




LE MIROIR DES MATHS



UNICAEN
université de Caen
Basse-Normandie



MIR
Université de Caen
Basse-Normandie



IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 74 02** - Fax. : **02 31 56 74 90**
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

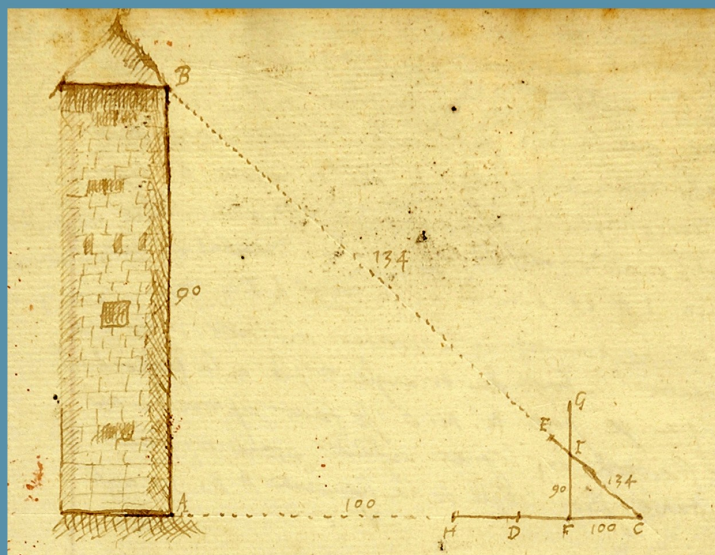
IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO HUIT : septembre 2011

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

Circulation Transmission Héritage



Actes du 18^e colloque inter-IREM
histoire et épistémologie
des mathématiques
mai 2010

Université de Caen Basse-Normandie

Vient de paraître !

À commander à l'IREM de Basse-Normandie : 35 euros frais d'envoi inclus.

Éditorial : mémoire et renouvellement.

Ce huitième numéro du *Miroir des maths* offre comme d'habitude un contenu varié, à l'image de la diversité des travaux effectués à l'IREM de Basse-Normandie. Il contient notamment un dossier sur les lycées professionnels, en écho au séminaire 2011 de l'ADIREM qui a abordé la question de l'enseignement des mathématiques dans la voie professionnelle.

En même temps que ce numéro paraissent les actes du XVIII^e colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, qui s'est tenu à Caen les 28 et 29 mai 2010. Ce gros ouvrage de présentation soignée rassemble vingt-six contributions sur le thème *Circulation, transmission, héritage* : vous en trouverez la table des matières page 27 de ce numéro du *Miroir*. Il est disponible à l'IREM au prix de 30 euros, ou peut vous être envoyé sur simple commande à irem@unicaen.fr au prix de 35 euros, frais d'envoi compris, avec un livre-cadeau.

Dans le but de conserver la mémoire du travail effectué depuis des années à l'IREM de Basse-Normandie, nous avons entrepris, avec la collaboration du Service commun de la documentation de l'université de Caen, notamment Annie Hélot et Ludovic Roy, de réaliser une série de volumes reliés regroupant l'ensemble des bro-

chures et fascicules (à l'exclusion des livres et périodiques) édités par l'IREM. Quatre volumes, couvrant la période 1974-1982, sont déjà disponibles. Pour assurer leur conservation à long terme, ils sont déposés et consultables à la bibliothèque universitaire, mais les documents qui le composent sont aussi disponibles et photocopiables gratuitement à l'IREM. Ils recèlent parfois des trésors !

Notre séminaire de rentrée, occasion conviviale idéale de mise en commun du travail des différents groupes, se déroulera les 30 septembre et 1er octobre 2011 à la ferme du Loterot (Cahagnes, Calvados). Cinq nouveaux animateurs nous rejoignent : Gérald Giangrande (groupe rallye), Jérôme Menuet (groupe lycées professionnels), Sigrid Colybes, Flavie Aubourg et Caroline Chéreau (groupe mathématiques en langue étrangère). Par ailleurs, l'IREM de Basse-Normandie, désormais intégré à l'UFR de Sciences, a retrouvé une partie de ses moyens humains de secrétariat en la personne de Sonia Esnault, qui se partage désormais entre le département de mathématiques et l'IREM. Enfin, un nouveau conseil va être élu et aura à choisir un nouveau directeur, mon mandat s'achevant le 3 octobre 2011.

Je souhaite à tous nos lecteurs une bonne rentrée scolaire ou universitaire !

Pierre Ageron, septembre 2011

Liste des brochures et fascicules "IREM de Basse-Normandie" reliés en 2011.

VOLUME I : 1974 - 1975

I. Logique et équations. II. Algèbre linéaire. III. It's a long way to isometries. IV. La recherche libre en classe de mathématiques. V. La multiplication : document pour l'école élémentaire. VI. Groupe math-physique. VII. Introduction à la notion de morphisme. VIII. Triangle de Pascal. IX. Angles. X. Récurrence. XI. Savez-vous compter ? (dénombrements I). XII. Pour une initiation à la statistique et aux probabilités. XIII. Initiation à l'analyse. XIV. Probabilités (4 volumes).

VOLUME II : 1976 - 1977

I. Thèmes pour la Quatrième : travail fait dans des groupes. II. Sociologie. III. Colloque audiovisuel IREM-CRDP : sémiologie de l'image. IV. Descartomania. V. Introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques : compte-rendu des journées inter-IREM. VI. Groupe math-physique. VII. Savez-vous compter les globules ? VIII. Géométrie dans l'espace. IX. Atelier mathématique. X. Principes et objectifs de la formation dans les IREM. XI. Ça pousse ou de la croissance staturale (2 volumes). XII. Voyage d'étude en Hongrie. XIII. Mathématique, informatique et technique de l'habillement.

VOLUME III : 1978 - 1979

I. Jeux mathématiques : éléments pour ouvrir un club. II. Groupes et géométries. III. Voyage d'étude au Québec dans le cadre de la collaboration IREM - PERMAMA. IV. Il était une fois les nombres. V. Sexe et mathématiques. VI. Initiation à l'informatique et utilisation d'un calculateur programmable. VII. Coordination maths - technologie. VIII. Masses volumiques en classe de Cinquième. IX-X. Groupe Iceberg 1978-1979 : fiches élèves classe de Quatrième (volumes I et II).

VOLUME IV : 1979 - 1982

I. Mathématiques et cuisine. II. Colloque interdisciplinarité, Alençon, 11-12 mai 1979. III. Expo IREM - CRDP, 21 mars 1979. IV. Les calculateurs programmables au lycée d'enseignement professionnel. V. Questions fondamentales sur la formation en cours de service des enseignants (colloque inter-IREM de Colleville-sur-mer, 6 et 7 juin 1980). VI. Un exemple d'approche de construction de \mathbb{R} . VII. De M. C. Escher aux dessins à motifs répétitifs. VIII. Informatique. IX. Point de départ pour la micro-informatique.

Représentations graphiques, aide ou obstacle ?

Groupe Lycées professionnels de l'IREM de Basse-Normandie

Maurice Tordjman
Sandrine Levast
Sandrine Le Renard
Mathilde Colas

Introduction

Le lycée professionnel représente une problématique particulière au sein du système éducatif, et ceci pour différentes raisons.

Si un tiers des élèves de collège intègrent un lycée professionnel, c'est le plus souvent par défaut, parce qu'ils ont rencontré l'échec, qu'à la suite d'un réel choix.

Au lycée professionnel, l'enseignement général, notamment celui des mathématiques et celui des sciences, doit trouver son sens au regard de l'enseignement professionnel. Il est à concevoir comme partie intégrante d'une formation professionnelle et non pas comme l'enseignement d'une discipline pour elle-même.

Enfin, suivant le secteur du diplôme préparé (industriel, tertiaire, restauration), le public rencontré n'est pas le même ; les attentes des élèves comme leurs difficultés sont diverses.

Enseignants en lycée professionnel, il nous est nécessaire de prendre en compte ces différents aspects afin de choisir une pédagogie adaptée à nos élèves et variée en fonction de la profession à laquelle il se destinent.

Nos élèves n'ont pas un rapport facile avec les disciplines scientifiques. Ils ne maîtrisent pas la totalité des éléments du langage mathématique, et éprouvent des difficultés à mener une démarche scientifique. Ils ont besoin de réalités concrètes pour mettre en œuvre les notions mathématiques.

Il semble donc naturel de les faire travailler le plus souvent possible avec des représentations graphiques : pour le professeur, une représentation graphique est un outil visuel qui permet de traduire un problème, d'en approcher la solution et de raisonner. Paradoxalement, nous avons constaté que pour nos élèves, les représentations graphiques sont souvent plus une source de difficultés supplémentaires qu'une aide, et qu'elles ne sont certainement pas un outil. La signification, la traduction ou l'interprétation d'une courbe ou d'un schéma sont autant d'obstacles. Les élèves n'en font pas un usage systématique, car cela reste trop peu intuitif pour eux.

C'est dans le but de faciliter le rapport à la représentation graphique que nous avons travaillé. Notre expérience nous a permis d'identifier certains obstacles rencontrés par nos élèves et nous avons travaillé sur quelques exemples de situations, tant en maths qu'en sciences.

Le niveau visé est celui du baccalauréat professionnel, désormais préparé en trois ans comme le baccalauréat général. Notre travail concerne aussi bien des élèves en formation tertiaire qu'industrielle ou dans le secteur de la restauration.

Voici les thèmes de mathématiques et sciences physiques (rappelons que nous sommes tous bivalents) que nous avons choisis cette année :

- Anticiper la position des axes d'un repère en fonction des coordonnées des points à placer.
- Comment travailler sur l'équilibre de forces, sans l'outil vecteur ?
- Résoudre graphiquement des équations ou inéquations
- Introduction de la notion de nombre dérivé, aspect graphique.

Pour chaque thème abordé, nous exposons d'abord, en précisant le diplôme visé, l'activité qui nous a permis d'identifier certaines difficultés rencontrées par les

élèves. Puis nous proposons des activités préparatoires ou complémentaires susceptibles de les aider à s'approprier l'outil graphique.

1) Représenter une fonction : repérage et choix du repère

Présentation de l'activité initiale

« *Images de saison* » (annexe 1) est une activité qui avait été conçue pour faire un bilan sur les fonctions numériques. Son objectif était d'amener les élèves à dessiner une figure à partir du tracé de représentations graphiques de plusieurs fonctions (fonctions constantes, affines et polynomiales du second degré). Elle a été proposée à une classe de Terminale BEP Métiers de la mode.

Difficultés rencontrées

Cette activité n'a pas abouti correctement. Les élèves les plus en difficulté ont eu du mal à remplir le tableau de valeurs et de caractéristiques. Mais le plus gros souci est apparu au moment de tracer les représentations

graphiques des différentes fonctions : les élèves n'ont pas su adapter le graphique aux valeurs des tableaux. Tous, en effet, n'ont tracé que le premier quadrant alors que la construction prenait les quatre quadrants.

Une étape importante avait donc été oubliée dans la progression d'enseignement : « *repérage et choix d'un repère par rapport à des données numériques* ».

Activité préparatoire

Avant de commencer l'étude des fonctions, et pour travailler avec les élèves sur le repérage et le choix d'un repère, on peut leur proposer les petites activités présentées en annexe 2. Elles ont été proposées aux élèves d'une classe de Seconde Bac Pro métiers de la mode. Durée : environ 1 h.

Annexe 1

Images de saison

Objectif : Reconnaître des fonctions, puis tracer leur courbe représentative.

1. Compléter la colonne « valeurs » du tableau ci-dessous.
2. Compléter la colonne « caractéristiques » du tableau, grâce aux propositions suivantes (un exemple est donné pour les équations n° 8 et 12)

l'équation correspond à une fonction linéaire	a
l'équation correspond à une fonction affine	b
l'équation correspond à une fonction du second degré	c
l'équation correspond à une fonction croissante	d
l'équation correspond à une fonction constante	e
l'équation correspond à une fonction décroissante	f
la courbe représentative sera un segment	g
la courbe représentative sera un arc de parabole	h
la courbe représentative passera par l'origine	i
la courbe représentative ne passera pas par l'origine	j
les branches de la courbe seront tournées vers le haut	k
les branches de la courbe seront tournées vers le bas	l

n°	équation	intervalle d'étude	caractéristiques	valeurs
1	$y = x$	[0; 1]		$x = 0$ $y =$ $x = 1$ $y =$
2	$y = 0,5x$	[2; 8]		$x = 2$ $y =$ $x = 8$ $y =$
3	$y = 0,25x$	[2; 9]		$x = 2$ $y =$ $x = 9$ $y =$
4	$y = 1$	[0; 1]		$x = 0$ $y =$ $x = 1$ $y =$
5	$y = 0,5x - 6$	[0; 6]		$x = 0$ $y =$ $x = 6$ $y =$
6	$y = -x - 1$	[2; 8]		$x = 2$ $y =$ $x = 8$ $y =$
7	$y = 2,5x - 18$	[4; 6]		$x = 4$ $y =$ $x = 6$ $y =$
8	$y = -0,5x - 6$	[0; 4]	b ; f ; g ; j	$x = 0$ $y =$ $x = 4$ $y =$
9	$y = 0,25x^2 - 4$	[0; 4]		$x = 0$ $y =$ $x = 1$ $y =$ $x = 2$ $y =$ $x = 3$ $y =$ $x = 4$ $y =$
10	$y = -0,5x^2 + 8$	[0; 4]		$x = 0$ $y =$ $x = 1$ $y =$ $x = 2$ $y =$ $x = 3$ $y =$ $x = 4$ $y =$
11	$y = x^2 - 2x$	[0; 2]		$x = 0$ $y =$ $x = 1$ $y =$ $x = 2$ $y =$
12	$y = -3x^2 + 10x + 8$	[0; 4]	c ; h ; j ; l	$x = 0$ $y =$ $x = 1$ $y =$ $x = 2$ $y =$ $x = 3$ $y =$ $x = 4$ $y =$

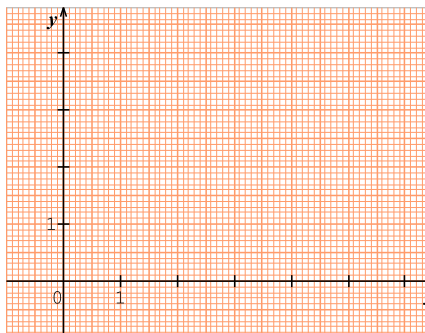
- Sur une feuille A4, portrait, avec le centimètre comme unité, tracer les représentations graphiques des douze fonctions proposées.
- Placer le point B (1,5 ; 3,5), puis tracer le cercle de rayon 1 de centre B.
- Tracer les symétriques de toutes les courbes par rapport à l'axe des ordonnées. **Bonne chasse !**
N.B. La réponse est donnée à la fin de cet article en page 16.

Annexe 2**Repérage et choix d'un repère****Activité 1**

On donne quatre points caractérisés par leurs coordonnées.

A(2;3) B(0;4) C(1;0) D(6;1)

Placer ces points dans le repère ci-contre.

**Activité 2**

On donne les points suivants :

A(1;5) B(0;7) C(4;2) D(9;1)

Sur une feuille de papier millimétré, tracer un repère orthonormal et placer les points A, B, C et D dans ce repère.

Activité 3

Même consigne si on donne les points suivants :

E(3;1) F(2;-4) G(0;-1) H(0;3) I(5;2)

Activité 4

Même consigne si on donne les points suivants :

A(-5;-1) B(-2;-3) C(3;-1) D(6;-4)

Activité 5

Même consigne si on donne les points suivants :

(-4; 3) (2; 1) (0; 4) (-1; 0) (-2; -3) (-5; 6) (7; -1) (1; 4)
(2; -3) (1,5; 3) (-0,5; 2) (5; -7) (1,7; 2,1) (-2,6; 4) (-1; -3)

Activité 6

Soient les points suivants :

(-5; 2) (1; 1) (0; -1) (2; 7) (-2; -5) (1; -2)
(-3; 0) (-2; -1) (-0,5; 3) (4,5; 2) (1; 1,5) (-1; 2)

1. Positionner les coordonnées de ces points dans le tableau suivant :

x												
y												

2. Donner les intervalles utiles concernant l'axe des abscisses et celui des ordonnées.

3. En vous aidant des intervalles trouvée à la question précédente, construire un repère orthonormé et placer tous les points dans ce repère.

Synthèse des activités

Construire une fiche méthode qui permet de gagner à tout coup.

2) La statique sans l'outil vecteur

Présentation de l'activité initiale

Il s'agit ici d'un ensemble de séances visant à l'introduction de la notion de force en Seconde professionnelle. Les nouveaux programmes ont en conduit à repenser ce sujet, puisque les vecteurs, eux, n'y figurent plus, et ont aussi disparu de ceux du collège. La difficulté est alors de savoir comment on peut représenter une force et comment on peut construire la résultante de deux forces afin de prévoir l'équilibre d'un objet, sans avoir préalablement étudié la translation. Nous introduisons la notion de force à partir de la question HS1 des programmes : « Pourquoi un objet bascule-t-il ? ». Les élèves ont appris à définir les différentes caractéristiques des effets de l'action terrestre sur les objets : intensité, droites d'action, point d'application et sens ; ils sont alors confrontés à la nécessité de représenter de telles actions et l'usage d'un « segment fléché » apparaît naturellement. Puis trois séances de travaux pratiques leur sont proposées (les protocoles expérimentaux sont

reproduits dans les pages suivantes).

La première porte sur l'équilibre d'un solide soumis à deux forces. L'objectif est d'amener les élèves à établir les conditions d'un tel équilibre : mêmes droites d'action, mêmes intensités, sens opposés.

La deuxième porte sur la somme (ou résultante) de deux forces. Elle est introduite par la question : « Peut-on remplacer l'action exercée par deux forces sur un objet par une unique force ? » Les élèves, à partir d'un support expérimental, doivent établir les règles de construction géométrique de la résultante.

Le troisième concerne l'équilibre d'un solide soumis à trois forces. Si la construction de la résultante de trois forces n'est plus exigible, il reste néanmoins possible de d'aborder la question en construisant la résultante de deux des forces et en la comparant à la troisième. Dans un premier temps, les élèves établissent que les droites d'action sont coplanaires et concourantes.

Difficultés rencontrées

Nous avons constaté que représenter une force par un segment fléché n'a rien d'évident pour les élèves. En particulier, la flèche au bout du segment n'est pas toujours dans le bon sens ! De plus l'interprétation

d'un schéma imparfait ou imprécis s'est avérée délicate. Seuls les élèves qui n'avaient pas commis d'erreurs de construction ont pu en donner une bonne interprétation, notamment lors de la troisième séance de TP.

Activité complémentaire

Pour s'affranchir des erreurs d'expérimentation, une séance mettant en œuvre l'utilisation des TIC est proposée. Le logiciel Geogebra par exemple permet de

construire des (représentants de) vecteurs avec beaucoup de précision dans les constructions. On évite ainsi toute erreur d'interprétation.

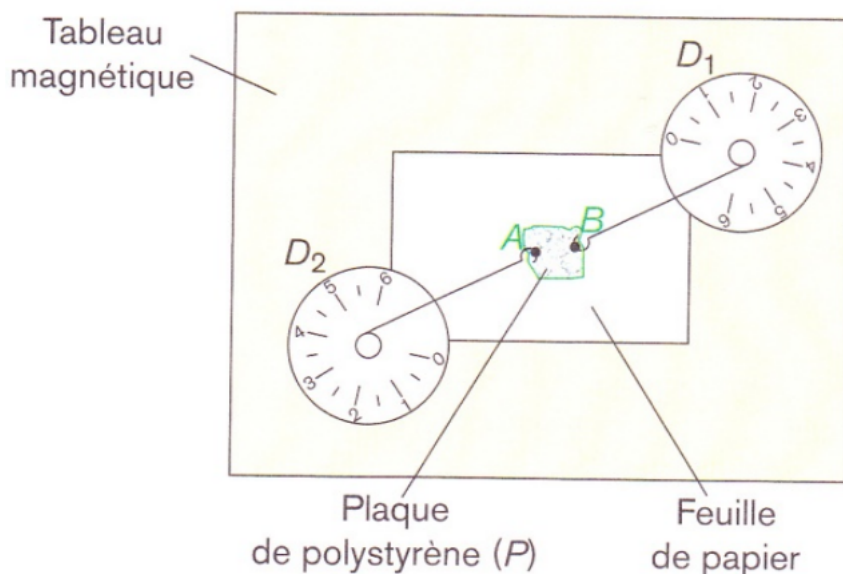
séance TP 1 : Equilibre d'un solide soumis à l'action de 2 forces

Matériel :

- Deux dynamomètres
- Un tableau magnétique
- Une feuille de papier A3
- Une plaque de polystyrène de poids négligeable
- Un crayon et une règle

Mode opératoire :

1. Placez la feuille de papier sur le tableau magnétique.
2. Réalisez le montage du schéma ci-dessous.



3. Dessinez sur les dynamomètres du schéma, les repères des intensités des forces.
4. Sur la feuille, repérez au crayon les directions des droites d'action des deux forces (deux points par droite).
5. Récupérez la feuille. Tracer au crayon les droites d'action des deux forces.
6. Complétez le tableau suivant :

Force	Point d'application	Droite d'action	Sens	Intensité (N)
$\vec{F}_{D_1/P}$				
$\vec{F}_{D_2/P}$				

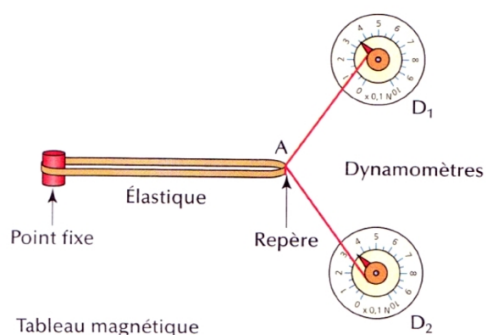
Observation :

- Les deux forces exercées par les dynamomètres sur la plaque de polystyrène possèdent la même, sont de sens, leurs intensités sont
- Soumise aux deux forces, la plaque est au repos : on dit qu'elle est

séance TP 2 : Peut-on remplacer l'action exercée par deux forces sur un objet par une unique force ?

Matériel :

- Un tableau magnétique
- Deux dynamomètres
- Un élastique
- Un support magnétique
- Une feuille blanche
- Un rapporteur



Mode opératoire

1. Placez la feuille sur le tableau magnétique.
2. Réalisez le montage ci-dessus. Entourez le repère sur la feuille et marquez d'un point sur la feuille le repère (point A).

3. Complétez les deux premières lignes du tableau.

	Point d'application	Droite d'action	Sens	Valeur (N)
Action exercée par D ₁ sur l'élastique notée ①★				
Action exercée par D ₂ sur l'élastique notée ②★				
Action exercée par D sur l'élastique notée ③★				

4. Représenter ci-dessous en rouge l'action exercée par D₁ sur l'élastique et en vert l'action exercée par D₂ sur l'élastique (échelle : 1 cm pour 0,5 N).



Remplacez D₁ et D₂ par un seul dynamomètre D. L'élastique doit subir la même déformation que dans la première partie (aidez vous des différents repères marqués sur la feuille).

- Complétez la troisième ligne du tableau.
- Représentez en bleu l'action de D sur l'élastique sur le graphique précédent.
- Il est possible d'obtenir la représentation de cette dernière action sans réaliser l'expérience ; proposez une construction géométrique qui le permet.

Observations

- La valeur de l'action ① est de
- La valeur de l'action ② est de
- La valeur de l'action ③ est de
- La valeur de l'action ③ n'est pas la des valeurs des actions ① et ②.

L'action ③ est appelée **résultante** des valeurs ① et ②

séance TP 3 : Quelles sont les conditions pour qu'un objet soumis à l'action de trois forces soit en équilibre ?

Matériel :

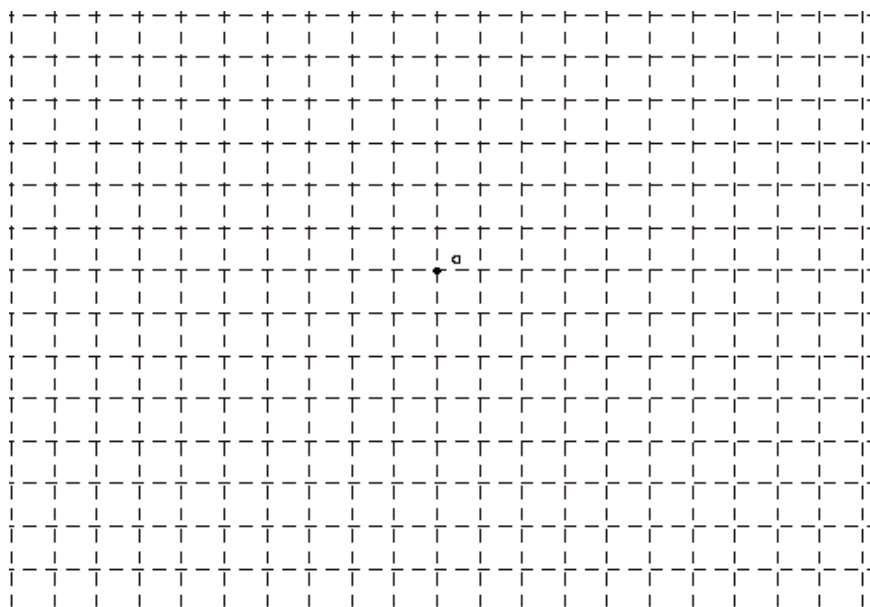
- Un tableau magnétique
- Deux dynamomètres
- Une masse marquée
- Un fil à plomb
- Un rapporteur

Mode opératoire

1. Calculez le poids de la masse :
2. Réalisez le montage ci-dessus.
3. Faire l'inventaire des trois forces qui agissent sur la masse :
 - Action ① :
 - Action ② :
 - Action ③ :
4. Cherchez la définition du mot « coplanaire » et dites si oui ou non, les forces agissant sur la masses sont coplanaires :
5. Complétez le tableau des caractéristiques des forces :

Actions	Point d'application	Droite d'action	Sens	Intensité (N)
①★				
②★				
③★				

6. Tracez sur le schéma les trois droites d'action.
7. Représentez les trois actions à partir du point 0 sur la feuille quadrillée ci-dessous (échelle : 1 cm pour 0,1 N) :



8. Ajouter sur la feuille précédente, la construction de la résultante ④ des actions ① et ②.

Observations :

- Les trois droites d'actions sont
- Les actions ④ et ③ sont

3) Fonction, nombre dérivé, fonction dérivée : signification et interprétation graphique.

Présentation de l'activité initiale

Il s'agit d'un devoir de synthèse (annexe 1) d'une durée d'une heure portant sur les notions de fonction, nombre dérivé et fonction dérivée. Il a été proposé à une classe de Terminale professionnelle « Restauration » afin d'évaluer si ces notions avaient été acquises.

Difficultés rencontrées

La représentation graphique d'une fonction et son interprétation ont bien été acquises. En revanche, la signification du nombre dérivé, la représentation gra-

phique des tangentes et leurs interprétations ont posé des difficultés.

Activité complémentaire

Nous proposons l'utilisation d'une calculatrice graphique du type TI-82 Stats permettant la représentation graphique et l'utilisation d'un tableur, afin d'interpréter le nombre dérivé. On peut alors représenter graphiquement sur papier les tangentes en chaque point. Voir le détail de cette activité en Annexe 2. On peut aussi recourir à un logiciel libre (Geogebra, Sinequanon, etc.)

Annexe 1 – Devoir de mathématiques Terminale professionnelle « Restauration »

On étudie la fréquentation journalière d'un restaurant très fréquenté à toute heure en plein centre de Paris. Le nombre de clients, noté n (n entier) dépend de l'heure de la journée notée t . Pour les calculs, t est exprimée en heure décimale, par exemple l'heure décimale 19,25 h est la même chose que 19 h 15 min ; cependant les réponses devront être converties au format courant heures-minutes. On s'intéresse à la période de la journée comprise entre 17 h et 24 h. Le nombre de clients n en fonction de l'heure t est donné par la relation : $N = -2t^2 + 80t + 700$.

Partie 1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[17 ; 24]$ par : $f(x) = -2x^2 + 80x - 700$

- Déterminer à l'aide du formulaire $f'(x)$ où $f'(x)$ désigne la fonction dérivée de la fonction f . Étudier le signe de la dérivée $f'(x)$ sur l'intervalle $[17; 24]$.
- Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[17; 24]$.

Partie 2 : Représentation graphique de la fonction $f(x)$.

- Compléter le tableau ci-dessous :

x	17	18	19	19,5	20	20,5	21	22	23	24
$f(x)$										

- Représenter la courbe représentative de la fonction f sur une feuille de papier millimétré.
Échelles : en abscisse 1 cm représente 0,5 et en ordonnée 1 cm représente 10

Partie 3 : Interprétation graphique du nombre dérivé.

La fonction dérivée de f est donnée par $f'(x) = -4x + 80$ définie sur l'intervalle $[17; 24]$.

- Calculer les nombres dérivés aux points d'abscisses 17, 20 et 24.
- Utiliser les résultats de la question 1 pour figurer sur la représentation graphique de $f(x)$ les tangentes aux points d'abscisses 17, 20 et 24.

Partie 4 : Interprétation

En utilisant les résultats de l'étude précédente :

1. Déterminer l'heure à laquelle la fréquentation journalière est maximum.
2. Indiquer alors le nombre maximum de clients.

On admet que le flux de clients du restaurant à l'instant t est égal à $f'(t)$ (nombre de clients entrant ou sortant du restaurant à l'instant t).

3. (a) Que signifie un flux positif ? un flux négatif ?
- (b) A partir de quelle heure le nombre de clients dans le restaurant diminue-t-il ?

Annexe 2 : Utilisation de la calculatrice graphique (par exemple TI-82 Stats) permettant :

1. La représentation graphique de la fonction $n(t)$ et du nombre dérivé aux instants $t = 17,00 h$; $t = 20,00 h$ et $t = 24,00 h$.
2. D'utiliser le tableur pour interpréter le nombre dérivé à chaque instant et de représenter graphiquement sur version papier les tangentes aux instants $t = 17,00 h$; $t = 20,00 h$ et $t = 24,00 h$.

Représentation graphique de la fonction $f(t)$.

Tapez sur la touche $f(x)$

Après $Y1=$

Tapez la fonction $-2x^2 + 80x - 700$

Tapez *fenêtre*

Tapez les valeurs après :

$X_{min}= 17$ $Y_{min}= 68$

$X_{max}= 24$ $Y_{max}= 100$

$X_{grad}= 0,5$ $Y_{grad}= 1$

Tapez *graphe*. La courbe apparaît.

Sélectionnez le mode *trace* et déplacer le curseur à l'aide des flèches de $X = 17$ à $X = 24$.

Utilisation du tableur pour l'interprétation du nombre dérivé à chaque instant :

Tapez sur la touche $f(x)$

Après $Y2=$

Tapez la fonction dérivée $-4x + 80$.

Tapez *déf table*.

Tapez après *DéfTable=* la valeur 17

A l'aide de la flèche, tapez après *Pas Table=* la valeur 0,5

Tapez *table*. Le tableur avec les valeurs de la fonction et de sa dérivée apparaît.

Pour les valeurs particulières de $X=16$, $X=20$ et $X=24$, interpréter les valeurs de Y_1 et Y_2 .

Représentation graphique de la fonction et des tangentes.

Représenter graphiquement la fonction $n(t)$ sur papier millimétré :

Échelles : t en abscisse avec $0,50 h$ représenté par 1 cm et n en ordonnée avec 10 clients pour 1 cm.

Représenter les tangentes à la courbe, aux instants $t = 17,00 h$; $t = 20,00 h$ et $t = 24,00 h$.

4) Résolution graphique d'équation ou d'inéquation.

Présentation de l'activité initiale

Il s'agit du problème n°1 du sujet de l'épreuve de mathématique de baccalauréat professionnel « comptabilité » de 2001 (en annexe 1). Il a été proposé en devoir à une classe de Terminale de la même série.

Difficultés rencontrées

La question 3) est une exploitation du graphique obtenu avec les questions 1) et 2). Si dans la consigne, l'attendu d'un intervalle est clairement exprimé, les réponses des élèves ne se présentent que très rarement sous la forme d'un intervalle. Les difficultés rencontrées sont de deux ordres :

- d'une part, les élèves restent, pour nombre d'entre eux, cantonnés à l'expression « déterminer graphiquement », ils se contentent d'effectuer des tracés sur le graphique sans formuler de réponse à la question posée.
- d'autre part les tracés réalisés ne correspondent pas à la consigne de réponse exigée : en général, le point d'intersection est repéré, parfois la « zone » entre les fonctions C et V est hachurée, mais la plage des « x » correspondants n'est jamais mise en évidence.

Activité complémentaire

L'objectif est de mettre en place, face à toute question s'appuyant sur la résolution graphique d'une équation ou d'une inéquation, un petit questionnaire rituel dont l'objectif est de déterminer la forme de la réponse à produire ainsi que les éléments graphiques à mettre en évidence.

Les réponses à ce questionnaire peuvent se pratiquer oralement en cours. Une fiche peut être fournie aux élèves pour les travaux écrits, en particulier pour les élèves de Seconde. Cette fiche, détaillée en Seconde, peut évoluer au fur et à mesure de l'avancement de l'élève dans son cycle de formation pour ne devenir qu'un simple guide.

À terme, il s'agit d'automatiser une méthode de résolution qui peut se résumer en quatre points :

- identifier ce qui est cherché ainsi que les éléments graphiques correspondants,
- effectuer les représentations graphiques nécessaires,
- mettre en évidence les éléments graphiques solution du problème,
- formuler la réponse.

Le protocole proposé aux élèves est présenté en annexe 2. Ce document n'a pas été donné aux élèves mais a servi de trame pour la mise en place du rituel.

Les fiches-méthode des annexes 3, 4 et 5 constituent les synthèses de cours des élèves et leurs ont par conséquent été fournies.

Annexe 1 – Sujet bac professionnel « comptabilité » 2001 : étude de rentabilité

Le coût de production $C(n)$ exprimé en milliers d'euros pour n articles est donné par la fonction C avec : $C(n) = 0,02n^2 - 2n + 98$ pour n appartenant à l'intervalle $[50; 150]$

Le montant des ventes $V(n)$ exprimé en milliers d'euros est pour sa part donné par la fonction V avec : $V(n) = 1,5n$ pour n appartenant à l'intervalle $[50; 150]$

1. (a) Compléter le tableau en annexe.
- (b) Tracer dans le même repère (annexe) les courbes représentant les fonctions C et V .
- (c) Déterminer graphiquement l'intervalle des valeurs de n pour lesquelles la production est rentable.
- (d) Le bénéfice $B(n)$ est donné par la fonction B pour n appartenant à l'intervalle $[50; 150]$

Exprimer $B(n)$ en fonction de n et déterminer la dérivée $B'(n)$

En déduire le nombre d'articles à vendre pour que le bénéfice soit maximum.

Annexe :

n	50	60	75	90	100	125	150
$C(n)$		50			98		248

Papier millimétré 150 mm × 150 mm (gradué 0-150 × 0-250) joint au sujet.

Annexe 2 – Protocole de résolution graphique d'un problème

Étape n° 1 : Si une représentation graphique est déjà présente : mettre une légende sur les axes si cela n'est pas fait ; identifier les courbes existantes.

Étape n° 2 : Identifier le problème.

Cas n°1 : le problème est à une inconnue => Graphiquement, les solutions se trouvent sur l'axe des abscisses. Utiliser la fiche méthode « Résolution graphique à une inconnue » (annexe 3)

Cas n°2 : Le problème est à deux inconnues => Graphiquement les solutions seront des couples de coordonnées de points. Utiliser la fiche-méthode « Représenter graphiquement la solution d'une équation à deux inconnues » (annexe 4) ou la fiche « Représenter graphiquement la solution d'une inéquation à deux inconnues » (annexe 5)

Cas n°3 : Le problème est un système => On traite séparément chaque équation ou inéquation. Les solutions correspondent à l'intersection des différents ensembles de solutions.

Étape n°3 : Tracer les représentations graphiques nécessaires. Il peut s'agir de :

- courbe d'équation $y = A(x)$: $y = a$; $y = ax + b$; $y = f(x)$ sur un intervalle donné ;
- droite dont l'équation est donnée sous sa forme générale : $ax + by = c$.

Étape n°4 : Mettre en évidence les éléments graphiques solution du problème

Étape n°5 : Formuler la réponse. Dans le cas de deux inconnues, si le nombre de solution est fini, il est possible de formuler une réponse. Sinon la réponse ne peut être donné que graphiquement.

Annexe 3 – Résolution graphique de problème à une inconnue

Méthode générale.

Une équation à une inconnue peut toujours s'écrire sous la forme $A(x) = B(x)$.

On trace successivement l'ensemble des points de coordonnées $(x; A(x))$ et $(x; B(x))$ (courbes d'équations $y = A(x)$ et $y = B(x)$)

L'ensemble des solutions est donné par les abscisses des points dont les ordonnées sont identiques (points d'intersection)

Dans le cas d'une inéquation, l'ensemble des solutions est donné par les abscisses des points dont les ordonnées vérifient l'inéquation ($y_A < \text{ou} > y_B$)

Consignes :

Pour chaque résolution graphique, appliquez la méthode suivante :

- Tracer les courbes d'équation $y = A(x)$ (en bleu) et $y = B(x)$ (en noir) en les nommant.
- Traduire le problème par une phrase du type :

On cherche les points de la courbe bleue qui ||| croisent
se trouvent au dessus de
se trouvent en dessous de
(rayer les mentions inutiles) ||| la courbe noire

- Indiquer (en vert) le(s) point(s) et les tracés qui permettent de trouver la ou les abscisses qui sont solution(s) du problème et faire clairement apparaître (en rouge) celle(s)-ci sur l'axe des abscisses.

Annexe 4 – Représenter graphiquement la solution d'une équation à deux inconnues

À savoir :

L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation du type $ax + by = c$ est une droite.

Méthode :

Pour tracer la droite représentant les solutions d'une telle équation, il faut calculer les coordonnées de deux points minimum (un troisième pour vérifier l'alignement).

Pour cela, choisir une valeur pour une coordonnée (x ou y) et calculer la coordonnée correspondante.

- Résumer les résultats trouvés dans un tableau.

x			
y			

- Placer les points et vérifier leur alignement.
- Tracer la droite.

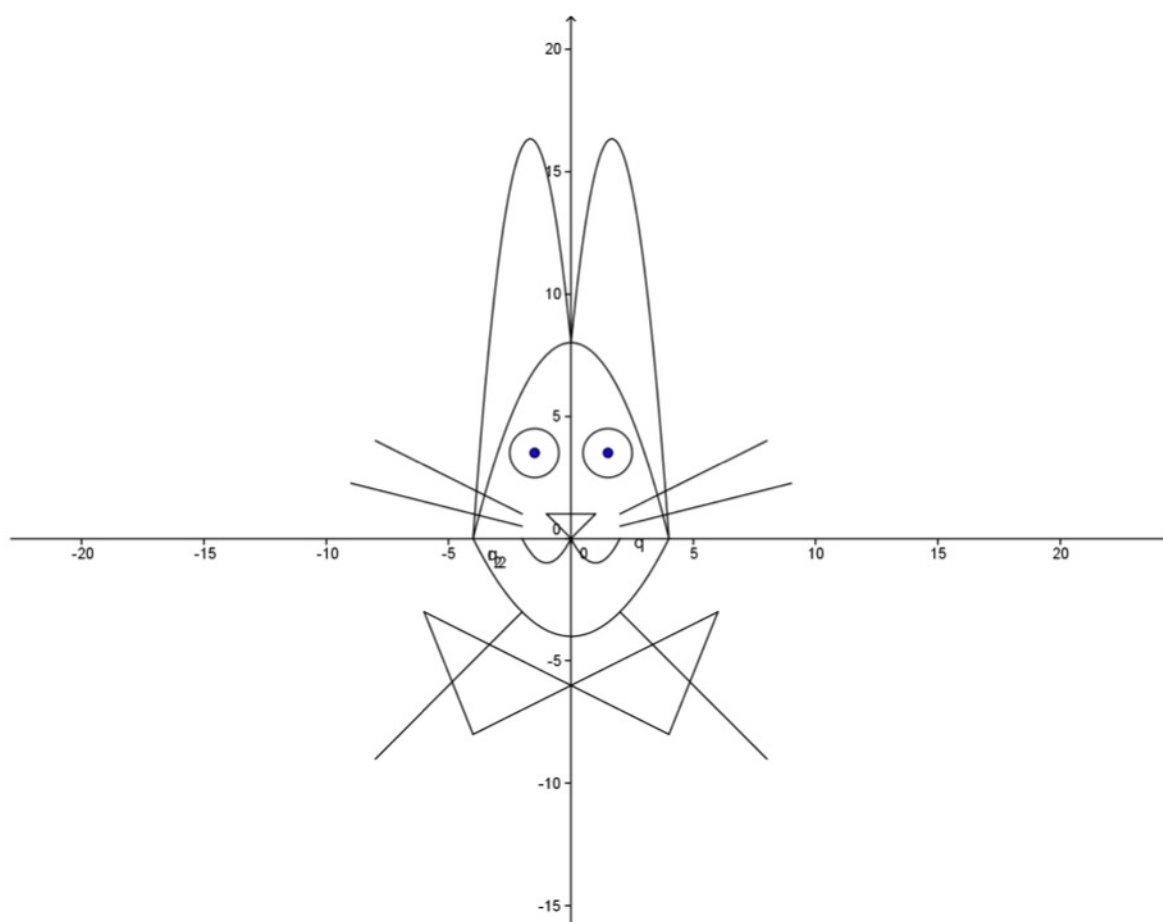
Annexe 5 – Représenter graphiquement la solution d’une inéquation à deux inconnues**À savoir :**

L’ensemble des points dont les coordonnées vérifient une inéquation du type $ax + by < c$ est un demi-plan.

Méthode :

Pour tracer le demi-plan représentant les solutions d’une telle inéquation, il faut :

- Tracer la droite frontière.
- Choisir un point qui n’appartient pas à cette droite et vérifier si ses coordonnées sont solution ou non de l’inéquation proposée.
- Conclure en fonction du résultat précédent quel est le demi-plan représentant les solutions de l’inéquation.
- Hachurer le demi-plan ne représentant pas les solutions de l’inéquation.

Réponse à la question 5 de l’activité « Images de saison »**Images de saison !!!**

L'homme qui calculait plus vite que son nombre.

(deuxième partie)

Éric Ziad-Forest

La première partie de cet article (voir *le Miroir 7*) a dû vous convaincre qu'il est facile de rendre spectaculaires des calculs qui, au premier abord, paraissent extrêmement difficiles, mais ne demandent en réalité que peu d'effort lorsque l'on connaît la technique... J'aimerais aborder dans cette deuxième partie un tout autre point de vue sur le calcul rapide : celui du calcul mental lié aux multiplications. Nous allons voir ici différentes présentations, dispositions, techniques opératoires... d'une même multiplication (mon exemple sera 241×132). Nous remarquerons que toutes ont, à y regarder de près,

une sorte d'air de famille... Il nous suffira, avec un peu d'habitude, d'utiliser celle qui semble le mieux adaptée au calcul mental (voire rapide) à effectuer. Il faut savoir que la plupart de ces « techniques » ont énormément contribué à améliorer les performances des « calculateurs prodiges ».

Une remarque préliminaire : j'ai choisi une présentation concise, visuelle et colorée, en identifiant par des couleurs identiques les chiffres (en quelque sorte des invariants de notre multiplication) que nous retrouverons dans chacun des points de vue qui suivront.

Usage de la distributivité

L'égalité $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ est au cœur même du calcul. Nous allons la retrouver tout au long de cet ar-

ticle. Dans la disposition classique d'une multiplication, la distributivité s'applique de la manière suivante :

$$241 \times 132 = 241 \times (2 + 30 + 100) = 241 \times 2 + 241 \times 30 + 241 \times 100$$

$$241 \times 132 = 482 + 7230 + 24100$$

Ainsi, nous retrouvons la forme posée :

		2	4	1	
	x	1	3	2	
+		4	8	2	= 241 x 2
+	7	2	3		= 241 x 30
+	2	4	1		= 241 x 100
	3	1	8	1	2

L'habitude et les conventions voulant que nous commençons par calculer de droite à gauche dans le second facteur, nous ne découvrons alors le résultat qu'à la fin

du processus opératoire. Mais inversons le processus de calcul en commençant par la gauche... Nous obtenons cette expression :

$$241 \times 132 = 241 \times (100 + 30 + 2) = 241 \times 100 + 241 \times 30 + 241 \times 2$$

$$241 \times 132 = 24100 + 7230 + 482$$

D'où la forme posée suivante :

		2	4	1		
	x	1	3	2		
+	2	4	1	0	0	= 241 x 100
+		7	2	3	0	= 241 x 30
+			4	8	2	= 241 x 2
	3	1	8	1	2	

Cette approche nous donne assez rapidement et sans trop d'effort une bonne idée de l'ordre de grandeur du produit ! L'étape suivante va nous conduire, en utilisant

« la même idée », mais dans une démarche géométrique, à produire aisément des résultats de calcul mental.

Avec les aires

Le produit 241×132 représente géométriquement l'aire d'un rectangle ce qui permet de « visualiser » ce produit et nous permet de lui appliquer des tech-

niques de découpage qui vont nous faciliter le calcul. En d'autres termes c'est la distributivité en image.

	200	40	1	
100	20000	4000	100	
30	6000	1200	30	
2	400	80	2	

Nous pouvons observer qu'un « calculateur prodige » peut profiter de cette « vision » pour aborder le calcul de façon quasi-directe en cherchant ici à donner le résultat de façon rapide de gauche à droite. En regrou-

pant les termes harmonieusement, souvent dans l'ordre décroissant, afin d'éviter des calculs trop difficiles, nous obtenons la séquence de calculs « assez facile » suivante :

$$20000 + (4000 + 6000 + 1200) + (100 + 400) + (80 + 30 + 2)$$

qui donne enfin :

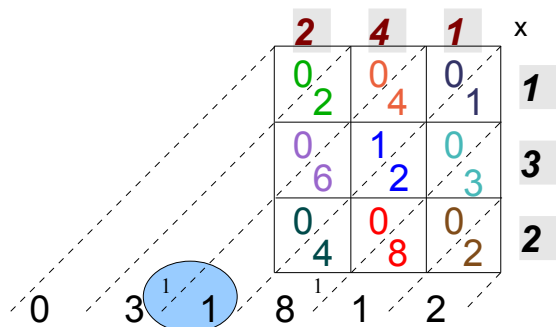
$$20000 + 11200 + 500 + 112 = 31200 + 612 = 31812.$$

Cela peut paraître surprenant, mais avec un peu d'habitude et bien sûr d'entraînement, cette technique est très efficace.

Multiplication par jalousie (per gelosia)

Cette technique ancienne est extrêmement élémentaire. Chaque cellule de notre quadrillage contient le produit des deux chiffres en-tête de ligne et de colonne ;

par exemple 12×3 s'obtient en faisant 4×3 . Nous obtenons pour notre opération la disposition suivante :



Somme « en diagonale » $0 + 6 + 1 + 4 + 0 = 11$ nous posons 1 et retenons 1.

Pour plus de détails sur cette technique, je vous invite à consulter le site se trouvant à l'adresse suivante : http://therese.eveilleau.ecole.pagespro-orange.fr/pages/truc_mat/textes/mult_grecque.htm.

Inscrivons maintenant les retenues de l'opération posée p. 17, et reprenons les couleurs déjà utilisées : on retrouve la disposition du calcul « par jalousie » à une permutation près.

		2	4	1	
	x	1	3	2	
+	0	4	8	2	
+	0	6	2	3	
+	0	2	4	1	
	3	1	8	1	2

Méthode de calcul mental criss-cross

Cette autre méthode de calcul mental, où les calculs effectués sont assez simples, est utilisée dans les « ma-

thématiques védiques » très populaires en Inde. Elle repose sur les cinq étapes mentales suivantes :

	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
Figure mentale	$\begin{array}{c} 1 \\ \updownarrow \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ \diagup & \diagdown \\ 3 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \\ \diagdown & \updownarrow & \diagup \\ 1 & 3 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ \diagup & \diagdown \\ 1 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{c} 2 \\ \updownarrow \\ 1 \end{array}$
calcul	2x1	2x4+3x1	2x2+1x1+4x3	2x3+1x4	1x2
retenue	2	11	17	10	2
résultat	2	12	812	1812	31812

Et si nous disposons pratiquement le calcul mental effectivement réalisé, nous obtenons à nouveau quelque

chose de très similaire à ce que donne la méthode « par jalousie ».

		2	4	1	
	x	1	3	2	
+	1	0	8	2	
+	0	6	2	3	
+	0	2	4	1	
	3	1	8	1	2

2x1

2x4 }

3x1 }

2x2 }

1x1 }

3x4 }

3x2 }

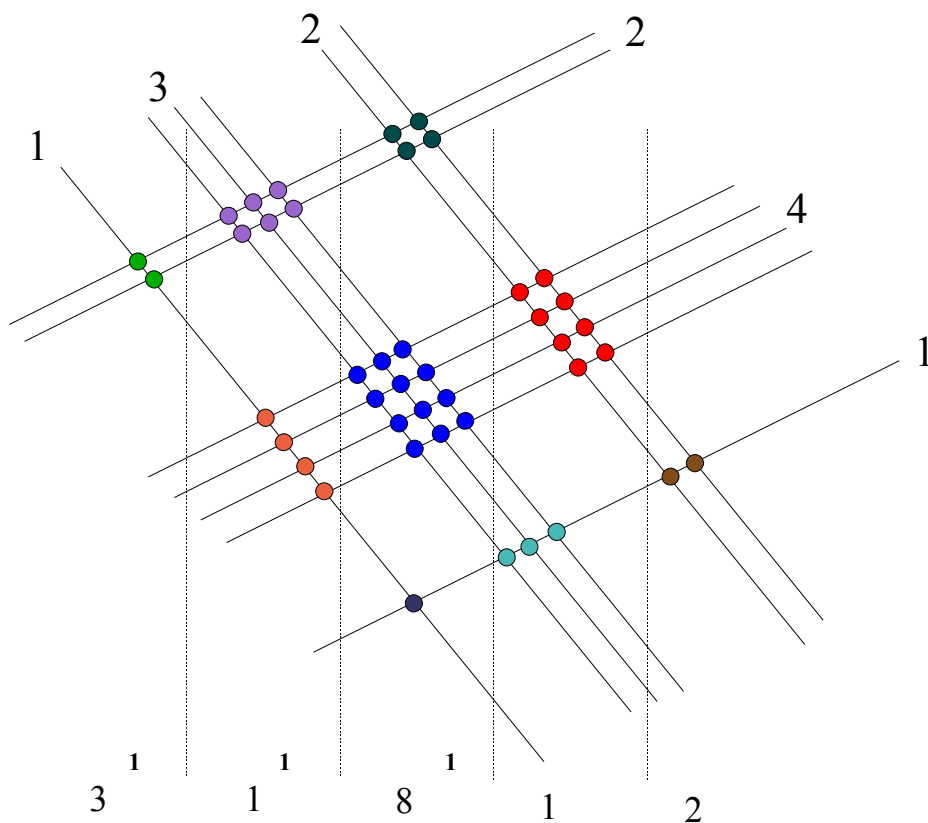
1x4 }

1x2

La richesse de penser autrement

Nous savons que la multiplication est commutative (c'est-à-dire que $241 \times 132 = 132 \times 241$). Voici encore une autre façon de disposer les calculs : je vous laisse

un moment pour en découvrir la beauté et la comparer aux autres dispositions vues précédemment.



Les étapes de réalisation de ce dessin

Dans une direction donnée, celle qui descend de la gauche vers la droite, nous inscrivons le premier facteur, ici 132, en traçant de bas en haut :

- 1 trait pour le chiffre des centaines
- 3 traits pour le chiffre des dizaines
- 2 traits pour le chiffre des unités

Puis dans la direction ascendante de la gauche vers la droite, nous inscrivons le second facteur, ici 241, en traçant de haut en bas :

- 2 traits pour le chiffre des centaines
- 4 traits pour le chiffre des dizaines
- 1 traits pour le chiffre des unités

Ensuite nous comptons simplement les points d'intersection. Enfin, le résultat s'obtient en faisant la somme du nombre de points par colonne et en reportant les retenues si nécessaire. Noter de nouveau la forte ressemblance avec la méthode « par jalousie ».

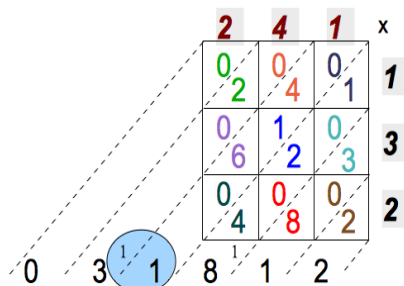
Bilan

Dans la plupart des figures ci-dessus, les couleurs sont identiquement disposées. Ceci nous amène à observer que nous utilisons en quelque sorte les « même

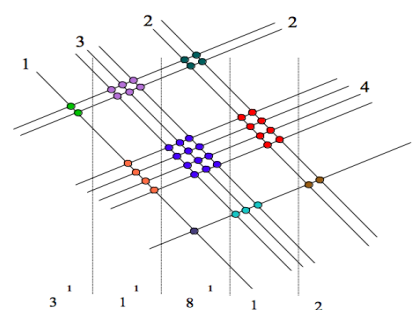
briques ». Mais leurs différentes dispositions peuvent augmenter l'efficacité du calcul.

200	40	1	
20000	4000	100	100
6000	1200	30	30
400	80	2	2

	2	4	1
x	1	3	2
+	0	0	0
+	1	4	8
+	0	0	2
+	6	2	3
+	2	4	1
	3	1	8
			1
			2



	2	4	1
x	1	3	2
+	1	0	2
+	0	8	.
+	0	3	.
+	0	4	.
+	0	1	.
+	1	2	.
+	0	.	.
+	6	.	.
+	0	4	.
+	2	.	.
	3	1	8
			1
			2



Je finirai cette brève introduction au monde insolite des « multiplicateurs rapides » par une invitation. Si vous trouvez une autre disposition, une manière élégante de présenter les produits simples générés par

le calcul d'une multiplication complexe, lancez-vous, décortiquez-la : vous avez peut-être trouvé une autre manière de devenir aussi rapide que « l'homme qui calculait plus vite que son nombre » !

Repères IREM La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques



Sommaire du numéro 84 (juillet 2011)

- **L'enseignement des mathématiques à des élèves déficients visuels**
Françoise Magna, Institut National des Jeunes Aveugles
- **De l'apprentissage du Braille au dessin des graphes de Feynman**
Benoît Blossier, Université de Paris Sud
- **Enseigner les mathématiques auprès d'élèves sourds : le préalable linguistique**
Virginie Mas Leroux, Institut National des Jeunes Sourds de Chambéry
- **Enseignement des mathématiques et surdité : exemple d'utilisation des TICE**
Marie Nowak et alii, Irem de Lyon
- **Troubles du comportement et apprentissages géométriques**
Valérie Barry, Université Paris XII

Le problème du *ludimagister* dans un manuscrit normand.

Pierre Ageron

Le manuscrit in-4°143 de la bibliothèque de Caen est un recueil anonyme de problèmes d'arithmétique à usage pédagogique, rédigé vers 1700. Il est formé de sept cahiers indépendants écrits de la même main, ras-

semblés sans y être cousus dans une reliure en veau dont les caractéristiques (fleurons, filets) montrent qu'elle est nettement plus ancienne¹.



Bibl. de Caen, ms. in-f°143, dos et plat (photo A. Prigent)

Les problèmes qu'il contient sont dans l'ensemble assez faciles et classiques. Deux sources seulement sont mentionnées ; il s'agit de :

– *Nouveaux elemens de Mathématiques (tome II)* de

l'oratorien Jean Prestet (Paris, 1689) ;

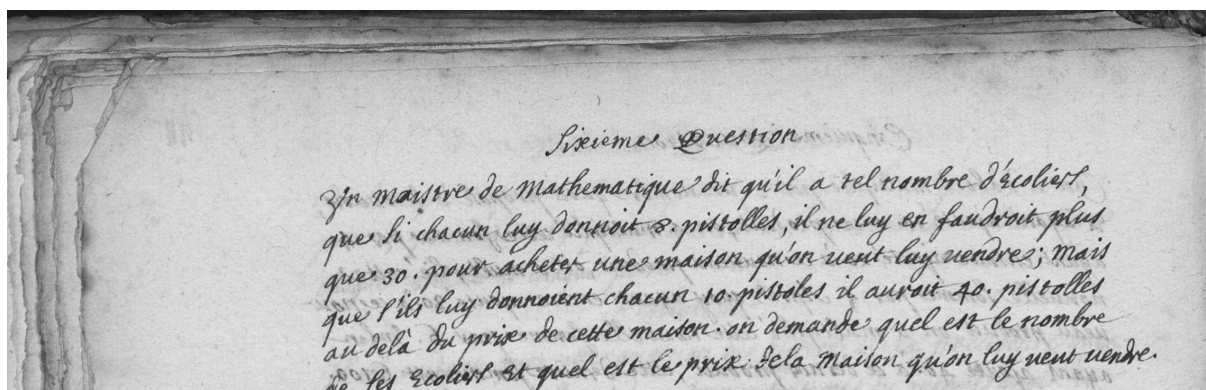
– *Epitome arithmeticae practicae* (Abrégé d'arithmétique pratique) du jésuite Christoff Clavius (Rome, 1583 ; très nombreuses éditions ultérieures).

1. Ce manuscrit a été étudié par Amandine Prigent dans son mémoire de master 2, préparé sous ma direction et soutenu à l'université de Nantes (Centre François Viète) le 14 juin 2011. La présente note est à la fois une introduction et un complément à ce très intéressant mémoire.

L'aspect le plus curieux de ce document anonyme est la vive hostilité affichée par l'auteur envers l'algèbre : selon lui, la méthode algébrique est « domageable », car elle « laisse l'esprit dans une étrange confusion » et « ne donne pas lieu de découvrir de belles propriétés » ; quant aux algébristes, ce sont « gens oisifs » dont le passe-temps consiste « à embrouiller » les problèmes !

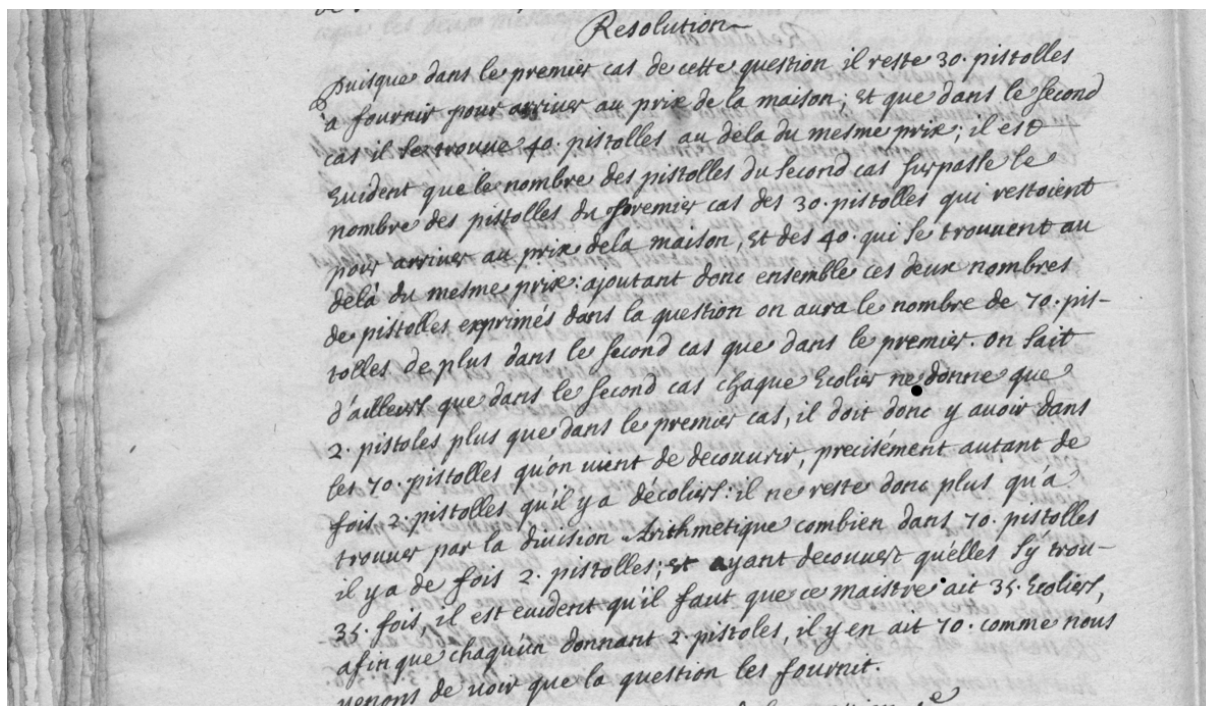
Lorsque j'ai découvert le manuscrit à la bibliothèque de Caen, un des problèmes qu'il contient a immédiatement attiré mon attention, tout simplement parce qu'il met en scène, chose rare, un enseignant de mathématiques !

Comme les autres, ce problème est aussitôt suivi de sa « résolution ». Le voici :



Bibl. de Caen, ms. in-f° 143, haut du f. 44 v. (photo Bibl. de Caen)

Sixieme Question. Un maistre de mathematique dit qu'il a tel nombre d'ecoliers, que si chacun luy donnoit 8. pistoles, il ne luy en faudroit plus que 30. pour acheter une maison qu'on veut luy vendre ; mais que s'ils luy donnoient chacun 10. pistoles il auroit 40. pistoles au delà du prix de cette maison. On demande quel est le nombre de ses ecoliers et quel est le prix de la maison qu'on luy veut vendre.



Bibl. de Caen, ms. in-f° 143, f. 44 v. (photo Bibl. de Caen)

Resolution. Puisque dans le premier cas de cette question il reste 30. pistoles a fournir pour arriver au prix de la maison ; et que dans le second cas il se trouve 40. pistoles au dela du mesme prix ; il est evident que le nombre des pistoles du second cas surpasse le nombre des pistoles du premier cas des 30. pistoles qui restoient pour arriver au prix de la maison, et des 40. qui se trouvent au dela du mesme prix. Ajoutant donc ensemble ces deux nombres de pistoles exprimes dans la question on

aura le nombre de 70. pistoles de plus dans le second cas que dans le premier. On sait d'ailleurs que dans le second cas chaque ecolier ne donne que 2. pistoles plus que dans le premier cas, il doit donc y avoir dans les 70. pistoles qu'on vient de decouvrir, precisement autant de fois 2. pistoles qu'il y a d'ecoliers : il ne reste donc plus qu'a trouver par la division Arithmetique combien dans 70. pistoles il y a de fois deux pistoles ; et ayant decouvert qu'elles s'y trou[vent] 35 fois, il est evident qu'il faut que ce maistre ait 35 ecoliers, afin que chaqu'un donnant 2. pistoles , il en ait 70. comme nous venons de voir que la question les fournit.

Des positions anti-algèbristes de l'auteur, on pouvait augurer une résolution purement arithmétique. En apparence, c'est bien le cas. Il n'y a pas de désignation d'une inconnue (le nombre d'ecoliers, notamment, n'est pas pris comme "chose" et n'apparaît qu'au stade ultime de la résolution). Pas non plus de mise en équation, fût-ce en mots. L'auteur propose un raisonnement *ad hoc*, mais simple, et met fortement en valeur les opérations arithmétiques qui sont la clef de l'affaire : l'addition $30 + 40 = 70$ et la division $70 \div 2 = 35$ – en omettant d'expliciter la soustraction $10 - 8 = 2$. On peut néanmoins se demander si des manipulations algébriques (certes non littérales) ne sont pas sous-jacentes à ce raisonnement, qui, au fond, vise bien à ramener la

question initiale à une forme normale ou canonique (en somme : ramener l'équation du premier degré $8x + 30 = 10x - 40$ à l'équation $2x = 70$). N'est-ce pas là l'essence de l'algèbre ?

L'auteur du manuscrit n'indique pas la source à laquelle il a puisé ce problème. Il est extrêmement probable qu'il s'agisse de l'*Epitome arithmeticae practicae* de Clavius, même si c'est à propos d'une autre question (sur laquelle je reviendrai plus tard) qu'il fait mention de cet ouvrage. En effet, dès la première édition de l'*Epitome*, on trouve un problème très proche, que j'appellerai le problème du *ludimagister*, et qui demeure inchangé dans les éditions suivantes. Voici comment il est libellé :

Quaestio 7. Ludimagister quidam tot habet discipulos, ut si singuli persolvant 5. aur. desint illi 30. aur. ad emendam domum, in qua habitat; si vero singuli dent 6 aur. supersint 40. aurei ultra pretium domus. Quot ergo habet discipulos, & quantum est pretium domus? Hic ni-

Ch. Clavius, *Epitome arithmeticae practicae*, 1^e éd., Rome, 1583, p. 174

Ludimagister quidam tot habet discipulos, ut si singuli persolvant 5. aur[eos], desint illi 30. aur[ei] ad emendam domum, in qua habitat; si vero singuli dent 6. aur[eos] supersint 40. aurei ultra pretium domus. Quot ergo habet discipulos, et quantum est pretium domus ?

Traduction : un certain maître d'école a un tel nombre d'élèves que si tous payaient 5 deniers d'or, 30 deniers lui feraient défaut pour acheter la maison dans laquelle il habite ; mais si tous donnaient 6 deniers d'or, il y aurait 40 deniers au-delà du prix de la maison. Combien a-t-il donc d'élèves, et quel est le prix de la maison ?

On remarque cependant que les données numériques divergent entre la version de Clavius et celle du manuscrit caennais. Les modes de résolution sont aussi très différents. Clavius résout le problème par la *règle de double fausse position*. Cette très ancienne méthode, bien connue des auteurs de langue arabe², consiste à déduire la solution exacte d'un problème que nous dirions aujourd'hui "affine" à partir de deux "solutions" ou plutôt "suppositions" fausses. Ainsi Clavius suppose d'abord le nombre des élèves égal à 30. En considérant

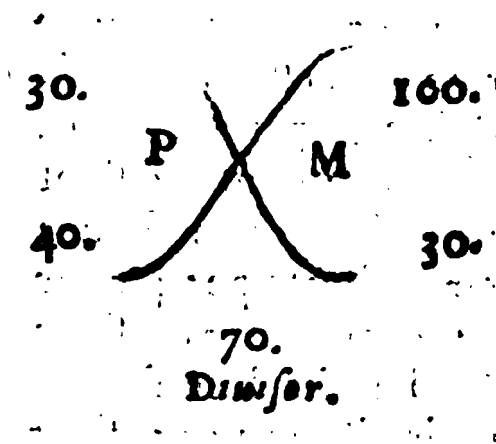
le cas où tous paient 5 deniers, on voit que la maison coûte $5 \times 30 + 30 = 180$ deniers. Mais si tous donnent 6 deniers, on rassemble $6 \times 30 = 180$ deniers, exactement le prix de la maison, alors que l'énoncé veut qu'on rassemble ainsi 40 deniers *de plus*. Clavius suppose ensuite le nombre des élèves égal à 100. En considérant le cas où tous paient 5 deniers, on voit que la maison coûte $5 \times 100 + 30 = 530$ deniers. Si tous donnent 6 deniers, on rassemble $6 \times 100 = 600$ deniers, soit 70 deniers au-delà du prix de la maison, alors que l'énoncé

2. Elle a notamment été popularisée par Qustâ Ibn Lûqâ (de Baalbek, mort en 912) et Ibn al-Bannâ' (de Marrakech, mort en 1321) qui l'appelaient respectivement *hisâb al-khata'ayn* (calcul des deux erreurs) et *tariqat al-kaffât* (méthode des plateaux de la balance).

veut qu'on ne rassemble ainsi que 40 deniers au-delà de ce prix, donc 30 deniers *de moins*. Il reste à appliquer la règle de la double fausse position. Dans le cas d'une position par défaut et d'une autre par excès, elle s'écrit : (première position * deuxième erreur + deuxième position * première erreur) / (première erreur + deuxième erreur). Le nombre d'élèves est donc

$(30 * 30 + 100 * 40) / (40 + 30)$, soit 70 élèves. Clavius n'omet pas la figure mnémotechnique en croix traditionnellement attachée à cette méthode (la lettre P est pour plus, la lettre M pour moins) .

Il termine en estimant, par l'un ou l'autre des calculs, le prix de la maison : on trouve 380 deniers.



Ch. Clavius, *Epitome arithmeticae practicae*, 1^e éd., Rome, 1583, p. 174

De l'auteur anti-algèbriste du manuscrit de Caen, on aurait pu s'attendre à ce qu'il mette en valeur cette méthode de double fausse position, purement arithmétique. Paradoxalement, elle n'apparaît à aucun endroit du texte. Peut-être l'a-t-il jugée trop complexe, comme nombre de ses contemporains : « assez difficile pour la pratique, & encore plus pour la démonstration », écrit Rivard dans ses *Éléments de mathématiques* (Paris, 1732). Dans le cas du problème du *ludimagister*, on a vu qu'il propose une solution beaucoup plus courte que celle de Clavius. Pourquoi au fait en avoir modifié les données numériques ? Deux réponses sont possibles :

– pour rapprocher l'effectif des conditions d'enseignement que l'auteur et ses élèves connaissent : la classe du maître de mathématiques normand (35 élèves) est moins chargée que celle du *ludimagister* romain (70 élèves)³ ;

– pour que le calcul donne lieu à une « vraie » division, la méthode du manuscrit caennais appliquée aux données de Clavius faisant résulter le nombre d'élèves du calcul « trop simple » suivant : $(40 + 30) / (6 - 5)$.

Il est d'ailleurs à remarquer que notre auteur, même s'il puise parmi les « classiques », n'hésite pas à jouer de ces « variables didactiques » que sont les données numériques d'un problème. Ainsi le problème pour lequel il fait explicitement référence à Clavius, qui consiste à

« trouver deux nombres dont la somme soit 100 en sorte que le tiers du premier avec la cinquième partie du second fasse 30 »⁴, ne se trouve pas tel quel chez le célèbre jésuite : l'auteur du manuscrit semble avoir substitué 30 à 50 dans une question de l'*Epitome* afin que la solution en soit entière. Il entendait visiblement, dans ce cas, ne pas cumuler des difficultés d'ordres différents.

Au cours du XVIII^e siècle, le problème du *ludimagister* réapparut souvent dans la littérature mathématique scolaire, posé presque exactement dans les mêmes termes et avec les mêmes données numériques que chez Clavius. Cependant, la résolution par double fausse position tomba peu en peu en désuétude au profit de l'algèbre littérale. L'exemple le plus tardif de la résolution de ce problème par double fausse position se trouve dans le *Tirocinium arithmeticum* du jésuite Philipp Steinyer (Vienne & Fribourg-en-Brisgau, 1763) : contrairement à ce que faisait Clavius, les fausses positions proposées, 20 et 30, sont toutes deux par défaut (inférieures à la valeur réelle 70). L'exemple le plus précoce de résolution algébrique du problème du *ludimagister* figure dans la *Mathesis Pollingana* d'Herculano Vogl, chanoine augustin de l'abbaye bavaroise de Polling (Vienne, 1740). Elle est organisée en trois temps : la *denominatio*, dans laquelle on donne le nom x au nombre des élèves ; l'*aequatio* où l'on traduit les hypothèses par

3. Mais un autre problème de Clavius (p. 159 de l'édition de 1583), d'habillage similaire, conduit à un nombre d'élèves égal à 36. Il est résolu par *simple* fausse position (méthode également absente du manuscrit de Caen).

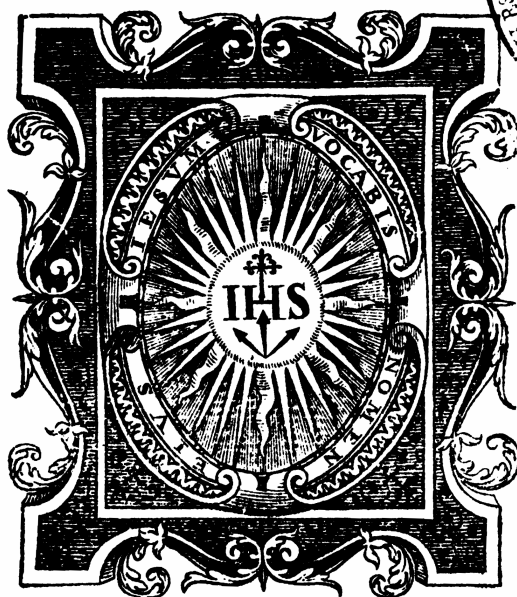
4. En marge de ce problème, au f. 39 r., se lit la mention : « Clavius Reg. falsi Dup. quaest. 9 » (question 9 du chapitre de la double fausse position). La numérotation des questions a varié au fil des éditions de l'*Epitome*.

l'équation $5x + 30 = 6x - 40$; la *resolutio* où l'on restaure d'abord le 40 pour obtenir $5x + 70 = 6x$ avant de soustraire $5x$ de $6x$ pour conclure $x = 70$. Il y a fort à parier que c'est ainsi qu'élèves et professeurs d'aujourd'hui procéderont très spontanément.

Si le problème du *ludimagister* a connu une fortune importante depuis Clavius, la solution qui en est proposée dans le manuscrit conservé à Caen apparaît finalement comme exceptionnelle : l'auteur, dont la virulente

opposition à l'algèbre et aux algébristes paraît d'abord mettre en lumière le conservatisme, a néanmoins jeté aux orties la vénérable méthode de fausse position, encore très enseignée et pratiquée de son temps. Opposé au caractère mécanique, non réfléchi, de l'application des règles de l'algèbre, il a développé une pédagogie spécifique dont on peut penser qu'elle constitue, paradoxalement, une propédeutique adéquate à l'apprentissage de la pensée algébrique.

CHRISTOPHORI
CLAVII
BAMBERGENSIS
E SOCIETATE
IESV
EPITOME ARITHMETICAE
Practica.



PERMISSV SUPERIORVM.
ROMAE Ex Typographia Dominici Basi. 1583.

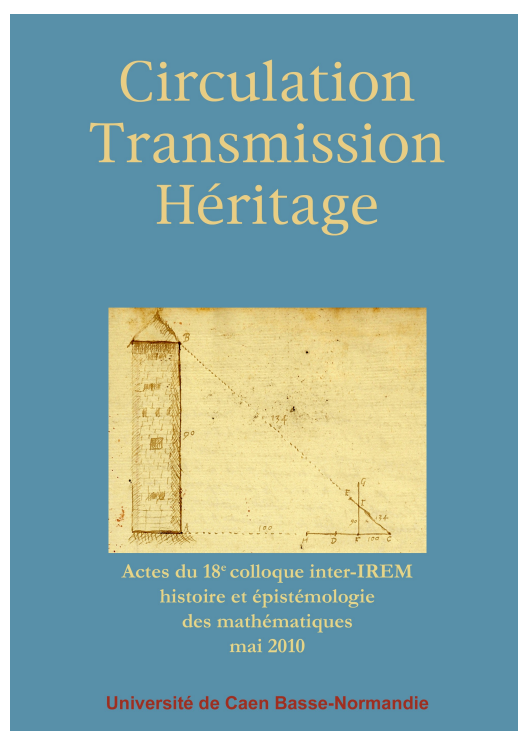
*De la Comp^e des J^{rs} de Alcala. 87.
Bela Libreria
2110 8105*

Les actes du XVIII^e colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques (Caen, mai 2010).

Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » sont différents. Cet ouvrage explore des moments historiques où des décalages, petits ou grands, nourrissent des héritages et furent le fruit des circulations et des transmissions. Il invite à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études qu'il rassemble mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

Évelyne Barbin & Pierre Ageron

Sommaire de l'ouvrage :



I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

► Ahmed Djebbar - Les mathématiques en pays d'Islam : héritages, innovations et circulation en Europe ► Frédéric Laurent - Les éléments d'une transmission : petite histoire de la transmission des Éléments d'Euclide en Arménie ► Isabelle Martinez-Labrousse - Un essai de synthèse entre le théorème de Pythagore et la procédure gou-gu ► Gérard Hamon & Lucette Degryse - Le livre IX des Quesiti et inventioni diverse de Niccolò Tartaglia : langue et mathématiques ► Pierre Ageron - Les sciences arabes à Caen au XVIII^e siècle : l'héritage arabe entre catholiques et protestants ► Jean-Pierre Le Goff - La perspective selon Andrea Pozzo et son adaptation chinoise, ou, questions de regards obliques et croisés : de la distance entre deux pensées de la représentation

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

► Martine Bühler & Anne Michel-Pajus - Règle de trois et proportionnalité dans une arithmétique pratique niçoise du XVI^e siècle et dans ses sources ► Pierre Ageron & Didier Bessot - De Varignon au père André : tribulations normandes d'un cours de géométrie ► Anne Boyé & Guillaume Moussard - L'enseignement des vecteurs au XXI^e siècle : diversité des héritages mathématiques et circulation entre disciplines

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

► Jeanne Peiffer - La circulation mathématique dans et par les journaux savants aux XVIII^e et XVIII^e siècles ► Christian Gérini - Pour un bicentenaire : polémiques et émulation dans les Annales de mathématiques pures et appliquées de Gergonne, premier grand journal de l'histoire des mathématiques (1810-1832) ► Norbert Verdier - Le Journal de Liouville et la presse de son temps : hériter, transmettre et faire circuler des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885)

I-4. – Les figures : accompagner les mots

► Olivier Keller - Surface, figure, ligne et point : un héritage de la préhistoire ► Jean-Pierre Cléro - Qu'est-ce qu'une figure ?

II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-1. – Hériter et inventer

► Gilles Damamme - Quel héritage se transmet à partir des biographies de grands mathématiciens ? ► Pierre Ageron - Ibn Hamza a-t-il inventé les logarithmes ? Constitution et circulation du discours islamocentré sur l'histoire des mathématiques ► Jean-Paul Guichard - L'algèbre nouvelle de Viète et ses héritiers ► Denis Lanier, Jean Lejeune & Didier Trotoux - L'invention de la médiane ► Dominique Tournès - Une discipline à la croisée d'intérêts multiples : la nomographie

II-2. – Transmettre et s'approprier

► Évelyne Barbin - Pourquoi les contemporains de Descartes n'ont-ils pas compris sa Géométrie de 1637 ? ► Jean Lejeune, Denis Lanier & Didier Trotoux - Jules Gavarret (1809-1890) : précurseur de l'introduction des statistiques inférentielles en épidémiologie ? ► François Plantade - H. G. Grassmann : une destinée linéaire ? ► Jean-Pierre Le Goff - Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la vie et l'oeuvre de Salomon de Caus ► Maryvonne Ménez-Hallez - La question du mathématicien

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

► Alain Bernard - Les Arithmétiques de Diophante : introduction à la lecture d'une oeuvre ancrée dans différentes traditions antiques ► Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff & Didier Trotoux - Une relecture de la proposition 46 du livre IV des Coniques d'Apollonios de Pergé, de ses éditions et de ses traductions



LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

- Éditorial : mémoire et renouvellement,
par Pierre Ageron. 3
- Représentations graphiques, aide ou obstacle ?
par le groupe *lycées professionnels* de l'IREM de Basse-Normandie 4
- L'homme qui calculait plus vite que son nombre (2),
par Éric Ziad-Forest 17
- La revue *Repères* des IREM : sommaire du numéro 84 21
- Le problème du *ludimagister* dans un manuscrit normand,
par Pierre Ageron 22
- Vient de paraître à l'IREM de Basse-Normandie :
actes du XVIII^e colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie
des mathématiques 27