LE MIROIR DES MATHS

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 74 02** - Fax. : **02 31 56 74 90**
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO SEPT : Avril 2011

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

Repères IREM *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

Sommaire du numéro 83 Avril 2011

Sommaire du numéro 82 Janvier 2011

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http ://www.univ-irem.fr/ *puis cliquez sur REPERES (dans bandeau gauche vertical), ensuite sur CONSULTATION. (Les nombres en rouge indiquent qu'au moins un article de ce numéro a été mis intégralement en ligne ; les nombres en vert indiquent que tous les articles de ce numéro sont intégralement en ligne)*
Pour soumettre des articles au comité de rédaction de Repères IREM, contacter : yves.ducel@univ-fcomte.fr
Pour vous abonner à Repères IREM ou acheter séparément des numéros, contacter :
TOPIQUES Éditions, 22, rue Charles-Martel, 54000 NANCY, France
Téléphone & télécopie : 03 83 27 06 99 , adresse électronique : topiqueseditions@dbmail.com
Prix d'un abonnement (4 numéros par an) : Métropole : Établissements, 46 euros ; Particuliers, 35 euros
DOM-TOM ou Etranger (par avion) : Etablissements, 55 euros ; Particuliers, 44 euros

Prix au numéro : 13 euros + frais d'expédition si envoi par avion.

Éditorial : des visiteurs venus du Pérou.

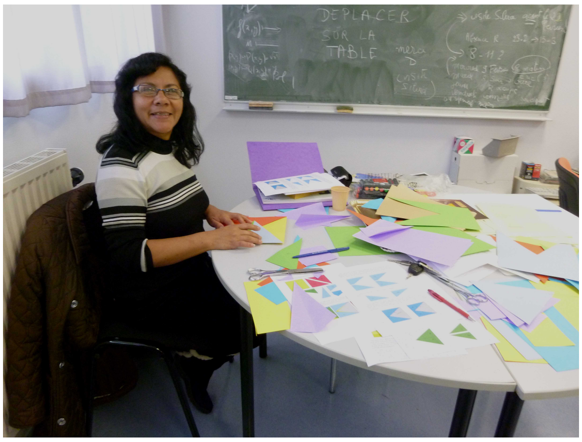
L'IREM de Basse-Normandie entretient des relations privilégiées avec le Pérou, concrétisées par la signature récente d'un accord de coopération interuniversitaire avec l'Université nationale de Ica. En 2011, deux visites sont venues renforcer ces liens.

Du 8 au 13 février, nous avons accueilli Silvia Sánchez d'Arrigo, professeur de mathématiques dans un collège de Callao au nord de Lima. Silvia, qui avait reçu au Pérou une formation de haut niveau en didactique des mathématiques organisée par le gouvernement cubain, était lauréate d'un concours organisé par l'ambassade de France au Pérou, la fondation franco-péruvienne, le ministère de l'Éducation du Pérou et la Banque de crédit péruvienne. Elle avait été invitée auparavant à l'IREM de Lyon et a par la suite visité l'IREM de Montpellier. À Caen, en compagnie de plusieurs animateurs de l'IREM, elle a découvert le patrimoine architectural de la ville sous l'angle, inhabituel, des mathématiques. Avec notre équipe de géométrie, elle a travaillé sur la construction de puzzles permettant à différents niveaux de (re)mettre en mémoire les propriétes géométriques des triangles et des quadrilatères (notamment des cerfs-volants) : avec son aide, une brochure bilingue français-espagnol sera élaborée sur ce sujet. Elle a eu aussi l'occasion de découvrir la plateforme d'apprentissage en ligne WIMS.

Du 13 au 18 mars, nous avons accueilli Carlos Manuel Sabino Escobar, directeur de l'IREM de Tumbes, au nord du Pérou : créé en 2002 sur le modèle des IREM français, cet institut est un service de l'Université nationale de Tumbes. À Caen, Carlos a eu l'occasion de se faire présenter WIMS, il a visité une classe d'école maternelle et une classe de collège dont les enseignants, animateurs de l'IREM, avaient préparé des activités innovantes et il a travaillé avec l'équipe didactique de l'IREM. Je remercie chaleureusement tous les animateurs de l'IREM qui ont contribué à l'accueil de ces deux invités.

Malgré le contexte difficile (restrictions budgétaires, suppression du secrétariat), la vie de l'IREM continue. Ces dernières semaines, nos locaux ont accueilli les stages *Travail personnel des élèves hors de la classe* et *Une histoire des probabilités et des statistiques*. Pour ce dernier, il est à noter que le fascicule regroupant les textes étudiés lors du stage est disponible sur notre site (www.math.unicaen.fr/irem), site sur lequel vous trouverez aussi quelques photos rappelant le passage de nos amis péruviens.

Pierre Ageron, avril 2011



Silvia et Danielle dans les puzzles

Autour des systèmes articulés

Utiliser des objets géométriques inhabituels pour observer, comprendre,
reproduire, formaliser et démontrer.
Le cas de la symétrie orthogonale, de la trisection, des trois-barres
Activités présentées par l'équipe « Géométrie » : Evelyne Adam, Anne-Marie Bock,
Danielle Salles, Olivier Longuet, Ruben Rodriguez

II - Les trisecteurs

Activités pour les élèves de troisième et seconde présentées par Olivier Longuet

Dans le précédent « Miroir des maths numéro 6 » nous vous avons présenté un ensemble d'activités utilisant des instruments conçus pour résoudre des problèmes géométriques relatifs à la symétrie orthogonale.

Dans ce chapitre, issu d'une présentation à nos collègues de l'IREM, lors de la rentrée 2010, de différents types de trisecteurs, nous vous proposons un ensemble d'activités géométriques destinées au collège et à la seconde : étudier et valider le fonctionnement d'outils géométriques non élémentaires, utilisant des propriétés géométriques abordées dans ces classes et permettant de réaliser la trisection d'un angle de mesure non connue.

Comme dans le cas des symétriseurs, ces outils sont réalisés par le professeur ou en atelier avec du matériel très simple et peu coûteux, ils pourront être réutilisés l'année suivante. Ils seront manipulés par les élèves donc, si possible assez résistants. On pourra les encourager à les reproduire à la maison afin de les conserver à titre de « trophée ».

I – Déroulement des activités

1. Présentation rapide par le professeur du problème de la trisection d'un angle.
2. Les élèves découvrent les objets destinés à trisecter un angle sur les tables, ainsi que leur mode d'emploi. Ils les manipulent à leur gré pendant un moment.
3. Ils choisissent (ou le professeur choisit pour eux en fonction de leur niveau ou pour ne pas avoir deux démonstrations trop proches) 2 objets, peuvent les photographier, font une figure mathématique de chacun des objets.
4. Un devoir à la maison est proposé afin de démontrer que l'angle construit est bien le tiers de l'angle donné. Le devoir devra comporter pour chaque objet, une figure et une démonstration.
5. Si possible, en salle d'informatique, modélisation du fonctionnement de l'objet avec un logiciel de géométrie dynamique (par exemple Geogebra).

II – Les difficultés éventuelles

La difficulté majeure est de tracer la figure adaptée, c'est-à-dire de passer de l'univers des objets physiques de l'espace à l'univers des figures, de faire des choix de notation, de dégager les informations parasites pour ne garder que ce qui est important (tout en démontrant en quoi ces informations sont utiles à un autre niveau). (Voir, par exemple, l'utilisation d'un losange pour déterminer une médiatrice dans le trisecteur de Mac Laurin, certains points devront être gommés ou représentés différemment car ils parasitent la figure). Ces difficultés sont déroutantes, de même que la « prise en main » du matériel, surtout pour les élèves peu bricoleurs ou peu habitués aux jouets du genre « Meccano », mais de ce fait sont tout à fait formatrices.

III – Différents trisecteurs constructibles par le professeur et par les élèves

III – 1 Trisection avec un té de dessinateur

Matériel spécifique léger :
– Une feuille de Rhodoïd pouvant être découpée aux ciseaux (Rhodoïd adhésif à abat jour dans les magasins de loisirs créatifs) format A4. Cette feuille est utilisée pour construire un té de dessinateur transparent, on la double afin qu'elle soit plus rigide. La droite (DC), en pointillés sur la figure n°1, est l'axe de symétrie du té.
– Une feuille de papier fort sur laquelle est tracé l'angle à trisecter (voir les figures ci-dessous). **L'élève peut emporter ce trisecteur**.

Variante solide (pouvant être conservée par le professeur) :
– Un té de dessinateur en bois avec une glissière le long de [DC].
– Une planche légère sur laquelle est tracé l'angle à trisecter.
– Un clou ou bouton de jean en O (on peut décaler l'angle vers le haut pour pouvoir positionner O plus facilement).

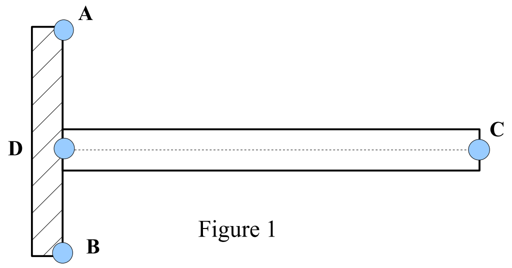


Figure 1

La mesure de la petite branche du té (perpendiculaire à son axe de symétrie [CD) est AB = 2a. On reporte sur le grand côté de la feuille où est tracé l'angle à trisecter $\widehat{xOy}$, le point P tel que OP = a.

On trace une demi-droite [Pz) parallèle au petit côté de la feuille et passant par P.

On positionne ensuite le té de telle sorte que l'axe (DC) passe par O, que le point A du té se positionne sur la demi-droite (Pz] et que le point B du té se positionne sur le second côté de l'angle à trisecter.

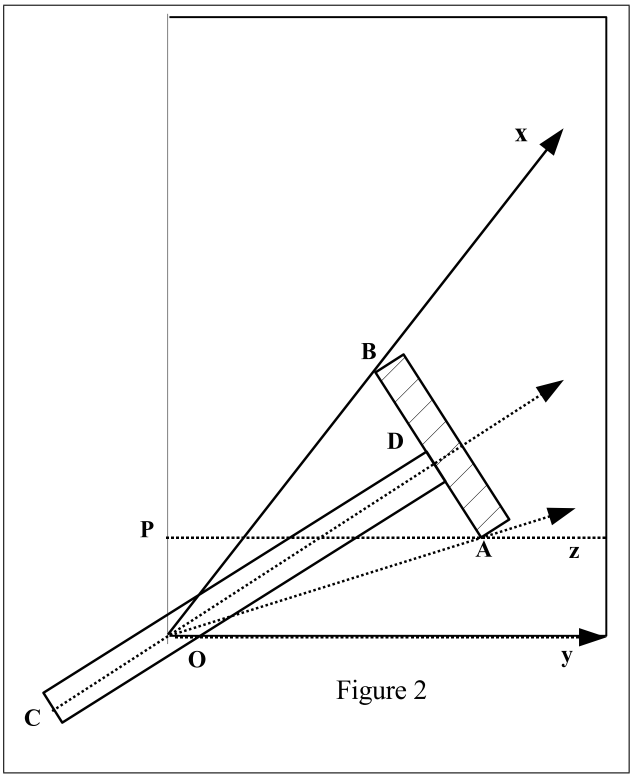


Figure 2

Alors les demi-droites [OD) et [OA) trisectent l'angle.
Démonstration

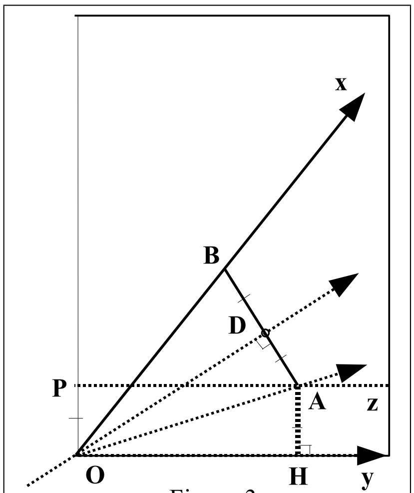


Figure 3

Par construction du té la demi-droite [OD) portée par la médiatrice du segment [AB] donc le triangle OAB est isocèle, [OD) est bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. Les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOD}$ sont égaux. La demi-droite [Pz] est par construction parallèle à [Oy] et DA = PO. Appelons H le projeté orthogonal de A sur [Oy) alors :
AH = PO = DA. Les deux triangles rectangles OAH et OAD ont leurs hypoténuses confondues et un des côtés de leur angle droit égaux, d'après le théorème de Pythagore, leurs troisièmes côtés sont égaux, ils sont donc superposables. Les angles $\widehat{HOA}$ et $\widehat{AOD}$ ont même mesure que l'angle $\widehat{BOD}$, les demi-droites [OA) et [OD) trisectent l'angle .

Réalisation avec du matériel simple et robuste
(toutes les réalisations de trisecteurs sont dues à Olivier Longuet)

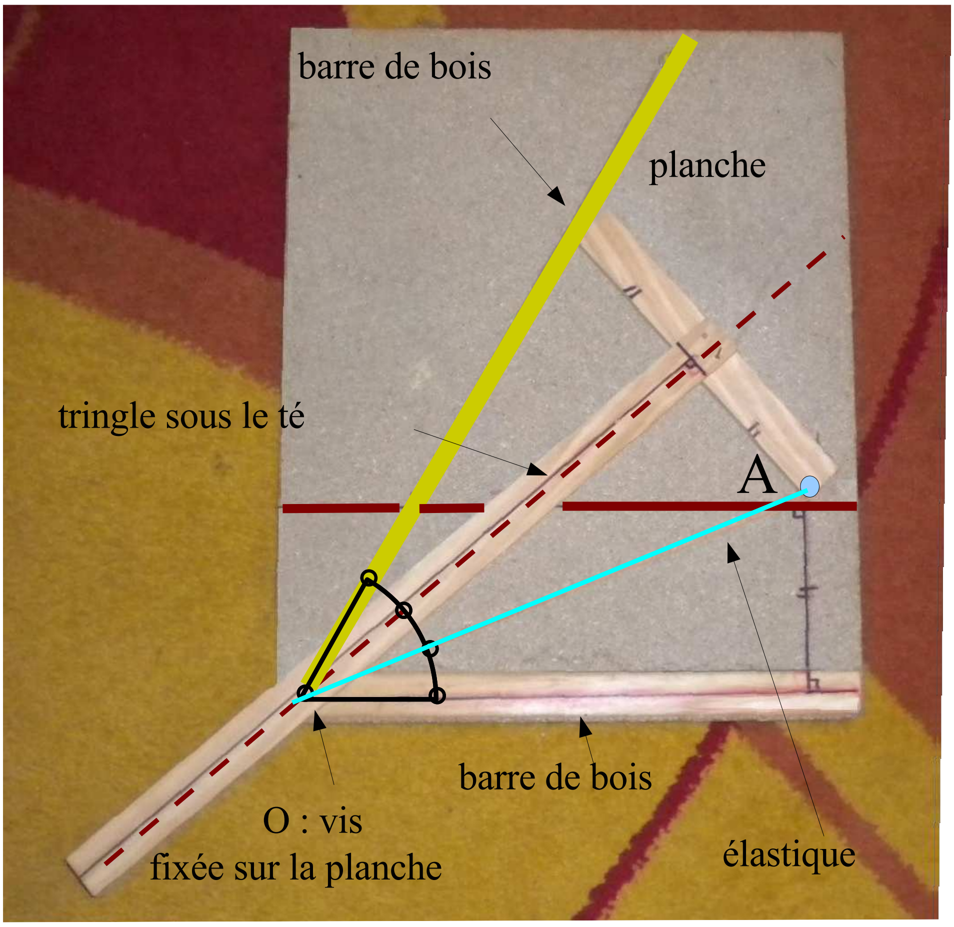


Figure 4

Sur une planche sont fixées deux barres de bois, la première le long du bord inférieur de la planche. L'axe de symétrie de la barre inférieure représentera un côté de l'angle à trisecter (en rouge). La deuxième barre sera fixée le long du côté supérieur de l'angle à trisecter (en jaune). Le sommet de l'angle est légèrement dégagé de la pointe de la planche afin d'y fixer facilement les deux côtés de l'angle avec une vis notée O. La barre supérieure peut pivoter autour de la vis afin de pouvoir changer la mesure de l'angle.

On trace (en rouge) sur la planche un segment parallèle à l'axe de symétrie de la première barre et distant de celui-ci de la moitié de la petite barre du té (repérée avec deux petits traits).

Sous le té et sur son axe de symétrie est fixée une tringle à rideau qui coulisse sur la vis située sur le sommet O de l'angle à trisecter. On fait glisser le té de telle sorte que le coin gauche inférieur de la petite barre du té reste en contact avec le côté supérieur de l'angle matérialisé par la barre jaune et que le coin inférieur droit noté A de la petite barre du té soit en contact avec le segment rouge. Pour matérialiser la deuxième trisectrice, il est possible de relier la vis O à l'extrémité A de la petite barre du té (figure 4) avec un élastique.

Alors les trois angles limités par un petit rond sont égaux et trisectent l'angle repéré par un arc de cercle.

Remarque didactique : Au cours de la réalisation de ce type d'activité utilisant des objets physiques donc, plus ou moins précis, le professeur et ses élèves sont, en permanence, confrontés au problème de la validité de la construction.

En effet, nous avons déjà souligné combien il est important de manipuler les outils avec soin, sans les déformer, afin qu'ils gardent leurs propriétés intrinsèques : longueurs, angles, axes de rotation etc. Si l'élève les construit lui-même ces remarques sont encore plus importantes. Ainsi, par exemple, dans le cas de la trisection avec un té de menuisier ou de dessinateur industriel, le point de rencontre des deux droites perpendiculaires définies par le té n'est pas accessible, d'où la nécessité de fixer sur la grande barre du té une tringle à rideaux qui servira de glissière à la vis figurant le sommet de l'angle à trisecter.

Bien entendu, dans ce cas on accumule les inexactitudes : par exemple, le diamètre de la vis n'est pas égal à l'écartement des rails de la tringle, il faut bien qu'il y ait un peu de « jeu » pour que « ça glisse ». Ces inexactitudes existent dès que l'on utilise une glissière, dans le cas des systèmes articulés c'est la souplesse relative des barres les unes par rapport aux autres qui peut les introduire. Ces « défauts », s'ils ne sont pas grossiers n'entachent pas la validité de l'activité, il faut bien souligner aux élèves le fait que nous réalisons physiquement une activité mathématique et qu'en conséquence, il faut surtout s'assurer de **l'exactitude du raisonnement qui a conduit à la construction physique** et ensuite, réaliser l'objet le plus finement possible.

Il sera de toute façon très intéressant de discuter avec les élèves des inexactitudes grossières de construction. Ainsi, que se passe-t-il si on fait glisser le bord du té le long de la vis figurant le sommet de l'angle au lieu de le faire glisser sur une glissière ? On proposera aux élèves de le faire et de mesurer au rapporteur les deux résultats de la trisection, on pourra aussi leur demander de trouver une solution pour éviter la glissière et, justement, utiliser le bord du té (on peut, par exemple couper une petite branche du té afin de décaler le point d'intersection des deux droites perpendiculaires de celui-ci et, ainsi, éviter l'erreur). Dans la vie professionnelle, on est, en permanence, confronté à ce genre de problème : une pièce qui manque, un outil inadapté ?

Ce travail de réflexion prépare le travail suivant dans l'univers de la géométrie mathématique : feuille de papier, règle et compas, figures codées.

Variante : Nous avons déjà présenté dans notre brochure « Nouvelles pratiques de la géométrie » (Bibliographie (1) chapitre bissectrices et trisectrices) une méthode de trisection utilisant une équerre dont le principe est très proche à celui qui précède.

III – 2 Trisection avec un cercle auxiliaire

Réalisation éventuelle par les élèves (avec du papier calque)

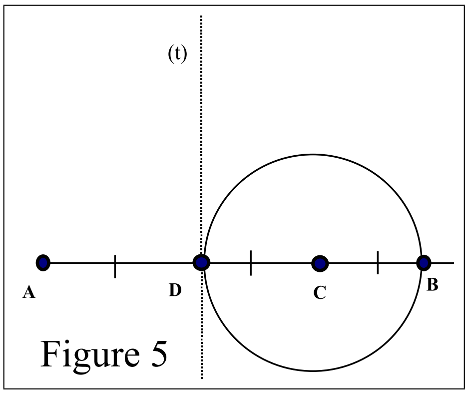


Figure 5

Cette technique d'obtention des trisectrices est présentée dans la brochure « Ces problèmes qui font les mathématiques » (voir bibliographie 6).
Nous donnons aux élèves une feuille A4 sur laquelle est dessiné un cercle de centre C et de rayon 3 cm. Nous avons prolongé un diamètre [DB] d'une longueur de 3 cm jusqu'en A, puis tracé la droite (t) tangente au cercle en D.

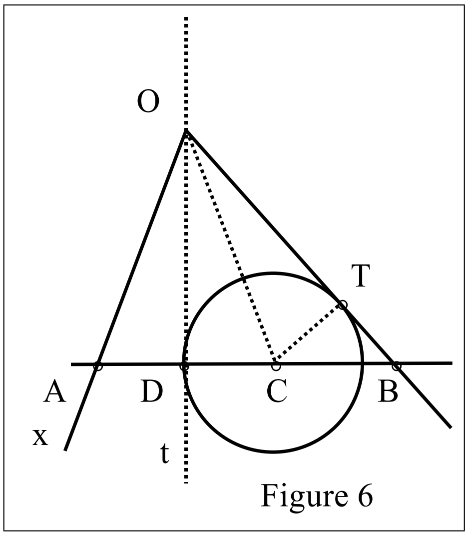


Figure 6

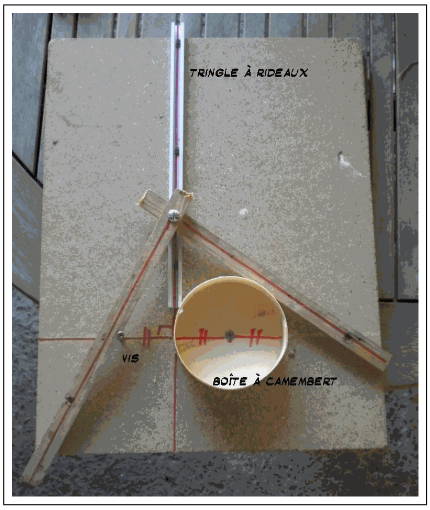


Figure 7

Réalisation par le professeur avec du matériel léger (figure 7 page précédente)

Matériel : Deux barrettes de bois, une vis et un écrou, une tringle pour rideaux légers, une demi boite à camembert ou autre boite ronde. On matérialise l'angle à trisecter par deux barrettes reliées par une vis serrée représentant le sommet de l'angle. Il suffit alors de faire glisser la « vis-sommet » le long de la tringle jusqu'à ce que le côté droit de l'angle (sur l'image) soit tangent à la boite et que son côté gauche s'appuie sur la vis fixée sur la planche. Alors la tringle d'une part et la droite reliant le sommet de l'angle au centre de la boite d'autre part trisectent l'angle formé par les barrettes.

Commentaire didactique : Les difficultés liées à la réalisation physique sont différentes du cas précédent. Elles sont apparues dans les copies d'un devoir réalisé à la maison. Les élèves ont eu du mal à matérialiser un point qui n'apparaît pas sur la photo : le point de tangence de la barre figurant un côté de l'angle et de la boite à camembert, cela a été un réel problème pour eux et il nous semble que pour une activité aussi peu habituelle, nous pourrions les guider en ajoutant le point de tangence sur la photo et le rayon correspondant orthogonal à la barre représentant un côté de l'angle.

III – 3 Construction d'un trisecteur à l'aide de deux bissecteurs

Il est facile de construire un trisecteur avec des barres articulées formant deux bissecteurs. Ces derniers sont constitués, soit de deux losanges, soit de deux cerfs-volants (voir bibliographie (1) et « Miroir des Maths » n°6. Les bissecteurs peuvent être réalisés en carton fort (ou bristol) ou avec des barrettes plastiques (vendues chez les spécialistes de matériel pédagogique genre « Géorègles Celda » en ligne : *http ://www.celda.fr*) ou encore avec des barres métalliques « Meccano », reliées avec des attaches parisiennes ou avec des vis et écrous. La version « carton » pourra être conservée par les élèves, la version plastique ou métallique sera conservée par le professeur

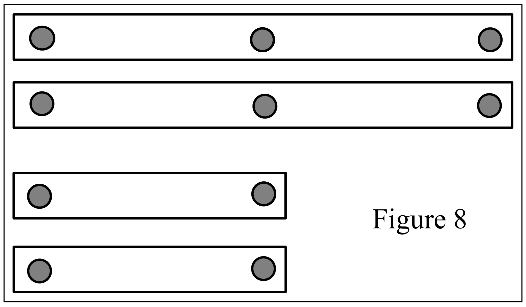


Figure 8

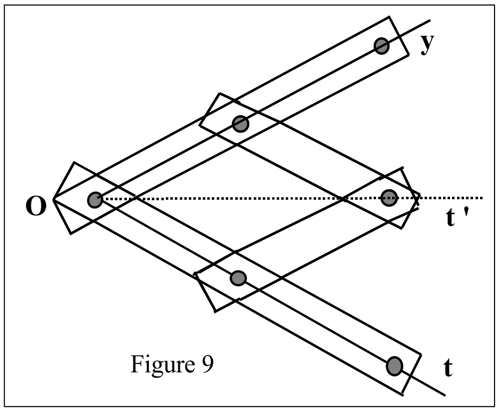
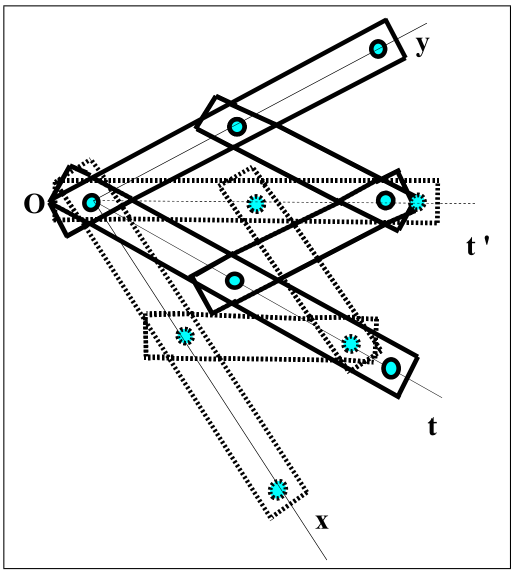


Figure 9



La diagonale du losange, portée par [Ot'), est la bissectrice de l'angle $\widehat{tOy}$.
Réalisation : On fixe ensemble les deux bissecteurs par leur sommet O, on fixe le sommet et les deux côtés externes de l'ensemble sur l'angle $\widehat{xOy}$ à trisecter dessiné sur une feuille.
On fait glisser les deux bissecteurs en amenant les unes sur les autres, d'une part la bissectrice du premier bissecteur sur le côté externe du deuxième bissecteur et d'autre part la bissectrice du deuxième bissecteur sur le côté interne du deuxième.

Les demi-droites [Ot) et [Ot') trisectent l'angle $\widehat{xOy}$

III – 4 Construction d'un trisecteur par multiplicateur d'angle

Construction du multiplicateur avec du matériel léger qui peut être construit et conservé par l'élève : deux règles plates ou barrettes de bois ou plastique de 30 cm, un compas, construit avec deux barrettes de 12 cm.

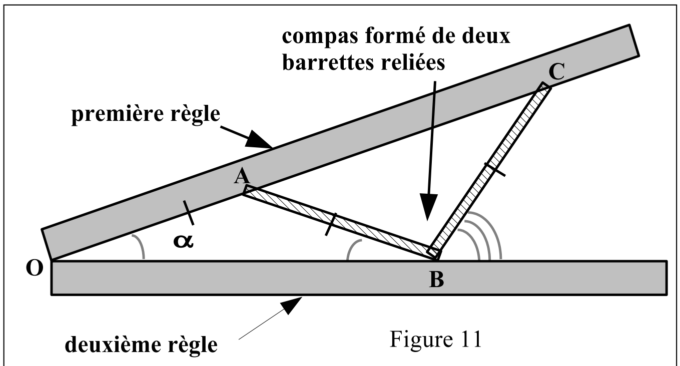


Figure 11

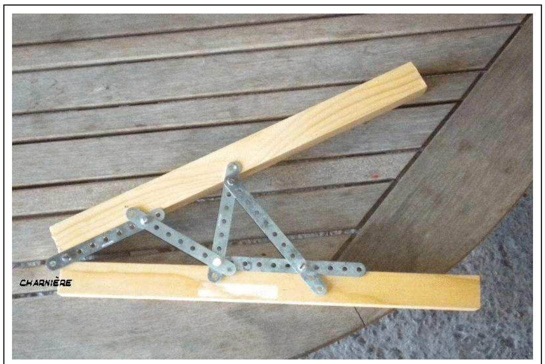
Nous plaçons deux règles plates le long des côtés de l'angle de sommet O à multiplier noté α. Nous reportons le long d'une des deux règles, à partir de son extrémité O la mesure OA d'une petite barrette (soit 12 cm).

Nous plaçons une des deux extrémités extérieures du compas sur A, puis le sommet du compas sur la deuxième règle en B, puis la deuxième extrémité extérieure C du compas sur la première règle.

Alors, on démontre que la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est 2α et de même que la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{xBC}}$ est 3α **voir la démonstration page suivante**).

On peut déduire de cette activité que si les extrémités des deux branches du compas peuvent se déplacer le long des règles plates, on pourra effectuer l'action réciproque en fixant la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{xBC}}$ et ainsi construire un trisecteur, aux erreurs de construction près.

Réalisation avec du matériel robuste par le professeur Deux tasseaux de bois reliées à un bout par une charnière, cinq barres de Meccano ou barres de plastique perforées dont trois identiques, attaches parisiennes ou vis et écrous.

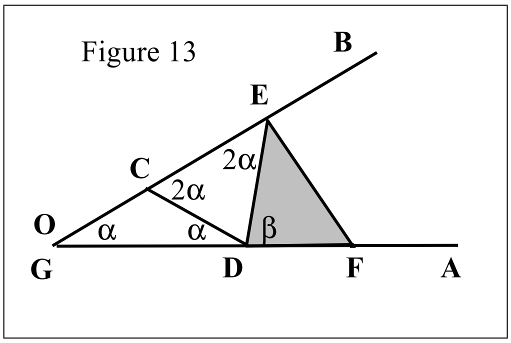


Deux barres de même mesure OC et CD sont attachées par une vis ou une attache parisienne. La barre de droite comporte à son extrémité une vis notée D.
L'angle à trisecter est matérialisé par l'angle $\widehat{\mathrm{FDE}}$ d'un triangle DEF fait avec trois autres barres de Meccano.

Le côté [DE] est choisi de même mesure que [CD]. Son sommet est fixé en D, le côté [DF] glisse le long du tasseau supérieur. L'ensemble des cinq barres forme un système articulé comportant un triangle fixe (DEF) et deux barres mobiles DC et CG. Les deux tasseaux articulés en O sont notés OA et OB. L'angle à trisecter est $\widehat{\mathrm{FDE}}$.

Manipulation (figure 12) Les deux tasseaux OA et OB pivotent autour d'une charnière fixée en O. L'angle à trisecter est matérialisé par la donnée du triangle DEF, on veut construire un angle de mesure le tiers de $\widehat{\mathrm{FDE}}$. On place les tasseaux de manière à ce que E soit sur le tasseau [OB], D et F soient sur le tasseau [OA] et que le point G, extrémité du système articulé soit sur le point O.

Ensuite on ajuste l'angle des tasseaux de manière à ce que le point C arrive sur le tasseau [OB]. On a alors $\widehat{\mathrm{AOB}} = \dfrac{1}{3}\widehat{\mathrm{FDE}}$.



Démonstration Le triangle OCD est isocèle par construction, l'angle $\widehat{\mathrm{OCD}}$ a donc pour mesure en degrés : $180 - 2\alpha$, un angle supplémentaire $\widehat{\mathrm{DCE}}$ a pour mesure : $180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$. L'angle $\widehat{\mathrm{CDE}}$ a donc pour mesure $180 - 4\alpha$. L'angle $\widehat{\mathrm{FDE}}$ a pour mesure le réel β tel que : $\beta = 180 - \alpha - (180 - 4\alpha) = 3\alpha$

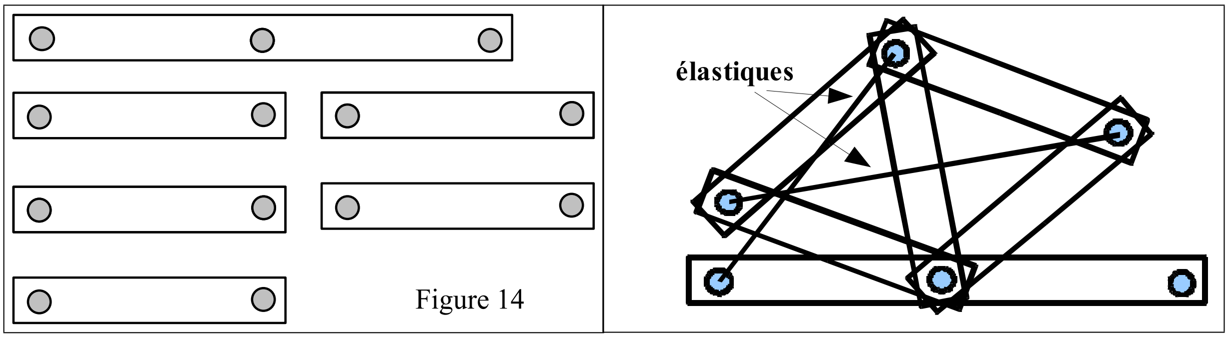
Il suffit donc pour trisecter un angle β de construire le triangle FDE de telle sorte que l'angle $\widehat{\mathrm{FDE}}$ ait pour mesure β puis d'écarter les branches [OA) et [OB) autour de la charnière notée O, de telle sorte que le sommet D du triangle FDE vienne s'appliquer à l'extrémité de la branche [CD] (en meccano), que le côté [DF] s'applique le long de la branche [OA) et que le sommet E du triangle FDE soit situé sur la branche [OB).

Alors l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$ aura pour mesure $\dfrac{\beta}{3}$.

III – 5 Trisecteur de Mac Laurin

Voici un trisecteur par système articulé inspiré du trisecteur de Mac Laurin.

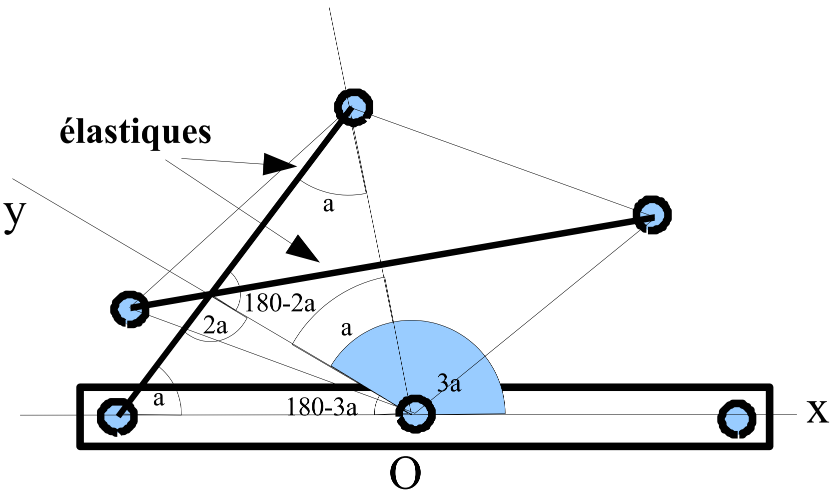
Matériel : 5 petites barres de Meccano ou Géorègles ou en carton fort perforées comme sur la figure 14, une barre de longueur double. Vis et écrous ou attaches parisiennes.

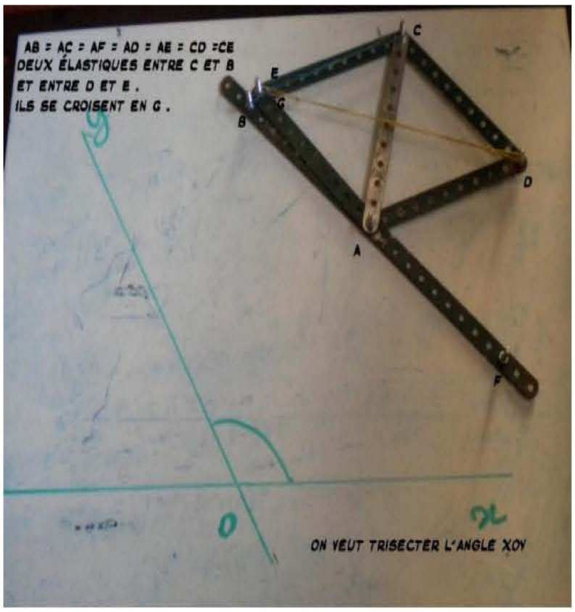


En pièces détachées... Le trisecteur assemblé.

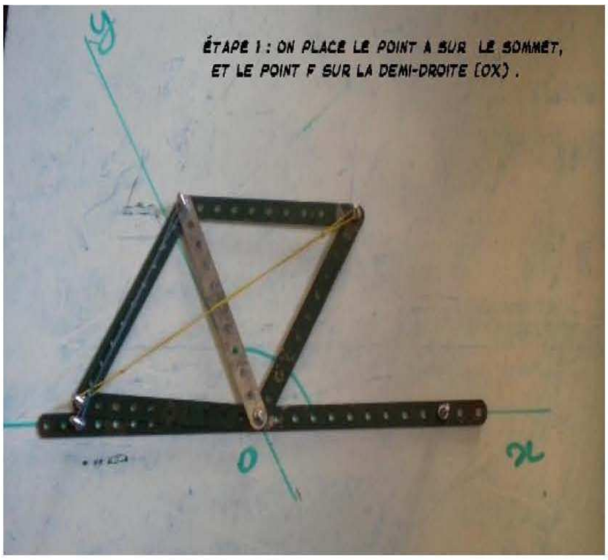
On construit avec les 5 petites barres un losange formé de deux triangles équilatéraux accolés, L'extrémité de la base commune des deux triangles est fixée par une vis située au milieu de la grande barre.

Voici une figure codée du trisecteur de Mac Laurin, nous laissons au lecteur le soin de justifier les mesures d'angles indiquées.

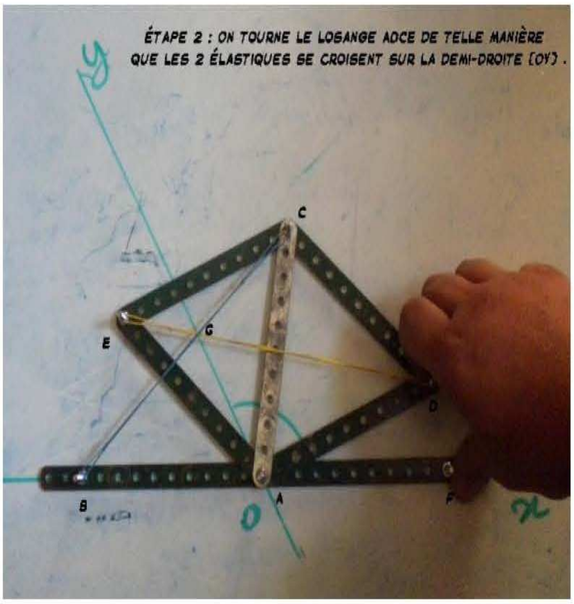




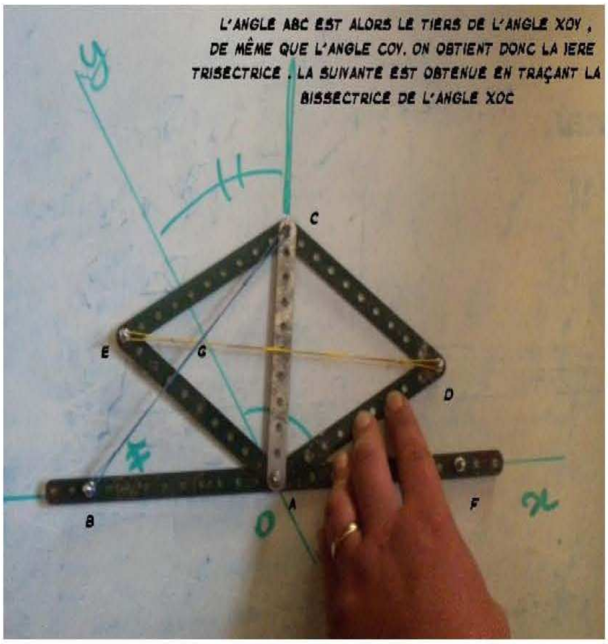
Tracé de l'angle à trisecter (en vert)



Positionnement de la grande barre le long de [Ox) et de son milieu en O



Rotation du losange afin que les deux élastiques se croisent sur [Oy)

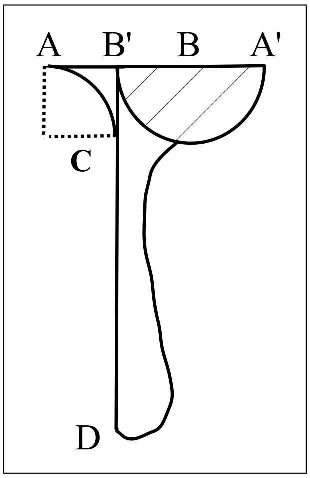


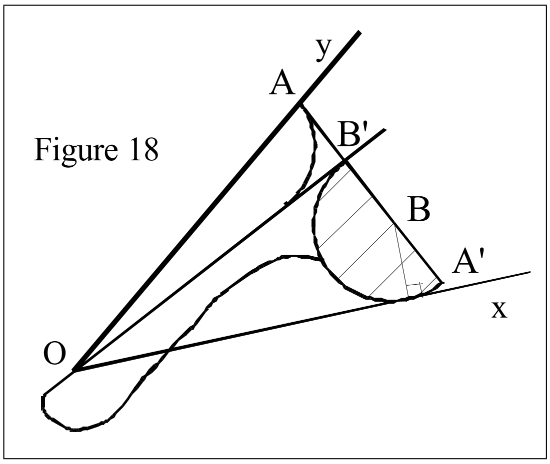
La diagonale du losange est une trisectrice de l'angle $\widehat{xOy}$

III – 6 Trisecteur « Tomahawk » (dû à Claude Lucien Bergery en 1835)

Nous présentons l'objet suivant découpé dans un carton fort que nous appellerons « Tomahawk » dont les parties courbes sont, d'une part, à gauche de la figure, un quart de cercle concave AC de rayon égal à AB', d'autre part, à droite de la figure, un arc de demi-cercle de diamètre B'A'.

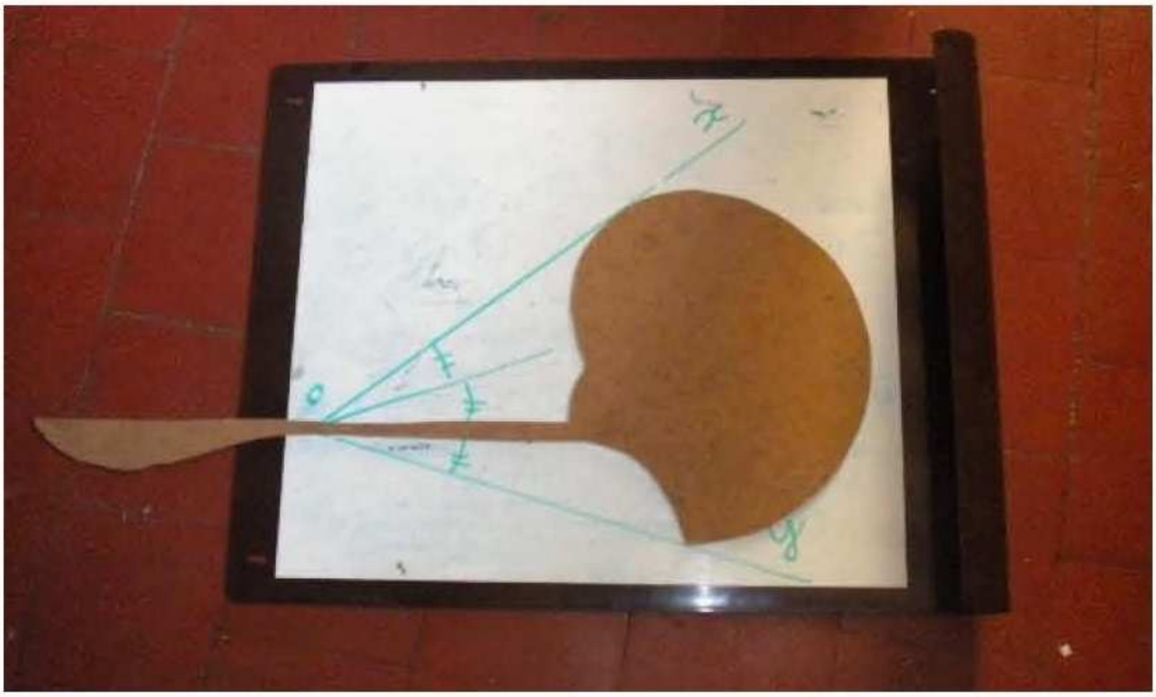
On a AB' = B'B = BA'. La partie « manche » de l'objet est partiellement courbe pour « faire joli » mais sa partie gauche est rectiligne, les trois points B', C et D sont alignés.





Le principe de la trisection est le même que celui du paragraphe III–2 , la boite à camembert est remplacée par le demi-cercle de diamètre B'A'. Le bord OB' du Tomahawk est une des deux trisectrices.

Réalisation (Photo : le tomahawk est retourné pour obtenir la deuxième trisectrice)



IV – Commentaires sur la réalisation des objets et la précision des résultats

Au cours de l'observation des objets par les élèves il apparaît qu'ils sont construits avec des objets physiques non parfaits : par exemple, si l'on utilise une barre de « Géorègle », celle-ci a une largeur (environ 18 mm), les perforations d'origine sont au milieu de la barre. Lorsque l'on réunit deux barres par une vis ou une attache parisienne pour former un angle, il faut prendre garde au fait que le sommet de l'angle est la vis et non l'intersection des deux bords internes des barres. Il est donc nécessaire de demander aux élèves de préciser dans leur rédaction si l'angle est défini par les bords des barres ou par les droites portées par l'axe de symétrie des barres. De même pour tous les objets constituant le trisecteur. Le professeur devra souligner quelles précautions il a prises pour éviter les erreurs de principe : par exemple, lors de la construction du bissecteur construit avec un té, la tringle à rideau qui sert de glissière est coupée de telle sorte que l'intersection de son axe avec le segment rouge orthogonal soit extérieur à la tringle afin que cette intersection soit « propre ».

De même, si le professeur suggère des constructions aux élèves, il insistera sur le fait que même si l'objet n'est pas parfait mathématiquement (il ne peut pas l'être à cause de l'épaisseur des traits de crayons, du diamètre des vis ou des attaches de fixation, de la largeur des trous dans les bandes etc.) il doit être le plus précis possible et surtout, exact mathématiquement. Remarquons que les objets construits en Rhodoïd (à abat jour) transparent ont deux avantages : leur transparence et leur graduation, mais un inconvénient : ils sont un peu trop souples. Il semble qu'il serait intéressant de disposer de règles en plexiglass transparent.

Les élèves pourront demander pourquoi faire des machines compliquées pour trisecter alors que le rapporteur le fait en deux minutes (avec, cependant, des erreurs d'approximation). Le professeur pourra répondre que beaucoup de ces systèmes sont des systèmes articulés, que ces derniers sont particulièrement utiles en mécanique (bielles des automobiles, machines à coudre, locomotives) mais que, de plus, ils ont été sources de découvertes mathématiques enthousiasmantes comme les courbes de Watt que nous étudions par ailleurs. Ainsi, l'étude des trisecteurs mécaniques leur offre une ouverture à un domaine scientifique qui ne leur est peut-être pas encore familier et qu'ils pourront ainsi aborder plus aisément par la suite.

V – Compte-rendu de l'activité :

Séance n° 1 en demi-groupe

Nous présentons rapidement l'historique du problème de la trisection de l'angle.

Nous demandons tout d'abord aux élèves de rappeler la technique du partage d'un angle en deux angles égaux à l'aide de la règle et du compas. Un élève trace au tableau la bissectrice d'un angle donné. Nous en concluons qu'il est possible de partager un angle en deux angles égaux avec la règle et le compas.

Nous revenons à l'aspect historique du problème. Les géomètres grecs cherchaient à faire toutes leurs constructions grâce à ces deux outils et ne le purent pas dans le cas de la trisection. Nous allons construire d'autres outils « géométriques » qui permettent de tracer les trisectrices d'un angle quelconque donné.

Sur six tables différentes nous avons disposé des outils accompagnés d'un mode d'emploi et d'une photo. Il est demandé à chaque élève :

– De manipuler chacun des objets
– De tracer les trisectrices d'un angle grâce au mode d'emploi
– De faire valider les tracés par le professeur.

En fin de séance il est demandé à chaque élève de choisir deux objets parmi les six, en évitant les couples d'objets opérant de la même manière (par exemple tomahawk et boite à camembert).

Il leur est demandé pour la semaine suivante :

– De tracer une figure codée
– D'ébaucher une démonstration au brouillon.

Séance n°2 en demi-groupe

Nous observons que les figures tracées par les élèves ne permettent généralement pas d'élaborer une démonstration. Voici quelques remarques :

– Les élèves restent dans l'univers physique au lieu de passer dans l'univers des figures (très important) par exemple, une barre de meccano est **dessinée** en barre de meccano.
– De ce fait les codages sont souvent inexistants (les points importants n'ont pas de nom, les angles droits ne sont pas représentés, les longueurs égales ne sont pas signalées).

Cette difficulté à passer de l'univers physique à l'univers de figures géométriques rend très difficiles le raisonnement et la démonstration.

Cette séance a donc été consacrée à une remise en question des techniques de codage des figures puis des techniques de démonstration à partir de ces figures. Nous avons porté ce travail sur le tomahawk, qui demande un travail important d'abstraction à partir de l'observation de l'objet dont l'aspect quelque peu « décoratif » masque un peu les propriétés géométriques. Ainsi, « qui pourra le plus pourra le moins ».

Nous réfléchissons ensemble à la construction de la figure représentant le tomahawk, son codage, ses données implicites (par exemple : un des côtés du manche doit être droit) et, bien sûr, sur le but de l'exercice et la démonstration de la validité de la construction des trisectrices avec le tomahawk.

Nous élaborons la démonstration ensemble au tableau et chacun peut prendre des notes.

Bilan du travail en devoir à la maison donné pour la semaine suivante :

Les élèves ont trouvé le devoir difficile car peu habituel (la solution « n'était pas sur internet » ! Si, elle y est mais il faut avoir déjà bien compris le problème pour la trouver !). Les photos ne les ont pas toujours bien aidés à cause de l'éclairage ou de la superposition des barres ou de la confusion de points ou encore de la position imprécise des points de tangence.

Nous pensons donc, après cette expérience que :

– Les élèves doivent pouvoir manipuler les objets plus longuement, éventuellement en dehors du cours, (ce sont des objets nouveaux pour eux) poser des questions, mesurer des barres, des angles etc.
– Ils doivent pouvoir proposer d'autres solutions (une élève a proposé un pliage), il faut le leur suggérer.

Pour notre part, nous pensons que ce type d'activité est extrêmement utile pour aider les élèves à ancrer leurs notions mathématiques sur le monde réel ce que d'aucun ne réussissent pas toujours, il faut reconnaître que la réputation des mathématiques en tant que « science exacte » ou « science dure » ne les y pousse pas toujours.

Comme nous le répétons dans nos ouvrages : « le savoir passe par les mains » et un élève qui a lancé, après l'avoir construit, son cerf-volant dans la brise de mer sait, pour toujours, ce qu'est un « cerf-volant » mathématique.

Vous trouverez, en annexe dans les pages suivantes, à titre d'exemple, deux pages rédigées par deux élèves.

Bibliographie

(1) **SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben** *Nouvelles pratiques de la géométrie*. IREM de Basse-Normandie éditeur 2008
(2) **RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle** *Du dessin perçu à la figure construite.* Ellipses éditeur 2005
(3) **RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle** *Practicar la geometría : de las acciones directament experimentables a sus formalizaciones matemáticas (en espagnol)*. IREM de Basse-Normandie éditeur 2008
(4) **RODRIGUEZ HERRERA Ruben** *La géométrie sans le cercle dans la formation de la pensée géométrique et Segments, droites, demi-droites : Exemple de Psychomorphisme contrarié* »
En ligne : *www.math.unicaen.fr/irem/internat /documents.htm*
(5) **SALLES-LEGAC Danielle, l'équipe géométrie de l'IREM de Basse-Normandie et l'IREM de Ica Pérou** *Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères, Historias de cometas y otros cuadrilateros (bilingue franco-espagnol)* IREM de Basse-Normandie éditeur 2009.
(6) **AYMES Jean** *Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle).* Publication de l'APMEP en ligne : www.apmep.asso.frIMGpdf/La_trisection_de_l_angle__J_Aymes.pdf

L'appareil de Sylvester, revisité avec l'humour de J. Doudoux, tiré de la brochure (6) de J. Aymes

Annexe A

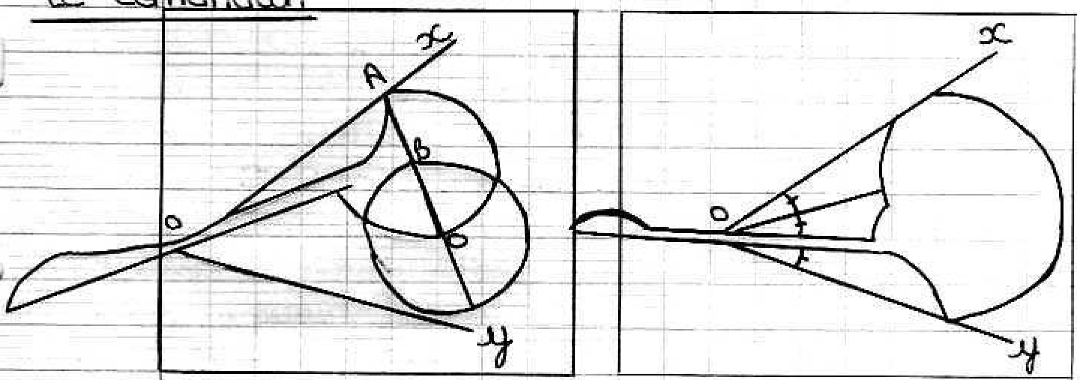
le 13-10-10
Mathématiques

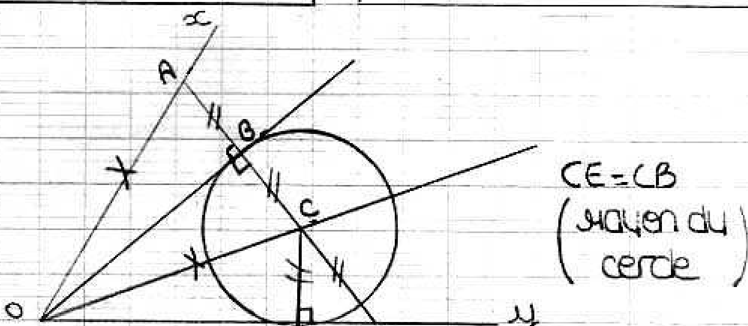
2nd

D.M
Trisecteur

le té et le tomahawk sont de la même famille. Tu ne devais pas les choisir tous les 2. Travail sérieux, mais il manque la conclusion.

le tomahawk





On sait que : A, B, C, D sont alignés ACB est rectangle en B, OBC est rectangle en B.
C est le centre du cercle de rayon B et tangent à (Ox). AB = BC = CE = r.

Annexe B

le but de l'exercice n'est pas compris. Cela dit, tu as bien repéré les données de l'exercice, même si tu n'as pas codé les figures en conséquence.

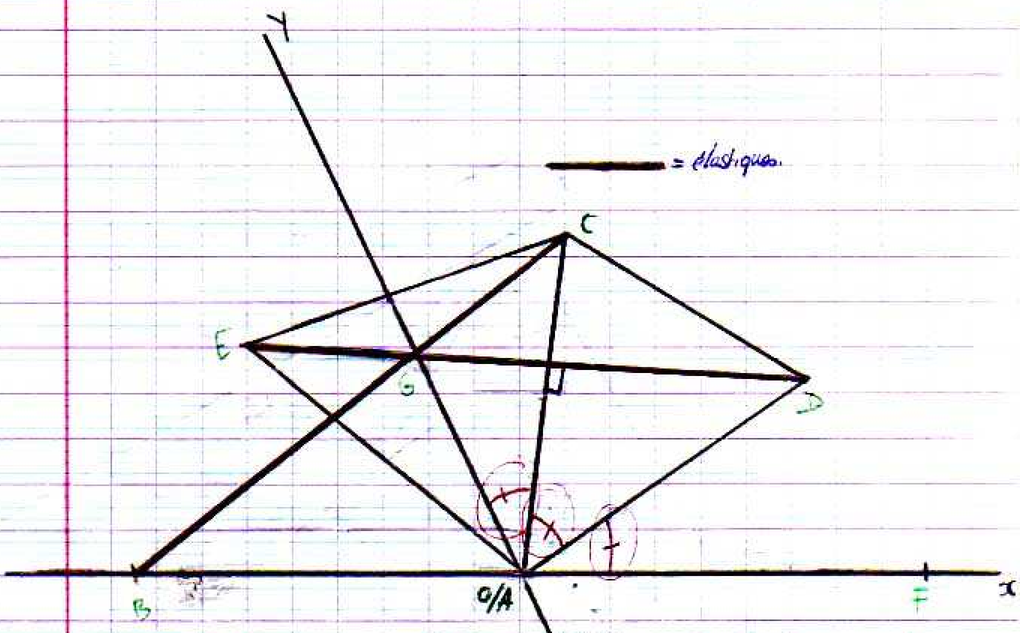
Mathématiques — 2nd 5

Vendredi 7 septembre

Démontrer ~~par~~ avec des schémats, comment trouve-t-on 3 angles :

tu as bien résumé le fonctionnement de l'objet, mais ce n'est pas ce qui est demandé.

Objet 1 : Ces barres de mécano avec ses deux élastiques nous permettent de tracer les trisectrices de xOy. Il y a 2 élastiques : un qui relie les points C et B et un autre qui relie E et D qui est perpendiculaire à (AC). Les deux élastiques se croisent en G. On place les points B, A, F de l'objet sur la droite x et le point A est placé sur le sommet O. On tourne le losange ACDE jusqu'à ce que les élastiques ED et CB se coupent sur la demi droite en point G. À ce moment là, l'angle $\widehat{ABC}$ fait le tiers de l'angle $\widehat{xOy}$. Il reste donc deux tiers de l'angle $\widehat{xOy}$. L'angle $\widehat{COx}$ fait deux tiers de l'angle $\widehat{xOy}$, on trace donc la bissectrice de l'angle $\widehat{O}$ pour séparer l'angle en deux. On obtient donc trois angles égaux : $\widehat{yOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOF}$.



code ce que tu sais (égalité de longueur) pas ce que tu dois démontrer.

Vous remarquerez sur la page ci-dessus, que le losange de Mac Laurin est devenu un cerf-volant, la construction en est-elle, pour autant, fausse ?

L'homme qui calculait plus vite que son nombre

(première partie)

Éric Ziad-Forest

1 - Un tour de magie

Dans les années 1940, bien avant l'avènement des calculatrices personnelles et de la micro-informatique, un magicien présentait un spectacle autour des « calculateurs prodiges », attirant un nombreux public amateur d'arithmétique. Le « clou » de la soirée était un numéro d'environ quinze minutes, qui se déroulait ainsi.

Trois tableaux noirs étaient dressés en fond de scène. Devant eux, sur un tabouret, étaient posés un coffre, pourvu de nombreux cadenas, et trois ardoises. Le « mathémagicien »demandait à deux spectateurs volontaires, sachant bien calculer, de le rejoindre. À d'autres spectateurs, restés dans la salle, il demandait de fabriquer deux nombres de neuf chiffres chacun, vraiment choisis au hasard ! Le premier spectateur-calculateur devait alors, sur le tableau de gauche, effectuer le produit de ces deux nombres.

Exemple

$$\begin{array}{r} 637\,846\,532 \\ \times\ 763\,297\,865 \\ \hline 486\,866\,896\,073\,254\,180 \end{array}$$

Le mathémagicien poursuivait en demandant à un autre spectateur, pris de nouveau au hasard dans la salle, de choisir entre le premier et le second facteur de ce produit. Il recopiait le nombre choisi sur le tableau de droite, puis inscrivait rapidement au-dessous un autre nombre, formé lui aussi de neuf chiffres.

Exemple (suite) Un spectateur choisit le second facteur : $763\,297\,865$
Le mathémagicien écrit : $\times\ 362\,153\,467$

Le public pouvait alors voir le mathémagicien noter quelques chiffres mystérieux sur les ardoises et les enfermer aussitôt dans le coffre. Puis il demandait au deuxième spectateur-calculateur d'effectuer la multiplication posée sur le tableau de droite. Quand celle-ci était finie, il disait trouver tous ces calculs un peu trop faciles et demandait à un troisième spectateur de monter sur scène pour effectuer, sur le tableau du milieu, la somme des deux produits précédents.

Exemple (suite)
Le deuxième spectateur a trouvé un produit égal à 276 430 968 163 447 955.

Le troisième spectateur effectue donc la somme suivante :

$$\begin{array}{r} 486\,866\,896\,073\,254\,180 \\ +\ 276\,430\,968\,163\,447\,955 \\ =\ 763\,297\,864\,236\,702\,135 \end{array}$$

Alors notre mathémagicien ouvrait le coffre, resté à la vue de tous. Il en sortait les trois ardoises, les mettait dans les mains des trois spectateurs qui les présentaient au public : s'affichait ainsi la valeur exacte de la somme des deux produits ! Cette valeur, si laborieusement calculée par les efforts conjugués des trois volontaires, il l'avait trouvée et déposée dans le coffre plusieurs minutes avant eux !

763 297 864 236 702 135

Médusé, le public pensait avoir à faire à un calculateur de génie. On dit que des directeurs de banque, présents dans la salle, se sont battus à la sortie, proposant des contrats mirifiques pour obtenir les services de cet ordinateur humain. . .« l'homme qui calculait plus vite que son nombre » !

2 - Une première méthode : c'est tout neuf !

Si c'est très étroit, c'est tout neuf ! (blague de ma grand-mère[1])

Pour réaliser dans votre cercle familial le tour de « l'homme qui calcule plus vite que son nombre », il suffit d'apprendre à calculer extrêmement rapidement les produits de deux facteurs ayant le même nombre de chiffres et dont l'un des facteurs est 9 , 99, 999, 999 999.

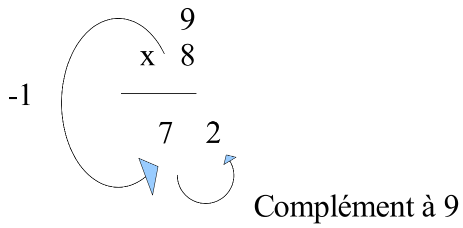
[1] 6+ 7+ 13 + 3 = 29 (two 9) !

Certes on peut penser qu'effectuer $999999999 \times 857961583$, c'est facile : il suffit de multiplier 857961583 par 1 milliard et de retrancher 857961583. Voilà une démarche tout à fait juste, mais…on peut encore aller plus vite !

Nous appellerons complément de 5 à 9, ce qu'il faut ajouter à 5 pour obtenir 9 ;
par exemple 4 est le complément de 5 à 9, car 4+5=9.

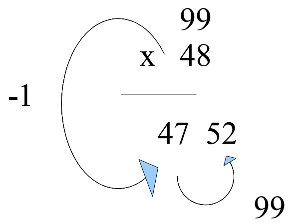
Voyons maintenant sur quelques exemples les opérations à effectuer mentalement :

Exemple 1



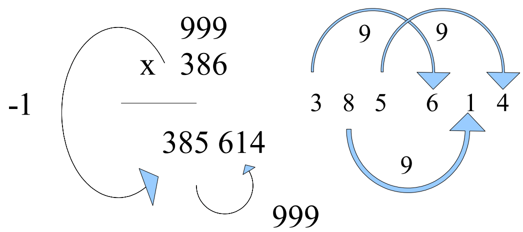
Soustraire 1 de 8, ce qui donne le chiffre des dizaines : ici 7.
Chercher le complément à 9 du chiffre des dizaines, ce qui donne le chiffre des unités : ici 9-7=2.

Exemple 2



Soustraire 1 de 48 ce qui donne le nombre de centaines : ici 47.
Chercher le complément à 99 du nombre de centaines calculé précédemment : ici 99-47 = 52 nombre d'unités.

Exemple 3



Soustraire 1 de 386, ce qui donne le nombre de milliers : ici 385.
Chercher le complément à 999 de 385. Pour ce faire, on « associe »3 et 6 ; 8 et 1 ; 5 et 4.

Justification de la méthode. Les idées pour démontrer la validité de la méthode, sur l'exemple 1, à généraliser pour les autres exemples, sont les suivantes. D'une part l'écriture suivante

$$9a = 10a - 10 + 10 - a = 10(a-1) + 10 - a$$

où a est un nombre à un chiffre, explique pourquoi on soustrait 1 au facteur a . D'autre part la somme des chiffres du produit est 9.

À vous maintenant d'effectuer mentalement le produit suivant : $999999999 \times 763297865$

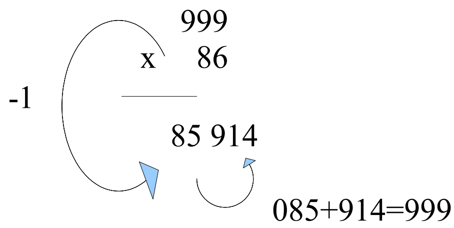
Vous êtes tout de même plus forts qu'une calculatrice ! De toute façon, peu de ces machines sont capables de donner la valeur exacte…

Et maintenant relisez le déroulement du tour de magie décrit plus haut, et comparez le résultat que vous venez de trouver avec celui de l'exemple de notre mathémagicien…Vous devriez avoir compris le « truc »de ce calculateur prodige.

Encore un petit coup de pouce : $A \times B + A \times C = A \times (B + C)$ et $B + C = \ldots$

Que faire dans le cas du produit de deux facteurs dont l'un n'est formé que de 9, mais n'a pas le même nombre de chiffres que l'autre ? En fait ce cas se ramène à la méthode précédente ! Par exemple, le produit 999×86 est à considérer comme 999×086.

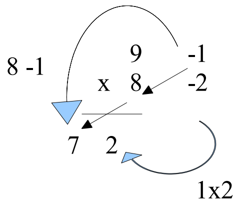
Le complément de 0 à 9 est évidemment 9.



3. - Une deuxième méthode : c'est plus tout neuf.

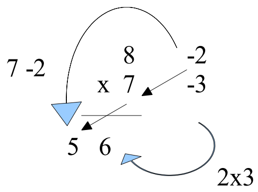
En reprenant l'exemple 1 de la méthode précédente d'un autre point de vue, nous allons pouvoir multiplier entre eux deux nombres formés de « grands »chiffres (des 9, des 8,...)

Exemple 1



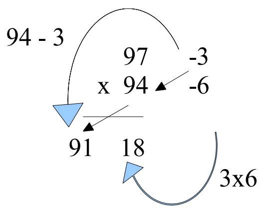
Chercher le complément de 9 à 10 : c'est 1 car 10-9=1 le complément de 8 à 10 : c'est 2 car 10-8=2 Pour trouver le chiffre des dizaines, on effectue soit 8-1, soit 9-2 : ici 7 Pour le chiffre des unités , on effectue 1x2=2 Calcul plus simple...

Exemple 2



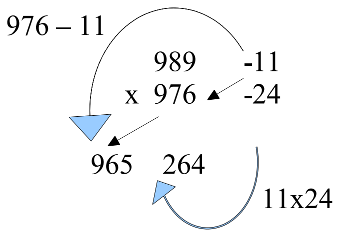
Chercher le complément de 8 à 10 : c'est 2 le complément de 7 à 10 : c'est 3 Pour trouver le chiffre des dizaines, on effectue soit 7-2, soit 8-3 : ici 5 Pour le chiffre des unités, on effectue 2x3=6

Exemple 3



Chercher le complément de 97 à 100 : c'est 3 le complément de 94 à 100 : c'est 6 Pour trouver le nombre de centaines, on effectue soit 94-3 (ou 97-6) Pour le nombre de dizaines, on effectue 3x6=18

Compliquons un peu



pour $\mathbf{989 \times 976 = 965264}$

Beaucoup plus difficile mais réalisable mentalement : 997989×999679

Nous pouvons remarquer que cet exemple n'est pas tout à fait choisi au hasard, puisque dans le premier facteur, le complément de 997989 est 2011 (très bonne année !) et on utilise la particularité des multiplications de deux facteurs de même nombre de chiffres par 21, 201, 2001 etc.

Ainsi pour connaître le nombre de centaines dans ce calcul, néanmoins spectaculaire, nous devons effectuer $2011 \times 321 = 642321 + 3210 = 645531$ ($2001 \times 321 = 642321$, puisque $642 = 2 \times 321$) Le nombre de centaines de mille est obtenu par la soustraction : $999679 - 2011 = 997668$

De ce fait $997989 \times 999679 = 997668645531$

Cas particulier de la méthode 2 - le carré d'un grand nombre :

le carré d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même (par exemple, 9 *est le carré de* 3 *car* $3 \times 3 = 9$*)*

Exemple : en utilisant la méthode précédente, vérifier que $991^2 = 982081$.

Dans un prochain article, nous aborderons d'autres secrets de l'homme qui calcule plus vite que son nombre...

Sources :

Robert Tocquet, *Devenez un crack en calcul mental*, Paris, 1968.

Dhaval Bathia, *Vedic Mathematics Made Easy*, New Dehli, 2005

K.P. Chamola, *Vedic Arithmetic and Development of Basic Concepts*, New Dehli, 2006

Une calculatrice « impressionnante » ***web2.0calc.com*** sur Internet pour vérifier les calculs.

Le problème des quatre-vingt un palmiers.

Pierre Ageron

Un père meurt en laissant quatre-vingt un palmiers à ses neuf fils. Le premier palmier produit une livre de dattes par an, le deuxième produit deux livres, et ainsi de suite jusqu'au quatre-vingt unième. Comment répartir les palmiers entre les héritiers de sorte que tous bénéficient du même nombre d'arbres et de la même récolte annuelle de dattes ?

Contrairement aux problèmes des dix-sept chameaux et des huit galettes, objets d'un précédent article (*le Miroir des maths, n°6*), celui des des quatre-vingt un palmiers semble à peu près inconnu en France, en tout cas invisible sur l'Internet. On le trouve en revanche sur de très nombreuses pages de l'Internet arabophone, notamment au sein de sites scolaires ou universitaires sur les mathématiques, et dans un contexte de glorification des succès scientifiques des Arabes dans les sciences. Bien qu'il se présente encore comme un problème de partage d'héritage, sa nature mathématique et son histoire diffèrent profondément de celles du problème des dix-sept chameaux. Voici le résultat de mes investigations historiques, qui m'ont cette fois conduit jusqu'à Istanbul !

Première remarque : le problème revient à construire un tableau à 9 lignes et 9 colonnes, où apparaissent tous les entiers de 1 à 81 et dont toutes les colonnes ont la même somme. Un tel tableau étant construit, il suffit en effet d'attribuer au i^{e} héritier les palmiers dont les productions de dattes annuelles apparaissent sur la i^{e} colonne. En particulier, tout carré magique d'ordre 9 répond à la question : dans un carré magique, les colonnes, mais aussi les lignes et les diagonales doivent, toutes, avoir la même somme. Si je parle ici de carrés magiques, c'est parce qu'ils sont l'objet d'une très ancienne tradition mathématique arabe. Ainsi, Abû l-Wafâ' al-Buzjânî (940-977) et Ibn al-Haytham (965-1039) donnent les carrés magiques d'ordre 9 suivants, construits l'un par une succession de carrés magiques concentriques autour du coefficient médian et l'autre par un placement diagonal un peu particulier des nombres consécutifs de 1 à 81 [1] :

$$\begin{pmatrix} 8 & 80 & 78 & 76 & 75 & 12 & 14 & 16 & 10 \\ 67 & 22 & 64 & 62 & 61 & 26 & 28 & 24 & 15 \\ 69 & 55 & 32 & 52 & 51 & 36 & 34 & 27 & 13 \\ 71 & 57 & 47 & 38 & 45 & 40 & 35 & 25 & 11 \\ 73 & 59 & 49 & 43 & \mathbf{41} & 39 & 33 & 23 & 9 \\ 5 & 19 & 29 & 42 & 37 & 44 & 53 & 63 & 77 \\ 3 & 17 & 48 & 30 & 31 & 46 & 50 & 65 & 79 \\ 1 & 58 & 18 & 20 & 21 & 56 & 54 & 60 & 81 \\ 72 & 2 & 4 & 6 & 7 & 70 & 68 & 66 & 74 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 37 & 78 & 29 & 70 & 21 & 62 & 13 & 54 & 5 \\ 6 & 38 & 79 & 30 & 71 & 22 & 63 & 14 & 46 \\ 47 & 7 & 39 & 80 & 31 & 72 & 23 & 55 & 15 \\ 16 & 48 & 8 & 40 & 81 & 32 & 64 & 24 & 56 \\ 57 & 17 & 49 & 9 & \mathbf{41} & 73 & 33 & 65 & 25 \\ 26 & 58 & 18 & 50 & 1 & 42 & 74 & 34 & 66 \\ 67 & 27 & 59 & 10 & 51 & 2 & 43 & 75 & 35 \\ 36 & 68 & 19 & 60 & 11 & 52 & 3 & 44 & 76 \\ 77 & 28 & 69 & 20 & 61 & 12 & 53 & 4 & 45 \end{pmatrix}$$

Cela dit, il n'est peut-être pas judicieux de rapprocher notre problème de la tradition des carrés magiques. Des problèmes voisins de celui des quatre-vingt un palmiers existaient dans les mathématiques européennes médiévales, qui ignoraient presque totalement les carrés magiques. Le plus proche semble être celui des neuf tonneaux de vin, issu du livre de calcul d'une abbaye bénédictine allemande au milieu du XV$^{\text{e}}$ siècle [2] : neuf tonneaux, dont les contenances sont de une urne, deux urnes,..., jusqu'à neuf urnes, doivent être répartis entre trois personnes de sorte que toutes bénéficient du même nombre de tonneaux et du même nombre d'urnes de vin. La solution, donnée sous forme de tableau carré, non magique, ne laisse pas deviner un mode de construction généralisable [3] :

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Jacques Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays islamiques* (Lausanne, 2004) p. 24 et 121

[2] *Practica des Algorismus Ratisbonensis* (Kurt Vogel éd.) (Munich, 1954) p. 182.

[3] Comparer aussi avec ce problème posé par Tartaglia, repris notamment par Bachet de Méziriac, puis Émile Fourrey : « Trois hommes ont à partager 21 tonneaux, dont il y en a sept pleins de vin, sept vides, et sept pleins à demi. Je demande comment peut se faire le partage, en sorte que tous trois aient un égal nombre de tonneaux, et égale quantité de vin. » Claude Gaspard Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisants et délectables* (1614) p. 161-164.

En Orient, l'histoire du problème des quatre-vingt un palmiers est celle-ci. Il avait été posé et cherché en vain par des savants vivant en Inde quand l'un d'eux, qu'on appelait le mollah (*mulâ*) Muhammad, le soumit, à l'occasion du grand pèlerinage à la Mecque de l'année 998 après l'Hégire (1590 après J.-C.), à un fameux mathématicien qui vivait alors dans cette ville : Ibn Hamza, originaire d'Alger et qui avait longtemps vécu à Istanbul. L'un et l'autre ignoraient apparemment tout des carrés magiques, bien que la tradition en fût toujours vivace à leur époque dans le monde islamique (vers 1600, l'Égyptien Muhammad Shabrâmallisî y consacra encore un traité). Le problème posé par le mollah indien était à la vérité plus facile qu'une construction de carré magique, et Ibn Hamza ne fut pas long à en trouver une solution. Il l'intégra alors sous le nom de « problème de la Mecque » à la fin du gros traité d'arithmétique auquel il mettait la dernière main. Il avait choisi d'écrire ce traité en langue turque ottomane, mais de lui laisser un titre arabe : *tuhfat al-a'dâd li al-dhawî al-rushd wa al-sadâd*, c'est-à-dire : Le trésor des nombres pour qui est doté de raison et de bon sens. Achevé en 1591, l'ouvrage semble avoir connu un certain succès et circulé jusqu'en Égypte (deux copies en sont aujourd'hui au Caire). Cependant, il resta inconnu des historiens des mathématiques jusqu'à ce que Sâlih Zekî, jeune ingénieur turc formé en France et passionné d'histoire des sciences, en découvrît une autre en 1888 au Grand bazar d'Istanbul : il en décrivit le contenu dans son histoire des mathématiques *Âsâr-ı Bâkiye* (Les vestiges qui restent, Istanbul, 1913), insistant notamment sur le problème des quatre-vingt un palmiers et la solution fournie par Ibn Hamza. Voici quelle est, selon Sâlih Zekî, cette solution, donnée sous forme de tableau :

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 18 \\ 25 & 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 27 & 26 \\ 33 & 32 & 31 & 30 & 29 & 28 & 36 & 35 & 34 \\ 41 & 40 & 39 & 38 & 37 & 45 & 44 & 43 & 42 \\ 49 & 48 & 47 & 46 & 54 & 53 & 52 & 51 & 50 \\ 57 & 56 & 55 & 63 & 62 & 61 & 60 & 59 & 58 \\ 65 & 64 & 72 & 71 & 70 & 69 & 68 & 67 & 66 \\ 73 & 81 & 80 & 79 & 78 & 77 & 76 & 75 & 74 \end{pmatrix}$$

Le lecteur observera facilement la logique de construction de ce tableau ; elle est astucieuse, mais simple et généralisable à n^2 palmiers.

Comme Ibn Hamza lui-même, Sâlih Zekî écrivait en turc ottoman. Aussi ses recherches n'acquirent-elles la notoriété dans le monde arabe que lorsque Qadrî Hâfidh Tûqân, professeur de mathématiques et homme politique palestinien, en parla en 1941 dans un livre en langue arabe [4]. Cependant, son information sur Ibn Hamza et le problème de la Mecque venait exclusivement de Sâlih Zekî. Depuis, les nombreux auteurs arabes qui ont célébré, avec une certaine exagération, le génie de Ibn Hamza se sont appuyés sur Qadrî Hâfidh Tûqân, et donc, indirectement, sur Sâlih Zekî ; aucun n'a jamais revu le manuscrit de Ibn Hamza [5]. C'est pourquoi j'eus en 2009 la curiosité de me rendre à Istanbul pour consulter le manuscrit du traité de Ibn Hamza que conserve la fabuleuse bibliothèque Süleymaniye Kütüphanesi – j'en connaissais l'existence grâce à mon collègue tunisien Mahdi Abdeljaouad [6]. Première surprise : il ne s'agissait pas de celui qu'avait acheté et décrit Sâlih Zekî (dont je n'ai pas pu retrouver la trace), mais d'une copie postérieure (1605 après J.-C.) dont les diverses parties ont été copiées dans le désordre ! Cependant, et bien que que je ne lise pas le turc, la forte densité de mots arabes m'a permis de localiser l'énoncé des quatre-vingt un palmiers, la mention du nom et de la nationalité de celui qui l'a posé et la date correspondante, puis la solution sous forme de tableau... Mais seconde surprise : la solution proposée n'est pas celle décrite plus haut !

À sa place, un autre tableau, rempli en chiffres arabes orientaux. À la première ligne se trouvent, de droite à gauche, les nombres de 1 à 9 ; à la seconde, de gauche à droite, les nombres de 10 à 18 ; à la troisième, de droite à gauche, les nombres de 19 à 27, et ainsi jusqu'au nombre 63 sur la septième ligne. Les deux dernières lignes sont particulières : d'une part elles sont reliées entre elles par des traits entrecroisés qui apparient leurs termes de façon bijective, d'autre part elles sont suivies d'une dixième ligne où figurent les indices 1 à 9 dans l'ordre suivant : $6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5$ (en lisant de droite à gauche). Il y a là une forme d'indexation indirecte, dont mon interprétation est la suivante : l'héritier

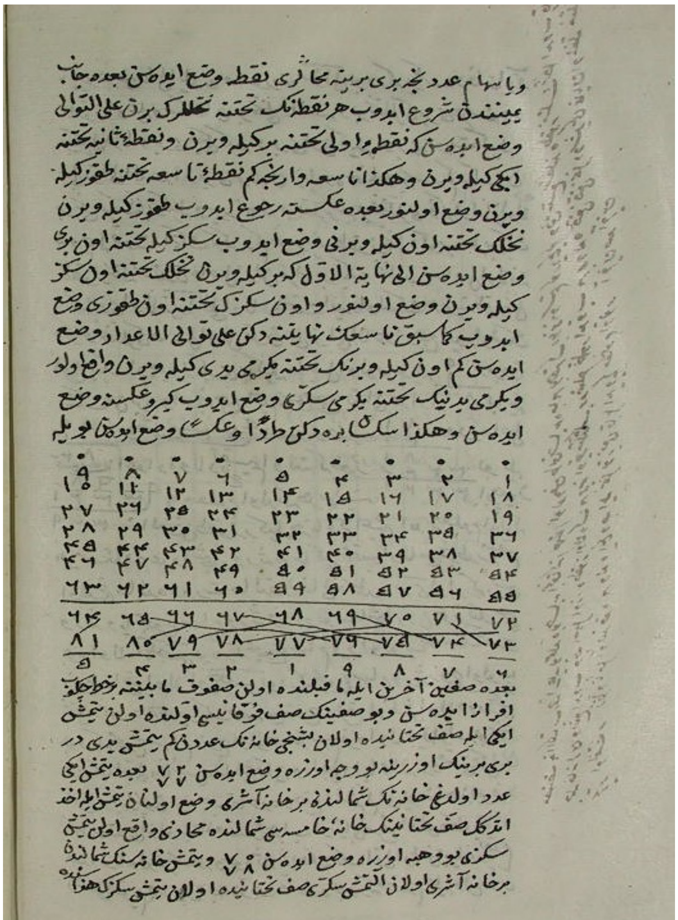
[4] Qadrî Hâfidh Tûqân, *turâth al-'arab al-'ilmî fî al-riyâdiyyât wa al-falak* (Le patrimoine scientifique des Arabes en mathématiques et en astronomie) (Beyrouth et le Caire, 1941). Plusieurs rééditions.

[5] Deux exemples récents : Muhammad 'Âdil Sawdân et Sâmî Chalhoub, « Ibn Hamza al-Maghribî », *al-mawsû'a al-'arabiyya* (Encyclopédie arabe) (Damas, 2005) 5 p. en ligne (en arabe) ; Abû Bakr Khalid Saàdallâh, « Ibn Hamza al-Jazâ'irî (q. 10 H / 16 G) muddaris al-riyâdiyyât fî makka al-mukarama », *majallat al-dâra* 3, p. 105-116 (en arabe).

[6] Il s'agit du manuscrit Esad Efendi 3151-1. Voir aussi : Pierre Ageron, « Ibn Hamza a-t-il découvert les logarithmes ? », *Actes du XVIIIe colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques*, IREM de Basse-Normandie, à paraître.

i reçoit, outre les sept arbres dont les numéros sont sur les sept premières lignes de la colonne i, l'arbre dont le numéro est sur la neuvième ligne au dessus de l'indice i et celui dont le numéro est sur la huitième ligne et relié par un trait au précédent. Ce mode de lecture semble d'ailleurs confirmé par le peu que je comprends des explications qui suivent le tableau. Il l'est surtout lorsqu'on écrit ce qu'on obtient en rétablissant les deux dernières lignes, car c'est bien là une (autre) solution du problème !

$$\begin{pmatrix}
9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\
27 & 26 & 25 & 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 \\
28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\
45 & 44 & 43 & 42 & 41 & 40 & 39 & 38 & 37 \\
46 & 47 & 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 \\
63 & 62 & 61 & 60 & 59 & 58 & 57 & 56 & 55 \\
65 & 67 & 69 & 71 & 64 & 66 & 68 & 70 & 72 \\
76 & 75 & 74 & 73 & 81 & 80 & 79 & 78 & 77
\end{pmatrix}$$



la solution du manuscrit Süleymaniye Ktp., Esad Efendi 3151/1.

Comment expliquer la différence entre les solutions données dans « mon » manuscrit et dans celui qu'examina Sâlih Zeky ? On peut penser que pour Ibn Hamza, la résolution de ce problème soumis par des savants étrangers avait constitué une sorte de titre de gloire : il a pu prendre plaisir à repenser à la question et en trouver ainsi une deuxième solution, en un sens plus simple, qu'il a fait le choix d'enseigner à la place de la première [7].

Quoi qu'il en soit, je laisse au lecteur le plaisir et la gloire d'en trouver d'autres encore !

[7] Dans la copie que j'ai consultée, un feuillet adventice, collé face écrite sur un des feuillets du livre, laisse voir par transparence une autre grille de 81 cases garnies de nombres : elle est malheureusement peu lisible, mais il pourrait bien s'agir d'une troisième solution !

« Mieux consommer grâce aux mathématiques »

Quelques exercices extraits de l'ouvrage

Évelyne Adam, Hélène Ventelon, Gilles Damamme

Le tome 1 de « Mieux consommer grâce aux mathématiques » est paru en Septembre 2010 aux éditions Hermann (voir Miroir n°6). Une présentation du livre par un des auteurs, se trouve dans le numéro 21 de MathemaTICE ou en ligne à l'adresse revue.sesamath.net/spip.php ?article302. Deux exercices y sont reproduits :
La machine à pain & **Le récupérateur d'eau** (un fichier tableur associé à cet exercice est disponible en ligne).

Une analyse de ce tome 1 est aussi publiée dans le bulletin Vert de l'APMEP n° 492 p 118, et lisible sur le site de l'APMEP à l'adresse www.apmep.asso.fr/Mieux-consommer-grace-aux.

Voici maintenant en complément, quelques autres exercices extraits du livre assortis de commentaires.

Les tickets restaurant (exercice 11 – extrait)

Connaissances requises :
Connaître l'addition, la multiplication de nombres décimaux et la division des entiers.

Monsieur et madame Legrand vont une fois par semaine ensemble au restaurant le midi. Au moment de payer l'addition, ils en payent une partie à l'aide de tickets restaurant, et le reste en espèces. (Les tickets restaurant sont des bons d'achats d'une certaine valeur, valables dans les restaurants, qui permettent aux employés des entreprises travaillant toute la journée et habitant loin de leur entreprise de se restaurer le midi.)

Comme les commerçants ne rendent pas en général la monnaie sur les tickets restaurant, monsieur et madame Legrand s'arrangent pour que la somme payée en tickets restaurant soit toujours inférieure à l'addition.

1. La première semaine, l'addition est de 22 €. Ils donnent au serveur deux tickets restaurant d'une valeur de 7,20 € chacun et un billet de 20 €. ***Combien de monnaie le serveur doit-il leur rendre ?***
2. La deuxième semaine, l'addition est de 31 €. Ils donnent au serveur trois tickets restaurant d'une valeur de 7,20 € chacun et un billet de 10 €. ***Combien de monnaie le serveur doit-il leur rendre ?***

CORRECTION

1) On a :
$2\times7{,}20$ € = 14,40 €
14,40 € + 20 € = 34,40 €
34,40 € - 22 € = 12,40 €

Le serveur devra donc leur rendre 12,40 €.

2) On a :
$3\times7{,}20$ € = 21,60 €
21,60 € + 10 € = 31,60 €
31,60 € - 31 € = 0,60 €

Le serveur devra donc leur rendre 0,60 €.

Commentaires :

L'exercice 11 est issu de situations réelles : il est intéressant de noter que presque une fois sur deux, la personne effectuant le calcul s'est trompé, alors qu'il le faisait parfois à l'aide d'une calculatrice. Le calcul mental s'avère donc nécessaire dans ce cas, au moins pour avoir une évaluation du résultat.

Néanmoins, l'exercice peut être aussi fait à l'aide de la calculatrice : il permet alors d'utiliser la touche « quotient » de la calculatrice ainsi que celle indiquant la réponse.

Cet exercice offre aussi une situation où la ***division euclidienne*** *est utilisée naturellement pour déterminer le nombre de tickets à donner (puisque les commerçants ne rendent pas la monnaie si le montant payé à l'aide des tickets est supérieur à l'addition). On pourra prendre des tickets restaurant dont le montant est un nombre entier (6 €, 8 € par exemple) si l'on souhaite entraîner les élèves au calcul mental.*

Dans la première question, une autre solution aurait été de soustraire les montant des 2 tickets restaurant à l'addition pour déterminer la somme restante à payer, puis soustraire cette somme à 20 € pour déterminer combien devait rendre le serveur. Cette démarche nécessitait de faire deux soustractions (au lieu d'une dans le premier cas) et s'avérait donc plus compliquée.

Combien de morceaux de sucre consommons-nous ? (exercice 32 – extrait)

Un pot de pâte à tartiner au chocolat et noisettes contient 55,2 g de sucre pour 100 g .
Raphaël mange par jour environ 100 g de cette pâte à tartiner.

1. ***Au bout d'une semaine, combien de sucre aura-t-il consommé en mangeant cette pâte à tartiner ?***
   Quel équivalent cela représenterait-il en morceaux de sucre ?
2. ***Au bout d'un an, combien de sucre aura-t-il consommé en mangeant cette pâte à tartiner ?***
   Quel équivalent cela représenterait-il en morceaux de sucre ?

(On pourra utiliser pour le poids d'un morceau de sucre : 5,95 g, résultat obtenu à l'exercice 31)

CORRECTION

1) En mangeant sa pâte à tartiner au chocolat et aux noisettes, Raphaël aura consommé en une semaine :

$$55{,}2 \text{ g} \times 7 = 386{,}4 \text{ grammes de sucre}$$

Comme il a été trouvé dans l'exercice 31 que chaque morceau de sucre pesait approximativement 5,95 g et que :

$$386{,}4 \text{ g} \div 5{,}95 \text{ g} \approx 64{,}91$$

Cela représentera environ 65 morceaux de sucre par semaine uniquement pour la pâte à tartiner.

2) En une année, Raphaël aura consommé :

$$55{,}2 \text{ g} \times 365 = 20\,148 \text{ grammes de sucre}$$

soit environ 20 kilos de sucre.
On a :

$$20\,148 \text{ g} \div 5{,}95 \text{ g} \approx 3\,386{,}22$$

Cela représentera donc environ 3 386 morceaux de sucre par an uniquement pour la pâte à tartiner.

Commentaires :

L' exercice 32 (ainsi que le 31 non présenté ici) a pour vocation d'inciter les élèves à s'intéresser à leur consommation de sucre et peut être insérée dans une activité interdisciplinaire en lien avec les sciences de la vie et de la terre.

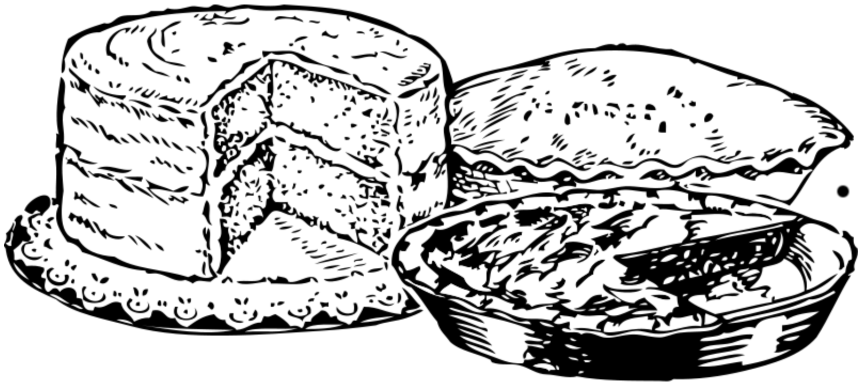
L'idée de l'exercice nous est venue en voyant sur pot de pâte à tartiner au chocolat et aux noisettes la valeur nutritionnelle d'une part de goûter calculée en estimant à 15 g *la part de pâte à tartiner prise au goûter, ce qui dans la pratique est assez loin de la réalité.*

Depuis, un célèbre fabriquant de pâte à tartiner au chocolat et aux noisettes a été attaqué en justice aux États-Unis par un particulier pour avoir indiqué sur ses produits « Bon pour la santé », inscription très sujette à caution

Bien doser dans ses recettes de cuisine (exercice 33)

Anna cherche à faire une brioche avec 500 g de farine. Or, sur sa recette de cuisine, il est indiqué la quantité de lait pour 300 g de farine : il lui faut 20 cl de lait dans ce cas.

Calculez la quantité de lait qu'il faut à Anna pour* 500 g *de farine.



CORRECTION

Nous proposons ici une solution utilisant une règle basée sur deux principes :

1. Multiplier par **un rapport de grandeurs de même unité**

2. Selon que l'on cherche une proportion plus petite ou plus grande que celle qu'on connaît déjà, on multiplie **par un rapport qui sera plus petit ou plus grand que 1**.

Appliquons notre règle pour trouver la réponse à l'exercice :

1. Anna cherche une quantité en cl de lait. Pour cela elle va multiplier une quantité en cl de lait par un **rapport de deux quantités exprimées toutes les deux en grammes.**

2. Anna souhaite faire une brioche avec 500 g de farine, il lui faudra plus de lait que pour une brioche faite avec 300 g de farine, **le rapport sera donc supérieur à 1**. D'où finalement :

$$\boxed{20 \text{ cl} \times \frac{500 \text{ g}}{300 \text{ g}} = 20 \text{ cl} \times \frac{5}{3} \approx 33 \text{ cl}}$$

Il faudra donc à Anna 33 cl de lait pour faire sa brioche.

Commentaires :

L'exercice 33 a pour objectif de présenter une sorte de « règle de trois pratique », destinée aux personnes en ayant l'utilité dans leur vie quotidienne (pour faire de la cuisine, effectuer des dosages, ...). Pour les personnes déjà familières avec la « Règle de trois » classique, cette méthode n'apporte rien. Mais pour les personnes n'ayant pas à leur disposition d'outil pratique, cette règle peut s'avérer pratique car elle s'appuie sur une réalité concrète. Néanmoins, il faudra l'utiliser plusieurs fois avant de se l'approprier. Voici un premier exercice d'entraînement à cet effet :

« Cédric souhaite faire une pâte à pizza à l'aide d'une préparation à base de farine, sel et levure. Sur le sachet de préparation, il est indiqué que pour une pizza pour 5 personnes, il faut mélanger 250 g *de préparation avec* 15 cl *d'eau tiède.*

Or Cédric compte faire une pâte à pizza pour 8 personnes.

Quelles doses de préparation et d'eau tiède devra-t-il utiliser ? »

(Réponses : 400 g, 24 cl*)*

Voici donc un aperçu de quelques exercices du tome 1.

Le tome 2 est actuellement en préparation et sera présenté dans un prochain numéro du *Miroir des maths* de l'IREM.

UNIVERSITÉ DE CAEN
BASSE - NORMANDIE

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II – SCIENCES 3 – B. P. 5 186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 – CAEN Cédex
Tél. : 02 - 31 - 56 - 74 - 02 – Fax. : 02 - 31 - 56 - 74 - 90
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site Internet : http://www.math.unicaen.fr/irem/

Histoire des Mathématiques par leur Littérature

Une histoire des probabilités et des statistiques

Stage du PAF (10A0050080 – 18412) – 1ère Session – Vendredi 25 mars 2011

Fascicule 2 : Recueil des textes sur les probabilités

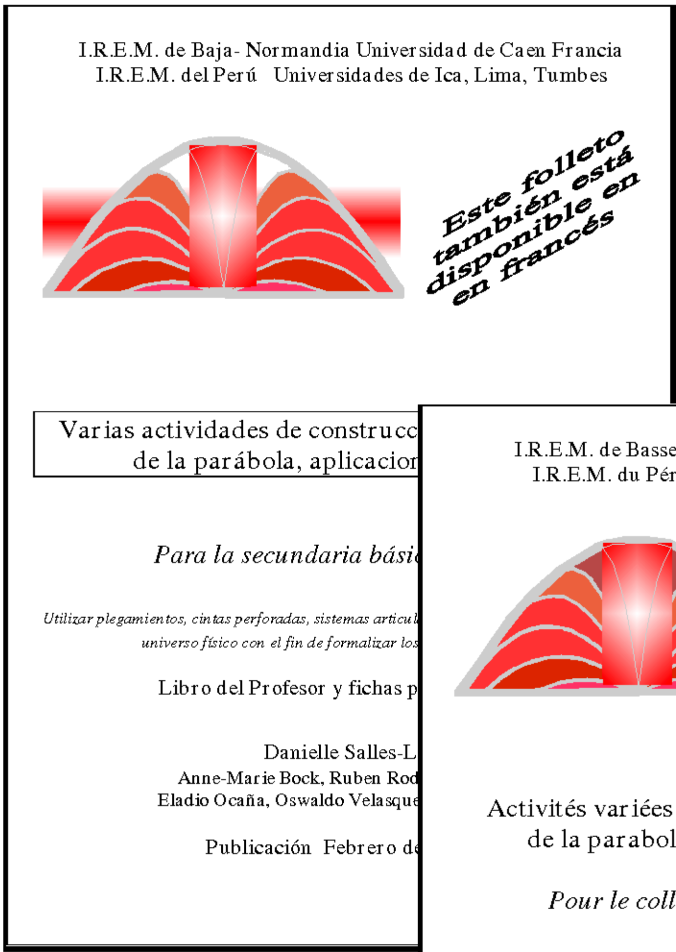
Portrait de Pierre-Simon (de) Laplace

Document conçu par le Cercle de Lecture en Histoire des Sciences

Pré-Publication de l'IREM de B.-N. Mars 2011

SOMMAIRE

À commander à l'IREM de Basse-Normandie : 4 euros frais d'envoi inclus.


I.R.E.M. de Baja- Normandia Universidad de Caen Francia
I.R.E.M. del Perú Universidades de Ica, Lima, Tumbes

Este folleto también está disponible en francés

Varias actividades de construcc
de la parábola, aplicacion

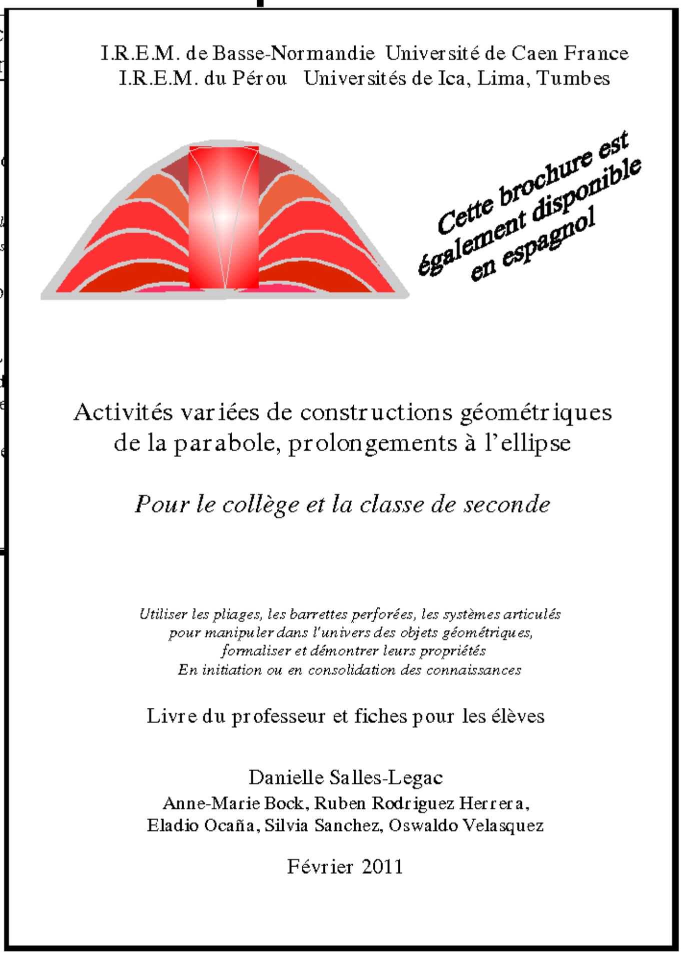
Para la secundaria básic

Utilizar plegamientos, cintas perforadas, sistemas articul
universo físico con el fin de formalizar los

Libro del Profesor y fichas p

Danielle Salles-L
Anne-Marie Bock, Ruben Rod
Eladio Ocaña, Oswaldo Velasque

Publicación Febrero de


I.R.E.M. de Basse-Normandie Université de Caen France
I.R.E.M. du Pérou Universités de Ica, Lima, Tumbes

Cette brochure est également disponible en espagnol

Activités variées de constructions géométriques
de la parabole, prolongements à l'ellipse

Pour le collège et la classe de seconde

Utiliser les pliages, les barrettes perforées, les systèmes articulés
pour manipuler dans l'univers des objets géométriques,
formaliser et démontrer leurs propriétés
En initiation ou en consolidation des connaissances

Livre du professeur et fiches pour les élèves

Danielle Salles-Legac
Anne-Marie Bock, Ruben Rodriguez Herrera,
Eladio Ocaña, Silvia Sanchez, Oswaldo Velasquez

Février 2011

À commander à l'IREM de Basse-Normandie : 4 euros frais d'envoi inclus
(ou six euros pour l'ensemble des deux versions française et espagnole).

NUMÉRO SEPT : Avril 2011

ISSN : 1969-7929 (imprimé)
ISSN : 1760-6500 (en ligne)

LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

Comité de rédaction Pierre Ageron & Éric Trotoux - Composition LaTeX.