LE MIROIR DES MATHS

UNIVERSITÉ DE CAEN
BASSE - NORMANDIE

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 74 02** - Fax. : **02 31 56 74 90**
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO CINQ : Décembre 2009

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

NUMÉRO CINQ : Décembre 2009

ISSN : 1969-7929 (imprimé)
ISSN : 1760-6500 (en ligne)

LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

Comité de rédaction Pierre Ageron & Eric Trotoux - Composition Latex.

Éditorial : l'IREM à Foupendant.

Pour la rentrée de l'IREM de Basse-Normandie, nous avions cette année choisi la Grange d'Espins, aux portes de la Suisse normande. Il s'agit en réalité de l'ancien prieuré de Foupendant, dont les origines remontent au douzième siècle. Le bâtiment le plus ancien est une grange aux dîmes aux superbes arcades gothiques ; le logis prioral remonte pour partie au seizième siècle. Nous avons passé deux jours dans ce site historique et verdoyant : les vendredi 2 et samedi 3 octobre 2009. Nous étions une trentaine d'animateurs de l'IREM, et cinq exposés y ont été donnés.

Brahim Tigroussine et Didier Trotoux ont proposé d'examiner quelques textes médiévaux sur la méthode de fausse position, qui ont suscité des questions intéressantes : pourquoi les mathématiciens n'explicitent-ils jamais la classe d'équations pour lesquelles cette méthode est valide ? quel rôle exact, entre figure et symbole, jouent les "plateaux de balance" des manuscrits maghrébins ?

Dans son exposé, Jean-Pierre Le Goff a évoqué l'ingénieur du dix-huitième siècle Bélidor, à qui on attribue la première mention de la courbe nommée sinusoïde. Surprise : la sinusoïde de Bélidor, servant dans un problème d'équilibrage des ponts-levis, est en fait ce que nous nommons une cycloïde !

Ruben Rodriguez Herrera a animé un atelier sur l'aller-retour entre arithmétique et géométrie dans le cas de l'algorithme d'Euclide et proposé l'analyse didactique d'un problème de carrelage de piscine avec carreaux de côté entier issu d'un manuel de Troisième.

Eric Ziad-Forest a présenté des méthodes de calcul rapide, trouvées dans les fascicules de "mathématiques védiques" qu'il a ramenés d'un voyage en Inde : avec un peu d'entraînement, la formule $(1000-a)(1000-b) = (1000-a-b)1000+ab$ permet par exemple de multiplier en un clin d'œil 978 par 989.

Enfin Olivier Longuet a présenté un riche sujet de devoir de mathématiques proposé en classe de Première S, basé sur la curieuse théorie du roman *Intrigue à l'anglaise* d'Adrien Goetz : la Tapisserie de Bayeux aurait été destinée à être enroulée sur une colonne ! Il a aussi donné à voir une maquette de cette vision inhabituelle d'un objet phare du patrimoine de notre région.

Dans ce cinquième numéro du *Miroir des maths*, vous trouverez une stimulante contribution de Danielle Salles-Legac et du groupe *Géométrie* sur la géométrie des pliages : comment expliquer que la trisection de l'angle, réputée impossible à la règle et au compas, soit possible au moyen du pliage d'une feuille de papier ? Notre groupe *Jeux 2 maths* (Philippe Langlois, Pascal Leudet, Sylvain Bourdalé, Clarisse Galien, Eric Ziad, Olivier Longuet), qui a récemment mis en ligne son excellent site jeux2maths (accessible par le portail de l'IREM de Basse-Normandie), nous propose ici en introduction un clair résume de l'idée qu'il se fait du jeu mathématique et son intérêt pédagogique. Enfin Jean-Pierre Le Goff nous livre un nouvel épisode de son feuilleton à rebondissements sur les avatars historiques de la sinusoïde.

Des dates importantes pour notre IREM en 2010

vendredi 12 mars 2010	**VIIe rallye mathématique, dynamique et virtuel de l'IREM de Basse-Normandie** Inscription des classes de Troisième ou Seconde jusqu'au 30 janvier
vendredi 28 et samedi 29 mai 2010	**XVIIIe colloque de la Commission inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques** Thème : Circulation, transmission, héritage. lieu : campus 1 de l'université de Caen
jeudi 17 et vendredi 18 juin 2010	**XVIIe colloque de la Commission inter-IREM sur la formation des enseignants en mathématiques** Thèmes : l'algorithmique ; mettre les élèves en activité. lieu : IUFM de Caen

Pierre Ageron décembre 2009

Géométries des pliages

Nous avons déjà au cours de nos publications (voir la bibliographie (2) et (3)) souligné combien les pliages pouvaient être une activité productive pour la compréhension de plusieurs notions mathématiques. Didier BOURSIN et Valérie LAROSE en présentent de nombreux dans leur joli livre « Mathématiques et pliages » (1). Il est frappant de constater que la géométrie des pliages est aussi "puissante" (c'est-à-dire qu'elle permet autant de constructions) (voir l'ouvrage de référence de Jean Claude CARREGA « Théorie des corps » (5)) que :

- **la géométrie du bissecteur** (c'est-à-dire celle qui utilise, en plus de la règle non graduée, un objet appelé bissecteur, (voir la fig. 2) permettant de construire la bissectrice d'un angle quelconque) ;
- **la géométrie de la règle et du transporteur** (que nous avons développée dans deux ouvrages (voir la bibliographie)), appelée aussi géométrie de la règle (non graduée) et du compas à pointes sèches, géométrie équivalente [1] à la précédente ;
- **la géométrie à la règle et au compas**, plus puissante que les deux précédentes, dont L. MASCHERONI (4) a montré qu'elle est équivalente à **la géométrie au compas seul** en convenant de représenter une droite par deux points distincts ;
- et même, si l'on admet les "ajustements" de la feuille au cours du pliage, (terme que nous préciserons plus loin), la **géométrie de la construction de certains nombres algébriques** puisqu'elle permet la trisection de l'angle (voir D. BOURSIN et V. LAROSE déjà cités ainsi que notre ouvrage « Nouvelles pratiques de la géométrie » (2)).

Nous vous conseillons, pour la bonne compréhension de ce texte, de réaliser les activités proposées.

Matériel indispensable : au moins deux feuilles de papier de format A4, de **préférence transparent,** une règle plate non nécessairement graduée, un crayon mine, une gomme.

Matériel recommandé : quatre règles plastiques perforées (deux grandes et deux plus petites) genre « Géorègles », quatre attaches parisiennes, éventuellement un compas à pointes sèches.

Différentes géométries selon les outils autorisés

J.C. CARREGA (5) a étudié de façon précise les différentes géométries définies par les outils qu'elles autorisent, comme la règle et le compas, la règle et le bissecteur, le compas seul ou encore la règle seule.

Les problèmes de constructions à la règle et au compas ont été bien étudiés dans le cadre, en particulier de la théorie de Galois, puisque l'on a pu montrer si un nombre algébrique était constructible à la règle et au compas alors c'était **une racine qui soit, carrée ou une puissance de 2 d'un nombre rationnel**.

Lorsque l'on étudie le problème de la constructibilité du tiers d'un angle, ce que l'on nomme en mathématiques la trisection, on s'aperçoit que celui-ci est lié à l'extraction d'une racine cubique de rationnel (voir (2) et (5)), or on ne sait pas construire de telles racines ni avec la géométrie de la règle et du transporteur, équivalente à la géométrie de la règle et du bissecteur, ni à la règle et au compas. Or, "miraculeusement" on peut trisecter un angle avec un pliage alors que la géométrie des pliages est couramment considérée comme "équivalente" (J.C. CARREGA parle, plus précisément, de "constructions équivalentes" dans les géométries citées plus haut) à celle du bissecteur.

Les pliages seraient donc "encore plus forts" [2] que la règle et le compas ? Que nenni ! Il faut simplement préciser qu'il y a **plusieurs sortes de pliages** !

Aussi, nous vous proposons maintenant, d'observer quelques pliages remarquables.

Citons, pour commencer, un exemple simple :

Nous prenons une feuille rectangulaire (A4 par exemple) et demandons aux élèves : « Avec votre feuille A4 et un pliage, sans utiliser de règle, construisez un carré ».

Les élèves savent bien qu'en rabattant le plus "petit bord" de la feuille le long du "grand bord" adjacent, ils tracent la diagonale d'un carré, le reste suit facilement.

Quelle propriété du pliage avons-nous utilisée ? Nous avons reporté le long du grand côté, la mesure du petit côté, comme nous aurions pu le faire, par exemple avec un compas à pointes sèches. Nous sommes dans la géométrie de la règle et du transporteur (rappelons que le transporteur peut être une simple règle non graduée sur laquelle on peut tracer deux traits fins figurant les extrémités d'un segment, ces deux petits traits pourront

[1] Nous disons que deux géométries sont **équivalentes** si elles permettent la construction des **mêmes objets géométriques**.

[2] C'est-à-dire qu'ils autorisent plus de constructions géométriques.

servir à "reporter" cette longueur de segment sur une droite de la figure.

Le **transporteur n'autorise pas l'arc de cercle** (on ne peut pas reporter de segment n'importe où sur la feuille mais seulement le long d'une droite déjà tracée) et ne peut donc pas être assimilé à un compas sauf à celui à pointes sèches dont c'est justement l'utilisation habituelle. Nous avons rappelé (2) et (3) que la règle et le transporteur autorisent le tracé des bissectrices.

Maintenant nous voulons tracer, grâce à un pliage, la **bissectrice d'un angle aigu** dont un des côtés est le bord d'une feuille et l'autre côté une droite tracée à partir d'un coin de la feuille. Pour tracer le pli représentant la bissectrice, nous allons poser une règle sur le bord extérieur de l'angle et la maintenir immobile avec notre main gauche puis amener le côté de la feuille définissant l'autre côté de l'angle aigu le long de la règle, avec notre main droite (figure 1).

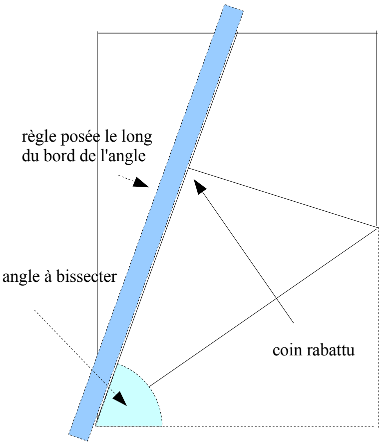


Figure 1
Recherche de la bissectrice

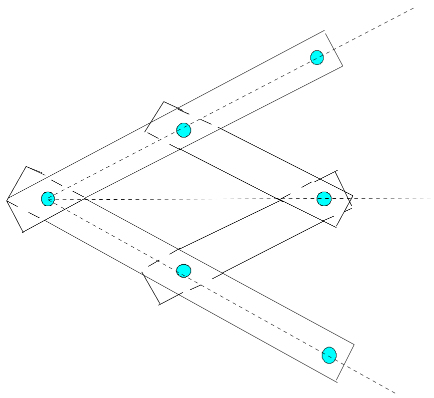


Figure 2
Un bissecteur

Nous avons effectué avec notre feuille, une **rotation dans l'espace autour du sommet (fixe) de l'angle** représenté par le coin de la feuille. Nous sommes dans la **géométrie de la règle et du bissecteur**. Nous rappelons la forme d'un bissecteur très simple réalisé avec des règles plastiques perforées dans la figure 2 (voir (2)).

Observons maintenant la résolution d'un autre problème connu : construire par pliage d'une feuille rectangulaire (A4 par exemple) **un triangle équilatéral**.

Plions la feuille sur elle-même en superposant deux de ses coins consécutifs A et B séparés par un de ses petits côtés, on obtient la médiatrice (MM') du petit côté [AB] :

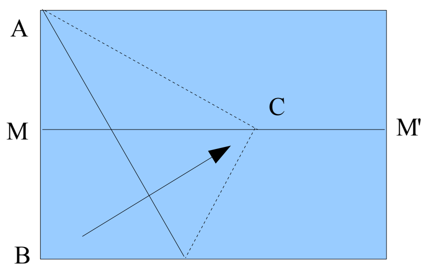


Figure 3

Rabattons un des coins de la feuille en laissant le point A fixe de telle sorte qu'il vienne sur la médiatrice (MM') construite par pliage, appelons C l'image du point B par pliage puis déplions la feuille, alors le triangle ABC est équilatéral (nous vous laissons le plaisir de trouver pourquoi).

Qu'avons-nous fait ? Nous sommes tentés de dire que nous avons **reporté la mesure AB** en gardant fixe A. Mais, en fait, nous n'avons pas fait un report de longueur sur une demi-droite préexistante ([AC) n'est pas encore connue) donc nous ne sommes plus dans la géométrie de la règle et du transporteur mais bien dans la **géométrie de la règle et du compas** (qui est, rappelons-le "plus puissante" que celle de la règle et du bissecteur cette dernière étant équivalente à celle de la règle et du transporteur).

Observons maintenant le célèbre "nœud plat" (ou "nœud simple" aplati) bien connu puisqu'il délivre par pliage serré (voir les fig. (5) et (6)) d'une bande régulière de papier fort **un pentagone régulier**. Comme chacun ne le sait pas nécessairement, le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas ainsi qu'à la règle et au transporteur (voir « Nouvelles pratiques de la géométrie » loc. cit.)

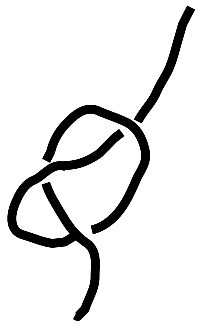


Figure 4
Un nœud simple avec une ficelle

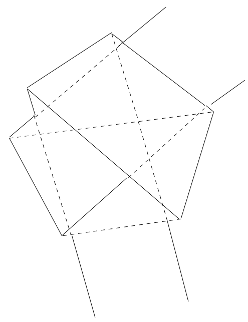


Figure 5
Un nœud simple avec une bande régulière

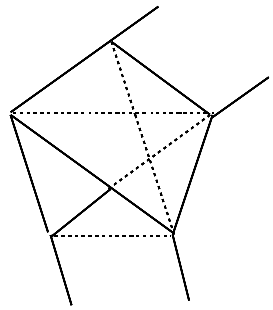


Figure 6
Le nœud bien serré

Lorsque l'on construit le nœud simple on voit bien que l'on doit, par ajustements successifs de la feuille sur elle-même, **serrer le noeud** (sans plisser la feuille) afin d'obtenir un beau pentagone régulier ! Rappelons que le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas, ainsi qu'à la règle et au transporteur (mais ce n'est pas facile), pour vous montrer comment on **construit un pentagone régulier avec des pliages simples** c'est-à-dire **sans ajustement**, nous vous en donnons les séquences principales en annexe I, vous reconnaîtrez que c'est moins rapide que le nœud mais cela a le mérite de ne pas introduire d'ajustement dans ce pliage et de rester paisiblement dans la géométrie de la règle et du transporteur...

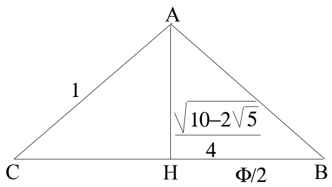


Figure 7

Rappelons les résultats obtenus dans notre chapitre "Polygones" de « Nouvelles pratiques ... » (2) : Si l'on appelle C, A, B trois sommets successifs d'un pentagone régulier, il est bien connu que CB est égal au nombre d'or noté habituellement ϕ.

Nous avons montré (2) que la hauteur du triangle ABC, relative au sommet A est : $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ et qu'elle est constructible à la règle et au transporteur.

Elle est donc constructible par pliage simple puisque la géométrie des pliages simples (sans ajustement) permet de construire les bissectrices et est équivalente à la géométrie de la règle et du transporteur.

Il nous reste donc à construire par pliage le nombre d'or (facile et connu !) et le nombre $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ (un peu moins facile). Nous vous détaillons ces constructions en annexe I.

Qu'en est-il pour **la trisection** qui elle, on le sait aussi, n'est pas réalisable à la règle et au compas ?

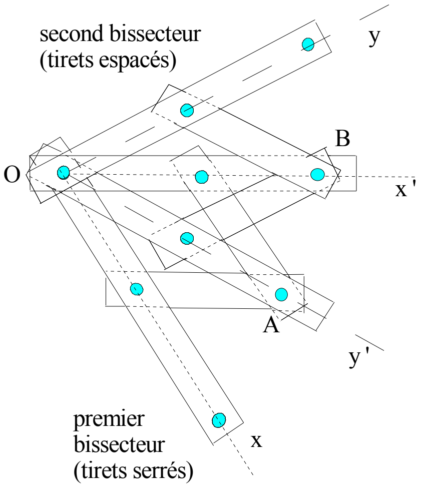


Figure 8

Remarquons tout d'abord qu'elle est facilement réalisable avec deux des bissecteurs que nous vous avons présentés en figure 2.

On positionne les deux centres de rotation des deux bissecteurs sur le sommet O de l'angle à trisecter, puis on pose les deux barrettes extérieures des deux trisecteurs réciproquement sur les côtés [Ox) et [Oy) de l'angle à trisecter.

Ensuite on superpose par ajustements successifs chacune des bissectrices [OA) et [OB) déterminées par les deux bissecteurs respectivement sur les barrettes [Oy') et [Ox') des bissecteurs.

Alors les deux demi-droites [Oy') et [Ox') trissectent l'angle $\widehat{xOy}$.

Nous avons effectué ici un **ajustement des deux points** A et B sur les deux demi-droites [Oy') et [Ox').

Voici la présentation de la **trisection par pliage** proposée par D. BOURSIN et V. LAROSE (1) et que nous détaillons dans notre ouvrage « Nouvelles pratiques … » (2).

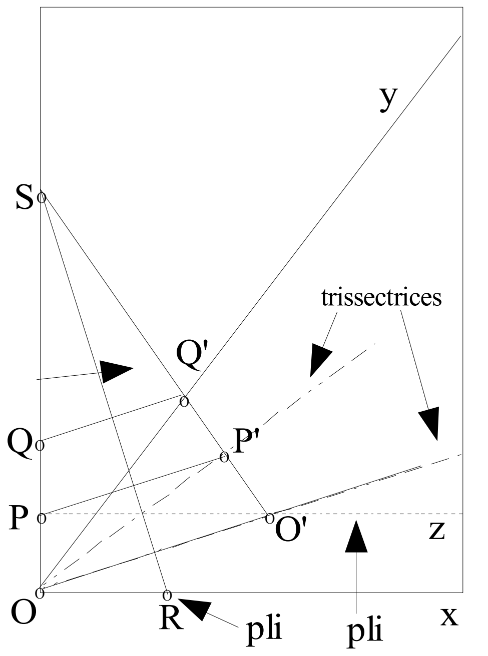


Figure 9

Construction des trissectrices (*) :

Soit [Ox) et [Oy) les deux demi-droites définissant l'angle à trisecter, tracées sur une feuille, [Ox) étant confondu avec le bord inférieur de la feuille.

Traçons, par exemple par deux pliages successifs de la feuille sur elle-même parallèlement à [Ox), une demi-droite [Pz) et un point Q tels que P soit le milieu de [OQ].

Plions le bord gauche de la feuille de telle sorte que, **simultanément** le point Q vienne sur la demi-droite [Oy) en Q' et le point O vienne sur la demi-droite [Pz) en O'.

Appelons le pli [SR] et déplions la feuille.

(*) on peut aussi écrire **"trisectrice"**

Alors **[OO') et [OP') trisectent l'angle $\widehat{xOy}$.** (Nous vous invitons à le démontrer.)

Cette construction des trissectrices délivre les deux vraies trissectrices (au sens rigoureux mathématiques), (aux défauts près liés à l'épaisseur des traits par exemple et à l'imprécision des ajustements).

Alors, **les pliages seraient "plus forts" que la règle et le compas ?**

« Ça dépend », comme disent les Normands... Ça dépend de quoi l'on parle, comme toujours en mathématiques. Le pliage qui permet d'obtenir les trissectrices ne se contente pas de faire "tourner" la feuille, il demande de poser deux points donnés sur deux droites données (pour plus de précisions, voyez l'annexe II : axiomatique des pliages), il faut "tâtonner" pour y arriver (essayez !).

Autrement dit on procède par **approximations successives** et qu'est-ce que l'on fait, en mathématiques, lorsque l'on fait des approximations successives ? Eh bien ! On fait de la **géométrie analytique** (celle-ci permet, par exemple, de construire, avec une approximation connue, des nombres non algébriques).

On peut appeler cela, si vous le voulez bien de la géométrie "**des pliages avec ajustement**".

Pour bien fixer les idées nous vous présentons un classement des différentes géométries dont nous avons parlé selon leur "puissance" croissante c'est-à-dire selon le nombre de constructions géométriques qu'elles autorisent :

Désignation de la géométrie	- Géométrie à la règle et au bissecteur (ou au transporteur ou au compas à pointes sèches) - Géométrie des pliages simples	- Géométrie à la règle et au compas - Géométrie au compas seul - Géométrie des pliages avec ajustement d'un point sur une droite (arc de cercle)	- Géométrie des pliages avec ajustements simultanés de deux points sur deux droites distinctes non parallèles
Exemples de figures et/ou de nombres constructibles	- Bissectrice - Triangle équilatéral - Pentagone régulier - Racines carrées de nombres rationnels - Autres : $\sqrt{2+\sqrt{2}}$	- Triangle équilatéral - Racines carrées de nombres réels - Autres : $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ $\sqrt[4]{2}$	- Trisection - Pentagone régulier par nœud - Racines cubiques de nombres rationnels $\sqrt[3]{2}$

Résumons

Géométrie à la règle et au bissecteur = Géométrie à la règle et au transporteur = Géométrie des pliages simples $\subset$ Géométrie à la règle et au compas = Géométrie au compas seul = Géométrie des pliages avec ajustement d'un point $\subset$ Géométrie des pliages avec ajustement de deux points sur deux droites distinctes.

Attention donc à vos pliages et autres origamis ! Comme Monsieur Jourdain et la prose vous y utilisez des tas de géométries différentes sans le savoir !

Pour une mathématisation des origamis vous pouvez consulter le site (Bibliographie (6)) qui présente une réflexion empruntant des voies très différentes des nôtres mais, (heureusement), retrouve nos résultats sur la constructibilité des points et lignes géométriques étudiés en (2). Pour nos lecteurs qui n'auraient pas le temps ou l'envie de visiter ce site, nous établissons en annexe II un parallèle entre les axiomes des origamis dus à Huzita et Justin (7) et notre classement des différents pliages selon les constructions qu'ils autorisent.

ANNEXE I

Construction du pentagone régulier par pliage simple (sans ajustement)

Construisons tout d'abord par pliage **le nombre d'or** ϕ (cette construction est bien connue à la règle et au compas, nous ne la donnons par pliage que pour mémoire).

Prendre une feuille de papier deux fois plus longue que large, plier la feuille trois fois sur elle-même pour former une graduation régulière

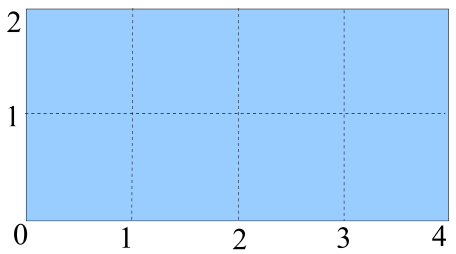


Figure 10

Par pliage former un triangle rectangle de côtés de longueurs 2 et 1 donc d'hypoténuse $\sqrt{5}$.

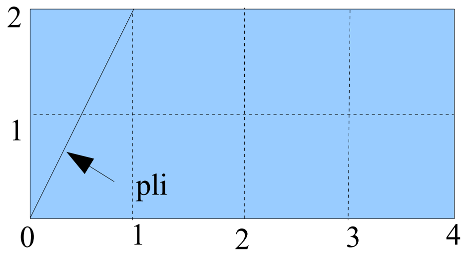


Figure 11

Par pliage reporter la longueur $\sqrt{5}$ (en trait gras) le long du grand côté de la feuille

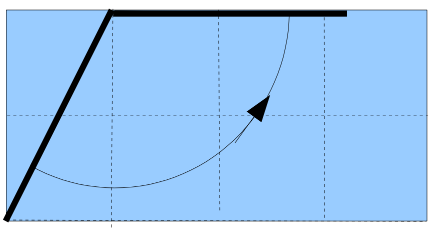


Figure 12

Couper la feuille à l'extrémité du trait gras. Il suffit maintenant de replier la feuille sur elle-même en deux parties d'égales longueurs pour obtenir Φ, le nombre d'or.

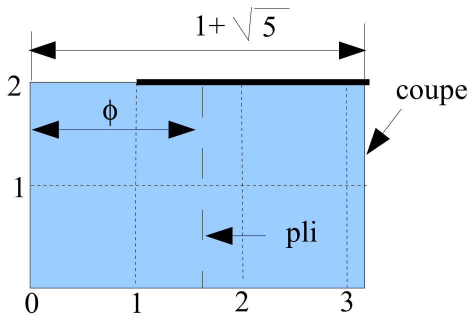
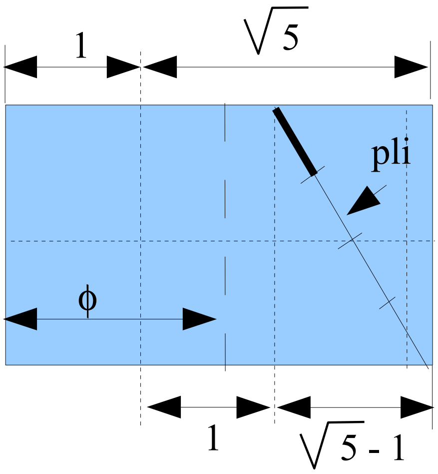
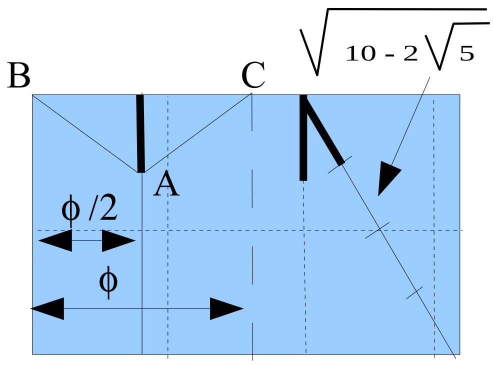


Figure 13

Il nous reste, pour compléter la construction du triangle ABC qui nous permettra de construire le pentagone régulier, à construire par pliage la longueur $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Celle-ci peut s'obtenir comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle de petits côtés de mesures $\sqrt{5}-1$ et 2, celle-ci a pour longueur $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Il suffira ensuite de diviser cette longueur par 4 par pliage.

 Figure 14	Utiliser la graduation (en traits pointillés) de la feuille pour désigner la longueur $\sqrt{5}-1$, tracer à l'aide d'un pli, la diagonale du rectangle de côtés de longueurs 2 et $\sqrt{5}-1$, celle-ci a pour longueur $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Diviser cette longueur par 4 en pliant la feuille deux fois de suite (les plis sont désignés par des petits traits). Le trait gras a pour longueur $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, c'est la hauteur recherchée du triangle ABC.
 Figure 15	Rabattre la longueur $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ le long du pli de graduation verticale le plus proche, parallèlement au petit côté de la feuille (segment dessiné en trait pointillé gras) (cette étape paraît inutile mais ce n'est pas le cas, essayez de la supprimer pour voir. . .). Noter [BC] le segment de longueur ϕ porté par le grand côté supérieur de la feuille. Marquer d'un pli la moitié de ϕ, reporter sur ce pli la longueur $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. L'extrémité du segment nous délivre la position du sommet A du triangle ABC recherché.

Vous pouvez vérifier avec votre rapporteur que l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ a pour mesure 108 degrés (aux approximations de pliage près).

Si l'on veut se faire plaisir, on peut découper le triangle ABC, s'en servir comme patron pour en découper deux autres (il reste un vide au milieu) et se construire un beau pentagone régulier. Le nôtre (voyez ci-dessous) n'est pas beau car les triangles ne sont pas parfaitement découpés mais il est authentique (nous n'avons pas corrigé le dessin pour faire joli) !

Bien entendu, bien que cette construction soit peu précise à cause, par exemple, des erreurs dues à l'épaisseur des pliages elle est **rigoureuse d'un point de vue mathématique**, c'est ce qui nous importe avant tout.

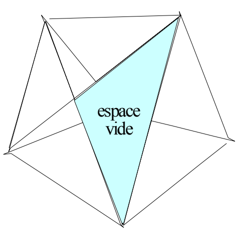


Figure 16

Le pentagone construit avec trois triangles sans utiliser le compas.

ANNEXE II
Comparaison entre notre classement des pliages
et l'axiomatique des origamis de Huzita-Justin

Nous énumérons ci-dessous les axiomes de Huzita-Justin, l'énoncé géométrique correspondant habituel ***en italique*** ainsi que les termes **entre parenthèses** sont **ajoutés par nous,** nous spécifions ensuite la ou **les géométries correspondantes** :

Axiome 1 "Un unique pli passe par deux points P_1 et P_2 spécifiés (distincts). "
Par deux points distincts passe une seule droite.
Géometrie du pli simple sans ajustement.

Axiome 2 "Un unique pli amène un point P_1 sur un point P_2 (les deux spécifiés). "
Tout segment [P_1 P_2] admet une médiatrice.
Géométrie du pli simple sans ajustement
Géométrie de la règle et du transporteur (ou du compas à pointes sèches)
Géométrie de la règle et du bissecteur

Axiome 3 "Un unique pli superpose deux droites (non parallèles) L_1 et L_2. "
Tout angle (aigu) défini par deux droites admet une bissectrice.
Géométrie du pli simple sans ajustement
Géométrie de la règle et du transporteur
Géométrie de la règle et du bissecteur

Axiome 4 "Un unique pli passe par un point P_1 et est orthogonal à une droite donnée L_1. "
Par tout point il passe une et une seule droite orthogonale à une droite donnée.
Géométrie du pli simple sans ajustement
Géométrie de la règle et du transporteur
Géométrie de la règle et du bissecteur

Axiome 5 "Soient une droite L_1 et deux points P_1 et P_2, un seul pli passe par P_2 et amène P_1 sur L_1. "
Il existe un seul axe de symétrie passant par un point donné et transformant une droite donnée en une droite contenant un point donné.
Géométrie du pli avec rotation (arc de cercle ou ajustement d'un point)
Géométrie de la règle et du compas

Axiome 6 "Soient deux droites L_1 et L_2 et deux points P_1 et P_2 (donnés), un pli amène P_1 sur L_1 et P_2 sur L_2."
Il existe un axe de symétrie axiale transformant deux droites données en deux droites contenant deux points donnés.
Géométrie avec ajustement de deux points (sur deux droites distinctes)

Pour les problèmes de constructibilité des nombres algébriques par ces différentes géométries, veuillez consulter notre ouvrage (2) et J.JUSTIN(7).

Commentaire mathématique

Il est intéressant de souligner qu'une fois de plus le mathématicien utilise ici un univers géométrique "plus vaste " que celui sur lequel il veut faire des constructions ou des démonstrations. En effet, nous voulons travailler dans l'univers des objets géométriques de dimension deux mais nous utilisons l'outil "pliage " dans l'espace de dimension trois.

Nous avons déjà souligné ce fait dans un autre contexte, par exemple le passage du corps des nombres réels à celui des nombres complexes pour effectuer des calculs intermédiaires utiles. Nous utilisons aussi, sans le dire pour ne pas compliquer le propos, le fait que le papier servant au pliage n'est pas élastique, s'il l'était, la trisection, par exemple, pourrait avoir plusieurs solutions et devenir inexacte.

Commentaire pédagogique

Bien que les pliages n'apparaissent pas explicitement dans les programmes de l'enseignement français, sauf éventuellement dans les classes de maternelle, on constate immédiatement, lorsque l'on se penche sur les mathématiques sous-jacentes, leur intérêt pédagogique.

Comme le soutient depuis longtemps l'un de nous (R. Rodriguez, Thèse de Sciences de l' Éducation de l'Université de Caen (8)) et plus récemment nos publications dans le sein de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie ((2) et (3)) il est indispensable d'aborder les apprentissages mathématiques et en particulier géométriques par des directions variées par exemple :

- Observation visuelle d'une figure tracée sur un papier
- Tri de figures découpées dans du carton
- Tracé à main levée de la figure
- Tracé de la figure avec des instruments
- Construction d'objets avec du matériel pédagogique (barres perforées, polygones agrafables de plastique par exemple)
- Tracé "manuel" virtuel avec un logiciel de géométrie….

L'élève construisant grâce à ces différents media ses "psychomorphismes" (8) menant a l'acquisition de ses notions mathématiques abstraites. (Pour le rôle prépondérant de la main dans les apprentissages on pourra consulter l'ouvrage d' Édouard Gentaz : « La main, le cerveau et le toucher » (9).)

Les pliages font partie de ces media, ils sont eux aussi intéressants et innovants car ils font appel à d'autres actions intellectuelles, parfois très fines comme nous avons pu le constater dans les pages précédentes.

Ceci est donc un plaidoyer pour l'introduction des activités de pliages en initiation et développement des notions mathématiques dans les classes de collège et même, pourquoi pas, au lycée.

Bibliographie

(1) D. BOURSIN, V. LAROSE « Pliages et géométrie » Editions du Kangourou

(2) D. SALLES, R. RODRIGUEZ « Nouvelles pratiques de la géométrie ». Editions I.R.E.M. de Basse-Normandie 2008

(3) R. RODRIGUEZ, D. SALLES « Du dessin perçu à la figure construite » Editions Ellipses 2006

(4) L. MASCHERONI « Géométrie du compas » (Geometria del compasso) 1797

(5) J.C. CARREGA « Théorie des corps » Editions Hermann 1997 et 2001

(6) En ligne : fr.wikipedia.org/wiki/Mathématiques_des_origamis

(7) J. JUSTIN « Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques »", reprinted in Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, H. Huzita ed. (1989), pp. 251-261.

(8) R. RODRIGUEZ Thèse de Sciences de l'Éducation de l'Université de Caen

(9) É. GENTAZ « La main, le cerveau et le toucher » Éditions Dunod Collection Psycho Sup 2009

Danielle SALLES-LEGAC et l'Équipe Géométrie - septembre 2009

Le groupe «Jeux 2 Maths»

Animateurs à l'IREM de Basse-Normandie depuis quelques années, c'est à l'occasion d'une recherche d'activité concernant la somme des vecteurs que nous avons été amenés à créer un jeu : les «Vectominos». D'abord simple «ressort didactique» pour aborder une notion délicate de façon peu conventionnelle, il nous est apparu que nos élèves prenaient beaucoup de plaisir à y jouer et que la pratique du jeu améliorait sensiblement les performances globales. Dans le but de développer ce type d'activité, nous avons créé un nouveau groupe de recherche IREM, le groupe «Jeux 2 Maths».

Depuis huit ans, notre travail a été de concevoir des jeux abordant différentes notions des programmes du collège et de les tester dans nos classes pour juger leur pertinence et leur impact sur les élèves. Si nous n'avons pas encore créé d'outils évaluant l'influence du jeu sur l'apprentissage, nous avons toujours constaté dans nos pratiques que la réaction des élèves était toujours très positive, qu'ils prenaient un plaisir évident à faire des maths, et que les situations de jeu influaient nettement sur leur implication et leur désir de réussite.

Les ateliers que nous avons animés lors des journées régionales de l'APMEP de Basse-Normandie et des journées nationales de l'APMEP de Rennes (2002) et de Caen (2005), notre participation aux groupes de travail et d'échange auprès desPLC2 de l'IUFM de Caen (depuis 2003) ainsi que les stages proposés au Plan Annuel de Formation de notre académie (depuis 2004) qui ont fait l'objet de beaucoup de candidatures, nous confortent dans l'idée que la pratique du jeu en classe suscite l'intérêt et la curiosité des collègues et nous engagent à donner plus d'écho à notre travail.

Vous ne trouverez aucun des jeux présentés dans ce site à la vente (à l'exception des Vectominos disponibles auprès de l'IREM de Caen). Il vous faudra mettre «la main à la pâte» avant de les proposer dans vos classes. Alors courage... à vos imprimantes, pots de colle, massicots, plastifieuses et autres feuilles cartonnées, le **jeu** en vaut la chandelle !

CONCEPTION DE NOS JEUX

Il ne s'agit pas, dans notre conception du jeu de donner un aspect ludique à une activité mathématique ; beaucoup de travaux de ce type ont été développés depuis de nombreuses années par les enseignants (par exemple le groupe "jeux" de l'APMEP), avec succès, et ont rendu la pratique des mathématiques plus attractive pour les élèves.

Notre objectif se veut plus restrictif et pour qu'une activité puisse bénéficier d'une appellation « jeu », elle doit avoir un aspect jeu de société et répondre à certains critères.

- Notre volonté est avant tout de donner à ce que nous appelons " jeu " un caractère de challenge, que ce soit avec d'autres (envie de gagner la partie) ou avec soi-même (envie de se dépasser, de faire mieux).
- Le jeu doit proposer à l'élève un but différent de ceux auxquels il est habitué tels que répondre à une question ou résoudre un problème. Ici, il s'agit plutôt d'utiliser des outils mathématiques à des fins qui ne le sont pas, la motivation sera alors plus sociale que scolaire.
- L'utilisation d'un matériel spécifique tel que pions, dés, plateaux ou cartes nous semble essentielle pour que l'élève se sente en situation de jouer. Lorsque le matériel leur est distribué, il est clairement identifié comme matériel de jeu ; l'activité paraît alors moins scolaire, et de ce fait devient plus séduisante, voire intrigante.
- La progression des parties s'effectue par étapes, et chaque " coup " joué fait fonctionner la notion mathématique utilisée.
- La règle du jeu, outre des principes mathématiques, comporte des aspects d'ordre technique qui doivent rester abordables par tous. Une trop grande complexité du fonctionnement du jeu risquerait d'être un élément perturbateur dans l'utilisation des règles mathématiques et nuirait aux objectifs pédagogiques visés.
- Les erreurs doivent être sanctionnées par des " malus " (passer son tour, reculer sur un parcours), dans le but d'obliger chaque élève à avoir un regard critique sur ce qu'il fait ou ce que fait l'autre.

Notre préoccupation est axée sur la manipulation de notions qui posent problème sans forcément recourir à un cadre qui puisse faire croire à un aspect non mathématique du jeu ; il n'est pas nécessaire de donner un décor artificiel à un jeu pour le rendre attractif, il est certainement plus important de soigner le fond que la forme.

Nous distinguons deux types de jeu : les jeux qui permettent de découvrir de nouvelles notions (les vectominos), les jeux qui font manipuler des notions en cours d'acquisition (parcours relatif). Il est important que l'enseignant puisse porter un regard critique sur le déroulement des jeux. Nous prévoyons donc une phase écrite qui nous permet de visualiser le déroulement des parties et d'en corriger les éventuelles erreurs. Les élèves sont ainsi en mesure de valider leur niveau de performance.

Intérêt pédagogique du jeu

Il est évident que l'intérêt premier du jeu est de placer l'élève dans une situation motivante du fait se son aspect ludique. Le but poursuivi n'est pas de résoudre un problème, répondre à une question ou faire une démonstration, il est d'atteindre un but fixé par le jeu lui-même qui n'est pas d'ordre mathématique, et les moyens d'y parvenir, même s'ils mettent en jeu des notions mathématiques ne sont pas de type scolaire. Si la motivation a de l'importance pour que les élèves ne s'ennuient pas à l'école, elle ne mérite pas à elle seule que l'on accorde au jeu autant d'intérêt. D'autres aspects, propres à développer des capacités chez les élèves peuvent nous induire à leur donner une plus grande part dans notre enseignement.

Socialisation

Les programmes font un large écho à la socialisation des élèves, au développement du citoyen. Pratiquer un jeu en groupe met en situation de confrontation différentes personnalités qui doivent communiquer, échanger, s'entendre et se respecter, qui doivent être capables d'admettre leurs erreurs ou de convaincre l'autre. Le respect de règles inhérentes au déroulement du jeu sont formatrices pour l'élève qui sera amené dans sa vie d'adulte à appliquer divers règlements dans le domaine social ou professionnel.

Développement de l'esprit

La pratique du jeu nécessite le plus souvent des qualités d'ordre et de méthode, elle impose une réflexion sur la stratégie à adopter, sur l'analyse de la situation, et demande concentration et attention pour progresser le plus efficacement possible. Nous avons tous pu constater que de nombreux enfants et adolescents sont capables d'attention et de concentration sur des jeux (vidéos par exemple !) alors qu'en classe le moindre événement peut détourner leur attention de la tâche sur laquelle ils devraient être fixés. Les jeux que nous avons testés en classe nous confortent dans l'idée que les élèves peuvent rester concentrés sur une tâche, bien au delà de ce qu'ils sont capables de faire dans des activités plus conventionnelles.

Pratique des notions mathématiques

Dans les jeux tels que nous les concevons, il y a répétition de l'utilisation d'un outil mathématique. Chaque ” coup ” joué faisant fonctionner le savoir visé, le jeu a alors une fonction d'entraînement, d'exercice, sans phénomène d'usure (une heure de pratique des vectominos fera effectuer à chacun une cinquantaine d'additions ou soustractions de vecteurs) et comme chaque partie est différente, l'intérêt des élèves reste intact. La même tâche, sur un exercice scolaire, serait bien rébarbative et découragerait les plus téméraires !

Nous ne disposons que de peu de recul pour évaluer de façon significative les progrès réalisés par nos élèves sur les notions abordées par les jeux que nous avons développés. Seuls les vectominos, que nous utilisons en classe depuis maintenant 5 ans, nous permettent de constater une amélioration sensible de la capacité à additionner les vecteurs sur l'ensemble des élèves, et nous sommes convaincus que ” l'effet jeu ” se fera sentir sur les autres notions.

Que l'on soit bien d'accord, nous ne prônons pas ” le jeu à tout prix “, mais une utilisation parcimonieuse et ciblée sur des notions qui posent problème (somme de vecteurs) ou pour lesquelles un entraînement important est nécessaire (opérations sur les relatifs). L'apprentissage ne saurait être exclusivement ludique et nécessite des phases de travail strictement scolaire, mais le jeu est l'occasion de faire des maths sans s'en rendre compte et, en imposant une certaine répétitivité, a la faculté de faire fonctionner des outils mathématiques dans le but d'en améliorer la maîtrise. Si de surcroît, il offre une efficacité plus grande qu'une activité classique, nous aurions tort d'en priver nos élèves.

LES JEUX DU GROUPE « JEUX 2 MATHS »

Jeu	Niveau(x)	Type de jeu	Notions mathématiques	Déroulement
Démotron	$5^{\text{ème}}$ - $4^{\text{ème}}$	Cartes	Propriétés des parallélogrammes	Créer des combinaisons représentant des enchaînements déductifs.
Dominato	CE2 – $5^{\text{ème}}$	Domino	Addition des nombres relatifs	Faire des bilans de couleurs pour aborder les règles d'additions des entiers relatifs.
Expresso	$5^{\text{ème}}$	Cartes	Expressions numériques	Avec 4 nombres et 3 opérations, écrire une expression numérique répondant à des contraintes.
Fujiyamaths	$5^{\text{ème}}$ – $4^{\text{ème}}$	Plateau	Opérations sur les fractions	Opérer des fractions en répondant à des contraintes données pour progresser sur le plateau.
Isométron	$6^{\text{ème}}$ – $4^{\text{ème}}$	Cartes & plateau	Isométries	Fabriquer des lignes fermées avec des contraintes d'isométries par rapport au jeu de l'adversaire.
Jeu thème	$6^{\text{ème}}$	Cartes	Vocabulaire sur des notions mathématiques	Trouver des mots ou expressions en relation avec un thème donné.
Kelpolygoness	CM2 – $6^{\text{ème}}$	Cartes	Propriétés des polygones	Trouver par des questions « oui / non » la figure choisie par l'adversaire dans une collection de triangles et quadrilatères.
Multiplicato	CM2 – $6^{\text{ème}}$	Fiche	Tables de multiplication	Faire des alignements de nombres sur une grille, en obtenant des produits appartenant à des tables de multiplications imposées par l'adversaire.
Multipower	$4^{\text{ème}}$ – $3^{\text{ème}}$	Plateau	Opérations sur les puissances	Réaliser des produits ou quotients de puissances répondant à des contraintes.
Nombrégo	$6^{\text{ème}}$ – $5^{\text{ème}}$	Cartes	Différentes écritures des nombres	Associer des cartes de mêmes valeurs.
Périmaire	CM2 – $6^{\text{ème}}$	Cartes	Aires et périmètres	Empiler des cartes par égalité d'aires ou de périmètres.
Relatron	$5^{\text{ème}}$ – $4^{\text{ème}}$	Plateau	Opérations sur les nombres relatifs	Opérer des nombres tirés sur des dés de façons à progresser le plus vite possible sur un plateau.
Trifonc	$3^{\text{ème}}$ – 2^{nde}	Cartes	Les fonctions	Associer différentes cartes correspondant à une même fonction.
Tripoly	$5^{\text{ème}}$ – $4^{\text{ème}}$	Cartes	Propriétés des polygones	Associer des cartes par familles de polygones en utilisant les codages des figures.
Vectominos	2^{nde}	Dominos	Somme de vecteurs	Effectuer des sommes ou différences de vecteurs.

La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez (III-B)
Troisième partie : le calcul des ordonnées de la "sinusoïde" selon Jacques Bernoulli

B) Le mémoire de Jean Bernoulli dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*

Nous allons maintenant rééditer et commenter deux mémoires, l'un de Jean et l'autre de Jacques Bernoulli, rédigés respectivement en 1699 et 1702 ; le premier – qui fera l'unique objet de cette seconde partie de notre épisode[3] – est paru en latin dans les *Acta Eruditorum* de juillet 1699, et sa traduction française en 1702, aux pages 134 à 139 des *Mémoires…* faisant suite à l' "*Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MCDXCIX* (1699). *Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie*", et imprimés à Paris en 1702 ; cette traduction s'intitule : "*Quadrature d'une Infinité de Segments, de Secteurs, & d'autres Espaces de la Roulette ou de la Cycloïde vulgaire. Par M. Bernoulli, Professeur des Mathématiques à Groningue*" ; le second, rédigé en 1702, fut imprimé en 1704 dans les *Mémoires de l'Académie…* (aux pages 281 à 288), sous le titre suivant : "*Section indéfinie des Arcs circulaires En telle raison qu'on voudra, avec la manière d'en déduire les Sinus, &c. Par M. Bernoulli, Professeur à Bâle*".

Les huit pages du second mémoire, celui de Jacques Bernoulli, sont " *Extraites d'une de ses Lettres écrite de Bâle le 13. Juillet 1702*", et seront lues à l'Académie des Sciences en sa séance du 6 décembre de la même année ; Jacques Bernoulli les consacre à l'explicitation d'un mémoire de son frère Jean, publié en latin et paru dans les *Acta Eruditorum* en avril 1701 (aux pages 170-175) : "*Joh. Bernoulli Multisectio Anguli vel arcus, duplici Æquatione universali exhibita, inserviens generali determinationi omnium Zonarum quadrabilium cycloidis*", *i. e.* : "*De la plurisection d'un angle ou d'un arc, par Jean Bernoulli, mise en lumière à partir de la duplication universelle des équations, dont découle la détermination générale de toutes les zones quarrables de la cycloïde*".

Nous allons donner au préalable quelques indications sur une partie des textes qui en constituent le contexte, pour faire suite à la précédente livraison de ce feuilleton : nous y avions indiqué que Fontenelle, dans son introduction à l'*Histoire… pour 1702* citait ou signalait des auteurs ayant écrit sur des questions connexes aux différents mémoires des frères Bernoulli ; mais Jacqques Bernoulli lui-même cite ses références ou ses sources en marge ou dans le texte de son mémoire. Voici la liste et une brève description de ces mémoires, que nous avions déjà mentionnés dans la première partie de cet article ; elles constituent un commentaire d'introduction au texte que l'on va lire ensuite, voire une paraphrase moderne de ses premiers développements :

– tout d'abord, un mémoire de Jean Bernoulli, publié dans les *Acta Eruditorum* de juillet 1699, aux pages 316 à 320, donne l'aire de plusieurs segments & secteurs cycloïdaux quarrables, sous forme d'exemples sans méthode : "*Cycloidis primariæ Segmenta innumera Quadraturam recipientia ; aliorum ejusdem spatiorum quadrabilium Determinatio : post varias illius fortunas nunc primum detecta a Joh. Bernoullio*", *i. e.* "*Obtention de la Quadrature d'une quantité innombrable de Segments de la Cycloïde vulgaire ; et Détermination d'autres espaces quarrables de cette même courbe : maintenant et pour la première fois découvertes par Jean Bernoulli, après des fortunes diverses*" ; l'auteur dit donc avoir trouvé une infinité d'autres zones quarrables de la Roulette ; ce mémoire attire l'attention de son frère, qui cherche alors à comprendre l'heuristique de Jean, que celui-ci n'a pas livrée ;

– ce mémoire, comme nous l'indiquions plus haut, fera l'objet d'une publication dans une traduction française assez libre dans les *Mémoires…* de l'Académie de Paris : "*Quadrature d'une Infinité…*". Ce texte, que nous rééditons *infra*, n'est en effet, si l'on excepte l'exposé mathématique des théorèmes et des corollaires du mémoire, qu'une version libre du texte original en latin des *Acta Eruditorum* cité à l'instant ; il est daté en marge du 11 juillet 1699, ce qui correspond à l'indication des *Acta Eruditorum* de juillet de cette année-là ; Jean Bernoulli évoque en particullier la "préhistoire" de ses spéculations, en parlant de la naissance des questions sur la Roulette, du temps de Toricelli et de Galilée dans des termes qu'on pourra lire *infra*, en soulignant le fait que le fond en est quelque peu différent du texte latin ;

– en 1699, Jacques envoie un premier mémoire sur le sujet : "*Jac*[*obi*]. *B*[*ernoulli*] *Quadratura Zonarum Cycloidalium demonstrata. Vid. Tab. IV, m. Jul. 1699*", *i. e.* : "*Quadrature des Zones cycloïdales démontrée par Jacques Bernoulli*", qui paraît dans les *Acta Eruditorum* de septembre, aux pages 427 et 428 (en renvoyant à la planche IV des *Acta Eruditorum*, où se trouvent les figures du mémoire de son frère) ; il y donne une méthode "*très-simple*" pour fournir de "*pareilles*" zones quarrables ;

– en décembre 1700, toujours dans les *Acta Eruditorum*, aux pages 551 et 552, Jacques Bernoulli revient sur le sujet, en donnant une méthode alternative faisant

[3]Contrairement à ce qui était annoncé à la fin de la première partie, III-A) de cet épisode, dans la livraison précédente. En effet, si la version française du mémoire de Jean Bernouilli est réduite par rapport à la version latine parue en juillet 1699, il nous a finalement paru nécessaire de la livrer pour comprendre les raisons et l'heuristique qui ont conduit Jacques Bernoulli à sa propre démonstration de 1702. L'épisode III comportera donc trois parties et le mémoire de Jacques Bernoulli sera donné et commenté dans le prochain numéro de *Miroirs*. Un peu de suspens ne nuit pas…

usage d'une courbe qui, quoique mécanique (au sens de Descartes, et en l'occurrence engendrée par composition de mouvements et n'ayant pas d'équation cartésienne algébrique), peut être engendrée par des lignes droites et circulaires seulement (c'est-à-dire une courbe constructible point par point à la règle et au compas) : "*Jac*[*obi*]. *B*[*ernoulli*] *Quadratura Zonarum Cycloidalium promota ; Problema item Centri grav. Sectoria solidis Cycloïdici solutum. Conf. Acta Lips. P. 316 & 427, Anni 1699*" ; *i. e.* "*Quadrature de Zones cycloïdales poursuivie par Jacques Bernoulli : ensemble la Solution du Problème des Centres de Gravité des Secteurs de solides Cycloïdaux*" ; il renvoie aux deux mémoires de 1699 que nous venons de citer, à savoir celui de son frère et le sien ;

– la méthode de Jacques Bernoulli n'étant pas la même que celle de Jean, ce dernier revient à la charge en publiant la sienne, toujours dans les *Acta Eruditorum*, en avril 1701, pp. 170-175 : "*Joh. Bernoulli Multisectio Anguli vel arcus…*", mémoire dont nous avons dit qu'il a provoqué la réponse de Jacques en 1702 dans les *Mémoires…* de l'Académie de Paris parus en 1704. On y voit à l'œuvre une "*progression*", c'est-à-dire une suite, dont la loi de formation est établie par induction, et selon un procédé probablement inspiré des démarches de Wallis ; Jacques Bernoulli, estimant que cette voie est facile à établir par une démarche inspirée de celle de Leibniz pour la détermination des sinus et que le bibliothécaire de Hanovre lui avit communiquée "*autrefois*", s'en tient là, jusqu'à la connaissance qu'il aura – et qu'il semble avoir eue avant parution – d'une autre méthode due à un troisième auteur, "*J*[acques]. *Herman*[*n*]", puisqu'il décrit le contenu d'un mémoire de ce mathématicien suisse, paru en 1703 ;

– en effet, Jacques Hermann, publie dans les *Acta Eruditorum* d'août 1703 (aux pages 345-352), un mémoire intitulé "*J. Hermanni Demonstratio Geminæ Formula a Celeberrimo Dn. Joh. Bernoulli, in Actis Erudit. Mens. Apr. A. 1701, pro multisectione anguli vel arcus circularis, sine demonstratione exhibita*", *i. e.* "*De l'établissement, par Jean Herman, du fondement de la formule mise en lumière sans démonstration par le très célèbre Jean Bernoulli et parue dans les* Acta Eruditorum de Leipzig *au mois d'Avril 1701, pour la plurisection de l'angle ou d'un arc circulaire*", dans le quel l'auteur fait usage d'une progression qui peut servir à couper une courbe donnée en raison donnée ; Jacques Bernoulli aurait alors repris son étude sur le sujet, pour voir si elle le conduirait au résultat de Herman : ce faisant, il se serait convaincu alors de deux choses : non seulement la plurisection d'un arc circulaire et la détermination du sinus de l'arc sous-multiple, en fonction du sinus de l'arc donné, sont un seule et même problème, mais encore, la méthode d'Herman découlerait de celle qu'il avait proposée lui-même en 1700.

Rappelons encore ce que Fontenelle ajoute dans son introduction, qui éclaire les enjeux de la découverte des frères Bernoulli : *Nous laissons au Mémoire de M. Bernoulli la manière fine et subtile dont il a aperçu la progression des nombres connus qui entraient dans les expressions des cordes des arcs doubles ; il nous suffit d'avoir fait voir en gros quel chemin il a suivi, et comment il a profité d'une faible lumière qu'il a entrevue dans une si grande obscurité. Cette progression qui l'a conduit, était assez cachée, et ne se fût pas offerte à des yeux moins clairvoyans.* Et, plus loin : *Si l'on avait en termes finis et proportionnés à la capacité de l'Esprit humain le rapport d'un arc à sa corde, on aurait celui du demi-cercle, qui n'est qu'un arc – le plus grand de tous – , au diamètre qui est sa corde, et par là viendrait aussitôt la quadrature du cercle inutilement cherchée depuis tant de siècles. Mais la valeur d'un arc étant donnée, celle de sa corde ne se peut exprimer que par une suite infinie de termes, qui ne permet pas que l'on arrive au dernier, ni par conséquent que l'on trouve la somme qu'ils font tous ensemble, ce qui serait nécessaire.* Nous commentons plus loin le mémoire de Jacques Bernoulli, ce qui permettra de comprendre ces remarques de Fontenelle.

* * * * *

Le mémoire de Jean Bernoulli (juillet 1699),
tel que traduit en français et qu'imprimé en 1702.

[. . .]

QUADRATURE

D'UNE INFINITE'

De Segmens, de Secteurs, & d'autres Espaces de la Roulette ou de la Cycloïde vulgaire.

Par M. BERNOULLI, Professeur des Mathématiques à Groningue.

[En marge gauche :] 11. Juillet / 1699.

SUIVANT Toricelli il y a précisément cent ans que cette fameuse Courbe fut imaginée par Galilée son Maître, à qui il semble en attribuer l'invention. Quoiqu'il en soit, on peut dire avec verité, que c'est particulierement en France qu'elle a acquise sa plus grande réputation. Car il est constant que le P. Mersenne la divulga le premier en la proposant à tous les Géometres de son tems ; lesquels s'y appliquant à l'envie, y firent alors plusieurs découvertes : en sorte qu'il étoit difficile de juger à qui étoit dû l'honneur de la premiere invention. Delà vint cette célébre contestation entre Messieurs de Roberval, Toricelli, Descartes, Lalovera, &c. qui fit alors tant de bruit parmi les Sçavans[4]. Depuis ce tems-là à peine a t-on trouvé un Mathematicien tant soit peu distingué, qui n'ait éprouvé ses forces sur cette ligne, en tâchant d'y découvrir quelque nouvelle propriété. Les plus belles nous ont été laissées par Messieurs Pascal, Huggens, Wallis, Wren[5], & quelques autres. Son identité avec sa developpée, les chûtes en tems égaux par des arcs inégaux de cette Cour-

be, & la plus vîte descente à la quelle nous l'avons trouvée propre dans ces derniers tems, en sont sans contredit les plus remarquables & les plus utiles par les usages qu'elles peuvent avoir dans la Mécanique ; comme il paroît dans l'admirable invention des Pendules.

Quant à celles qui sont purement speculatives, il n'y en pas une qui ait tant excité l'admiration des Sçavans, que la Quadrature d'un seul segment de cette Cycloïde, d'autant plus qu'on démontre que sa Quadrature indéfinie est impossible sans celle du cercle dont elle dépend : Cette propriété a même paru trop belle à M. Wallis (jaloux de la gloire de sa Nation,) pour pouvoir reconnoître que M. Huggens soit le premier inventeur de cette Quadrature ; puisqu'il fait tous ses efforts pour l'attribuer à son M. Wren. Cest apparemment ce qui a donné occasion à M. Leibnitz d'aller plus avant, & de chercher cet autre segment quarrable oblique, qu'il a publié autrefois dans les Journaux. Mais ces deux segmens sont tout ce qu'on a crû jusqu'ici de quarrable dans la Cycloïde ordinaire ; & même M. Tschi[r]nhaus se persuadoit avec tant d'assûrance que c'étoient les seuls qui le fussent, qu'il avance hardiment dans les Actes de Leipsick de l'année 1687. page 526. que le Cycloïde n'a pas un nombre infini d'espaces quarrables.

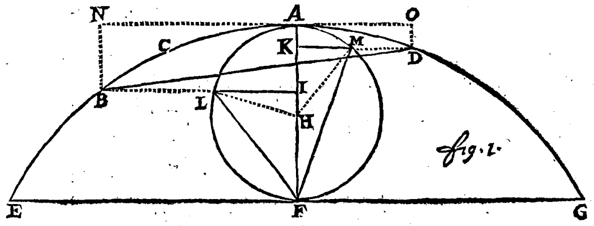
Pour désabuser donc ceux qui pourroient être de son sentiment, je me crois obligé de démontrer ici le contraire par la découverte que je fis il y a déja quelque tems, des Quadratures d'une infinité non seulement de segmens, mais aussi de secteurs, & d'autres sortes d'espaces de cette Courbe, & d'en laisser l'examen & le jugement à l'illustre Académie des Sciences, avant que de la rendre publique. Car, comme selon toutes les apparences, ce sera la derniere observation qu'on aura faite dans ce siecle au sujet de nôtre Cycloïde, il est juste qu'après une durée de cent ans, qu'elle a continuellement exercé les Mathématiciens de toute l'Europe, elle retourne maintenant porter ce dernier éclat en France où elle a pris son premier lustre.

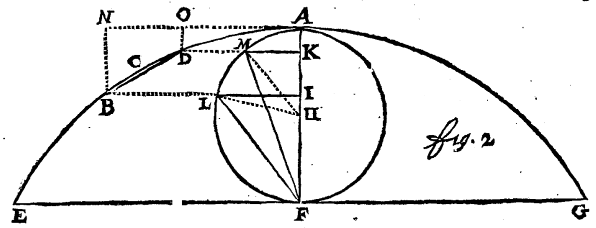
[4] "Lalovera" est pour le Père Laloubère, qui répondit au concours lancé par Pascal, *alias* "Amos Dettonville", sur le sujet de la Roulette ou Cycloïde. Sur cette controverse, *cf.*, par exemple : Denis Lanier, "Pascal et la roulette", Acte IV de l' *Opera Matematica. Les Mathématiques à l'Âge baroque. Dramma giocoso en quatre actes, une ouverture, un prologue, un intermède comique et un épilogue*, texte d'une conférence à quatre voix (Catherine Lanier, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff & André Ropert) pour le Colloque inter-IREM d'Histoire des Sciences de Strasbourg (23 mai 1987), *in* : *La Science à l'âge baroque*. N° 2. Caen, IREM de B.-N., avril 1988. Retirage : juin 1992.

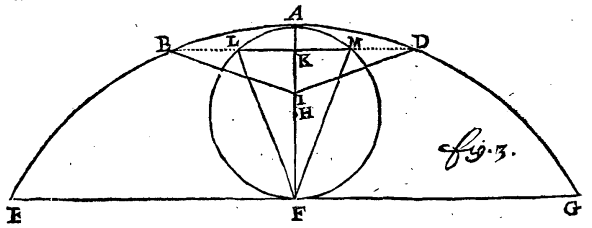
[5] "Huggens" est pour Christiaan Huygens (ou parfois "Huyghens"). L'architecte et géomètre anglais Christopher Wren (1632-1723) s'est illustré par la rectification d'une arche de cycloïde. Pour ce qui touche aux propriétés de la Cycloïde, on se reportera avec profit à : [BESSOT, LANIER, LE GOFF *& alii*, *Aux origines du calcul infinitésimal*, Ellipses, 1999].

[Figures]

[En marge gauche :] FIG. 1. / 2.





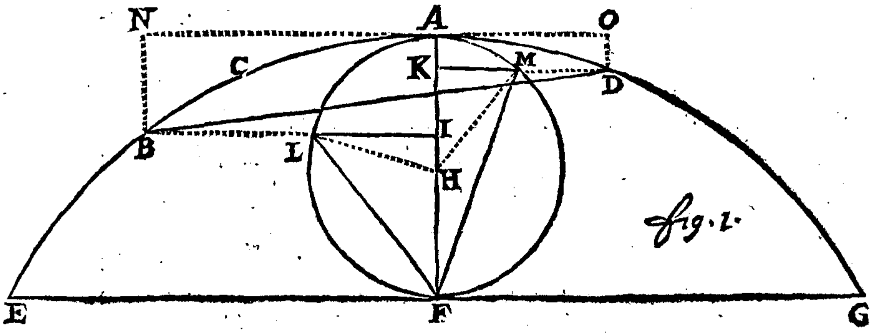


SOIT donc la Cycloïde commune EAG, dont la base soit EG, l'axe AF, & le cercle génerateur ALF. Je dis que si l'on méne à discretion deux ordonnées IB & KD, de maniere néantmoins, que la distance IH de l'une au centre, soit égale à la distance KA de l'autre au sommet ; la droite BD (que l'on conçoit tirée par les extremitez de ces ordonnées) retranchera un segment cycloïdal $BCDB$,

qui sera quarrable. *Ce Segment* BCDB *sera égal à la somme des triangles rectilignes* LFI + MFK (fig. 1.) *ou à la difference des mêmes* LFI – MFK (fig. 2.) ce que je démontre ainsi.

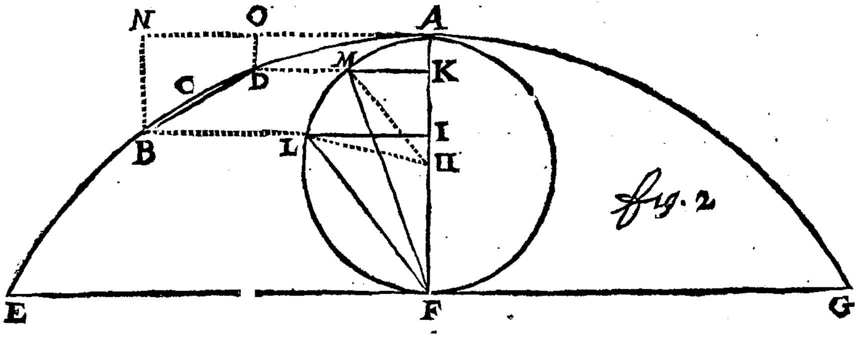
En marge droite :] FIG. 1.

Soient NAO parallele à la base EG ; BN, DO, paralleles à l'axe AF & les raïons HL, HM. Premierement lorsque les ordonnées IB, KD, (*fig.* 1.) sont de differens côtez de l'axe, le segment $BCDB$ se trouve égal au trapeze $BNOD$ diminué des deux trilignes ANB & AOD ; mais le trapeze $BNOD = \overline{\frac{1}{2}BN + \frac{1}{2}DO} \times NO$ (à cause de $HI = AK$) $= \frac{1}{2}HA \times NO = \frac{1}{2}HA \times NA + \frac{1}{2}HA \times OA$. Or par la nature de la Cycloïde $\frac{1}{2}HA \times NA = \frac{1}{2}HA \times \overline{\text{arc.}AL + LI} = \text{sect.}LHA + \text{triang.}LHF = \text{sect.}LFA$: On démontrera de même que $\frac{1}{2}HA \times OA = \text{sect.}MFA$. Maintenant par la propriété de la Cycloïde, déja connuë, le triligne ANB = au segment circulaire AIL ; & le triligne AOD = segm. circ. AKM. Donc ayant ôté du trapeze $BNOD$ les deux trilignes ANB, AOD ; & des secteurs AFL, AFM, les deux segmens circulaires AIL, AKM : l'on aura le segment cycloïdique $BCDB$ = au[x] deux triangles rectilignes $LFI + MFK$. *Ce qu'il falloit démontrer.*



[Figure 1.]

En marge droite :] FIG. 2.



[Figure 2.]

Que si les ordonnées *I B*, *K D*, sont d'un même côté (*fig.* 2.), le segment *B C D B* = trap. *B N O D* – triligne *A N B* + triligne *A O D*; & en suivant les traces de la démonstration précedente, on trouvera le le trapez e $BNOD = \frac{1}{2}HA \times NA - \frac{1}{2}HA \times OA$ = sect. *L F A* – sect. *M F A*. Donc ayant substitué les deux segmens circulaires *A I L*, *A K M*, à la place des trilignes *A N B*, *A O D*, qui leur sont égaux ; il viendra le segment cycloïdique *B C D B* = à la difference des deux triangles rectilignes *L F I* – *M F K*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L I. Les points *K* & *I* concourant & se con-

138 M E M O I R E S D E L'A C A D E M I E R O Y A L E

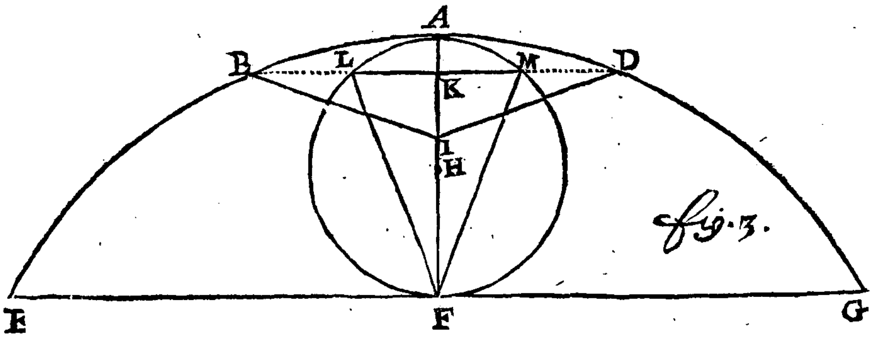
[En marge gauche :] F I G. 1.

fondant au milieu du rayon *A H*, il est manifeste que la corde *D B* (*fig.* 1.) sera alors perpendiculaire à l'axe *A F*, & qu'elle passra alors par le même point du milieu du rayon *A H*. Ce qui fait le cas particulier de M. Huggens ; le segment *B A D B* devenant en ce cas égal au triangle équilateral inscrit dans ce cercle générateur, ou (ce qui est la même chose) au demi hexagone inscrit dans le même cercle.

[En marge gauche :] F I G. 1. 2.

C O R O L. I I. Mais si les points *K* & *I* sont éloignez l'un de l'autre de plus qu'il est possible, c'est-à-dire, si *K* tombe au sommet *A*, & *I* au centre *H* ; le segment *B C D B* dégénerera dans celui qui a été trouvé par M. Leibnitz, & sera égal au seul triangle *L F I* (l'autre *M F K* s'évanoüissant) ou, ce qui vaut autant, au quart du quarré inscrit dans le cercle générateur.

[En marge gauche :] F I G. 3.



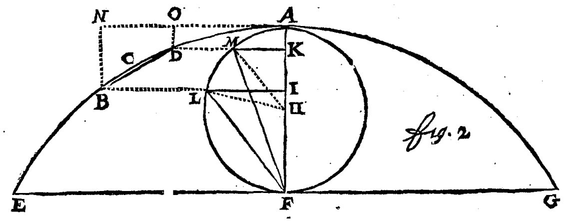
[Figure 3.]

Je passe maintenant à une détermination générale d'une infinité de secteurs de la Cycloïde, tous quarrables, qui (comme j'espere) ne paroîtront pas moins curieux que les segmens. Les points *K* & *I* sont encore ici supposez également éloignez du sommet [*A*][6] & du centre *H*. Du point *I* soient tirées deux lignes droites *I B*, *I D*, aux deux extremitez de l'ordonnée *B K D* : elles formeront un secteur cycloïdal *I B A D I*, que je dis être encore quarrable, étant égal au triangle isoscele *L F M*. Je n'en mets point ici la démonstration, parce qu'elle se tire aisément de la précedente. Il faut seulement observer en passant, que les deux cas particuliers de Messieurs Huggens & Leibnitz, sont encore ici compris dans cette détermination générale, étant visible que le secteur *I B A D I* prend la forme du segment de M. Huggens, quand les deux points *K* & *I* se confondent ; & qu'il se change en deux segmens obliques de M. Leibnitz, lorsque *I* tombe en *A*, & *K* en *H*.

Il ne sera pas hors de propos de dire, que j'ai aussi trouvé une méthode toute singulière de déterminer d'autres espaces cycloïdiques quarrables par l'Algebre. Par exemple, je [peux][7] tirer deux ordonnées *K D*, *I B* (*fig.* 2.) qui comprennent un espace *K D C B I* quarrable, démon-

[6] Le texte donne : "*K*".

[7] Le texte donne : "je peux". Une telle zone KDCBI n'est pas généralement quarrable ; en revanche, il l'est si K et I vérifient la propriété AK = IH, qui conduit aux segments quarrables des figures 1 et 2, ce que l'on "peut" obtenir en complétant le segment quarrable BCDB du trapèze rectiligne IBDK.



[Figure 2.]

DES SCIENCES. 139

trant en même tems, que cela se peut pratiquer d'une infinité de manieres, en sorte que l'espace *K D C B I* sera toûjours different selon la diversité des racines des équations algébraïques tantôt plus tantôt moins élevées. Car il faut remarquer que tous ces espaces ne peuvent pas être déterminez par une construction universelle, comme l'ont été ci-dessus les segmens & les secteurs. Quand je sçaurai que la démonstration synthetique de cette quadrature générale aura eu le bonheur de plaire à l'Académie, je communiquerai aussi la Méthode analytique dont je viens de parler.

[. . .]

* * * * *

Commentaires

Le projet affiché de Jean Bernoulli est bien d'apporter sa pierre à l'édifice construit autour de la Roulette ou Cycloïde depuis les travaux menés en Italie et en France, après que le père Marin Mersenne ait fait connaître cette courbe et son mode d'engendrement à Roberval, Descartes et bien d'autres. Et de le faire en cette fin de siècle dans les *Mémoires de l'Académie Royale* française en hommage à cette période initiatrice de la *nouvelle analyse*, celle de M. Descartes – l'algèbre littérale appliquée à la géométrie –, d'abord, celle des Newton et Leibniz – le calcul infinitésimal –, ensuite.

Pour mettre en évidence l'importance de sa découverte, il rappelle que la *quadrature absolue* de la Cycloïde n'est pas possibke, c'est-à-dire que : il n'est pas possible de donner l'expression de l'aire comprise sous une arche et au-dessus de la base de cette courbe périodique et indéfinie, comme étant celle d'une figure rectiligne connue, ce qui autoriserait la construction à la règle et au compas d'un carré d'aire égale à celle de cette figure rectiligne. En revanche sa *quadrature relative* – ce qu'il appelle une *quadrature indéfinie*, c'est-à-dire une expression de l'aire d'une arche en fonction d'une figure curviligne plus simple, est connue depuis Roberval (*cf.* le premier épisode de ce feuilleton) : l'aire d'une arche vaut trois fois l'aire du cercle générateur (la fameuse roulette qui a donné son nom à la cycloïde par métonymie). Et il semblait qu'hormis les deux segments d'arche particuliers que Huygens (un certain segment délimité par une parallèle à la base) puis Leibniz (un certain segment délimité par une corde oblique) avaient mis en évidence comme quarrables, il ne s'en trouvait pas d'autres dans l'arche ou il ne s'en trouvait pas en nombre infini ; c'était en tout état de cause – nous dit-il – la conviction de Tschirnhaus, en 1687. L'enjeu est donc de montrer que, tout comme la parabole, engendrée dans un cône à base circulaire et dont tous les segments sont quarrables (on le savait depuis Archimède), la cycloïde, courbe engendrée par la rotation d'un cercle, avait une infinité de segments quarrables, voires d'autres zones comme des secteurs.

Pour le reste, l'exposé et les figures sont explicites, pour peu que l'on connaisse les propriétés de la Cycloïde, qui découlent de son mode d'engendrement "mécanique", par composition de mouvements de la roulette génératrice (rectiligne de son centre, de rotation sans glissement pour les points de sa circonférence, de celui dont on suit le parcours, en particulier).

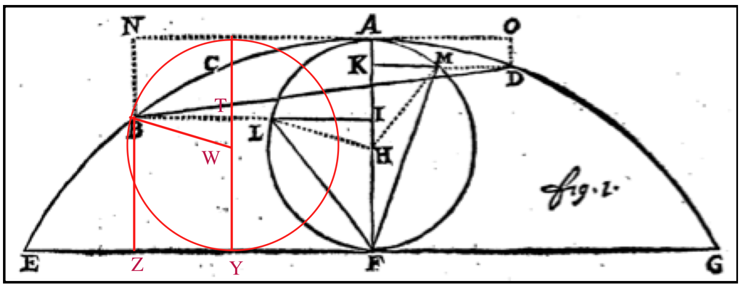
Aussi, nous allons expliciter ici quelques éléments qu'il convient de rappeler pour comprendre la démarche de Jean Bernoulli :

1°) La roulette ou cycloïde est engendrée par le déplacement d'un point de la circonférence d'une roue (ALF) de centre H et de rayon r, roulant sans glisser sur une base (EG). Primitivement cette roue est posée en E et c'est le point en contact – nommons le X – avec E qui est pris comme mobile ; lorsque la roue tourne d'un demi-tour jusqu'au contact en F (EF = πr), X "monte" et se retrouve en A, sommet de la cycloïde, avant de "redescendre" jusqu'en G, lorsque la roue a effectué un tour complet (EG = $2\pi r$). Ce mouvement se poursuit à l'identique (c'est-à-dire périodiquement), formant ainsi une courbe composée d'une infinité d'arches successives. Notons que, contrairement à ce que semblent indiquer les figures gravées, les tangentes aux extrémités de chaque arche sont "verticales", faisant des points E et G des points de rebroussement de seconde espèce.

2°) Jean Bernoulli s'attache à quarrer successivement : a) un segment d'une arche de cycloïde – comme l'on définit un "segment" de cercle ou de parabole à cette époque et depuis l'Antiquité –, c'est-à-dire, soit la région BCADB, comprise entre l'arc de cycloïde BCAD et la corde [DB] de la première figure, soit la région BCDB, comprise entre l'arc BCD et la corde [DB] de la deuxième figure, du fait que deux cas se présentent ici, B et D pouvant être de part et d'autre de A ou tous les deux sur la même demi-arche ; b) un secteur d'une arche de cycloïde IBADIB, compris entre l'arc BAD de cette arche (B et D étant symétriques par rapport à l'axe) et les deux "rayons" [IB] et [ID] issus d'un point I de l'axe tel que IH = KA (K étant le milieu de [BD]) ; on notera que la notion de secteur est à entendre de façon plus générale que celle de "secteur" de cercle, primitivement défini comme secteur angulaire de sommet le centre du cercle : I est ici un point intérieur de l'arche, certes situé sur son axe, mais quelconque en ceci qu'il n'est pas nécessairement choisi au centre H de la roue, ni au point F qui pourrait constituer une sorte de "centre" de l'arche. Ce choix est lié à la position de K (ou de BD, parallèle à la base), mais conduit bien à une infinité de cas, dont celui exposé auparavant par Leibniz.

3°) Le fait que ces segments soient "quarrables" au sens de l'époque de Bernoulli – qui prévaut depuis l'Antiquité, et qui a été remémoré *supra* – tient au fait que l'auteur met en évidence leur égalité d'aire avec une somme de figures rectilignes, dont on sait, selon la démonstration qu'en donne Euclide dans ses *Éléments*, qu'elle peut toujours se ramener à un carré, par des opérations géométriques ne nécessitant que la règle et le compas, c'est-à-dire équivalant à n'user que des opérations arithmétiques élémentaires et à l'extraction des racines carrées ; en effet, Euclide donne la méthode pour quarrer un rectangle – il suffit d'insérer une moyenne proportionnelle, ou géométrique, entre les deux grandeurs linéaires que sont les côtés du rectangle, c'est-à-dire extraire la racine carrée de leur produit, pour avoir le côté du carré de même aire – et un triangle peut être "rectangulé" puisque son aire équivaut à la moitié du "rectangle produit" (c'est de là que vient le substantif "produit") par un côté du triangle et la hauteur qui lui est relative. Quant à la somme de deux triangles (ou plus), elle sera donc la somme de deux rectangles (ou plus), R et S, et une simple règle de trois donnera la quatrième proportionnelle des deux côtés de l'un, R, et d'un côté de l'autre, S, ce qui permet, si aucun de ces deux rectangles n'a un côté de même longueur que les côtés de l'autre (pour pouvoir les accoler et ne faire qu'un seul rectangle), de trouver un rectangle R' ayant même côté que S et même aire que R, de sorte que R' peut être accolé à S et ne former qu'un seul rectangle T de même aire que la somme de celles de R et S.

4°) Quant à montrer l'égalité d'aires entre celle du segment BCADB (figure 1) et la somme des aires des triangles LFI et MFK, la démonstration ressortit aux implicites suivants, concernant la cycloïde :



[Figure 1, complétée.]

– on mène les droites "ordonnées" (KD) et (IB), parallèles à la base [EG] et issues de K et I de sorte que AK = IH, qui coupent la cycloïde en D et en B (resp.) et la "roulette" qui engendre la cycloide, dans sa position ALF, en M et en L (resp.) ; sur la tangente en A à la courbe, parallèle à (EG), sont projetés D et B orthogonalement, en O et N (resp.) ; le trapèze BDON contient le segment à quarrer, et deux triangles mixtilignes, BNACB et DOAC'D (C' étant un point de la courbe situé entre A et D) ; l'aire du segment sera donc la différence entre l'aire du trapèze et celles des deux triangles mixtilignes, suivant la loi implicite de l'additivité des aires par découpage ; BDON a pour aire la moitié de celle du rectangle produit par un côté de longueur ON et par un côté de longueur OD + NB (somme des bases) ; or OD + NB = AK + AI = AK + KH = AK + IH + KI = AK + KH = AH ; donc *aire* (BDON) = (ON . AH)/2 = (OA . AH)/2 + (AN . AH)/2, c'est-à-dire que l'aire du trapèze est égale à la somme des aires des triangles rectangles OAH et NAH.

– jusque là, il s'agit de manipulations d'aires rectilignes ; intervient alors une propriété de la cycloïde, non explicitée par Jean Bernoulli, à savoir que lorsque le point mobile X est en B, l'arc de la "roulette" compris entre le point de contact Y de celle-ci avec la base et le point B est égal, en longueur, à EY, et que, appelant Z le projeté orthogonal de B sur EG et W le centre de la "roulette" à cet endroit, on constate alors que les quadrilatères BLHW et BLFY sont des parallélogrammes ; on a donc et BL = WH, YF = BL et ZY = LI, mais aussi *arc* (YB) = *arc* (FL), d'où *arc* (LA) = EF – EY = YF = WH = BL ; en conséquence, NA = BI = BL + LI = *arc* (AL) + LI, et *aire* [*tri.* (OAH)] = (AN . AH)/2 = [(*arc* (AL) + LI) . AH]/2 ; or [*arc* (AL)] . AH/2 est l'aire du secteur angulaire centré LHA de la "roulette", et LI . AH/2 = LI . HF/2 est l'aire du triangle LHF ; l'aire du triangle NAH est donc égale à l'aire cumulée de ces deux surfaces – secteur angulaire LHA et triangle LHF – cumul qui donne l'aire du secteur angulaire non centré FLA de la "roulette", triangle mixtiligne dont la partie curviligne est LA ; on obtient, par les mêmes considérations que l'aire du triangle OAH, (OA . AH)/2, est égale à l'aire cumulée de deux surfaces – secteur angulaire MHA et triangle MHF – cumul qui donne l'aire du secteur angulaire non centré FMA de la "roulette", triangle mixtiligne dont la partie curviligne est MA ; ces deux triangles mixtilignes, FLA et FMA, contiennent deux secteurs non centrés, ILA et KMA, dont Jean Bernoulli nous dit qu'ils sont respectivement de même aire que les triangles mixtilignes ANB et AOD, autre propriété de la cycloïde qui lui est évidente – *déja connuë*, nous dit-il – que nous allons expliciter ; moyennant quoi, le segment BCADB sera égal, en aire, à :

aire (*trapèze* BDON) – *aire* [*tri. mixt.* (ANB)] – *aire* [*tri. mixt.* (AOD)]
= (OA . AH)/2 + (AN . AH)/2
= *aire* [*tri. mixt.* (FMA)] + *aire* [*tri. mixt.* (FLA)] – *aire* [*tri. mixt.* (ANB)] – *aire* [*tri. mixt.* (AOD)]
= *aire* [*tri. mixt.* (KMA)] + *aire* [*tri.* (KMF)] + *aire* [*tri. mixt.* (ILA)] + *aire* [*tri.* (ILF)]
– *aire* [*tri. mixt.* (ANB)] – *aire* [*tri. mixt.* (AOD)]
= *aire* [*tri.* (KMF)] + *aire* [*tri.* (ILF)],
si l'on a bien : *aire* [*tri. mixt.* (KMA)] = *aire* [*tri. mixt.* (AOD)] et :
aire [*tri. mixt.* (ILA)] = *aire* [*tri. mixt.* (ANB)] ; ce qu'il nous reste à montrer, et si possible par une voie synthétique pour rester au plus près de la pensée de l'époque ;

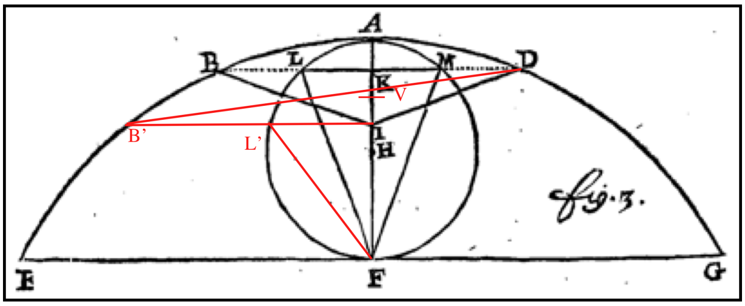
– cette dernière propriété résulte du fait que, appelant T le point de BI tel que BT = LI, l'on savait, depuis la méthode de Roberval pour déterminer, en s'inspirant de la méthode des "*Indivisibles*" de Cavalieri une quadrature relative de l'arche complète (dont l'aire vaut trois fois celle de la "roulette" génératrice, *cf.* la 1ère partie), que ce point T décrit une sinusoïde, "*compagne de la cycloïde*", lorsque B et L décrivent, en restant sur une même ordonnée parallèle à la base, respectivement la cycloïde et la "roulette" qui l'engendre ; pour chaque point T de ce mouvement, l'aire comprise entre l'arc AT de la sinusoïde et celui, AB, de la cycloïde, est égale à l'aire du secteur non centré LIA de la "roulette", cumulant ainsi tous les sinus tirés de AI vers l'arc AL, lignes que l'on retrouve sur les ordonnées B'T'L'I' entre les points B' et T' décrivant les arcs BA et TA de la cycloïde et de sa "*compagne*" ; de la même façon, l'aire comprise entre l'arc AT de la sinusoïde et celui, AB, de la cycloïde, est égale à celle du triangle mixtiligne ANB, qui cumule les sinus verses (*sin verse* (x) = r – *cos* (x)), comme IA = HA – IH, des angles qui se forment lorsque ce mouvement se produit de B à A ; par conséquent ; ces résultats sont évidemment démontrables par le calcul intégral, mais il est clair que Jean Bernoulli sait ce que le "cumul des lignes" veut dire, tandis que la représentation "algébrique" de la cycloïde par des équations paramétriques [$x = r(t - \sin t)$ et $y = r(1 - \cos t)$, avec t = *mes* (FHL), avec E pour origine du repère, [EG) pour axe Ox et la demi-droite perpendiculaire à celle-ci pour axe Oy] n'est pas encore usitée pas plus que n'est habituel l'usage des changements de variable, qui permettrait ici de transformer l'intégrale $\int ydx$.

Les arguments sont les mêmes pour le cas de la figure 2, à ceci près que l'on procède par différence d'aires au lieu d'opérer avec une somme.

On notera que la version latine de 1699 comportait un troisième corollaire, disant en substance : *il est patent que, parmi tous les segments quarrables* [de la cycloïde], *il n'en est aucun dont la soustendante* [*i. e.* la corde comme BD dans les figures 1 et 2] *passe sous le milieu du rayon AH ; ce qui fait qu'il est impossible de réaliser la quadrature de tous ceux qui ne sont pas compris dans les cas des figures I et II*". Il est vrai que tout segment quarrable construit selon la méthode de Jean Bernoulli a une corde qui passe entre K et I et au dessus du milieu de KI – que nous nommerons V et qui est aussi celui de AH, par construction –, puisque la corde BD coupe KI en un point que nous nommerons U et qui est tel que UK/UI = KD/IB < 1 dans le cas de figure où K est plus proche de A que I ; donc U est au-dessus de V ; pour autant, cela ne prouve pas qu'il n'existe aucun autre segment quarrable de la cycloïde : c'est sans doute une certaine prudence d'un auteur qui vient de reprocher à Tschirnhaus une déclaration imprudente de même nature – passage qui ne figure pas dans la version latine –, qui lui aura fait retrancher ce corollaire dans sa lettre à l'académie parisienne.

Quant à l'infinité de secteurs de la cycloïde dont Jean Bernoulli nous donne la quadrature, il nous indique qu'il "*n'en met*[*s*] *point ici la démonstration, parce qu'elle se tire aisément de la précedente*". Il nous semble que cette démonstration pourrait être celle-ci : dans le cas de la figure 1, on a montré que le secteur BADB a même aire que la figure rectiligne LIKMFL formée des deux triangles ILF et KMF : dans la figure 3, B et D sont sur la même ordonnée issue de K ; par le point I, tel que AK = IH, traçons une ordonnée (parallèle à la base) qui coupe l'arc de cycloïde EBA en B' et l'arc de cercle FLA en L', le segment de cycloïde B'BADB' est quarrable d'après le cas de la figure 1, puisqu'égal à {*aire* [*tri.* (KMF)] + *aire* [*tri.* (IL'F)]} et le segment de cycloïde B'BB' est quarrable, d'après le cas de la figure 2, puisqu'égal à {*aire* [*tri.* (IL'F)] – *aire* [*tri.* (KMF)]} ; or le secteur de cycloïde BADIB de la figure 3 est formé de deux éléments : le segment de cycloïde BADB et le triangle rectiligne BDI ; le segment de cycloïde BADB est la différence entre le segment de cycloïde B'BADB' et le triligne mixte (ou secteur) B'BADB', et le triangle rectiligne BDI est égal au triangle rectiligne B'BD, puisque ces deux triangles ont même hauteur IK et même base BD ;

donc :
aire (secteur de cycloïde BADIB) = *aire* (segment de cycloïde BADB) + *aire* (triangle rectiligne BDI) = *aire* (segment de cycloïde B'BADB') – *aire* (secteur de cycloïde B'BDB') + *aire* (triangle rectiligne B'BD) = *aire* (segment de cycloïde B'BADB') – *aire* (segment de cycloïde B'BB') – *aire* (triangle rectiligne B'BD) + *aire* (triangle rectiligne B'BD) = *aire* (segment de cycloïde B'BADB') – *aire* (segment de cycloïde B'BB'), qui est la différence de deux segments quarrables, du type des figures 1 & 2. Donc le secteur de cycloïde BADIB est quarrable et son aire vaut : *aire* [*tri.* (KMF)] + *aire* [*tri.* (IL'F)] – *aire* [*tri.* (IL'F)] + *aire* [*tri.* (KMF) = 2 . *aire* [*tri.* (KMF) ou *aire* (triangle rectiligne LFM) puisque KMF et KLF sont symétriques par rapport à l'axe.



[Figure 3, complétée.]

On notera enfin que Jean Bernoulli ne livre pas son analyse, ce qu'il appelle "*une résolution par équations*", et ne donne que des raisons géométriques à son théorème et à ses corollaires, ce qu'il appelle une "*démonstration synthétique*" ; il promet, certes, une *Méthode analytique* ; ce faisant il fait usage des qualificatifs *synthétique* et *analytique* au sens ancien des mots *Synthèse* et *Analyse*, qui désignent l'un, quelque chose comme la preuve *a posteriori*, et l'autre quelque chose comme les voies de l'invention, l'heuristique de la découverte.

Dans la dernière partie du texte, où il ne livre ni analyse, ni synthèse, se situe un autre point de départ du mémoire de Jacques Bernoulli, comme nous le verrons. Jean Bernoulli indique alors que : "*Il ne sera pas hors de propos de dire, que j'ai aussi trouvé une méthode toute singulière de déterminer d'autres espaces cycloïdiques quarrables par l'Algebre. Par exemple, je* [*p*]*eux tirer deux ordonnées* K D, I B *(* fig. *2.) qui comprennent un espace* K D C B I *quarrable* [puisque composé de deux espaces quarrables : le trapèze KDBI et le segment de type 2, DCBD, *cf.* la note du texte]*, démontrant en même tems, que cela se peut pratiquer d'une infinité de manieres, en sorte que l'espace* K D C B I *sera toûjours different selon la diversité des racines des équations algébraïques tantôt plus tantôt moins élevées*". Et, dans la version latine de 1699, Jean Bernoulli développe quelques considérations autour d'une figure IV, mettant ainsi en évidence d'autres zones quarrables de la cycloïde, et dans lesquelles il esquisse dans un premier temps le développement en série de HK (x) en fonction de HA (a), puis montre que si x est racine de l'équation du troisième degré $12x^3 - 10aax - a^3 = 0$, la zone IKDB, construite de façon analogue à celle de la figure 2, est quarrable.

* * * * *

Il nous restera à donner et à commenter le texte de Jacques Bernoulli lui-même[8], que nous avons choisi ensuite pour représenter la dernière étape du processus d'invention du développement en série de ce que nous appelons aujourd'hui la "fonction sinus" ; cette étude nous permettra de comprendre les voies empruntées par l'auteur, voies caractéristiques de l'heuristique de cette époque, comme nous le verrons dans la troisième partie de cet épisode.

À suivre : La sinusoïde n'est pas celle que vous croyez
(III-C) Le mémoire de Jacques Bernoulli, 1702 (1704) et la bibliographie de la partie III

Jean-Pierre Le Goff, IREM de B.-N., Caen, décembre 2009.

[8] *Cf.* [BERNOULLI, Jacques, 1702].

XVIème colloque de la CORFEM

Le jeudi 18 et le vendredi 19 juin a eu lieu au centre de Caen de l'IUFM de Basse-Normandie, le XVIème colloque de la CORFEM (Commission inter-IREM de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques) organisé en partenariat par l'IUFM de Basse-Normandie et l'IREM de Basse-Normandie.

Se sont ainsi retrouvés une soixantaine d'acteurs de la formation initiale et continue des professeurs de mathématiques de collège et de lycée : formateurs IUFM de mathématiques permanents ou associés dont un grand nombre sont formateurs IREM ; inspecteurs pédagogiques régionaux ; conseillers pédagogiques ; chercheurs ; enseignants de l'université intervenant en PLC1... Des formateurs venant de France métropolitaine, mais aussi de Martinique et du Pacifique, ainsi que du Sénégal ou du Québec. L'IREM de Basse-Normandie était fortement représentée puisque 11 animateurs y étaient inscrits.

Depuis quinze ans, des formateurs de mathématiques se retrouvent une fois par an et mettent en commun leurs travaux et leurs recherches. En 1997, ce colloque a eu lieu à Caen sur le thème de la formation des conseillers pédagogiques. Depuis 2001, le colloque est devenu une Commission inter-IREM.

Les colloques durent deux jours, la première journée étant placée sous un thème lié au contenu de l'enseignement des mathématiques, la seconde journée sous un thème plus transversal sur le métier d'enseignant. Cette année les thèmes retenus furent « Le calcul algébrique et la formation des PLC2 : entre sens et technique » et « Enseigner, un métier qui s'apprend ».

La première journée a été organisée autour de deux conférences. Tout d'abord celle de Sylvie Coppé, IUFM et IREM de Lyon et Brigitte Grugeon-Allys, IUFM et IREM d'Amiens, qui, soulignant les difficultés des élèves en calcul algébrique observées par les professeurs à l'entrée en lycée, explorait différentes pistes en précisant l'articulation entre sens et technique dans le développement de la pensée algébrique. La seconde conférence d'Alain Bronner IUFM et IREM de Montpellier examinait les principales questions didactiques posées par l'introduction des TICE dans le domaine algébrique, regardait les principaux cadres théoriques et travaux de recherche permettant d'analyser les problèmes de l'intégration des TICE pour l'enseignement de l'algèbre au niveau du secondaire, pour dégager quelques principes pour cette intégration à partir d'exemples sur divers logiciels.

La seconde journée a commencé par une conférence sur la formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire au Québec (rétrospective, situation actuelle, potentiel et limites) de Nadine Bednarz, Université du Québec à Montréal. Elle y présentait notamment quelques exemples illustrant les manières dont s'opère l'articulation entre formation mathématique, didactique et pratique et entre cours et conditions réelles d'exercice de la profession. Elle donnait des clés importantes à ses yeux de cette formation d'un professionnel de l'enseignement des mathématiques.

Après le compte-rendu d'un questionnaire rendu par une quinzaine d'IUFM sur « l'organisation de la formation en PLC1, PLC2, T1, T2 et l'articulation entre les différents modules ? », une table ronde permettait de voir différents points de vue sur la formation des enseignants de mathématiques, tout en précisant des principes et des conditions. Sont intervenus à cette table ronde Cristine Castela, IUFM de Haute-Normandie et IREM de Rouen, Michel Poncy, IUFM et IREM de Lyon, Nicolas Saby, Président de l'ADIREM, Yves Matheron, Président de l'ARDM et Eric Pagotto, IA-IPR, académie de Caen.

L'assemblée générale de la CORFEM a décidé d'organiser, comme il est d'usage, le colloque à Caen, une deuxième année consécutive. Les dates retenues sont les jeudi 17 et vendredi 18 juin 2010. Les thèmes ne sont pas encore définis, mais pourraient être autour de la résolution de problème et des masters professionnels.

La convivialité a pris sa place lors de ces deux journées, avec un repas au restaurant « A table », qui suivait une superbe visite de la ville de Caen, proposée par Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie et guide-conférencier de la ville de Caen.

Les participants ont tous félicité l'excellent accueil et la qualité des repas pris au restaurant de l'IUFM les deux midis. Pour ceux qui ne connaissaient pas, la Basse-Normandie est devenue synonyme d'hospitalité généreuse et souriante...

Xavier Gauchard. Animateur de l'IREM de Basse-Normandie.
Co-organisateur des colloques CORFEM de juin 2009 et juin 2010.


Irem de Basse-Normandie
Université de Caen
18e colloque inter-Irem
histoire et
épistémologie
des mathématiques
28-29 mai 2010
Circulation
Transmission
Héritage
renseignements : math.unicaen.fr/irem

Repères IREM *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

Sommaire du numéro 77 Octobre 2009

- **Le volume de la boule en troisième**
  Sébastien Peyrot, Irem de Poitiers
- **Existence et construction de l'icosaèdre**
  Luc Sinegre, Irem de Rouen
- **L'apprentissage 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants**
  Fabien Emprin, Irem de Reims
- **Les probabilités en classe de troisième**
  Yves Ducel, Irem de Besançon
- **L'aléatoire pour introduire les fréquences en classe de cinquième**
  Guillaume François, Irem des Pays de Loire
- **Multimedia : Mathenpoche réseau, vers un déploiement académique réussi**
  Christophe Prévot, Michèle Bechler, Irem de Lorraine

Sommaire du numéro 78 Janvier 2010

- **Mathématiques et développement durable**
  Anne Ruhlmann, Irem de Rennes
- **Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré**
  Georgios Kosyvas, Georgios Baralis, Athènes
- **L'arithmétique et la culture du problème**
  François Brisoux, Irem de Strasbourg
- **Deux algorithmes du PGCD**
  Henri Lombardi, Irem de Besançon
- **Le chapitre Probabilités en troisième**
  Thierry Chevalarias, Irem de Poitiers

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http ://www.univ-irem.fr/ *puis cliquez sur REPERES (dans bandeau gauche vertical), ensuite sur CONSULTATION. (Les nombres en rouge indiquent qu'au moins un article de ce numéro a été mis intégralement en ligne ; les nombres en vert indiquent que tous les articles de ce numéro sont intégralement en ligne)*
Pour soumettre des articles au comité de rédaction de Repères IREM, contacter : yves.ducel@univ-fcomte.fr
Pour vous abonner à Repères IREM ou acheter séparément des numéros, contacter :
TOPIQUES Éditions, 71, rue de Queuleu, 57000 METZ, France
Téléphone & télécopie : 09 71 29 86 58, adresse électronique : topiqueseditions@wanadoo.fr
Prix d'un abonnement (4 numéros par an) : Métropole : Établissements, 40 euros ; Particuliers, 32 euros
DOM-TOM ou Etranger (par avion) : Etablissements, 51 euros ; Particuliers, 43 euros

Prix au numéro : 11 euros + frais d'expédition si envoi par avion.