apprentissages moins efficaces, que un enseignement qui tenait compte des avances en didactique des mathématiques de cette époque. (Voir bibliographie n° 6). Nous avons analysé à cette époque, l'intérêt pédagogique positif de cet univers des « figures articulées ». Ces dernières années dans le sein de notre l'équipe de l'IREM de Basse-Normandie les « figures articulées » , ont été à la base des activités expérimentées dans des collèges et publiées dans l'ouvrage , «http ://www.math.unicaen.fr/irem/publi/publi08/Dan_NpG.htmNouvelles pratiques de la géométrie. De la manipulation des objets géométriques à leur formalisation », (voir bibliographie n°8).

Nous n'allons pas ici énumérer une liste assez complète des univers ou des géométries que l'on peut utiliser en enseignement ou en formation, mais nous sommes convaincus depuis longtemps que le fait de résoudre un problème de construction dans des univers différents est fondamental pour l'apprentissage des différents concepts de la géométrie euclidienne. Ceci favorise la formation de « psychomorfismes » entre les différents univers et leurs méthodes de résolution. Les « psychomorphismes », (voir bibliographie n° 8), favorisent la formation du concept géométrique. Ceci peut s'appliquer aussi à d'autres domaines de l'enseignement, voir d'autres disciplines.

Notre point de vue (3), sur « le point en géométrie »

Nous avons implicitement dans cet article abordé la notion difficile pour les élèves de « point géométrique » et « droite passant par un point »

Dans les années 70 quand nous avons fait nos recherches sur la didactique des mathématiques, (voir bibliographie n°6), nous avons pris conscience, qu 'il était bien difficile pour nos élèves de comprendre la notion de point géométrique. L'idée de dire verbalement aux élèves de la fin de la primaire ou de la sixième, que le point était « infiniment petit » ne nous avait pas du tout convaincu. Au contraire le principe des « psychomorphismes » que nous avons établi, nous a guidé pour chercher des activités qui partent des actions « directement expérimentables » pour aboutir par a une formalisation.

Nous avons travaillé ainsi aux « années 80 », avec nos élèves, des activités pour développer l'apprentissage de la notion de point géométrique.

Nous vous conseillons de voir ceci dans l'ouvrage « Du dessin perçu à la figure construite », (voir bibliographie n° 5).

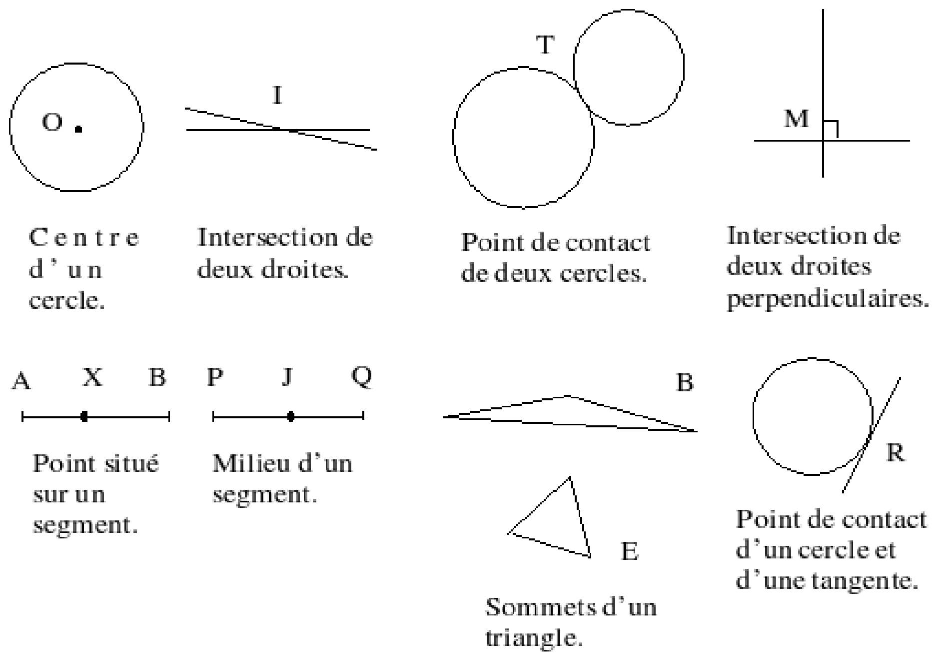
(Extrait de la page 108)

2.8 - La perception visuelle du point géométrique : peut-on voir un point ?

Nous avons demandé aux élèves de classer les points O, I, T, M, X, J, E, R, selon qu'ils étaient "le mieux perçu".

Les points **mieux perçus** par la majorité des élèves de la classe sont : **O, M, X, J, E**.

Les points **mal perçus** par la majorité des élèves de la classe sont : **I, T, R**.



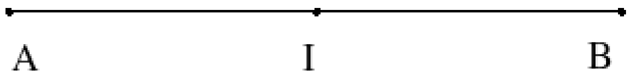
Donnons, avec les phrases qu'ils ont employées, les **arguments des élèves relatifs à ce classement**.

Pour les points bien perçus :

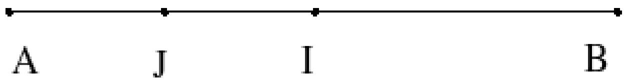
- **Centre du cercle** : c'est le point où l'on pique le compas pour tracer le cercle.
- **Intersection de deux droites perpendiculaires** : c'est le point où l'on pose l'équerre pour tracer l'angle droit.
- **Point** X d'un segment [AB] : c'est un point situé sur la droite (AB), entre A et B.
- **Point** J : c'est le point qui est juste au milieu entre P et Q.
- **Sommet B d'un triangle** avec un angle obtus : on le voit bien car c'est un sommet du triangle.

Pour développer une des remarques selon laquelle "on peut imaginer le point" dans sa tête, nous proposons une deuxième phase de l'activité.

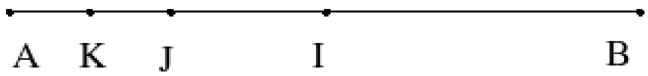
Soit un segment [AB] de mesure 10 (en cm), tracer, avec un petit rond, le milieu I de [AB].



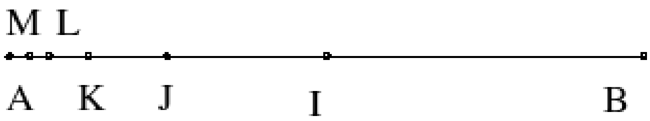
Puis tracer le milieu J de [AI],



puis le milieu K de [AJ],



puis le milieu L de [AK], le milieu M de [AL] et ainsi de suite, autant que faire se peut.



Les élèves ont constaté que, au-delà du point P construit par la suite I, J, K, L, M, N, O, P des milieux des segments, il était impossible de dessiner les points mais que l'on pouvait les "imaginer dans sa tête".

Nous leur avons donc proposé d'écrire le tableau des **mesures en cm des segments successifs en autorisant la calculatrice**.

segment	[AI]	[AJ]	[AK]	[AL]	[AM]
mesure	5	2, 5	1,25	0,625	0, 3125

[AN]	[AO]	[AP]	[AQ]
0,15625	0, 078125	0,0390625	0, 01953125

Commentaire des élèves : il est toujours possible de diviser la mesure du segment par deux et que même si le **"nombre obtenu est tout petit, il n'est pas nul"**. Ils concluent qu'on peut imaginer la suite des points construite ainsi mais qu'il était impossible de la représenter sur une figure car **cette suite ne s'arrête jamais**. Ils peuvent ainsi valider leur conception implicite de l'infinité des points de la suite car ils savent qu'on peut **diviser la mesure non nulle d'un segment** par deux et que le résultat ne sera **jamais nul** même si la calculatrice affiche : 0.000000000000. Nous profitons de cette remarque pour souligner les **limitations de la calculatrice.**

Nous vous conseillons aussi de voir l'activité proposée dans la page 88. Les élèves travaillent d'abord avec le dessin grisé « objet physique », où aucun autre tracé figure, (à part les triangles grisés). Dans la séance suivante avec l'objet idéel de la géométrie, c 'est-à-dire que l'enseignant dit explicitement qu'au départ on a un carré, ses diagonales, ses médianes et puis on recommence à chaque étape de l'algorithme de tracé des triangles successifs.

Ils assimilent l'algorithme de la construction et dissent **que les triangles rectangles isocèles se rapprochent de plus en plus d'un sommet du carré (un point), mais qu'ils seront toujours des « petits carrés », jamais des points.**

Conclusion

Le fait de réaliser une unité d'apprentissage autour de la notion de droite parallèle à une droite donnée , passant par un point donnée présente l'avantage de faire travailler nos élèves, avec des réels problèmes de construction. Selon l'univers de travail autorisé les solutions seront en accord avec la structuration particulière de cet univers. Mais ce qui est fondamental est que la justification de la solution doit se faire par les propriétés géométriques du programme. C'est ainsi que la notion est intégrée à un univers des propriétés et des problèmes de construction la concernant.

Une version plus longue de cet article se trouve sur notre site de l'IREM de Basse-Normandie
http ://math.unicaen.fr/irem/internat/Ruben/conflitSC_01_09.pdf

Ruben Rodriguez Herrera
IREM, IUFM
Basse-Normandie
France

Bibliographie

1. Carrega J.-C., 2001, Théorie des corps : la règle et le compas - Hermann
2. Duval R., 2005, Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, Annales de didactique des sciences cognitives, 10, 5-53
3. Houdement C., Kuzniak A., 2006, Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactiques des sciences cognitives*, 11, 175-193
4. Laborde C., Capponi B., 1994, Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 14,1.2, 165-210.
5. Rodriguez Herrera R. , Salles Le-Gac D., 2005, Du dessin perçu à la figure construite, Ellipses, 254 pages.
6. Ruben Rodriguez Herrera, « La pédagogie des mathématiques est-elle moderne ? », Thèse en Sciences de l'Education, Caen 1978, 692 pages
7. Ruben Rodriguez Herrera, dans "Géométrie plane en sixième" , CNDP,CRDP, Caen, France,1998, 144 pages.
8. Danielle Salles Le-Gac et Ruben Rodriguez Herrera. Nouvelles pratiques de la géométrie. De la manipulation des objets géométriques à leur formalisation, IREM de Basse-Normandie, 2008, 120 pages.

La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez (III-A)

Troisième partie : le calcul des ordonnées de la "sinusoïde" selon Jacques Bernoulli

A) Ce qu'en dit l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences* et ce qu'il faut entendre par là

Il y a loin de la géométrie du triangle et de la trigonométrie [1] aux fonctions trigonométriques que nous utilisons aujourd'hui. En particulier, au delà de l'usage des triangles rectangles pour mesurer et comparer les angles, les anciens géomètres ont élaboré au fil des siècles des méthodes pour calculer les valeurs des différentes lignes trigonométriques qu'ils ont définies dans un cercle de rayon quelconque, en rapportant ces valeurs à ce rayon. Cela les a conduit à construire des tables trigonométriques, qui seront données en valeurs entières dans l'écriture décimale, héritée des mondes hindou et arabo-musulman et introduite en occident chrétien vers le XIIème siècle, dès lors que cette écriture s'est avérée fort commode pour des grandeurs linéaires rapportées à une grandeur linéaire : l'usage de l'écriture décimale des rationnels décimaux puis des rationnels et des réels quelconques avec des développements plus ou moins longs donnant une approximation sous un seuil donné, débute essentiellement avec Simon Stevin de Bruges (1548-1620) : les principes de la décimalisation des parties fractionnaires d'une grandeur non entière sont exposés dans

Die Thiende(*La Disme*) parue en 1585 ; auparavant, et même bien après que l'écriture des nombres sous forme décimale 'à virgule' se généralisât, la précision des tables trigonométriques dépendait de la taille du rayon ; le sinus de 30 degrés, par exemple, est de 50 pour un rayon de 100, de 500 000 pour un rayon d'un million, etc., ce qui donne une valeur entière avec une précision de deux ou de six chiffres – nous dirions aujourd'hui 'après la virgule' – pour les exemples choisis. Pour autant, le fait de tabuler les sinus 'droit' ou 'verse' (*i. e.* : $1 - \cos x$), ou les cosinus, la sécante ou la cosécante (inverse algébrique du sinus), la tangente ou la cotangente, – voire même de leurs logarithmes, lorsque ce nouvel outil fut élaboré à la charnière des XVIème et XVIIème siècles par John Napier (1550-1617) et Henry Briggs (1561-1630), puis diffusé par Adriaan Vlacq (1600-1667) –, ne signifie pas que le concept de sinus soit alors défini de façon fonctionnelle. Les lignes trigonométriques restent de nature géométrique et valent essentiellement pour leur utilité pratique, et l'invention de l'algèbre littérale, par François Viète (1540-1603) puis René Descartes (1596-1650) comme moyen d'analyse et de résolution des problèmes de géométries portant sur les courbes "*algebriques*" ou "*mechaniques*" pour reprendre la distinction cartésienne, conduira dans un premier temps à 'accélérer' les calculs pour établir les tables, grâce, par exemple, aux formules d'addition établies par Viète dans son *Canon mathematicus seu ad triangula*(1579, permettant la 'résolution des triangles' en usant systématiquement des six lignes trigonométriques et de leurs relations, avec en particulier le calcul de $\sin(nx)$ en fonction des puissances $\sin x$ et de $\cos x$). Ce type de considérations donnera lieu, en France, à de nouvelles recherches de nature plus algébrique [2], par Thomas Fantet de Lagny (1660-1734) par exemple, que l'on retrouvera cité à plusieurs reprises sur ces questions, ainsi que sur leurs prolongements à la construction des logarithmes, par le signataire de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*... – à savoir Fontenelle, secrétaire de l'Académie et éditeur des *Mémoires*... –, ou en marge de ces mêmes *Mémoires*, et qui y signera lui-même des mémoires et plusieurs ouvrages roulant sur des questions connexes(*cf. infra*).

De même, nous l'avons vu dans les articles précédents, le fait qu'une courbe qui s'avère être – ici et maintenant – 'représentative' de la 'fonction sinus', soit exhibée et tracée pour les besoins de la résolution d'autres problèmes, ne signifie pas que la relation fonctionnelle entre la mesure variable d'un angle ou d'un arc et la valeur de son sinus (défini comme portion d'une puissance de 10 ou même comme fraction de l'unité) soit clairement comprise comme un phénomène physique digne d'étude pour lui-même, au même titre que ceux qui seront travaillés du fait de la mathématisation de la dite physique : notre "sinusoïde" n'est alors que la "*compagne de la roulette*" pour Roberval ou la 'développée' d'une ellipse tracée sur un cylindre droit pour Pitot ; et ces courbes jouent un rôle d'outil analogue à celui des lemmes, pour permettre la résolution d'autres problèmes et non un rôle central, en tant qu'objet d'étude. Nous verrons dans la cinquième partie de ce feuilleton que le mot lui-même de "sinusoïde" apparaît pour la première fois chez l'ingénieur Bélidor, lorsqu'il s'agira de construire physiquement une telle courbe dans une situation où elle permettra de résoudre directement un problème mécanique.

Dans le même ordre d'idées, dès le XVIIème siècle, Blaise Pascal (1623-1662) proposera des 'intégrations avant la lettre' qui touchent à des 'sommes de puissances de sinus', dans ses *Traité des Sinus du Quart de Cercle*, paru [3] en 1659. En voici un exemple, avec la *Proposition I* :

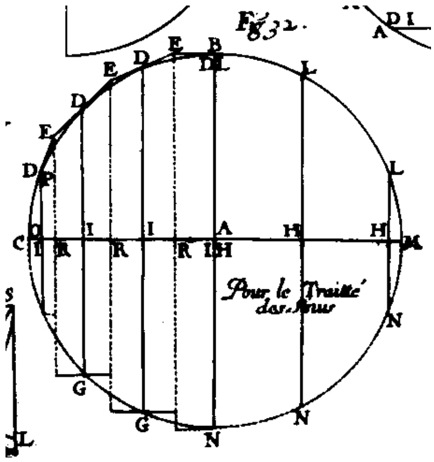
---

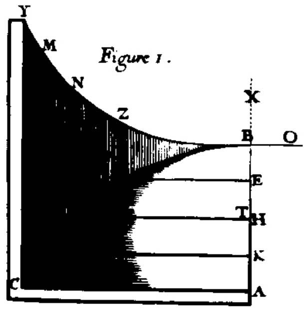
[1] Le terme de "*Trigonometria*" (*i. e.* : mesure des triangles) apparaît pour la première fois dans le titre d'un ouvrage de Pitiscus, paru en 1595.

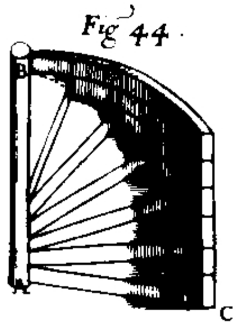
[2] *Cf.* [LAGNY, 1703 à 1729]. Les références entre crochets des notes renvoient à une bibliographie explicite et spécifique de ce IIIème épisode à la fin de sa seconde partie, dans le prochain numéro du *Miroir*.

[3] *Cf.* [PASCAL, 1559].

Prop. I. *La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.*
[Autrement dit, figure 32 :] *Je dis que la somme des sinus* DI *(multipliés chacun par un des arcs égaux* DD *, comme cela s'entend de soi-même) est égale à la droite* AO *multipliée par le rayon* AB. [...]
AVERTISSEMENT.*Quand j'ai dit que toutes les distances ensemble* RR *sont égales à* AO, *et de même que chaque touchante* EE *est égale à chacun des petits arcs* DD, *on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie ; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles,* EE, *ne diffère de l'arc entier* BP, *ou de la somme de tous les arcs égaux* DD, *que d'une quantité moindre qu'aucune donnée : non plus que la somme des* RR *de l'entière* AO.







Si l'on exprime en termes algébriques l'énoncé de cette proposition I, par exemple, on peut l'entendre comme l'intégrale de la 'fonction sinus' [4] , à ceci près qu'il s'agit d'une intégrale en quelque sorte curviligne, qui somme les lignes 'sinus' le long d'un arc de cercle, et ces lignes sont érigées perpendiculairement au plan du cercle, dans une portion de cylindre élevé sur l'arc en question. On retrouve ici la courbe sinusoïdale dans le cylindre, comme chez Pitot, mais nullement dans un plan comme représentation d'une relation fonctionnelle liant expressément x et $sin\ x$. On comprend ce parti-pris en lisant l'*Avertissement* qui suit d'une part et selon une conception dont on trouve l'usage sur deux des figures 1 et 44 des planches I et IIII illustrant d'autres propositions des *Lettres d'Amos Detonville* : une fois encore, la mathématique est intimement liée à des préoccupations d'ordre pratique, qui ne sont pas seulement de l'ordre de la justification *a posteriori*, mais relèvent d'une volonté *a minima* pédagogique (faire sens) et plus probablement d'une demande technique effective en amont de la spéculation (ici l'architecture, semble-t-il, qui nécessite la mesure des aires et des volumes pour l'estimation des besoins en matériaux) ; on objectera sans doute la grande diversité des propositions des *Traités* de Pascal : mais celle-ci reflète peut-être la volonté généralisatrice du géomètre, qui envisage d'autres situations, non nécessairement tirées de la réalité qui a provoqué les premières spéculations.

Mais alors qu'en est-il de l'aspect fonctionnel – au sens moderne – de ce que nous appelons aujourd'hui une fonction trigonométrique ? Un aspect essentiel de la question passe par le calcul des valeurs d'une fonction sous la forme de développements polynomiaux limités ou illimités. C'est un aspect du nouveau calcul, que l'on appellera 'infinitésimal' et que vont développer Newton et Leibniz à la fin du XVIIème siècle, puis leurs héritiers, les frères Bernoulli, Jacques (ou Jacob, *alias* Jacques I^er^, 1654-1705) et Jean (ou Johann, *alias* Jean I^er^, 1667-1748), le Marquis Guillaume de l'Hospital (1661-1704) – dont l'*Analyse des Infiniments Petits*[5] fut "*éclaircie*" par le caennais Pierre Varignon[6] (1654-1722) et complétée du calcul intégral par Louis-Antoine de Bougainville[7] (1729-1811) –, ou encore Jakob Hermann (1678-1733) et bien évidemment Leonhard Paul Euler (1707-1783), et de nombreux autres auteurs, au nombre desquels il faut citer Maria-Gaëtana Agnesi (1718-1799), dont le traité de calcul (1748) eut un grand succès comme manuel d'enseignement de cette 'géométrie supérieure' que devint très

[4] Considérant le cercle de la figure 32 dans les axes [AC) pour Ox et [AB) pour Oy , et supposant que AC = 1, Pascal se propose en effet de calculer la somme des sinus (DI) des angles IAD de mesure z, comme les arcs CD, lorsque z varie de z_0 mesure de OAD lorsque D se projette en O, jusqu'à $\pi/2$, mesure de OAB lorsque D vient en B. On a donc à calculer l'intégrale $\int_{z_0}^{\pi/2} \sin z\ dz = [-\cos\ \pi/2 + \cos z_0]\ = \cos z_0$, qui est bien le produit du rayon AB = 1 par la ligne AO, cosinus de l'angle de mesure z_0

[5] *Cf.* [L'HOSPITAL, Guillaume, François, Antoine de Sainte-Mesme (Marquis de ?), 1696, 1716, 1768].

[6] *Cf.* [VARIGNON, Pierre, 1725].

[7] *Cf.* [BOUGAINVILLE, 1754-6].

vite le calcul infinitésimal dans le monde savant européen au XVIIème siècle[8].

Pour ce qui nous occupe ici, on notera cependant qu'en 1802, Montucla, dans son *Histoire des Mathématiques*[9], traite de la trigonométrique antique (jusqu'à Ptolémée) dans le tome 1 puis des innovations de Rheticus et de Regiomontanus, des arabes (au tome 1) et de Néper (ou Napier, au tome 2), et encore parle-t-il plutôt de trigonométrie sphérique, essentielle en astronomie : par exemple, rappelons que le théorème de Ménélaüs est originellement sphérique et 'devient' plan chez Ptolémée. Mais ensuite, Montucla attribue au XVIIIème siècle l'essentiel des connaissances nouvelles concernant les lignes trigonométriques : *Je ne vois pas que personne, avant les premières années de ce siècle* [le XVIIIème], *se soit avisé de rechercher des formules propres à exprimer les sinus ou co-sinus, tangentes ou co-tangentes des sommes ou différences d'arcs de cercle, de leurs puissances, &c. Il étoit cependant bien naturel, ce semble, et l'occasion a dû s'en présenter souvent, de chercher à connoître quel étoit le sinus ou le co-sinus, la tangente ou la co-tangente d'un arc qui seroit la somme ou la différence de deux autres dont on connoissoit les sinus et co-sinus, ou les tangentes et co-tangentes. Les premiers théorêmes sur ce sujet paroissent être l'ouvrage de Frédéric-Christian Mayer*[10]*, l'un des premiers membres de l'académie de Pétersbourg. On a de lui, dans les Anciens Mémoires de cette Académie, pour l'année 1727, une trigonométrie analytique, toute fondée sur ces théorêmes* ; et il dresse en cet endroit le formulaire classique des relations trigonométriques (*le rayon étant supposé = 1*). C'est dire si l'historien – dont on connaît à la fois les mérites, en particulier comme lecteur attentif des œuvres du passé, mais aussi les lacunes – avait commis quelques impasses sur la question, comme on vient de le voir pour la fin du XVIème et le XVIIème siècle, et comme nous l'allons montrer, s'agissant du développement en série des lignes trigonométriques.

* * * * *

Une rapide chronologie des faits concernant le calcul des sinus par développement en série s'impose en effet, pour comprendre le contexte des éléments 'd'histoire' livrés dans les volumes de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences pour l*[es] *année*[s] *1701* & *1703*, que nous allons citer dans cette première partie du 3ème épisode de notre feuilleton, et qui servent d'introduction au mémoire de Jacques Bernoulli.

Si l'on considère que la construction point par point d'une 'courbe intégrale solution d'un problème différentiel' est une amorce de la question, il faut nommer Descartes, qui le premier, montre que sa méthode algébrique de détermination des tangentes ne peut pas s'appliquer à un problème qui conduirait à une équation où une tangente, voire une normale, interviendrait dans les données : c'est ce que fait malencontreusement Florimond de Beaune (1601-1652), qui, cherchant à résoudre un problème d'optique en 1638, se retrouve sans en avoir pris conscience, devant une équation que nous appelons "*différentielle*" aujourd'hui, et qui soulevait ce que ses contemporains nommeront le "*problème inverse des tangentes*", puisqu'il nécessite la construction d'une courbe intégrale. De Beaune s'en ouvre à Descartes dans une lettre et Descartes résoudra le problème par la construction d'une logarithmique point par point, dont il calcule les ordonnées par développement numérique : nous sommes alors en 1639.

Les premiers développements en série 'algébriques' concernent essentiellement les fonctions rationnelles et/ou radicales, et se trouvent, par exemple, chez John Wallis (1616-1703), Nicolas Mercator (*ca.* 1620-1687), Lord Brouncker (1620-1684) et Isaac Newton ; ils peuvent conduire, par intégration terme à terme, aux développements de certaines fonctions transcendantes :

– le premier, féru de géométrie et d'algèbre – comme son compatriote, Thomas Harriot[11] (1560-1621), qui a fortement influencé John Wallis, et après lui toute la tradition algébrique anglaise –, adopte les notations cartésiennes et développe ensuite l'idée que les expressions polynômiales algébriques peuvent être conçues comme prolongeables à l'infini et que la *nouvelle analyse* de Descartes (qui nomme ainsi l'algèbre), permet d'étendre l'arithmétique et ses opérations *ad infinitum*. En 1655, paraît son *Arithmétique des infinis* (*Arithmetica Infinitorum*, 1655) ; on y trouve de nombreux résultats, dont le calcul de ce que nous appelons aujourd'hui les "intégrales de Wallis", donnant les aires sous les arches des fonctions périodiques obtenues comme puissances entières des lignes trigonométriques ordinaires, $sin^p\ x$ ou $cos^q\ x$. Ses spéculations, et sa correspondance avec Lord Brouncker (*cf. infra*) le conduiront aussi à l'inégalité remarquable :

$$\frac{3\times3\times5\times5\times\cdots\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times\cdots\times12\times14}\sqrt{1\frac{1}{14}}<\frac{4}{\pi}<\frac{3\times3\times5\times5\times\cdots\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times\cdots\times12\times14}\sqrt{1\frac{1}{13}}$$

cet encadrement est en revanche peu utile, étant donné la lenteur de convergence du processus, en substance :

$$\frac{4}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times3\times5\times5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)\times(2n+1)}{2\times4\times4\times6\times\cdots\times(2n)\times(2n)\times(2n+2)}$$

[8] *Cf.* [AGNESI, 1748 & 1775].

[9] *Cf.* [MONTUCLA, 1799-1802].

[10] Frédéric-Christian (ou Christoph) Mayer (1697-1729) semble n'être connu des historiens que par ses travaux en astronomie et quelques articles dans les *Commentarii*… de l'académie de Saint-Pétersbourg. *Cf.* [MAYER, 1727 & 1728].

[11] Élève de John Dee et lecteur de François Viète, il a laissé des notes rassemblées et éditées *post mortem* sous le titre : *Artis analyticæ Praxis ad Æquationes algebraicas*… *Cf.* [HARRIOT, 1631].

– les deux suivants réalisent la *Quadrature de l'Hyperbole* par le développement de la logarithmique obtenu par intégration terme à terme d'une fonction hyperbolique de type $(1 \pm x)^{-1}$. Mercator (de son nom Nicolaus Kauffmann, en latin : *Mercator*) est un mathématicien et astronome allemand, né à Cismar (Holstein) vers 1620, mort à Paris en février 1687 ; il a publié de nombreux mémoires d'astronomie et de trigonométrie sphérique, en particulier dans les *Philosophical Transactions*, de 1660 à 1670 ; sa *Logarithmo-technia* paraît en août 1667, et on y trouve le développement suivant : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}$, qui semble avoir frappé Newton, et dont Wallis tentera d'attribuer la paternité par antériorité à Lord Brouncker. Ce dernier, lord vicomte de Castle-Lyons, homme d'État et mathématicien, est né vers 1620 à Castle-Lyons (Irlande), et mort à Londres le 5 avril 1684 ; il prit une part active à la restauration de Charles II, fut nommé chancelier et lord commissaire de la Tour ; c'est l'un des fondateurs de la *Royal Society*, dont il fut le premier président en 1662. En avril 1668, paraît un mémoire dans les *Philosophical Transactions*, donnant la quadrature de l'hyperbole par une série, résultat auquel il serait arrivé dès avant 1657, d'après Wallis ; on y trouve un second mémoire en 1673 sur le tautochronisme de la cycloïde ; dans son *Commercium epistolicum* (imprimé en 1658), Wallis a inséré plusieurs lettres de Brouncker, relatives à la solution de problèmes proposés par Fermat, notamment à celle en nombres entiers de l'équation : $ax^2 + 1 = y^2$; enfin, et surtout, Brouncker est en quelque sorte l'inventeur des fractions continues sous leur forme moderne, en résolvant une question soulevée par Wallis dans son *Arithmetica Infinitorum* : Wallis y proposait d'interpoler dans la série $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, un terme intermédiaire entre 1 et $\frac{2}{3}$; ce terme devant donner la valeur de $\frac{\pi}{4}$. Brounker trouva l'expression

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

qui conduit au calcul d'approximations successives de π avec une efficacité toute relative. Comme l'indique Paul Tannery dans la notice qu'il rédigea sur Brouncker, c'est bien plutôt l'algorithme qu'il emploie à cette occasion qui "*suscita un grand intérêt et fut à l'origine de nombreuses découvertes*".

– quant à Isaac Newton[12], il semble qu'il soit parvenu à de nombreux résultats dès 1664, si l'on en croit certains passages de ses lettres à Henry Oldenburg, en date des 13 juin et 24 octobre 1676, dont le contenu roule sur ces questions et conduiront, pour une bonne part aux contenus de son *Tractatus de Quadratura Curvarum* (1704) et de sa *Méthode des Fluxions et des Suites infinies* dont la traduction française par Buffon paraîtra en 1740, et à certaines spéculations d'analyse développées dans ses *Principia...* (*Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, 1687) traduits en français par la Marquise du Châtelet en 1759. Il est clair que dès 1664-5 d'après Newton, et au plus tard en 1676, d'après les lettres à Oldenburg, que Newton était en possession de sa formule générale, dite du binôme, pour le développement d'expressions du type $(1 \pm x)^{-n}$, avec n rationnel, et de méthodes en calcul en série, du type de celle de Mercator, dont il manifeste l'efficacité pour l'établissement de tables de logarithmes avec un nombre de décimales déterminé (il calcule avec 13 décimales dans la lettre d'octobre) et par le calcul (*au passage*, dit-il) d'une approximation expéditive de π, en calculant l'aire d'un demi-cercle de rayon l'unité, centré sur l'axe des abscisses et passant par l'origine ; ce sont ces résultats que l'on trouvera exposés plus en détail dans sa *Méthode des Fluxions*.

C'est cependant plutôt du côté de Leibniz qu'il faut chercher une influence sur les Bernoulli, dans la mesure où ses méthodes ont prévalu assez vite sur le continent, celles de Newton n'étant publiées véritablement que dans les *Principia* (1687) – et encore très partiellement, car ce n'est pas l'objet principal de l'ouvrage –, puis à la suite d'*Opticks* (1704) et enfin par les éditions, par William Jones en 1711, de ses méthodes dans l'*Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias*.

Gottlob Wilhelm Leibniz publiera de nombreux articles dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig, dont il est l'éditeur scientifique. Ses premières spéculations sur le calcul de séries numériques ou algébriques, semblent dater de son premier séjour parisien (à partir de mars 1672 et il a 26 ans), mais ne virent le jour qu'avec leur publication dans les *Acta Eruditorum*, à partir de 1682 ; son premier travail original sur la quadrature du cercle (1673-5), objet de sa fierté, est contemporain de la découverte qu'il fait de ses propres lacunes, qu'il comble en lisant Descartes, Pascal, Grégoire de Saint-Vincent ou de Sluse, et en rencontrant Huyghens, guide avisé dans ses lectures ; il n'avait eu à connaître, dans sa formation que quelques rudiments d'arithmétique, quelque teinture d'Euclide qu'il a seulement survolé, et une idée des indivisibles de Cavalieri par ce qu'en disent Thomas Hobbes et Vincent Léotaud[13] (1596-1672), enseignant de mathématiques à Dole et à Lyon ; il s'agit d'une "*Quadrature arithmétique du cercle au*

[12] *Cf.* [NEWTON, 1674-1684 à 1759].
[13] *Cf.* [LÉOTAUD, 1654, 1660 & 1663].

moyen d'une série infinie", qui procède à la fois de l'induction et de ce qu'il indique comme un héritage de Pascal, avec la généralisation à toute courbe du triangle 'infinitésimal' que ce dernier utilisa dans son *Traité des Sinus* ; mais ces recherches resteront à l'état de manuscrit qu'il n'eut pas le temps de publier à la fin de son séjour parisien (1673)[14] : "*De Quadratura arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolæ, cujus corollarium est Trigonometria sine Tabulis*". Ces réflexions sur la nature du nombre π – qui le conduiront à l'emploi du mot 'transcendance' – sont provoquées par la polémique autour de la quadrature 'prétendument exacte' du cercle proposée par Grégoire de Saint-Vincent dans son monumental *Opus geometricum Quadraturæ Circuli* (1647) puis autour de la 'prétendue' incompatibilité entre approximation par une série numérique et accès à une valeur exacte par une telle expression, défendue par James Gregory dans sa *Vera Circuli et Hyperbola Quadratura* (1668), débats dont l'un des protagonistes, à savoir Huyghens encore, lui fournit les éléments et lui en conseille la lecture. Les premières traces imprimées qui ressortissent à ces réflexions, se trouvent dans les *Acta Eruditorum* et datent de février 1682 (9 ans plus tard, donc), pp. 41-46 : "*De vera Proportione Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus expressa*" ; puis, après plusieurs articles sur la question de la quadrature des secteurs circulaires et autres segments de courbes – par exemple : "*De Dimensionibus Figurarum inveniendis*" dans les *Actes* de 1684 –, Leibniz publie, en avril 1691, pp. 178-182 : "*Quadratura arithmetica communis Sectionum conicarum quæ Centrum habent, indeque ducta Trigonometria Canonica, ad quantamcunque in Numeris exactis Exactitudinem a Tabularum necessitate liberata, cum Usu speciali ad Lineam rhomborum nauticam, aptatumque illi Planisphærium*". Entre temps, il jette les bases du calcul infinitésimal (qu'il nomma d'abord différentiel et sommatoire, la qualificatif d'intégral qu'il adoptera étant dû à Jean Bernoulli) : c'est l'objet essentiel de sa "*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quæ nec irrationales Quantitates moratur et singulare pro illis Calculi genus*" parue en octobre 1684 dans les *Actes* de Leipzig, pp. 467-473 ; et il écrit encore sur l'angle de contact et les lignes isochrones, etc.

C'est alors que paraissent, dans les *Acta Eruditorum* et dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* les contributions des frères Bernoulli que nous allons regarder plus en détail, et successivement :

– un article de Jean Bernoulli, dans les *Acta Eruditorum*, en 1699 : "*Ad novas Spatiorum Cycloidalium Quadraturas*", c'est-à-dire : "*À propos de nouvelles quadratures d'espaces cycloïdaux*", soit segments de la courbe (compris entre une partie d'arche de la courbe et sa corde), soit "secteurs" (compris entre la courbe et deux rayons issus du milieu de sa base), soit tranches (comprises entre la courbe, son axe et deux ordonnées) ;

– cet article fera l'objet d'une seconde publication en français, donnée pour être de 1699 et imprimé à Paris en 1702, dans les *Mémoires de l'Académie Royale* : "*Quadrature d'une Infinité de Segmens, de Secteurs, & d'autres Espaces de la Roulette ou de la Cycloïde vulgaire. Par M. Bernoulli, Professeur des Mathematiques à Groningue*" ; Fontenelle, auteur de l'*Histoire*... pour la même année 1699, l'introduit par un article intitulé : "*Quadrature d'une infinité de Segmens et de Secteurs de la Cycloïde*" ;

– un second article, daté d'avril 1701, complète les précédents dans les *Acta Eruditorum* : "*Joh. Bernoulli Multisectio Anguli vel arcus, duplici Æquatione universali exhibita, inserviens generali determinationi omnium Zonarum quadrabilium cycloidis*", c'est-à-dire : "*La multisection d'un angle ou d'un arc, mise en lumière par Jean Bernoulli à l'aide d'une équation de duplication universelle...*" ;

puis, la démonstration et l'heuristique de la démarche et de la formule proposée pour la section indéterminée des angles étant éludées par Jean Bernoulli, paraissent des mémoires de Jakob Hermann et de Jacques Bernoulli, qui proposent respectivement, le fondement de la formule, et une heuristique doublée d'une démonstration par induction du résultat :

– dans les *Acta Eruditorum* d'août 1703 : "*J. Hermanni Demonstratio Geminæ Formula a Celeberrimo Dn. Joh. Bernoulli, in Actis Erudit. Mens. Apr. A. 1701, pro multisectione anguli vel arcus circularis, sine demonstratione exhibita*", c'est-à-dire : "*Démonstration de l'origine de la formule donnée sans démonstration par Mr. Jean Bernoulli dans les Acta Eruditorum du mois d'avril de l'année 1701, pour la multisection d'un angle ou d'un arc de cercle*" ;

– dans les *Mémoires* pour l'année 1702, parus en 1704 : "*Section indéfinie des Arcs circulaires En telle raison qu'on voudra, avec la manière d'en déduire les Sinus, &c. Par M. Bernoulli, Professeur à Bâle, Extraite d'une de ses Lettres écrite de Bâle le 13. Juillet 1702*". Ce mémoire est introduit par Fontenelle par un article de l'*Histoire* pour la même année, dans la section "*Geometrie*", intitulé : "*Sur la Section indefinie des Arcs circulaires, Et la maniere de déduire les Sinus des Arcs donnés*".

* * * * *

Voici d'abord comment est présenté le mémoire de Jacques Bernoulli – que nous étudierons dans une deuxième partie de cet épisode – dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*[15], pour l'année 1702 :

[14] *Cf.* l'édition qu'en donna Gerhardt : *G. W. Leibniz Mathematische Schriften herausgegeben von C. I. Gerhardt*. Band V. *Die mathematischen Abhandlungen*. Halle, 1858, pp. 81-132. Rééd. Hildesheim : Olms, 1971.

[15] *Cf.* [FONTENELLE ? 1702 (1704)].

58 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
[. . .]

SUR LA SECTION INDEFINIE

DES ARCS CIRCULAIRES,

Et la maniere de déduire les Sinus des Arcs donnés.

[En marge gauche :] V. les M[émoires]. / pag. 281.

LA seule vûë d'un Cercle suffiroit pour faire comprendre que si l'on en veut couper un Arc quelconque en deux parties égales, il n'y a qu'à couper sa Corde en deux par une perpendiculaire, que ce sera encore la même chose si l'on veut couper en deux un des deux nouveaux Arcs égaux que l'on vient de trouver, moyennant quoi le premier Arc est coupé en quatre, & le sera en 8, en 16, &c. enfin selon tous les termes d'une progression double, tant que l'on continuëra une semblable operation.

Mais s'il falloit couper un Arc en 3, en 5, ou même en quelque nombre pair qui ne fût pas de la progression double, la même Méthode ne subsisteroit plus, parce que la Section de l'Arc n'est pareille à celle de la corde que dans le seul cas, où la corde est coupée en deux. Ainsi l'on ne sçait communément couper un Arc circulaire ou un Angle qu'en deux parties égales, & delà vient le fameux Problême de la Trisection de l'Angle, dont la difficulté a été sentie par les anciens Geometres. Les Modernes le proposent d'une maniere plus generale, & l'appellent la Section in- // p. 59 // définie des Arcs circulaires, c'est à dire, la Méthode de les couper en tel nombre de parties égales qu'on voudra. C'est le Problême que M. Bernoulli de Groningue[16] proposa dans les Actes de Leipsik de 1700, & dont il donna deux solutions dans les Actes de 1701. M. Bernoulli Professeur en Mathematique à Bâle & Academicien Associé[17], a trouvé ce Problême assés difficile pour en entreprendre aussi la Solution qu'il a envoyée à l'Academie. Il établit d'abord une maniere generale pour trouver une corde qui soûtienne un Arc double de celui que soûtient une autre corde quelconque donnée, car la proportion des Arcs n'est pas celle des cordes, & un Arc étant double d'un autre, sa corde est moins que double de l'autre corde. De plus cette raison d'une corde à celle qui soûtient un Arc la moitié moins grand, n'est pas fixe ; elle change toûjours à mesure que les Arcs doublent, & les cordes qui soûtiennent des Arcs deux fois plus grands, deviennent toûjours plus petites à proportion.

L'expression generale des Cordes qui soûtiennent des Arcs toûjours doubles d'un premier Arc quelconque étant trouvée, ce sont differentes équations où une même grandeur monte à differens degrés, mais on n'a que les cordes dont les Arcs seroient 1, 2, 4, 8, 16, &c. & pour avoir les cordes qui soûtiendroient les Arcs d'entre-deux, c'est à dire, les Arcs, 3, 5, 6, 7, 9, &c. M. Bernoulli observe que dans les équations qui expriment les cordes des Arcs 1, 2, 4, 8, &c. il entre des nombres connus qui sont des termes d'une certaine progression, pris justement à la premiere, seconde, quatriéme, huitiéme place ; delà il conclut que dans cette même progression des termes pris à la troisiéme, cinquiéme, sixiéme place, &c. seroient précisément les nombres qui entreroient dans les équations par lesquelles on exprimeroit les cordes des Arcs 3, 5, &c. Par ce moyen les vuides que laissoient entr'elles les cordes de la progression double se trouvent remplis, & l'on a toutes les cordes selon la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, &c. c'est à dire aussi les Arcs. // p. 60 //

Nous laissons au Memoire de M. Bernoulli la maniere fine & subtile dont il a apperçû la progression des nombres connus qui entroient dans les expressions des cordes des Arcs doubles ; il nous suffit d'avoir fait voir en gros quel chemin il a suivi, & comment il a profité d'une foible lumiere qu'il a entrevûë dans une si grande obscurité. Cette progression qui l'a conduit, étoit assés cachée, & ne se fût pas offerte à des yeux moins clair-voyans.

M. Bernoulli ayant trouvé les Arcs par le moyen des Cordes, renverse le Problême, & cherche ensuite les Cordes, ou ce qui revient au même, les Sinus par le moyen des Arcs dont la valeur seroit donnée. Si l'on avoit en termes finis & proportionnés à la capacité de l'Esprit humain le rapport d'un Arc à sa Corde, on auroit celui du demi-cercle qui n'est qu'un Arc le plus grand de tous au diametre qui est sa corde, & par-là viendroit aussi-tôt la Quadrature du Cercle inutilement cherchée depuis tant de siécles. Mais la valeur d'un Arc étant donnée, celle de sa corde ne se peut exprimer que par une suite infinie de termes, qui ne permet pas que l'on arrive au dernier, ni par conséquent que l'on trouve la somme qu'ils font tous ensemble, ce qui seroit necessaire. Cette suite ou progression a cela de particulier, que tous ses termes ont alternativement les signes de plus & de moins. Ils sont produits par une operation où l'on pose d'abord plus qu'il ne faut, ce qui oblige aussi-tôt à un retranchement, mais ce retranchement est trop grand, il faut donc remettre, & on remet trop, & ainsi de suite à l'infini, sans

[16] Il s'agit de Jean (I^er) Bernoulli, dont on trouvera les articles mentionnés ici, dans la bibliographie.
[17] Il s'agit de Jacques (I^er) Bernoulli, dont on trouvera les articles mentionnés ici dans la bibliographie.

que l'on puisse jamais ôter ou remettre ce qu'il faut précisément ; espece de Tonneau des Danaïdes pour les Geometres, si l'on peut en cette matiere se servir de comparaisons poëtiques.

Quoiqu'on ne puisse voir le bout de cette progression, il est agréable d'en voir la naissance, & il n'appartient qu'à une subtile Geometrie de la découvrir, & de la déterminer. C'est ce qu'ont fait Messieurs Bernoulli, aprés quoi l'on n'a plus rien à desirer legitimement sur les rapports des Arcs circulaires & des Cordes.

Commentaire

Première remarque : les "*anciens Geometres*" mentionnés au début de l'article sont les géomètres Grecs, pour lesquels le problème de la trisection de l'angle était réputé insoluble, entendant par là que la construction d'une "trisectrice" s'avère impossible à la règle et au compas – ce qu'ils traduisaient dans les termes suivants : "ce n'est pas un problème plan" – ; ils qualifiaient ce type de problème de "solide", du fait qu'il requerrait l'usage de courbes obtenues dans un solide affecté à cet usage, en l'occurence le cône, dont les sections planes, bien que non constructibles à la règle et au compas, pouvaient être définies point par point et permettaient l'insertion de deux "moyennes proportionnelles" entre deux grandeurs données (comme le sont les racines cubiques de la mesure d'une grandeur a et de son carré, moyennes géométriques entre la grandeur unité et cette grandeur a) ; en effet, ces géomètres avaient reconnu d'autres problèmes qui nécessitaient l'insertion de plusieurs moyennes proportionnelles entre deux grandeurs, tels que la "duplication du cube" (ou problème déliaque, qui revient à chercher les racines cubiques de 2 et de 4) et la construction de l'heptagone régulier (qui suppose la construction d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet soit le tiers des angles à la base). Les géomètres de la Renaissance italienne (comme Rafaele Bombelli, par exemple) puis des XVIème et XVIIème siècles flamand et français (Simon Stevin de Bruges, François Viète, Albert Girard en 1634, René Descartes en 1637) mettront en évidence que la question relève d'une équation "du troisième degré" et/ou donneront des solutions analytiques ou géométriques faisant intervenir une ou deux sections coniques.

Deuxième remarque, quant à "*la maniere fine & subtile dont il a apperçû la progression des nombres connus qui entroient dans les expressions des cordes des Arcs doubles*", on verra, lors du commentaire du texte lui-même qu'elle relève de la connaissance des "nombres figurés" et permet de comprendre, sur un exmeple, comment fonctionnait le raisonnement par induction, qui conduisait à des résultats généraux sur la seule foi des premiers termes d'une récurrence que l'on ne prenait pas nécessairement la peine de valider par un raisonnement par récurrence, bien que Blaise Pascal en ait jeté les bases dans son *Traité des Triangles arithmétiques*.

Plus généralement, le lecteur auquel cette introduction semble vouloir épargner la lecture du mémoire s'il en veut seulement connaître l'idée générale, est censé comprendre qu'il s'agit de calculer les arcs au moyen des cordes et réciproquement et que la difficulté apparaît dès que l'on passe de la duplication à la triplication et autres multiplications des arcs et que la démarche de Bernoulli le conduit à un développement en série alternée, décrite en termes d'augmentation et de diminution compensatoires successives. L'auteur de l'article, très certainement Fontenelle, s'agissant de mathématiques, manifeste sa connaissance profonde des enjeux, puisqu'il fait allusion à la question des incommensurables, à celle de la quadrature du cercle ; en particulier, l'idée que certaines courbes relèvent d'expressions algébriques indéfinies et révèlent ainsi l'éventualité de ce que l'on appelera plus tard leur transcendance, apparaît au travers de ce qu'il écrit dans les dernières lignes : "*la valeur d'un Arc étant donnée, celle de sa corde ne se peut exprimer que par une suite infinie de termes, qui ne permet pas que l'on arrive au dernier, ni par conséquent que l'on trouve la somme qu'ils font tous ensemble, ce qui seroit necessaire*" pour espérer que les spéculations de Bernoulli aient pu conduire à cette fameuse quadrature.

* * * * *

Notons que l'auteur de l'*Histoire*... reviendra une nouvelle fois sur le sujet, en commentant les innovations promises par Thomas Fantet de Lagny, dans le volume[18] des *Mémoires*... pour l'année 1703. Voici ce qu'il en dit, qui éclairera les spéculations de Bernoulli en les replaçant dans le contexte des spéculations contemporaines sur le sujet :

---

64 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE

[. . .]

SUR LES TANGENTES

ET LES SECANTES DES ANGLES

[En marge gauche : * Page 61.]

[18] *Cf*. [FONTENELLE ? 1703].

IL a été dit ci-dessus * que M. de Lagni travaille à une nouvelle Trigonométrie. Il l'appellera *Trigonométrie Françoise ou Réformée*, titre qui répondra en partie à celui de *Trigonometria Britannica* de Breggius.[19]

Dans cette nouvelle Trigonométrie, M. de Lagni met à la place des anciens Logarithmes qu'il trouve arbitraires & défectueux, les Logarithmes naturels de l'Airhmétique Binaire. Il a aussi de nouvelles vûes sur les Tables des Sinus, Tangentes, & Sécantes ; & il a donné à l'Académie sur les Tangentes & les Sécantes, un petit échantillon de son Ouvrage, & une assurance de ses promesses.

[En marge gauche : * Page 58.]

Ce qui a été dit dans l'Hist. de 1702 * de Cordes qui soutiennent différens arcs, est vrai aussi des Tangentes & des Sécantes qui répondent à différens arcs ou angles. Toutes ces lignes droites ne ne suivent la proportion de leurs arcs, ni n'ont entre elles une raison fixe & constante qui les régle. M. Bernoulli de Basle, demêla & en quelque sorte devina, comme on l'a vû, une espéce de progression assez cachée & assez enveloppée, qui se trouve entre les Cordes des arcs 1. 2. 3. 4. &c. De même M. de Lagni en a découvert ou une ou plusieurs compliquées qui regnent dans la Suite des Tangentes ou des Sécantes de tous les arcs ou angles, pris selon l'ordre des nombres naturels. Que l'on ait le rayon du cercle où l'on suppose que se forment tous ces angles, & la Tangente ou la Secante de tel angle qu'on voudra, on trouvera aussi-tôt celle de quelque autre angle que ce soit multiplié du premier. M. de Lagni avance que sa Formule générale // p. 65 // se démontre par deux seules propositions d'Euclide ; mais il convient que la démonstration ne laisse pas d'être très-longue. Ce ne sont pas de médiocres progrès en Géométrie, que les découvertes de ces sortes de rapports qui s'étoient dérobés jusqu'à présent aux yeux des plus grands Mathématiciens, & que notre siécle dévoile enfin à force d'art & de recherches. On seroit tenté de croire que toutes les grandeurs d'un même genre, comme toutes les Cordes, toutes les Tangentes d'arcs de cercle, suivent toujours quelque régle générale entre elles ; que souvent cette régle est si compliquée, qu'elle nous échappe, du moins pour un tems ; & que quand même nous ne la pourrions jamais découvrir, elle ne laisseroit pas de subsiter dans quelque autre Géométrie réservée à des intelligences plus sublimes.

* * * * *

Enfin, notons que dans les rééditions ultérieures de l'*Histoire*... et des *Mémoires*...[20], le mémoire de Jacques Bernoulli de 1702 comporte une note faisant référence à un mémoire ... ultérieur de Lagny, *Sur une Proposition de Geometrie elementaire*, qui pourrait être, selon lui, le point de départ des spéculations des frères Bernoulli, mais que Lagny ne communiqua à l'académie royale qu'en 1706. Il s'agit d'une configuration élémentaire dans un cercle, qui sous-tend très probablement la métohde que Jean Bernoulli expose dans les *Actes* de Leipsig, configuration que Jacques Bernoulli explicite en 1702 pour en tirer une méthode alternative conduisant à un résultat analogue à celui de son frère ; Fontenelle, dans l'*Histoire*... de 1702, dit qu'elle est à l'origine de la solution de Jacques Bernoulli dans les termes suivants (*cf. supra*) : "*Il établit d'abord une maniere generale pour trouver une corde qui soûtienne un Arc double de celui que soûtient une autre corde quelconque donnée, car la proportion des Arcs n'est pas celle des cordes, & un Arc étant double d'un autre, sa corde est moins que double de l'autre corde*".

Une maîtrise complète des valeurs que prennent les lignes trigonométriques et des relations qu'elles entretiennent est un enjeu majeur de la nouvelle analyse : il faut donc, pour comprendre le mémoire de Jacques Bernoulli, le replacer dans la diversité de ces enjeux, et en faire une lecture informée ; c'est pourquoi nous donnerons ici le texte de présentation de l'*Histoire*... pour 1706.

* * * * *

DES SCIENCES. 83

[...]

SUR UNE PROPOSITION

DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE.

[En marge droite : V. les M. / p. 319.]

IL y a dans la Géometrie Elementaire des Propositions que l'on retrouve presque par tout, & à chaque moment, & qui sont si souvent employées, qu'il semble que toutes les autres soient devenuës inutiles. Telle est la

[19]Cf. BRIGGS, Henry. Trigonometria britannica, Londres : Gillibrand, 1633. Cet ouvrage de Briggs poursuit le travail qu'il avait engagé à la suite des spéculations de Napier, travail qui l'avait conduit à de premières publications : Logarithmorum Chilias Prima (Londres, 1617) et Arithmetica Logarithmica (Londres, 1624). La version originale de l'ouvrage de Briggs, mort en 1630, ne comportait qu'un premier Livre de tables de Sinus et reprenait ses tables de logarithmes des nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. Elles furent complétées par son ami et associé, Henry Gillibrand, qui les fit imprimer, pour la première fois à Londres, en 1633, sous le titre indiqué. Mais dès 1628, à Gouda, Adrian Vlacq en avait donné une première impression, complétée d'une tables des logarithmes à "14 décimales", et de la table "manquante" des nombres de 20 000 à 90 000.

[20] Comme en particulier dans la réédition des *Mémoires*... pour l'année 1702, en 1743, autre édition consultée.

fameuse Quarante-septiéme du premier Livre d'Euclide, si digne de l'Hecatombe que l'on dit qu'elle coûta à son Inventeur. Telle est aussi celle de la similitude des Triangles. Il arrive le plus souvent que les plus sublimes recherches n'empruntent de toute la Géometrie Elementaire que ces deux Propositions.

M. de Lagni croit qu'il y en a encore quelques-unes // p. 84 // ou inconnuës ou négligées, qui pourroient tenir à peu prés le même rang. On peut prendre pour exemple celle qu'il démontre ici, que dans un Parallelogramme quelconque la somme des quarrés des deux Diagonales est égale à la somme des quarrés des quatre côtés.

Il [est] évident d'abord que la quarante-septiéme du premier Livre d'Euclide n'est qu'un cas particulier de cette proposition, car si le Parallelogramme est rectangle, il s'ensuit que les deux Diagonales sont égales, & par consequent le quarré d'une Diagonale, ou, ce qui est la même chose, le quarré de l'Hypotenuse d'un angle droit, est égal aux quarrés des deux côtés. Mais si le Parallelogramme n'est pas rectangle, & si par consequent les deux Diagonales ne sont pas égales, ce qui est le cas le plus géneral, la proposition devient d'un usage fort étendu.

Elle peut servir, par exemple, dans toute la Theorie des Mouvements composés, d'où dépendent toutes les recherches de Mechanique, & plus géneralement presque toutes celles qui ont quelques mouvements pour objet.

Dans un Parallelogramme qui n'est pas rectangle, la grande Diagonale est la soutendante d'un angle obtus, & la petite est la soutendante d'un angle aigu, complement de cet obtus[21]. La grande est d'autant plus grande, & la petite d'autant plus petite que l'angle obtus est plus grand, de sorte que si cet angle obtus en croissant toûjours devient infiniment grand par rapport à l'aigu, ou, ce qui est la même chose, si les deux côtés *conjoints* ou inégaux du Parallelogramme sont posés bout à bout en ligne droite, la grande Diagonale est la somme même de ces deux côtés, & la petite est nulle. Si on connoît deux côtés conjoints du Parallelogramme & l'angle qu'ils font entre eux, il est aisé de trouver en nombres la soutendante de cet angle, c'est à dire, une des Diagonales du Parallelogramme, aprés quoi la proposition de M. de Lagni donne l'autre Diagonale, ce qu'on peut voir trés-facilement. Or, cette seconde Diagonale qu'on trouve ainsi est la ligne que // p. 85 // décriroit un corps poussé en même tems par deux forces qui auroient entre elles le même rapport que les deux côtés conjoints, & agiroient selon ces deux directions, & ce corps décriroit cette diagonale dans le même tems qu'il auroit décrit l'un ou l'autre des deux côtés conjoints, s'il n'avoit été poussé que par la force correspondante. C'est-là un des plus grands usages de la Proposition, car le rapport de deux forces, & l'angle qu'elles font entre elles étant donnés, il est souvent necessaire de déterminer en nombres la ligne que décriroit dans un certain tems un corps poussé par ces deux forces ensemble.

Ce n'est pas que deux Methodes ordinaires & connuës, l'une Trigonometrique, l'autre Géometrique & Analitique ne pussent resoudre ce Problême ; mais M. de Lagni fait voir que la premiere demande 21 operation, la seconde 15, & que la sienne n'en demande que 7. Elle a même encore cet avantage qu'elle épargne des divisions & des extractions de racines, qui presque toûjours produisent des fractions, qu'on ne peut negliger sans erreur, ou employer dans le calcul sans le rendre beaucoup plus long & plus penible.

Si les deux côtés conjoints d'un Parallelogramme sont donnés de grandeur seulement, il est visible qu'ils peuvent faire entre eux une infinité d'angles differens, & puisque le rapport des deux Diagonales entre elles, dépend de l'angle de ces deux côtés, on en peut former une infinité de Parallelogrammes dont les deux Diagonales auront entre elles un rapport different. C'est là un Problême qui a une infinité de solutions, & même, à le considerer encore de plus prés, une infinité d'infinités de solutions. Car que les deux côtés donnés fassent d'abord un angle de 180, c'est à dire, soient posés bout à bout en ligne droite, ils peuvent faire ensuite des angles toûjours décroissants selon la progression soudouble infinie, ou selon la progression soutriple pareillement infinie ; en un mot, selon une infinité de progressions differentes, dont chacune est infinie, M. de Lagni // p. 86 // donne cette infinité d'infinités de solutions en deux formules génerales, dont l'une est pour deux côtés égaux, & l'autre pour deux côtés inégaux, & il remarque en même tems que ces sortes de Problêmes ne sont pleinement resolus que de cette maniere, car ni plusieurs solutions, quel qu'en fût le nombre, ni une infinité, ni même plusieurs infinités ne comprendroient tout. Ce n'est pas cependant que toutes ces solutions soient toûjours differentes entre elles ; quelques-unes de celles qui sont entrées dans un certain ordre, peuvent se retrouver dans un autre ; ainsi lorsque des angles décroîtront toûjours depuis celui de 180 selon une certaine progression, quelques-uns de ceux qui étoient compris dans la progression soudouble 16, 8, 4, 2, 1, &c. se retrouveront dans la progression souquadruple, 16, 4, 1, &c. mais on reconnoît assés aisément en quels endroits ces répetitions doivent arriver, & comme elles ne sont qu'en nombre fini dans chaque ordre, elles y laissent l'infini en son entier.

Ce Problême des Diagonales du Parallelogramme a du rapport avec celui du Triangle rectangle en nombres, qui a tant exercé les Arithmeticiens, & les Algebristes. Ils ont cherché des regles pour déterminer tous les nombres qui pris trois à trois eussent la proprieté du Triangle rectangle, c'est-à-dire, qui fussent tels que le quarré de l'un fût égal aux quarrés des deux autres, & ils ont infiniment étendu & enrichi cette Theorie. Ici, il

[21] Il faut entendre, en termes d'aujourd'hui : pour "soutendante" : "côté opposé à l'angle" obtus ou aigu dans un triangle donné de la figure ; et pour "complement de cet obtus " : "supplémentaire de cet aigu".

est question de trouver une somme de deux quarrés doubles de deux autres quarrés donné[e]s, & ce peut être une assez ample matiere à de nouvelles recherches. On peut observer en passant que comme les nombres 3, 4, 5, sont les plus simples qui ayent la proprieté du Triangle rectangle, ainsi 5 & 10 pris pour côtés, & 9 & 13 pour Diagonales sont les plus simples qui fournissent un exemple de la Proposition de M. de Lagni.

Il en est aussi une application à un sujet plus détourné que les mouvemens composés, & auquel on peut croire qu'il s'interesse davantage. Nous avons dit dans l'Histoire // p. 87 //

[En marge droite :] * p. 61. 62. / & 64.

de 1703 *, que M. de Lagni trouve que les Logarithmes, tels qu'ils sont jusqu'à present, sont défectieux & arbitraires, & qu'il prétend leur en substituer d'autres plus parfaits & naturels, tirés de son Arithmetique Binaire. D'un autre côté, il faut sçavoir que l'Hiperbole prise entre ses Asimptotes a cette proprieté, que si on prend une Asimptote pour diametre, qu'on la divise en parties égales, & que par toutes ces divisions qui formeront autant d'Abscisses toûjours croissantes également, on tire des Ordonnées à la Courbe, paralleles à l'autre Asimptote, les Abscisses representeront la suite infinie des Nombres naturels, & les espaces Asimptotiques ou Hiperboliques correspondans, representeront la suite des Logarithmes de ces Nombres. Pour prendre quelque idée de cette verité, il n'y a qu'à considerer que le rapport Arithmetique est toûjours le même dans la suites des Nombres naturels, puisqu'ils croissent toûjours d'une unité, & que leur rapport géometrique décroît toûjours, de sorte qu'entre deux nombres voisins il est toûjours d'autant plus petit, qu'ils sont plus avancés dans la suite, ou, ce qui est la même chose, plus grands. Ainsi le rapport géometrique de 99 & de 100 est plus petit que celui de 9 & de 10, ou, ce qui revient au même, 99 & 100 approchent davantage de l'égalité, non pas arithmetiquement, mais géometriquement, parce que 1 qui est la difference de part & d'autre est moins considerable par rapport à 100, que par rapport à 10. Si la suite naturelle pouvoit avoir une fin, on conçoit que 1 difference des deux derniers nombres seroit infiniment petit par rapport à eux, & par consequent les laisseroit égaux. Les Logarithmes sont des nombres qui par leur rapport Arithmetique representent le rapport géometrique des nombres naturels, & par consequent le rapport Arithmetique des Logarithmes décroît toûjours, quoique les Logarithmes croissent toûjours, ainsi que les nombres naturels correspondans, ou, ce qui est la même chose, les Logarithmes croissent toûjours, mais de moins en moins. Or, telle est aussi la na- // p. 88 // ture de l'espace compris entre une Asimptote & l'Hiperbole, qu'il croît à l'infini, mais toûjours de moins en moins, parce que l'Hiperbole s'approche toûjours davantage de l'Asimptote, & il croît de moins en moins selon la même proportion que les Logarithmes.

Cette proprieté se trouve dans toutes les differentes Hiperboles, car on sçait que par un même point du Cone pris pour sommet, il se peut former une infinité d'Hiperboles differentes, aussi-bien que d'Ellipses, au lieu qu'il ne se pourroit former qu'une Parabole ou qu'un Cercle. Les Asimptotes de ces differentes Hiperboles font toutes entre elles un angle different, & leurs espaces Asimptotiques, quoique tous infinis, sont inégaux, parce que deux Hiperboles differentes, dont chacune s'approche toûjours de plus en plus de ses Asimptotes, ne laissent pas de s'en approcher inégalement. Delà vient qu'une Asimptote de chacune de ces deux Hiperboles ayant été divisée en parties égale[s] entre elles, & égales aux divisions de l'autre, les espaces Asimptotiques correspondants seront inégaux, & par consequent à la même suite des nombres naturels, il peut repondre differentes suites de Logarithmes ; & en effet, puisque la maniere de construire les Tables des Logarithmes est de prendre 0 ou 00 ou enfin tant de Zero qu'on voudra pour Logarithme de 1 ; 100 ou 1000 &c., & pour Logarithme de 10; 200 ou 2000 &c. pour Logarithme de 100, et toûjours ainsi en prenant les nombres naturels selon la progression de 1 à 10, aprés quoi les Logarithmes de tous les nombres interposés entre 1 & 10, entre 10 & 100 &c. sont déterminés par ces premiers Logarithmes des nombres 1, 10, 100 &c[.], il est clair que si au lieu de la progression de 1 à 10, on eût pris, par exemple, celle de 1 à 8, & qu'on eût donné aux nombres 1, 8, 64 &c. les mêmes Logarithmes qu'on a donnés dans l'autre hipothese aux nombres 1, 10, 100 &c. les Logarithmes des nombres interposés 2, 3, 4, &c. auroient été dans la seconde hipothese differents de ceux de la premiere, & par consequent la même suite des // p. 89 // nombres naturels peut recevoir differentes suites de Logarithmes, ou, ce qui revient au même, une infinité d'Hiperboles differentes peuvent representer par leurs espaces asimptotiques les Logarithmes des nombres naturels.

Pour déterminer la suite des Logarithmes, il faut donc faire un choix arbitraire de quelque Hiperbole, mais il est certain que ce choix sera d'autant meilleur, qu'il sera moins arbitraire, & plus fondé en raison. Or la plus simple de toutes les Hiperboles est l'*équilatere* ; c'est-à-dire, celle dont les Asimptotes fonr entre elles un angle droit, car quand deux lignes peuvent faire entre elles differens angles, le droit est en quelque sorte le plus naturel de tous, & c'est incontestablement celui qui produit dans les figures les proprietez les plus simples. Delà M. de Lagny conclut que pour regler les Logarithmes, il auroit fallu choisir l'Hiperbole équilatere, & on auroit trouvé ceux que son Atithmetique Binaire lui donne.

Au lieu de suivre cette Arithmetique Binaire, ou, ce qui est la même chose, de couper toûjours la suite des nombres de deux en deux, on l'a coupée de dix en dix, & on s'est assujetti à cet usage dans la détermination des Logarithmes. Ceux que l'on a établis, répondent donc à une autre Hiperbole que l'équilatere, & M. de Lagni a cherché quelle est cette Hiperbole, c'est-à-dire, [quel angle font][22] ses Asimptotes. Comme toute Hiperbole peut être décrite par le moyen d'un Parallelogramme pris sur ses deux Asimptotes, & dont l'angle des Asimptotes est un des Angles, M. de Lagni trouve par sa Proposition quelles sont les Diagonales du Parallelogramme qui a formé l'Hiperbole à laquelle répondent les Logarithmes communs, & par ces Diagonales il détermine que l'angle des Asimptotes de cette Hiperbole [est] de 25° 44' 25" à peu près. La grandeur de cet angle irreguliere & bisarre, pour ainsi dire, fait assés voir qu'il n'auroit pas dû être preferé à l'angle droit, & que les Logarithmes dont l'Hiperbole équilatere seroit le modele, meriteroient le titre de *naturels*, à l'exclusion de tous les autres, qui ne pourroient // p. 90 // être traités que d'arbitraires. Cela justifie ce que M. de Lagny a déja avancé plusieurs fois sur les Logarithmes communs, & ce n'est peut-être pas un des moindres fruits de la Proposition des Parallelogrammes, que de lui avoir aidé à mettre sa pensée & sa prétention dans tout son jour.

Commentaire

Lagny s'appuie donc sur une propriété bien connue des rectangles qu'il étend aux parallélogrammes : la somme des carrés de leurs lignes diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés. On remarquera que les considérations de l'auteur de cette présentation – très certainement Fontenelle, de nouveau –, font usage du mouvement pour apprécier croissance ou décroissance et situations limites, avec la désinvolture désormais admise par la plupart des géomètres du XVIIIème siècle, tant le maniement des infinitésimaux leur est devenu familier et leur apparaît efficace, au point de ne pas prendre les précautions d'un Archimède ou de ne plus se préoccuper de la *doxa* des Éléates. De ce point de vue, Fontenelle est l'un de ceux qui iront le plus loin dans cette autre querelle des Anciens et des Modernes, avec, par exemple ses *Élements de la Geometrie de l'Infini*, qui le conduiront à de nombreux raisonnements fallacieux[23]. Il n'en reste pas moins que sa présentation relève de ce prodigieux talent qu'il avait pour vulgariser les recherches dont les *Mémoires...* se faisaient l'écho.

En fait, dans un *post-scriptum* à son mémoire, Jacques Bernoulli renvoie à une propriété de géométrie en apparence différente de celle que propose Lagny : il dit l'avoir trouvée chez Hermann, dans son mémoire intitulé "*J. Hermanni Demonstratio Geminæ Formula a Celeberrimo Dn. Joh. Bernoulli, in Actis Erudit. Mens. Apr. A. 1701, pro multisectione anguli vel arcus circularis, sine demonstratione exhibita*" (*Acta Eruditorum*, août 1703), qui roule sur la démonstration de la formule de Jean Bernoulli pour la multisection des angles. Jacques Bernoulli formule ainsi cette propriété géométrique : c'est "*la propriété du quadrilatére inscrit dans le cercle, dont le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés*". Ce *post-scriptum* renvoie en effet lui aussi à un mémoire ultérieur, puisqu'on trouve le texte de Hermann (que Bernoulli ne précise que par son objet, sans en donner ni le titre ni la date) dans les *Acta Eruditorum* de 1703.

* * * * *

Il nous reste à donner et à commenter le texte de Jacques Bernoulli lui-même[24], que nous avons choisi pour représenter cette étape du processus dans la mesure où il est plus explicite que celui (en latin dans les actes de Leipsig) de son frère Jean ; cette étude nous permettra de comprendre les voies empruntées par l'auteur, voies caractéristiques de l'heuristique de cette époque, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet épisode.

*

* *

À suivre : La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez
(III-B) Le mémoire de Jacques Bernoulli (1702)

Jean-Pierre Le Goff, IREM de B.-N., Caen, juin 2009.

[22] Le texte donne : "que l'angle sont ses Asimptotes".
[23] *Cf.* [FONTENELLE, 1727].
[24] *Cf.* [BERNOULLI, Jacques, 1702].

Repères IREM *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

Sommaire du numéro 75 Avril 2009

Sommaire du numéro 76 Juillet 2009

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http ://www.univ-irem.fr/ *puis cliquez sur REPERES (dans bandeau gauche vertical), ensuite sur CONSULTATION. (Les nombres en rouge indiquent qu'au moins un article de ce numéro a été mis intégralement en ligne ; les nombres en vert indiquent que tous les articles de ce numéro sont intégralement en ligne)*
Pour soumettre des articles au comité de rédaction de Repères IREM, contacter : yves.ducel@univ-fcomte.fr
Pour vous abonner à Repères IREM ou acheter séparément des numéros, contacter :
TOPIQUES Éditions, 71, rue de Queuleu, 57000 METZ, France
Téléphone & télécopie : 09 71 29 86 58, adresse électronique : topiqueseditions@wanadoo.fr
Prix d'un abonnement (4 numéros par an) : Métropole : Établissements, 40 euros ; Particuliers, 32 euros
DOM-TOM ou Etranger (par avion) : Etablissements, 51 euros ; Particuliers, 43 euros

Repères IREM

Prix au numéro : 11 euros + frais d'expédition si envoi par avion.