LE MIROIR DES MATHS

IREM DE BASSE-NORMANDIE
CAMPUS II - SCIENCES 3 - BP.5186
Boulevard Maréchal Juin, 14032 - CAEN Cedex
Tél. : **02 31 56 74 02** - Fax. : **02 31 56 74 90**
Adresse électronique : irem@math.unicaen.fr
Site web - http ://www.math.unicaen.fr/irem/

IREM DE BASSE-NORMANDIE

NUMÉRO NEUF : Avril 2012

ISSN : 1969-7929

ISSN : 1760-6500

Nos groupes de recherche publient de nombreux livres intéressant l'enseignement des mathématiques. Voici les trois derniers titres parus, que vous pouvez commander par simple mail à irem@unicaen.fr :

– *Mieux consommer grâce aux mathématiques*, Tome 2 (Editeur Hermann, 212 p., 25 €)[1]
  par le groupe Mathématiques et consommation : *Évelyne Adam, Gilles Damamme et Hélène Ventelon* .
– *Circulation Transmission Héritage,* actes du 18e colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, édité par le groupe Histoire des sciences (632 p., 30 €)
– *Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle - " les propriétés des triangles et quadrilatères usuels "*
  Brochure bilingue élaborée en collaboration avec un professeur péruvien, en couleur avec les patrons des puzzles : 4,5 € la brochure (français ou espagnol) ou 8 € les deux (français & espagnol), par le groupe Géométrie (48 pages chaque brochure).

Chacune de ces nouveautés achetée est accompagnée d'un livre cadeau sur un thème voisin !

Repères IREM *La revue des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*

Sommaire du Numéro 86 – Janvier 2012

Sommaire du numéro 87 – Mars 2012

Pour consulter le site Web de la revue Repères IREM et les articles en ligne : Accédez au site du réseau des IREM par http ://www.univ-IREM.fr/ *puis cliquez sur REPERES (dans bandeau gauche vertical), ensuite sur CONSULTATION. (Les nombres en rouge indiquent qu'au moins un article de ce numéro a été mis intégralement en ligne ; les nombres en vert indiquent que tous les articles de ce numéro sont intégralement en ligne)*
Pour soumettre des articles au comité de rédaction de Repères IREM, contacter : yves.ducel@univ-fcomte.fr
Pour vous abonner à Repères IREM ou acheter séparément des numéros, contacter :
TOPIQUES Éditions, 22, rue Charles-Martel, 54000 NANCY, France
Téléphone & télécopie : 03 83 27 06 99 , adresse électronique : topiqueseditions@dbmail.com
Prix d'un abonnement (4 numéros par an) : Métropole : Établissements, 46 euros ; Particuliers, 35 euros
DOM-TOM ou Etranger (par avion) : Etablissements, 55 euros ; Particuliers, 44 euros

Repères IREM

Prix au numéro : 13 euros + frais d'expédition si envoi par avion.

[1] Voir la présentation détaillée en pages 26-27

Éditorial : En souvenir de Guy Juge

Depuis janvier 2012, j'ai pris les fonctions de directeur de l'IREM de Basse-Normandie pour un troisième mandat et je souhaite tout d'abord remercier mon prédécesseur, Pierre Ageron, pour son action au bénéfice de l'IREM. C'est en particulier à lui que nous devons la parution du *Miroir des Maths*, revue qui présente les divers travaux effectués dans notre IREM. Merci aussi à François Couchot qui a accepté d'être nommé administrateur provisoire et a assuré la transition durant le premier trimestre de l'année universitaire 2011-2012

Dans ce neuvième numéro du *Miroir des Maths*, nous avons souhaité rendre hommage à notre ami Guy Juge qui après avoir perdu sa femme en août 2011, a été emporté par la maladie en novembre 2011.

Pour beaucoup d'entre nous, le séminaire de rentrée, qui s'est déroulé les 30 septembre et 1er octobre 2011 a été le dernier moment partagé avec notre collègue Guy Juge, qui était animateur à l'IREM depuis 1985 et aussi le précieux webmestre de notre site web. A la suite de l'article rédigé, au nom de tout notre IREM, par Pierre Ageron, Éric Trotoux et Gilbert Lecler, à la mémoire de Guy Juge, vous trouverez une intéressante contribution de Danielle Salles-Legac et de l'équipe Géométrie montrant comment construire par pliage un carré en utilisant des méthodes relevant de la géométrie de Pythagore ou de celle, rituelle, des Sulbasutras de l'Inde Védique. Ensuite Didier Bessot et Didier Trotoux présentent de manière détaillée, le jeu de la baguette de Buffon plus connu sous le nom du « Problème de l'aiguille de Buffon ». Ils montrent que l'objet du texte de Buffon est d'aborder des questions relatives aux probabilités continues et le lecteur découvrira que, contrairement à une idée communément véhiculée, l'étude de ce jeu ne vise pas le calcul d'une approximation de π. Ce numéro se termine par une étude critique, faite par Pierre Ageron, de deux ouvrages d'histoire et épistémologie mathématique récemment parus.

Au cours de ces derniers mois, fruits du travail de nos groupes, de nouveaux titres d'ouvrages ont vu le jour. Les plus récents sont cités en haut de la page 2. Par ailleurs, Danielle Salles-Legac a réactualisé le catalogue de toutes nos publications en janvier 2012 (livret au format pdf téléchargeable sur notre site web[3]).

Le programme de notre séminaire de rentrée que je rappelle brièvement ici, témoigne de la diversité de nos activités. De l'histoire des mathématiques aux arts multiples en passant par la didactique, sans oublier les échanges linguistiques et culturels :

- Jules Houël. un mathématicien normand peu connu présenté par François Plantade.
- « La Progression Spiralaire » par Loïc Coulombel et Claudine Plourdeau.
- Les réalisations artistico-mathématiques de Gerald Giangrande ainsi que la BD d'Olivier Longuet, lauréat du concours de BD mathématique de la revue "Tangente".
- Les activités de pavage à la peinture de la cour d'école et de création artistique pour les T-shirts par ses élèves, de Clarisse Gallien.
- La dextérité d'Eric Ziad, expert magicien en jeu de cartes puis les doigtés nuancés et rythmés de Ruben Rodriguez sur les cordes de sa guitare.
- Les échanges du groupe DNL d'Odile Jenvrin avec des écoles européennes.
- Le problème de la baguette de Buffon présenté par Didier Bessot et Didier Trotoux.

Dans son rôle habituel, l'IREM poursuit son action de formation continue et a accueilli et animé plusieurs stages dans ses locaux :

Dans le cadre de l'IREM de Basse-Normandie et de l'association *WimsEdu*, Eric Reyssat a lancé la mise en place de séances de fabrication de nouveaux exercices *wims* sur le principe des cafés *WimsEdu*. Avec des idées d'exercices ou de brouillons de programmation à compléter, il s'agit de travailler ensemble pour en faire des exercices *wims* en mettant en commun compétences, et besoins pédagogiques ou techniques des uns et des autres.

Dans le cadre du PAF, trois stages récents :

- Travail personnel des élèves hors de la classe.
- Mathématiques et citoyennneté.
- Aux origines du calcul des probabilités.

Au cours de la dernière réunion pleinière des animateurs du 30 mars, Clarisse Gallien et Claudine Plourdeau ont rendu compte du colloque national de l'IFE[2] du 13 mars à Lyon et des conférences auxquelles elles ont participé. Ruben Rodriguez a substitué une intervention prévue en "direct" sur le 3ème colloque de Mathématiques de l'Uruguay auquel il a assisté en décembre 2011, par un document vidéo relatant celle-ci.

Vous pouvez retrouver toutes les activités de nos groupes sur notre site web[3] , dont Eric Trotoux a repris la maintenance à la suite du décès de son ami Guy.

Je souhaite à tous une lecture agréable ainsi qu'une une bonne fin d'année scolaire ou universitaire !

Gilles Damamme

[2] lien vers le site de l'IFE, educmaths : http ://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale
[3] adresse : http ://www.math.unicaen.fr/irem/

In memoriam Guy Juge

« *La vraie générosité envers l'avenir consiste à tout donner au présent.* »
Albert Camus

Notre collègue Guy Juge est décédé le 28 novembre 2011. Très attaché à l'IREM de Basse-Normandie, dont il fut un des animateurs les plus actifs pendant vingt-six ans, il a initié à l'informatique des générations de professeurs de mathématiques. En hommage à sa profonde gentillesse, mais aussi à sa passion et sa compétence professionnelle, nous avons souhaité évoquer quelques étapes de sa vie et quelques aspects de son travail à l'IREM.
Le choix des deux citations illustre des traits de Guy qui nous ont marqués.

« *Je suis certain que les Romains, s'ils avaient eu Internet, auraient été les premiers à l'adopter.* »
Intervention au Sénat de Dieter Otten, Université d'Osnabrück,
extrait de "Les parlements dans la société de l'information " (1999)

L'homme, le père, le passionné

Guy Juge est né à Paris le 27 novembre 1945. À l'âge d'un an, il perdit son père, des suites de ses blessures de guerre et fut élevé par sa seule mère. Il obtint son baccalauréat en 1963 et étudia à la Faculté des sciences de Paris. Admis au CAPES de mathématiques en 1969, il effectua des stages dans trois établissements de la région parisienne avant d'être, à la rentrée 1970, nommé au CES de Villejuif. En tant que soutien de famille, il fut exempté du service militaire. En février 1975, il épousa Anne-Marie, professeur d'histoire et géographie, avec laquelle il eut trois enfants : Marie-Claire en 1976, Marie-Cécile en 1977 et François en 1979. Grand mélomane, il chanta un temps à la maîtrise de Radio France. C'est en 1978 qu'il fit le choix de quitter Paris pour la Normandie. Il habita d'abord à Trouville, puis construisit la maison familiale, pratiquement de ses mains, sur un versant de colline à Saint-Aubin-Lébizay, une minuscule commune du Pays d'Auge fusionnée quelques années plus tôt à celles de Beaufour et de Druval. Son premier poste en Normandie fut une terminale C au lycée Albert Sorel de Honfleur. Il y enseigna jusqu'en 1995, avant d'être muté au lycée Augustin Fresnel de Caen, puis, en 2002 et jusqu'à sa retraite en 2009, au lycée Salvador Allende d'Hérouville Saint-Clair. Parallèlement, il fut formateur associé à l'IUFM de Basse-Normandie depuis 1991 jusqu'à son départ en retraite. Sa principale activité y fut axée sur le développement de l'informatique à visée pédagogique pour les professeurs de lycée et de collège en formation initiale ou continue. Ainsi, il travailla avec François Goblot auprès des « PLC1 » et avec Gilbert Lecler auprès des « PLC2 ». Avec Gilbert, ils formèrent plusieurs générations de stagiaires, suivis individuellement, grâce aux visites dans leurs classes. Ils prirent aussi part à l'encadrement de la confection et de la soutenance de leurs mémoires professionnels. Enfin, les dernières années il participa à la préparation au CAPES externe de mathématiques. Il envisagea un temps de passer l'agrégation, mais y renonça pour se consacrer à ses passions : les ordinateurs, mais aussi la musique classique, les voyages en famille dans sa caravane, et... sa tondeuse à gazon !

Il rejoignit l'équipe des animateurs de l'IREM de Basse-Normandie à l'automne 1985. Avec Gilbert Lecler, il y créa le groupe Micrologiciels, qui fut renforcé plus tard par l'arrivée – notamment de Bernard Genetay, puis d'Éric Trotoux – le groupe ayant été rebaptisé Mathématiques et outil informatique. Dès le début, l'activité centrale du groupe fut l'animation de stages consacrés tant à la prise en main du matériel micro-informatique (ordinateur, imprimante, table traçante...) qu'à son utilisation comme outil pédagogique en cours de mathématiques. À l'époque, les moyens accordés à la formation continue étaient encore importants : un stage pouvait représenter douze séances de quatre heures ! Mais les professeurs, loin d'être tous convaincus par l'intérêt de l'informatique, ne s'y bousculaient pas.

Guy et Gilbert Lecler (de face), Didier Bessot et Jean Pierre Le Goff (face à Guy)

En amont de ce travail de formation, Guy et ses collègues menèrent d'abord un travail de recherche autour de l'utilisation des logiciels dans l'enseignement de la géométrie. Ils travaillèrent en lien avec la commission inter-IREM Logiciels et pédagogie, devenue plus tard Mathématiques et informatique, participant notamment à l'élaboration du logiciel Euclide Plus, dont la version PC émane du groupe de Caen. En 1992, ils présentèrent Pytha-Cabri, banque de figures géométriques correspondant aux exercices du célèbre manuel Pythagore (niveau Cinquième) et réalisée avec le logiciel Cabri-Géomètre. En 1993, ils rassemblèrent dans une brochure seize Exemples d'utilisations pédagogiques de l'ordinateur au lycée en cours de mathématiques autour de notions diverses : géométrie analytique, isobarycentre, produit scalaire, etc. Dans les années 1990 apparut une autre direction de travail : le calcul formel. Dès 1990, Guy, participant à Toulouse à une université d'été inter-IREM sur le thème Informatique et enseignement de la géométrie, présenta le nouveau logiciel de calcul formel Derive, plus adapté à l'enseignement que ses prédécesseurs. Son expérience sur le sujet lui valut de faire partie du groupe d'experts créé en 1992 par le ministère de l'Éducation nationale sur les apports du calcul formel à l'enseignement des mathématiques. C'est alors que la commission inter-IREM lui confia à la tête du groupe caennais, l'organisation d'une université d'été sur le thème Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. Elle se déroula à l'IUFM de Caen du lundi 29 août au vendredi 2 septembre 1994, et ses actes, d'une grande richesse, furent publiés par les soins de Guy et ses collègues caennais dès janvier 1995.

Guy à l'accueil de l'université d'été de Caen (1994)

Parallèlement, le groupe continua son activité de formation continue dans le cadre du Plan académique de formation. Mais les moyens avaient été réduits tandis que le besoin de formation en informatique augmentait : il s'avéra impossible de satisfaire toutes les demandes et chaque stage organisé aurait pu être dédoublé. À cette époque, le travail portait principalement sur le logiciel de calcul formel MAPLE, comme en témoigne une brochure éditée en 1997. À partir de 1996, il s'étendit à la calculatrice TI 92, par une expérimentation en liaison avec le ministère de l'Éducation nationale et avec Texas Instruments, société pour laquelle Guy travailla longtemps. Guy s'intéressait beaucoup aux calculatrices, qu'il aimait aussi piéger et appelait volontiers des « amplificateurs à bêtises ». Guy anima aussi, avec les autres membres du groupe, des stages sur LaTeX, sur les logiciels de statistique, sur de multiples sujets liés à l'informatique pédagogique. Internet entra dans les préoccupations du groupe à partir de 1998 : son utilisation pour l'enseignement des mathématiques, bien sûr, mais aussi, service considérable rendu à l'ensemble de l'IREM, la création et la gestion du site web de l'IREM de Basse-Normandie. Guy avait en effet une vive conscience de l'IREM comme un collectif auquel chacun peut apporter quelque chose. Dans les deux dernières années de sa vie, il développa un système d'inscription en ligne pour le colloque d'histoire et épistémologie des mathématiques organisé à Caen en 2010, il entreprit la refonte totale du site de l'IREM selon l'architecture SPIP (Pour l'Informatique Partagée) et organisa des séances de formation à l'intention des animateurs de l'IREM. En étroite symbiose avec l'IREM, Guy s'est aussi beaucoup investi dans la vie de l'association régionale des professeurs de Mathématiques de l'académie de Caen, en animant tous les ans, au cours des journées régionales, des ateliers de formation sur le thème de l'informatique dans le cours de mathématiques. Et comme d'autres collègues irémiens, il a aussi dirigé des ateliers aux congrès nationaux de l'APMEP, auxquels il participait très régulièrement accompagné de son épouse Anne-Marie. Tout particulièrement, lorsque le congrès eut lieu à Caen en 2005, il fut l'un des piliers de l'organisation de cette manifestation : C'est Guy qui a repris, à partir du travail initié par un collègue d'Orléans, la gestion par l'internet (Php-Mysql) des inscriptions (700 à 800 participants sur quatre jours) et de la présentation du congrès, en améliorant (travail conséquent de programmation Php) les fonctionnalités des pages web du site des journées nationales de l'APMEP. Travail et savoir-faire qu'il a ensuite généreusement transmis aux collègues de Clermont-Ferrand qui organisaient le congrès de 2006.

Pendant les journées nationales de l'APMEP à Caen en 2005

Tous ceux qui ont travaillé à ses côtés ont gardé le souvenir d'un homme généreux et dévoué, d'une fiabilité à toute épreuve doublée de beaucoup d'humilité, d'une grande patience et d'une gentillesse non moins remarquables.

Guy parmi ses amis aux séminaires de rentrée de l'Irem à Tatihou (1997-2004) et à St Pair sur mer (2003)

Bibliographie.

▷ **Guy Juge et Georges Mounier**, « L'atelier DERIVE », in : Actes de l'université d'été Informatique et enseignement de la géométrie, IREM de Toulouse, 1990

▷ **Bernard Genetay, Guy Juge, Gilbert Lecler et François Péan**, *Pytha-Cabri*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1992

▷ **Bernard Genetay, Guy Juge, Gilbert Lecler, Danièle Lecoq et François Péan**, *Exemples d'utilisations pédagogiques de l'ordinateur au lycée en cours de mathématiques*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1993

▷ M.E.N. - Commission inter IREM Math. & Info. - coordination **Guy Juge** - Actes de l'université d'été *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques* , IREM de Basse-Normandie, Caen, 1994

▷ **Bernard Genetay, Guy Juge, Gilbert Lecler et Éric Trotoux**, *Quelques thèmes mathématiques du lycée présentés avec le logiciel MAPLE*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1997

▷ **Guy Juge et Jean-Baptiste Lagrange**, « Calcul formel de l'ordinateur à la calculatrice - Etude d'une situation d'enseignement avec la TI92 en classe de Première S », in : *Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques : quelles perspectives pour l'enseignement des mathématiques ?*, IREM de Rennes, 1997

▷ **Michèle Artigue, Badr Defouad, Michèle Dupérier, Guy Juge et Jean-Baptiste Lagrange**, *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*, cahier DIDIREM spécial n°4, IREM de Paris 7, 1998

▷ **Guy Juge et Jean-Baptiste Lagrange**, « Présentation et analyse d'activités proposées aux élèves de 1ère S dans le cadre de l'expérimentation DITEN sur les calculatrices formelles et géométriques», in : *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*, Actes du colloque francophone européen de La Grande-Motte, IREM de Montpellier, 1999

▷ **Guy Juge et Éric Trotoux**, « Présentation de quelques thèmes de mathématiques des programmes de lycée en utilisant la TI-92 pour présenter des imagiciels » in : *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*, Actes du colloque francophone européen de La Grande-Motte, IREM de Montpellier, 1999

▷ **Guy Juge** et un collectif d'auteurs, piloté par **A. Hirlimann**, M.E.N. Enseignement des mathématiques et calcul formel, *Derive, un outil à intégrer* Direction des Lycées et collèges, Innovations pédagogiques et technologies nouvelles, Sous-direction de la formation continue des enseignements du second degré et des innovations (199p.) 1996

▷ De très nombreuses brochures de « prise en main », destinées à l'utilisation fructueuse en cours, des calculatrices Texas Instruments. (Documents qui furent très largement diffusés dans les établissements scolaires par la société Texas-Instruments et sont encore téléchargeables sur son site.)

Guy et Anne-Marie ont lutté, ensemble, contre la même maladie. Bien qu'atteinte plus tard, Anne-Marie est partie la première, au cœur de l'été 2011. Guy, qui supportait stoïquement les lourds traitements depuis des années, n'aura guère tardé à la rejoindre. Mais il lui fallait d'abord organiser pour Anne-Marie une belle cérémonie religieuse, renouvelée à la rentrée pour ceux qui n'avaient pu s'y joindre. Une autre chose lui importait : montrer sa fidélité à l'IREM de Basse-Normandie, en nous rejoignant à Cahagnes au week-end de rentrée en octobre 2011, puis, une dernière fois, dans nos locaux, le 18 novembre 2011 – nous avons su ce jour là qu'il venait nous dire adieu. Le 28 novembre, le lendemain de son anniversaire, il est décédé au CHU de Caen, entouré de l'amour de ses enfants. Le jour de ses obsèques, l'église de Brucourt, à côté du monastère des Annonciades auquel il s'était beaucoup dévoué, était beaucoup, beaucoup trop petite pour accueillir tous ceux qui avaient apprécié ses profondes qualités.

Anne-Marie et Guy au banquet des Journées de Caen (2005)

Merci à Marie-Claire Juge-Ribaudo pour les précisions biographiques qu'elle nous a fournies.

Pierre Ageron, Eric Trotoux, Gilbert Lecler pour l'IREM de Basse-Normandie.

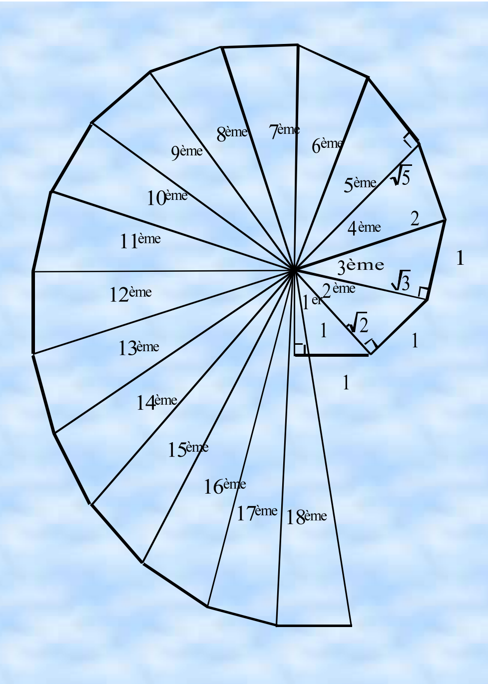
Construire par pliage un carré dont l'aire est le tiers de celle d'un carré donné

Nous vous présentons une solution accessible dès la classe de seconde à un problème posé dès le début de notre ère par les géomètres des Indes[1] .

Rappel : utilisation de l'Escargot de Pythagore

Rappelons que la figure dite “Escargot de Pythagore” permet de construire successivement les racines carrées des nombres entiers $\sqrt{n}$ (où $n \geqslant 2$) comme hypoténuse d'un triangle rectangle de petits côtés de l'angle droit de mesures $\sqrt{n-1}$ et 1.

Nous vous rappelons ci-dessous une partie de l'activité proposée dans notre ouvrage : Nouvelles pratiques de la géométrie (voir la bibliographie).



Traçons un triangle rectangle isocèle de petits côtés de longueurs 1. L'hypoténuse a pour longueur $\sqrt{2}$. Traçons ensuite, le long de l'hypoténuse, un triangle rectangle de petits côtés de longueurs $\sqrt{2}$ et 1, son hypoténuse a pour longueur $\sqrt{3}$.

En itérant le processus, on obtient successivement des triangles rectangles dont les hypoténuses mesurent les racines carrées des nombres entiers.

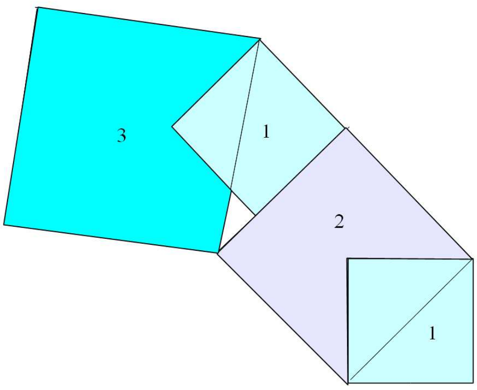
Les côtés extérieurs des triangles forment une spirale par morceaux de longueur 1. On observe que les angles au centre de la spirale sont de plus en plus petits et il se pose une question naturelle :

« Combien faut-il tracer de triangles pour que la somme des angles au centre soit au moins 360° ? »

La réponse est lisible sur la figure mais il est conseillé d'en vérifier la validité.

Application de la méthode de Pythagore à la construction d'un carré dont l'aire est triple de celle d'un carré donné, sans calcul et sans règle graduée

Nous avons vu (dans notre brochure « Découvrir et démontrer[1] ») qu'il est possible, connaissant un carré, de construire un carré de mesure d'aire moité et un carré de mesure d'aire double de celle du premier carré. Utilisons l'escargot de Pythagore pour construire un carré de mesure d'aire triple de celle du premier carré :



Cette activité peut être présentée aux grands élèves ayant la notion de racine carrée et connaissant bien le théorème de Pythagore, sous la forme d'une devinette (énoncé 1) :

« Dans la figure ci-dessus le carré numéro 3 a une aire triple de celle du carré numéro 1, savez-vous pourquoi ? »

[1]Ce travail est une suite naturelle à une activité de notre brochure « Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle » mais peut-être lu indépendamment, voir bibliographie.

Remarquons qu'il est inutile d'imposer une unité de mesure de longueur ou d'aire, ce qui compliquerait les calculs. Comme précédemment, nous décidons que c'est la mesure du côté du premier carré qui sert d'unité de longueur, que l'on appellera si l'on veut, le "boulga" ou tout autre nom choisi par les élèves.

Si les élèves ont déjà réalisé l'activité de doublement de l'aire en construisant la surface associée, il est probable qu'ils trouveront facilement, sinon on pourra leur énoncer le problème de façon plus traditionnelle, par exemple avec l'exercice suivant :
▷ On considère un carré de côté 1, quelle est la mesure de ses diagonales ?
▷ Quelle est l'aire d'un carré de côté de mesure $\sqrt{2}$?
▷ Construisez, à l'aide d'une diagonale du carré de côté 1, un carré d'aire double de celle du premier carré (avec la règle et l'équerre).
▷ Quelle est la mesure de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de petits côtés de l'angle droit 1 et $\sqrt{2}$?
▷ En utilisant la propriété de la question précédente, construisez un triangle rectangle d'hypoténuse de mesure $\sqrt{3}$. Construisez ensuite un carré d'aire de mesure 3. (énoncé 2)
Remarque : comparez l'énoncé 1 à l'énoncé 2 ou "**un bon dessin vaut mieux qu'un long discours**", ce qu'avaient bien compris les anciens géomètres mais n'est pas pédagogique si l'on n'a pas pris la précaution de "préparer le terrain". En effet, « le bon dessin est dans la tête du professeur mais pas toujours dans celle de l'élève ».

Comme nous l'avons remarqué plus haut, nous avons choisi une unité de mesure de longueur simplificatrice le "boulga" comme nous l'avons fait dans d'autres activités. On pourra leur faire remarquer à la fin de l'activité que "le boulga ne sert à rien" (ici, mais dans d'autres cas, peut-être pas).

Une question intéressante peut alors se poser : supposons que l'on choisisse comme unité de longueur la moitié d'un boulga soit un "miboulga", la construction donne-t-elle le même résultat ?

Reprenons l'exercice :

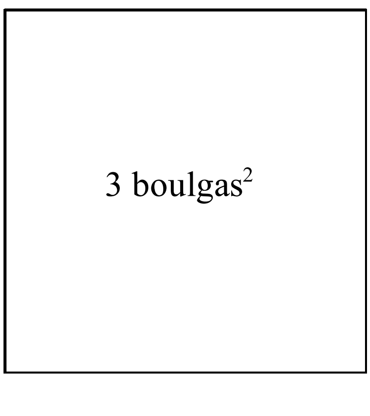
Le carré de départ a pour côté deux miboulgas, son aire est donc 4 miboulgas carrés, ses diagonales de mesures d vérifient le théorème de Pythagore : $2^2+2^2 = d^2$ en miboulgas carrés ; $d^2 = 8$ et $d = 2\sqrt{2}$ miboulgas. L'aire du carré de côté d est $d^2 = 8$ qui est le double de celle du carré de départ.

Le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 2 et $2\sqrt{2}$ a pour hypoténuse h. Celle-ci vérifie : $2^2 + (2\sqrt{2})^2 = h^2$ soit $h^2 = 12$ et $h = 2\sqrt{3}$ miboulgas. L'aire du carré de mesure de côté h est 12 miboulgas carrés soit le triple de celle du premier carré.

Étude du problème réciproque : connaissant un carré de mesure d'aire 3, construire par pliage un carré de mesure d'aire 1

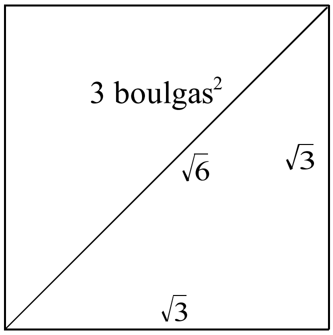
Nous avons vu précédemment que la construction d'un carré de surface moitié de celle d'un carré donné n'est pas un problème élémentaire et qu'il peut donner lieu à une **réflexion intéressante sur la différence entre la division des longueurs et la division des aires**.

Le problème que nous vous proposons maintenant est plus difficile puisqu'il va nous faire manipuler le nombre réel $\sqrt{3}$ et que ce nombre n'apparaît pas de façon naturelle dans les calculs d'aires de carrés.



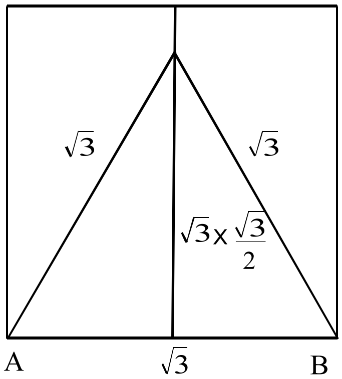
Nous proposons donc aux élèves d'observer un carré dont, par hypothèse, l'aire est 3 (boulgas^2). En effet il nous semble plus simple de construire un carré d'aire 1, plutôt qu'un carré d'aire 1/3, bien que, mathématiquement, cela soit la même chose.

Nous demandons tout d'abord quelle est la mesure du côté du carré d'aire 3. C'est $\sqrt{3}$. Si les élèves sont gênés par l'absence d'unité nous reprendrons par exemple le boulga. Nous demandons ensuite la mesure de la diagonale du carré, c'est $\sqrt{6}$. Nous allons écrire ces mesures sur la figure représentant le carré.



Comme nous l'avons fait pour le pliage du carré pour obtenir un carré d'aire moitié, nous laissons les élèvés réfléchir afin de savoir comment gérer les pliages pour diminuer progressivement l'aire du carré. Si l'on cherche comme il est naturel à plier les côtés en trois, nous nous heurtons à deux difficultés : diviser une longueur en trois parties égales par pliage n'est pas chose aisée, de plus il est facile de vérifier que l'on obtiendra pas le résultat escompté.

Nous suggérons donc aux élèves d'observer le triangle équilatéral construit par pliage (avec glissement) sur un des côtés du carré. (Voyez la construction de la « pièce 3 » dans notre brochure « Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle » voir bibliographie.)



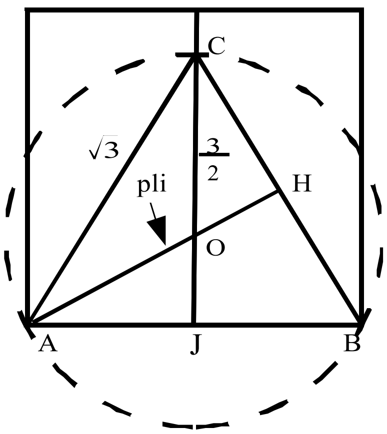
La hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a étant de mesure $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, la hauteur du triangle équilatéral ainsi construit a pour mesure $\dfrac{3}{2}$: N'oublions pas que nous cherchons à construire un carré d'aire 1 donc de côté 1. La hauteur du triangle équilatéral est de mesure $\dfrac{3}{2}$, il ne nous reste plus qu'à construire la longueur 1 à partir de la longueur 1,5.

Ceci consiste à construire les deux tiers d'une longueur, ce qui est plus simple que le tiers d'une aire. On peut procéder comme dans notre brochure « Nouvelles pratiques de la géométrie » (voir bibliographie), avec un système de droites parallèles, mais nous allons vous proposer une solution plus rapide.

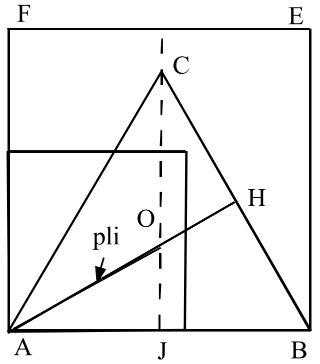
Pour cela, nous demandons aux élèves quelle est la propriété du centre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral.

Réponse : il se trouve au tiers des hauteurs (qui sont aussi bissectrices, médianes et médiatrices) par rapport à leur pied.

Il nous suffit donc de déterminer ce centre par pliage du triangle, en amenant par exemple le sommet B sur le sommet C et en gardant le sommet A fixe.



La trace [AH] du pli qui amène le sommet C sur le sommet B en gardant A fixe est la hauteur du triangle équilatéral relative au côté [BC]. Son intersection O avec la hauteur [CJ] relative au côté [AB] est le centre du triangle. Donc AO = CO = $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2} = 1$



Il suffit maintenant de reporter le segment [AO] sur le côté du carré [AF] et sur le côté [AB] pour obtenir deux côtés consécutifs du carré recherché d'aire 1.

Nous demandons alors aux élèves de mesurer les côtés du premier carré, puis les côtés du carré que nous venons de construire afin de vérifier la validité de notre construction.

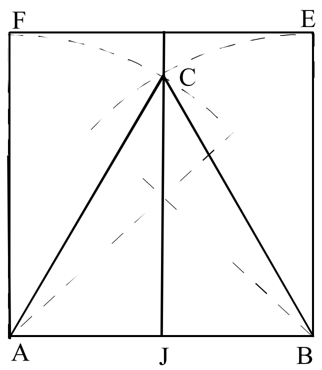
Réalisation

Nous avons réalisé cette activité avec une feuille A4 de papier fort (160g). Le carré a donc pour mesure de côté 21 cm soit une surface de 441 cm^2. Nous avons construit le triangle équilatéral de côté 21 cm par pliage, puis recherché les deux tiers de sa hauteur avec un nouveau pliage déterminant son centre O. Nous avons mesuré le carré construit comme il est dit plus haut, la mesure de son côté est : 12,2 cm ce qui nous donne une aire de 148,84 cm^2. Or 148,84 $\times$ 3 = 446,52 en cm^2, ce qui nous donne une approximation de l'ordre de 1% qui paraît acceptable aux élèves et au professeur.

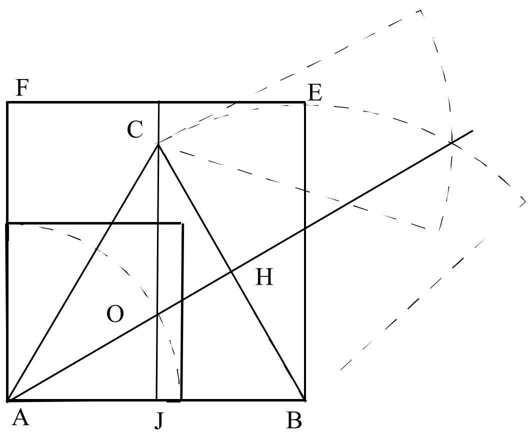
Remarque (qui pourra être traitée en exercice avec les plus grands) Lorsque nous plaçons le carré de côté 1 sur le carré de côté $\sqrt{3}$, il reste un « gnomon »[2] qui par construction a pour aire 2. Nous prolongeons les côtés du petit carré à l'intérieur du grand, nous obtenons d'une part deux rectangles égaux et d'autre part un petit carré dont on peut calculer l'aire. Les rectangles, par construction, ont pour côtés 1 et $\sqrt{3}-1$, donc pour aire $2 \times (\sqrt{3}-1)$

Le petit carré restant a donc pour aire : $2-2\sqrt{3}+2 = 4-2\sqrt{3}$

Construction à la règle et au compas : Un segment donné étant par hypothèse de longueur $\sqrt{3}$ construire à la règle et au compas un segment de longueur 1.



Construction au compas du triangle équilatéral ABC de côté de longueur $\sqrt{3}$



Construction au compas de la médiatrice (AH) du segment [CB] qui croise la médiatrice (JC) du segment [AB] en O. Puis report au compas de la longueur AO sur [AF] et [AB] pour construire le carré de côté de longueur 1.

Commentaire historique

Comme le montre l'article d'Olivier Keller : « *La géométrie des Sulbasutras* » Exemple de géométrie rituelle de l'Inde Védique (voir la bibliographie) le problème de la construction d'un carré d'aire égale au tiers de celle d'un carré donné n'est pas récent. La géométrie des Sulbasutras est probablement antérieure aux éléments d'Euclide.

[2]Le terme de gnomon, qui à l'origine désignait une tige de cadran solaire, est employé en géométrie pour désigner la figure en forme de **L** obtenue lorsqu'on l'on ôte d'un carré un carré plus petit ayant un de ses angles droits commun avec l'un de ceux du grand carré. Le gnomon est très utile pour effectuer des démonstrations algébriques à l'aide de la géométrie élémentaire, par exemple des identités remarquables.

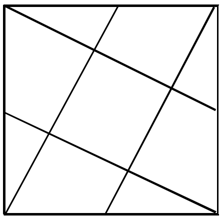
On y présente une autre solution que la nôtre qui se heurte tout de même à la division d'un segment en trois segments égaux, problème qui, à l'époque était du ressort des « tendeurs de corde » (les Sulbasutras), experts géomètres, il était résolu par le pliage en trois d'une corde, pliage qui recourt aux glissements ou ajustements.

Nous avons vu dans un précédent article du « Miroir des maths n°5 » que la géométrie avec glissement autorise des constructions intéressantes mais peut paraître manquer un peu de rigueur. Notons toutefois que l'ajustement de l'espacement entre les deux pointes d'un compas est une action du même type de rigueur expérimentale et que si elle paraît plus rigoureuse c'est que nous y sommes plus habitués.

Cela étant, dans les pliages avec glissement il y a, en général ajustement d'au moins deux points (sur deux droites) avec **interaction entre les deux ajustements**, ce qui apparaît bien dans l'énoncé du sixième axiome des pliages de Justin-Huzita :
« Soient deux droites l_1 et l_2 et deux points p_1 et p_2 ; un pli amène p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2. »

Soulignons que ce pliage n'est pas toujours possible et qu'il accumule de toute façon deux sources d'erreur.

Voici donc **une partie du texte des Sulbasutras** à propos de la recherche du tiers d'un carré : « *... par là on explique le côté du carré égal au tiers d'un carré donné : c'est le côté du carré neuvième du carré...* » . **Et le commentaire d'Olivier Keller** : « Pour construire un carré dont l'aire est le tiers d'un carré donné, on construit d'abord le triple de celui-ci, comme expliqué en 1-10 (c'est la méthode de Pythagore), puis on en prend le neuvième ; il suffit pour cela de partager chaque côté du carré triple en trois parties. On suppose (d'après un témoignage visuel Seidenberg 1978) que le partage d'un segment en n parties égales se faisait en pliant une corde de même longueur n-1 fois sur elle-même. »



Et le cinquième ?

Enfin, nous vous proposons une construction, rappelée par Olivier Longuet, du carré d'aire le cinquième de celle d'un carré donné et vous laissons le plaisir d'en chercher la justification.

L'approche du tiers par le triple est très intéressante puisqu'elle permet une généralisation à toutes les racines carrées de nombres premiers, par exemple pour construire un carré qui soit le septième d'un carré donné. On pourra construire un carré sept fois plus grand en utilisant notre extension de l'Escargot de Pythagore puis construire, grâce à un système de droites parallèles la septième partie du côté du carré obtenu. Notre solution de construction du tiers ne se généralise pas a priori aux autres fractions de carré, par contre elle utilise **une géométrie des pliages sans glissement**, ce qui n'est pas le cas des Sulbasustras. Le lecteur intéressé par les divisions rigoureuses de segments par pliage pourra consulter le très intéressant article de Kazuo Haga : « Origamics » comme suggéré par notre collègue D. Trotoux (voir la bibliographie).

Bibliographie

HAGA Kazuo *Origamics, Mathematical explorations through paper foldings*
en ligne *www.northwestmathconf.org/.../Hagas_First_Theorem.pdf*

JUSTIN Jacques *Résolution par pliage de l'équation du 3ème degré* - Publications de l'I.R.E.M. de Strasbourg, en ligne : *42_Justin.pdf*

KELLER Olivier *La géométrie des Sulbasutras Exemple de géométrie rituelle de l'Inde Védique*, Repères IREM n°40, 2000, en ligne : *Keller_ Sulbasutras.pdf*

HUZITA H. *Démarches de la première réunion internationale de la Science et de la technologie d'Origami*, H. Huzita E-D. (1989), pp. 251–261. En ligne : *Mathématiques_des_origamis*

SEIDENBERG Abraham « *The origin of Mathematics* » *Archiv for the history of exact sciences*
Ref : 18 (4) 1978 p. 301–342.

SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben *Nouvelles pratiques de la géométrie* IREM de Basse-Normandie éditeur 2006 & *Practicar la geometría : de las acciones ...a sus formalizaciones matemáticas.* IREM de Basse-Normandie éditeur 2010

SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. *Découvrir et démontrer en géométrie avec des pièces de puzzle.* I.R.E.M. de Basse-Normandie 2011

SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. *Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères, Historias de cometas y otros cuadriláteros (français et espagnol)* I.R.E.M. de Basse-Normandie 2008

SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. « *Géométrie des pliages* » *in Le miroir des mathématiques (n°5) Décembre 2009* I.R.E.M. de Basse-Normandie - En ligne : *www.math.unicaen.fr/irem/*

Le jeu de la baguette de Buffon

Dans le quatrième tome du *Supplément* à son *Histoire naturelle, générale et particulière*[1], Buffon examine la science des probabilités ; il y remarque que, jusqu'à présent, elle ne s'est servie que de l'Analyse pour résoudre les problèmes liés au hasard, puisque, ajoute-t-il, ces problèmes ont ordinairement portés sur des situations, jeux ou conjectures, relatives à des quantités discrètes. Il se propose donc d'y introduire l'usage de la géométrie en inventant des situations de hasard portant sur l'étendue, faisant ainsi intervenir des quantités continues.

Le premier exemple qu'il expose porte sur le jeu de *franc-carreau* qu'il décrit ainsi :

> Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs.

Cette définition souffre cependant de plusieurs ambiguïtés, qui apparaissent au cours de l'étude du texte. D'une part les carreaux ne sont pas vraiment quelconques : Buffon examine seulement les cas du carré, du triangle équilatère, d'un losange formé de deux triangles équilatères accolés par un côté et de l'hexagone régulier ; en outre, les pavages envisagés sont les plus réguliers possible. Mais surtout, d'autre part, les éventualités sur lesquelles les joueurs parient, telles qu'elles sont décrites dans le paragraphe cité plus haut, ne correspondent pas exactement à la manière dont elles seront prises en compte dans la suite de l'étude ; ainsi, dans le premier cas où un joueur parie sur franc-carreau tandis que le second parie sur la rencontre de l'écu avec un joint, il faut comprendre, pour être en adéquation avec les résultats donnés par Buffon, que ce second joueur parie sur la rencontre avec *au moins* un joint. Cependant une fois ces ambiguïtés levées, l'étude des divers cas s'effectue aisément dès lors que sont connus les résultats sur les aires du carré, du triangle équilatère et du disque[2].

Dans une seconde partie, Buffon propose un jeu qui consiste à lancer une baguette, qui deviendra vers la fin de l'étude une aiguille, dans une chambre pourvue d'abord d'un parquet de lames à bords parallèles, puis d'un pavage ordinaire à carreaux carrés. Il l'énonce ainsi :

> Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles ; on demande le sort de ces deux joueurs. On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.

Cette seconde partie fait intervenir des notions et résultats de géométrie plus complexes que ceux utilisés dans la première partie et comporte plus encore de confusions et d'obscurités que la partie sur le jeu de franc-carreau. Pour toutes ces raisons elle mérite d'être étudiée en détail pour parvenir à une élucidation complète des méthodes employées et des résultats finalement obtenus.

I. – Baguette sur parquet

La figure 1, reprise de l'ouvrage même de Buffon, donne une représentation de la situation qui va être étudiée. Le rectangle ABDC représente une lame du parquet, dont les joints avec les lames voisines sont AB et CD ; les droites ab et cd sont fictives, situées à l'intérieur de la lame à une distance des joints égale à la demi-longueur de la baguette. Cette baguette est représentée dans la partie gauche par les lignes EF et ef, figurant trois positions de cette baguette quand son milieu occupe un point déterminé de la bande limitée par ab et cd ; dans la partie droite, elle est représentée plus succinctement, par ses moitiés en εH et $\varepsilon\varphi$.

[1] Voir [B, 1777] dans la bibliographie de fin d'article.
[2] *Cf* note précédente.

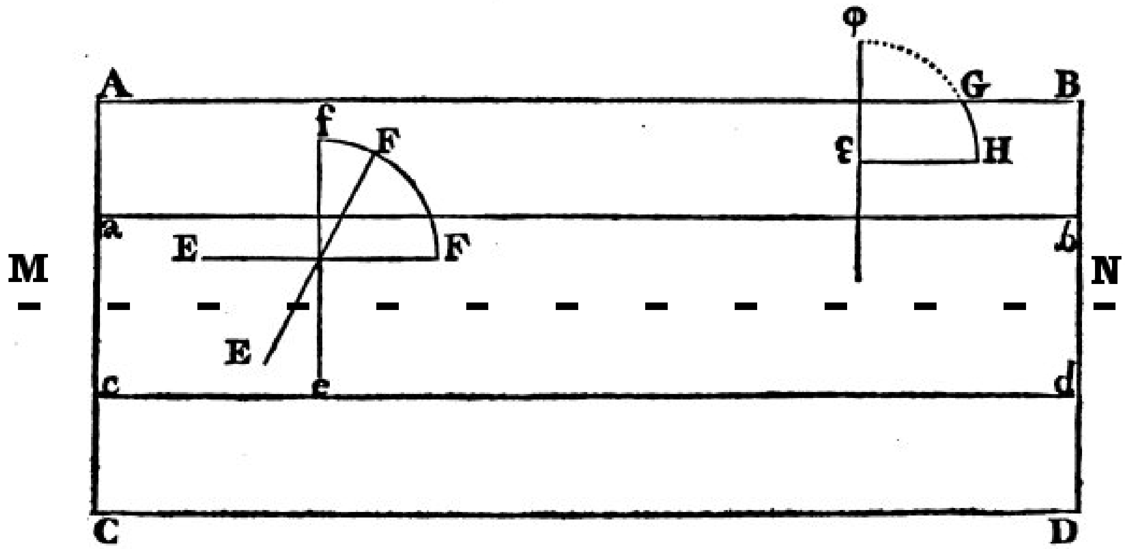


Fig. 1. Figure donnée par Buffon page 101 de l'édition de 1777.
La ligne MN est un ajout des auteurs de cet article.

Dans la mesure où les notations choisies par Buffon seront conservées dans la présente étude, il est nécessaire de prévenir le lecteur des confusions qu'elles comportent.

Les lettres a, b, c, C, f désignent d'une part des points dans la figure ci-dessus, d'autre part des longueurs.

- a est la demi-largeur d'une lame de parquet
- b est la demi-longueur de la baguette
- C, ou c, désigne la longueur du quart de cercle de rayon b
- f est la longueur des lames de parquet.

Par souci de simplification, Buffon travaille sur la moitié d'une lame, limitée par la médiane longitudinale (MN) de cette lame et mène à l'intérieur de la lame la parallèle (ab) au bord (AB) de cette lame distante de ce bord de la longueur b. Cette manière de faire implique que la largeur de la lame soit supérieure à la longueur de la baguette, condition non précisée mais implicitement admise par Buffon.

1er cas

Si la baguette tombe de sorte que son milieu soit dans la bande limitée par (ab) et la médiane (MN) (Fig. 1, partie gauche), elle ne rencontre pas le joint (AB).

La "quantité" de telles positions du milieu de la baguette est "mesurée" par l'aire de la bande (abNM), à savoir $f \cdot (a - b)$.

Pour chaque position du milieu de la baguette dans cette bande, la "quantité" de positions de la baguette est "mesurée" par C, quart de la circonférence du cercle de rayon b ; Buffon considère avec raison que, à cause de la symétrie de la situation par rapport à la verticale (ef), ce dénombrement est suffisant puisqu'il sera aussi appliqué dans les autres cas.

Donc, dans le cas où le milieu de la baguette tombe entre (ab) et (MN), la "quantité" de positions de la baguette est "mesurée" par $f \cdot (a - b) \cdot C$.

2ème cas

Si le milieu de la baguette tombe dans la bande (ABba) (Fig. 1, partie droite), la baguette peut couper ou ne pas couper le joint (AB).

Pour une position fixée du milieu ε de la baguette dans la bande (ABba), la baguette coupe le joint si et seulement si l'extrémité de la baguette est sur l'arc φG du quart de cercle φH. La "quantité" de telles positions de la baguette, dont le milieu est fixé, est donc "mesurée" par la longueur de l'arc φG, notée y.

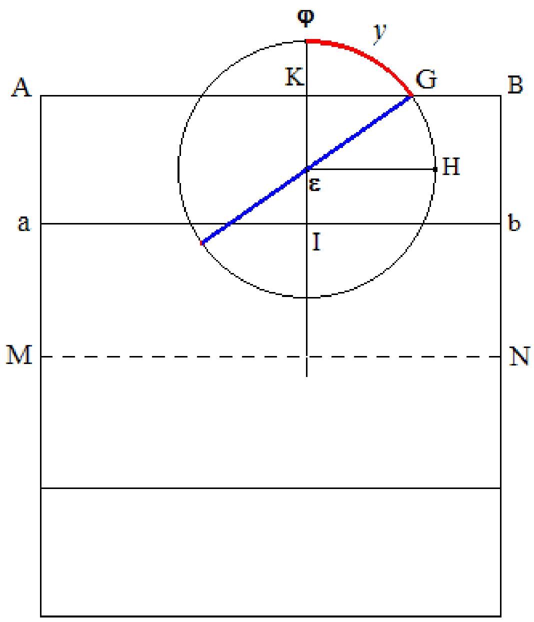


Fig. 2.

La seconde étape, pour Buffon, consiste à déplacer le milieu de la baguette sur un segment perpendiculaire à (AB) et traversant la bande (ABba), comme [IK] (Fig. 2). La “quantité” des positions de la baguette dont le milieu parcourt [IK] et coupant (AB) est “mesurée” par la “somme” des longueurs de tous les arcs φG lorsque G parcourt le quart de cercle φH. Buffon note cette “somme” où $\int y\,dx$ est une petite partie de la ligne [IK], sans préciser ce que x désigne ; x marque en fait la position du milieu ε sur [IK] et peut être pris égal à Iε ou à Kε [3]. Il est cohérent que la “somme” des longueurs y soit une aire, donc déterminée par une intégrale, et non une longueur, car la “quantité” de toutes les positions de la baguette lorsque son milieu parcourt [IK] est “mesurée” par bC, produit de la demi longueur de la baguette par le quart de cercle φH, quantité assimilable à une aire. Donc la “quantité” des positions de la baguette lorsque son milieu parcourt [IK], sans couper (AB), est “mesurée” par $bC - \int y\,dx$.

Enfin la “quantité” des positions de la baguette lorsque son milieu tombe dans (ABba), en coupant (AB), est “mesurée” par $f \cdot \int y\ dx$ tandis que la “quantité” des positions de la baguette lorsque son milieu tombe dans (ABba), sans couper (AB), est “mesurée” par $f \cdot (bC - \int y\,dx)$. Alors la “quantité” de toutes les positions de la baguette ne coupant pas (AB), est “mesurée” par $f \cdot (a-b) \cdot C + f \cdot (bC - \int y\,dx) = f \cdot (aC - \int y dx)$.

Les sorts des deux joueurs sont dont égaux si et seulement si

$$f \cdot (aC - \int y\,dx) = f \cdot \int y\,dx$$

donc si et seulement si

$$aC = 2 \cdot \int y\,dx$$

ou, comme l'exprime Buffon, $$\boxed{a = \frac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}C}}$$

Et Buffon poursuit immédiatement après cette dernière égalité par : « c'est-à-dire, à l'aire d'une partie de cycloïde, dont le cercle générateur a pour diamètre 2 b longueur de la baguette » sans aucunement indiquer quelle partie de cette cycloïde il considère. En fait ce n'est pas $a = \dfrac{\int y\,dx}{\frac{1}{2}C}$ mais seulement $\int y\,dx$ qui est égal « à l'aire [de cette] partie de cycloïde » . Puis Buffon affirme, à nouveau sans explications, que l'aire de cette partie de cycloïde vaut le carré du rayon b du cercle générateur[4]. À quels résultats alors connus sur la cycloïde Buffon peut-il se référer pour conclure aussi promptement ?

[3] Si $x = \mathrm{I}\varepsilon$, en notant α une mesure de l'angle Gεφ, il vient : $\cos\alpha = \frac{\varepsilon \mathrm{K}}{\varepsilon \mathrm{G}} = \frac{b-x}{b} = 1 - \frac{x}{b}$. Donc $\alpha = \arccos(1 - \frac{x}{b})$, alors $y = b\alpha = b\arccos(1 - \frac{x}{b})$. Si $x = \varepsilon\mathrm{K}$, $\alpha = \arccos(\frac{x}{b})$ et $y = b\alpha = b\arccos(\frac{x}{b})$.

[4] Il est aisé de montrer par intégration par parties que $\displaystyle\int_0^b b\arccos(1 - \frac{x}{b})dx = \int_0^b b\arccos(\frac{x}{b})dx = b^2$.

Le résultat suivant est obtenu à partir de la génération cinématique de la cycloïde : étant donnés une cycloïde et son cercle générateur en position médiane de son parcours (Fig. 3), [AB] étant la base de la cycloïde, E le milieu de cette base, φ le sommet, la droite parallèle à (AB) menée par un point P quelconque de la cycloïde coupant, du même côté de (E) que P, le cercle en G, alors la longueur y de l'arc φG est égale à celle du segment [PG] [5].

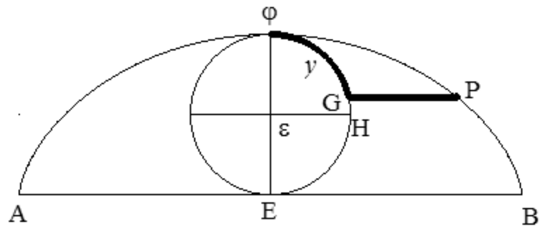


Fig. 3.

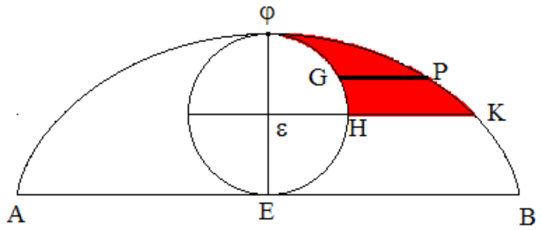


Fig. 4.

La "sommation" des longueurs y de tous les arcs φG contenus dans l'arc φH est alors équivalente, selon la méthode des indivisibles, à l'empilement des segments [PG] au-dessus de la droite (HK) (Fig. 4). Donc l'intégrale $\int y dx$ est égale à l'aire de la "corne" φGHKP limitée par l'arc de cercle φH, le segment [HK] et l'arc de cycloïde Kφ. Cette "corne" est la « partie de cycloïde » mentionnée par Buffon.

Comment a-t-il obtenu que « cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon » ? Ce résultat est connu depuis le milieu du XVIIe siècle ; John Wallis (1616-1703) a indiqué dans la préface de son *De Cycloïde* (1659) qu'il a été précédemment produit par Christiaan Huygens et Christopher Wren :

> *Non diffitetur interim Hugenium Batavum, & Wrennium nostrum prodidisse*, Portionem Cycloidis quam abscindit recta ad axim ordinatim applicata, ejusdem axis partem quartam vertici proximam absindens, æqualem esse spatio rectilineo : (*quod quidem verum est ; æquat utique* $^3/_8\,R^2\sqrt{3}$: *ut ex calculo* §*23 liquet ; uti & trilineum* CbB *fig. i. vel 7, æquare* R^2 *quadratum radii* ; [...]) [6]

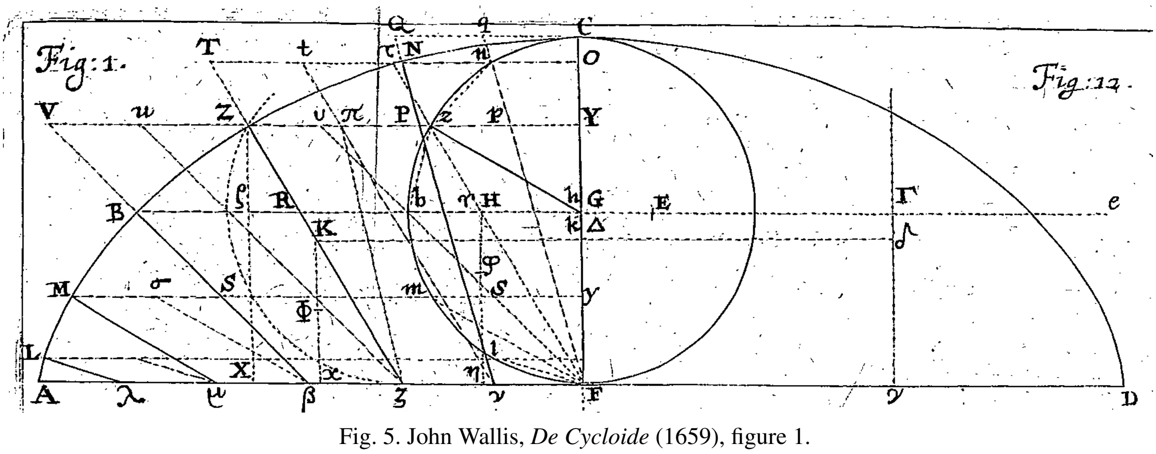


Fig. 5. John Wallis, *De Cycloide* (1659), figure 1.

[5] Cette propriété a été démontrée par Christiaan Huygens dans une note manuscrite datée de juillet 1658, publiée dans : Christiaan Huygens, *œuvres complètes. Tome XIV. Probabilités. Travaux de mathématiques pures 1655 – 1666.* (ed. D.J. Korteweg). La Haye : Martinus Nijhoff, 1920, p. 347.
Consultable sur http ://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv14_01.

Huygens l'a publiée par la suite dans son traité sur les horloges à pendule : *Christiani Hugenii Zulichemii, Const. F. Horologium oscillatorium sive De Motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ*. Paris, 1673. Deuxième partie, proposition xiv, p. 38. Consultable sur Gallica et sur le site précédemment mentionné.

[6] John Wallis, *Johannis Wallisii* SS. Th. D. GeometriæProfessoris *Saviliani* Oxoniæ, Tractatus duo. Prior, De Cycloide et corporibus inde genitis. . . .Oxford, 1659. Septième page de la préface (non paginée) :

> *Il n'est pas nié que dans l'intervalle le Hollandais Huygens et notre Wren ont montré,* Que la portion de cycloïde que découpe une droite appliquée sur l'axe de manière ordonnée, découpant la quatrième partie de ce même axe la plus proche du sommet, est égale à une surface rectiligne : (*ce qui est assurément vrai : elle est égale à* $^3/_8\,R^2\sqrt{3}$, *comme il apparait du calcul du* §*23 ; de même que le triligne* CbB *fig. i. ou 7, est égal à* R^2 *carré du rayon ;* [...]

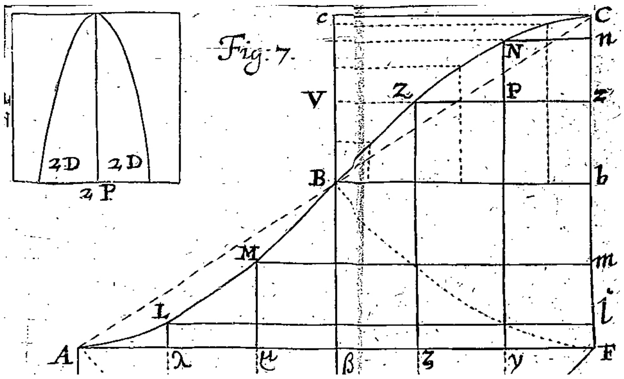


Fig. 6. John Wallis, *De Cycloide* (1659), figure 7 (détail).

Wallis a plus tard repris ces résultats dans son traité de mécanique[7] puis dans une lettre du 22 août 1695 (calendrier julien) à Richard Waller, Secrétaire de la Royal Society[8].

Dans l'intervalle séparant les deux précédents écrits de Wallis, Philippe de La Hire (1640 –1718) a publié un court traité intitulé aussi *De Cycloide*, daté du 5 septembre 1676[9]. Ce traité est composé d'un lemme, de cinq propositions et d'un corollaire.

Le lemme donne une construction de la tangente en un point quelconque de la cycloïde. En reprenant les notations de la figure 3, la tangente en P est parallèle à la corde φG du cercle générateur à mi-parcours [10].

La première proposition[11] est ainsi énoncée :

Une semicycloïde étant mise en place comme ci-dessus, TV étant menée tangente au sommet V et parallèle à la base, on trace la droite PT tangente à la cycloïde en un point quelconque P, et la droite PC parallèle à la base, et on joint CV : je dis que le triligne mixtiligne PTV est égal au segment de cercle correspondant VC.

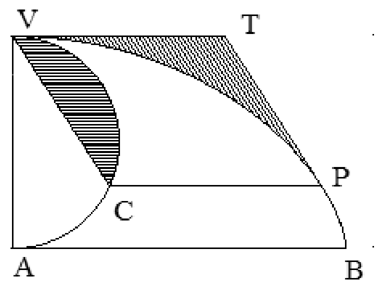


Fig. 7. Ph. de la Hire, *De Cycloide* (1676), figure 1 restituée.

La démonstration est effectuée par double réduction à l'absurde : une des deux surfaces étant supposée supérieure à l'autre, cette hypothèse conduit à une absurdité.

La troisième proposition[12] donne le résultat que Buffon a utilisé :

Soit une semicycloïde VEB de base BA, d'axe VA et de cercle générateur VDA dont le centre est C. Que soit menée CE parallèle à la base AB : je dis que le triligne VHEDI est égal au carré du rayon VC du cercle générateur.

[7] John Wallis, *Mechanica, sive De Motu, tractatus geometricus. Pars secunda.* Londres, 1670. Chap. V, p. 367-389

[8] John Wallis, *An Extract of a Letter from the Reverend Dr.* John Wallis *to* Richard Waller, *Esq ; Secretary to the Royal Society, concerning the Spaces in the* Cycloid, *which are perfectly Quadrable. Oxford, August* 22. 1695.

[9] Philippe de La Hire, *De Cycloide* suivi de *De Sectionibus Conicis.* Paris, 1676.

[10] Descartes a donné, dans une lettre au père Mersenne du 23 août 1638, une construction équivalente de la tangente à la cycloïde ; il construit d'abord la normale au point considéré de la cycloïde (P dans la figure 3) comme étant la parallèle en P à la corde GE. La tangente s'en déduit immédiatement. Voir *Œuvres de Descartes*, par les soins de Charles Adam et Paul Tannery, comprenant la *Correspondance*. XI volumes. Paris, 1897-1907. Réédition par les éditions du CNRS et les éditions Vrin. Paris, 1974-1991. La lettre mentionnée se trouve dans le tome II de la Correspondance, sous le n° CXXXVIII, p. 307-313. Consultable sur Gallica.

Un extrait de cette lettre, se rapportant à la tangente à la cycloïde a été publié et commenté dans *Aux origines du calcul infinitésimal.* Paris : éditions Ellipses, 1999, p. 112-114.

[11] Philippe de La Hire, *De Cycloide*, 1676, p. 1 :

Propositio I^{a}. Expositâ semicycloide ut supra, ducta contingente TV in vertice V & parallela basi, agatur recta PT contingens Cycloidem in aliquo puncto P, & PC parallela basi, & connectatur CV : Dico triangulum mixtilineum PTV esse æquale Circuli segmento correspondenti VC.

[12] *Id.* p. 2 :

Propositio III^{a}. Esto semicyclois VEB cujus basis BA, Axis VA & circulus genitor VDA cujus centrum C. ducta CE parallela basi AB : dico trilineum VHEDI ess æquale quadrato Radij VC circuli genitoris.

Ducta reta DV & ejus parallela EF contingente Cycloidem in E : per descriptionem Cycloidis manifestum est parallelogrammum VDEF esse æquale dimidio circuli genitoris. Sed per primum propositionem Trilineum EFVH æquale est segmento circuli DVI, si auferamus igitur æqualia ab æqualibus scilicet à parallelogrammo VDEF & à semicirculo VDA bis segmentum Circuli VDI, remanebunt trilineum VHEDI & triangulum VDA æqualia, quod erat propositum.

La démonstration donnée par La Hire commence par la construction des tangentes à la cycloïde en V et E ; la première est parallèle à la base AB, la seconde à la corde VD. Ces deux tangentes se coupent en F ; VDEF est donc un parallélogramme dont il est *manifeste* pour La Hire que son aire $\mathcal{P}$ est égale à celle du demi disque générateur VDA, notée $\mathcal{D}_1$. Cette égalité demande aujourd'hui quelque justification ; d'une part, il est connu, et il était connu de La Hire, grâce à *La Mesure du cercle* d'Archimède[13] , que l'aire $\mathcal{D}$ d'un disque est la même que celle du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la circonférence du disque d'une part et son rayon d'autre part, donc que celle, notée $\mathcal{R}$, d'un rectangle ayant pour côtés la demi circonférence et le rayon du disque. D'autre part, l'aire $\mathcal{P}$ du parallélogramme VDEF est égale à celle, notée $\mathcal{P}_1$, du rectangle de côtés DE et VC [14] ; or le côté DE a même longueur que l'arc VD, à savoir le quart de la circonférence du cercle générateur, donc l'aire $\mathcal{P}_1$ du rectangle sur DE et VC vaut la moitié de celle, $\mathcal{R}$, du rectangle ayant pour côtés la demi circonférence et le rayon du disque, donc $\mathcal{P}_1$ vaut la moitié de l'aire $\mathcal{D}$ du disque, à savoir $\mathcal{D}_1$, aire du demi disque VDA.

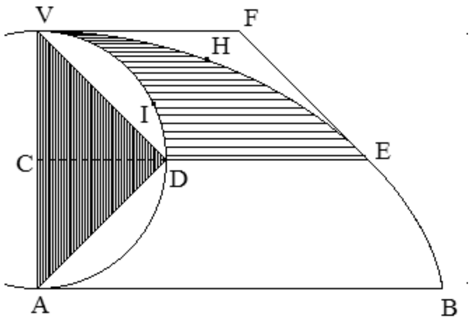


Fig. 8. Ph. de la Hire, *De Cycloide* (1676), figure 3 restituée.

La “corne” VHEDI est obtenue en retranchant du parallélogramme VDEF le segment de cercle VID et le triligne VHEF qui a la même aire que le segment VID ; donc son aire est obtenue en diminuant celle du parallélogramme du double de l'aire du segment VID. Cette aire est donc égale à celle du demi disque diminuée des aires égales des deux segments de disque VID et AD. L'aire de la “corne” VHEDI est donc égale à celle du triangle VDA, et donc à celle du carré sur CD, rayon du cercle générateur. CQFD.

De quels de ses prédécesseurs Buffon a-t-il connu ces résultats : Huygens, Wren, Wallis, La Hire ou autre ? Difficile de répondre à cette question sans une connaissance de la bibliothèque de Buffon, connaissance qui ne serait même peut-être pas suffisante pour assurer une réponse. Il n'est cependant pas invraisemblable que Buffon, membre de l'Académie Royale des Sciences à partir de 1733, ait pu connaître le traité de La Hire qui fut membre de la même académie jusqu'à sa mort en 1718.

En utilisant la formule $a = \dfrac{\int y dx}{\frac{1}{2}C}$ exprimant le fait que le jeu est égal entre les deux joueurs, et $C = \dfrac{\pi}{2}b$, il vient $a = \dfrac{b^2}{\frac{\pi}{4}b} = \dfrac{4b}{\pi}$ ou encore $b = \dfrac{\pi}{4}a$, ce que Buffon exprime par « la longueur de la baguette doit faire à peu-près les trois quarts de la distance des joints du parquet ».

II. – Baguette sur carrelage

Buffon aborde alors un cas semblable bien qu'un peu plus difficile, celui où le parquet à lames est remplacé par un pavage standard à carreaux carrés. Les notations restent les mêmes que précédemment :

a désigne le demi côté du carreau, b la demi longueur de la baguette, C le quart de la circonférence du cercle de rayon b et y la longueur d'un arc variable du quart de cercle de rayon b.

Comme ne le fait pas Buffon, il convient de remarquer que si la longueur de la baguette excède celle de la diagonale du carreau, la baguette rencontre toujours un joint. Donc il est supposé ici le contraire, à savoir

[13] Archimède, *La Mesure du cercle*. Paris : Les Belles Lettres, 1970. Tome I. Traduit du grec par Charles Mugler, p. 138g :
I. Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle.

[14] Euclide, *Les Éléments*. Volume 1. Traduit du grec par Bernard Vitrac. Paris : Presses Universitaires de France, 1990. Livre I, proposition 35, p. 262 :
Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

$$2b < 2\sqrt{2}a \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \frac{a}{b} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Buffon inscrit dans le carreau un carré homothétique distant de b des côtés du carreau et par souci de simplification et raison de symétries, il mène l'étude sur un quart de carreau, ABCD (Fig. 9).

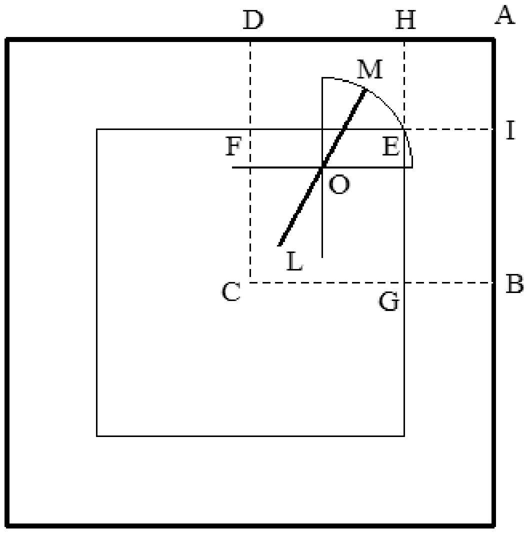


Fig. 9. Carreau et baguette : premier cas.

Buffon, dans un premier temps, donne $C(a-b)^2$ pour "mesure" de la "quantité" d'une partie des cas où la baguette ne rencontre aucun joint. Il est aisé ici de reconnaître dans ces cas ceux où le milieu O de la baguette tombe dans le carré CFEG ; conformément à la méthode employée précédemment par Buffon, la "quantité" de telles positions de la baguette est "mesurée" par le produit de l'aire du carré CFEG par le quart de la circonférence du cercle de diamètre b, donc par $C(a-b)^2$.

Buffon annonce ensuite, sans explication ni *a fortiori* de démonstration, $(2a-b)\int y\,dx$ pour "mesure" de la "quantité" des cas où la baguette rencontre un joint. Il ne semble pas outrancier de proposer ici une tentative de reconstitution d'un chemin vraisemblablement suivi par la pensée de Buffon pour atteindre le résultat annoncé.

La baguette ne peut rencontrer un joint que si son milieu tombe dans le gnomon ABGEFD. Ce polygone est alors partagé en trois parties, deux rectangles, DHEF et EIBG, et un carré, le coin AIEH (Fig. 9).

1.- Dans le cas où le milieu O de la baguette tombe dans le rectangle DHEF (Fig. 10), il est naturel de reprendre la procédure suivie par Buffon dans le cas d'une lame de parquet. Le milieu O de la baguette tombant en un point fixé de DHEF, le quart de cercle de centre O et de rayon b coupant le joint AD en M, la "quantité" de positions où la baguette rencontre ce joint est "mesurée" par y, longueur de l'arc NM. Lorsque O occupe toutes les positions sur le segment [PR], la "quantité" de positions de rencontre est "mesurée" par l'intégrale sur [PR] des arcs NM, donc par $\int_0^b y\,dx$, où x désigne la longueur PO (ou RO). Cette intégrale est notée, comme précédemment, $\int y\,dx$. En conséquence la "quantité" de positions de rencontre du joint quand le milieu de la baguette tombe dans le rectangle DHEF est "mesurée" par le produit de cette intégrale par la longueur DH du rectangle donc par $(a-b)\int y\,dx$. Par symétrie, ce nombre "mesure" aussi la "quantité" de positions de rencontre de la baguette avec le joint quand le milieu de la baguette tombe dans le rectangle EIBG.

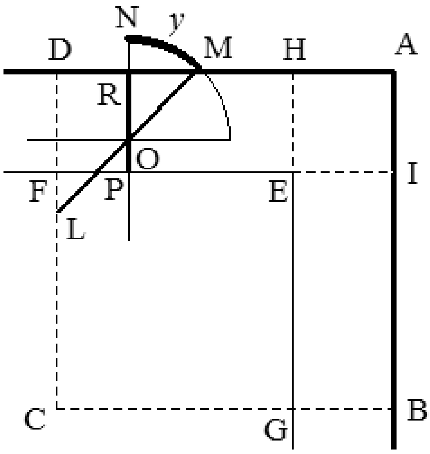


Fig. 10. Carreau et baguette. Cas 1

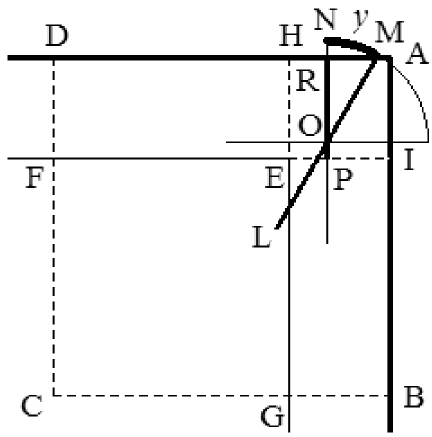


Fig. 11. Carreau et baguette. Cas 2

2.- Pour le cas où le milieu de la baguette tombe dans le carré de coin AIEH (Fig. 11), il semble que Buffon procède de la même façon et obtient pour la "quantité" de positions de rencontre $b \displaystyle\int y\, dx$. Mais la procédure utilisée dans ce cas est, dès l'abord, problématique et en fait erronée ; en effet, le quart de cercle sur lequel se situe l'extrémité de la baguette coupe les deux joints du coin (Fig. 11).[15]

Cependant, en suivant la probable démarche de Buffon, la "quantité" de positions de rencontre de la baguette avec un joint est "mesurée" par :

$$2(a-b)\int y\, dx + b\int y\, dx \quad \text{soit} \quad (2a-b)\int y\, dx$$

Pour déterminer la "quantité" de positions où la baguette ne rencontre pas un joint, toujours dans le cas où son milieu tombe dans le gnomon ABGEFD, Buffon calcule la différence entre la "quantité" de toutes les positions pour lesquelles le milieu O tombe dans le gnomon et celle des positions de rencontre avec un joint, $(2a-b)\int y\, dx$. Buffon, une fois encore, n'explicite pas le calcul de la première de ces "quantités", mais il est facile de comprendre qu'elle est "mesurée" par le produit de l'aire du gnomon par le quart de la circonférence du cercle de rayon b, donc par
$\left[a^2-(a-b)^2\right]\cdot C = Cb(2a-b)$.

Ainsi la "quantité" de positions où la baguette ne rencontre pas un joint, toujours dans le cas où son milieu tombe dans le gnomon, est "mesurée" par :
$C = Cb(2a-b) - (2a-b)\int y\, dx$.

Bilan

Au total, la "quantité" des positions où la baguette ne rencontre aucun joint est "mesurée" par :
$C(a-b)^2 + Cb(2a-b) - (2a-b)\int y\, dx$ tandis que la "quantité" des positions où la baguette rencontre un joint est "mesurée" par : $(2a-b)\int y\, dx$.

Le jeu est donc égal à la condition

$$C(a-b)^2 + Cb(2a-b) - (2a-b)\int y\, dx = (2a-b)\int y\, dx$$

$$\text{Soit} \qquad C(a-b)^2 + Cb(2a-b) = 2(2a-b)\int y\, dx^{16}$$

$$\Leftrightarrow \qquad C(a^2-2ab+b^2+2ab-b^2) = 2(2a-b)\int y\, dx$$

$$\Leftrightarrow \qquad Ca^2 = 2(2a-b)\int y\, dx$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\frac{1}{2}Ca^2}{2a-b} = \int y\, dx$$

En reprenant le résultat précédemment utilisé, à savoir $\int y\, dx = b^2$, Buffon obtient $\dfrac{\frac{1}{2}Ca^2}{2a-b} = b^2$ dont il déduit, sans indiquer comment, que le rapport du côté du carreau à la longueur de la baguette est voisin de $\dfrac{41}{22}$.

[15]Une étude de la méthode suivie par Laplace pour résoudre correctement ce problème fait l'objet de l'appendice 1.

[16]Et non $C(a-b)^2 + Cb(2a-b) = (2a-b)^2\int y\, dx$ comme le mentionne le texte.

Il est aisé d'obtenir la valeur du rapport a/b par la résolution d'une équation polynomiale du second degré. En effet

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}Ca^2}{2a-b} = b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4}ba^2 = (2a-b)b^2 \qquad \text{car} \qquad C = \frac{\pi}{2}b \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4}a^2 - 2ab + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} + 1 = 0\end{aligned}$$

Cette équation a pour discriminant $4-\pi > 0$; elle a donc deux solutions réelles :

$$s_1 = \frac{2+\sqrt{4-\pi}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4+2\sqrt{4-\pi}}{\pi} \text{ et } s_2 = \frac{4-2\sqrt{4-\pi}}{\pi}$$

qui ont respectivement pour valeurs approchées $1,86$ et $0,68$ à 10^{-2} près. Or le rapport du côté du carreau à la longueur de la baguette est soumis à la condition $\dfrac{a}{b} > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc la solution s_2 ne convient pas. Buffon utilisant $\dfrac{22}{7}$ pour valeur approchée de π, s_1 est voisine de $\dfrac{4+2\sqrt{4-\frac{22}{7}}}{\frac{22}{7}} = \dfrac{28+14\sqrt{\frac{6}{7}}}{22}$ et $28+14\sqrt{\dfrac{6}{7}} \approx 40,96$.

Donc le jeu est égal lorsque le rapport du côté du carreau à la longueur de la baguette est voisin de Buffon ajoute que, ce rapport étant légèrement inférieur à 2, il y aurait intérêt, si la longueur de la baguette[17] est moitié du côté des carreaux, « à parier que l'aiguille croisera les joints. »

Dans un bref paragraphe, Buffon aborde enfin le cas où le jeu consiste à lancer une pièce carrée, de demi diagonale b, sur pavage à pavés carrés de côté a. Il donne sans explication le résultat suivant : le rapport du total des sorts au sort du joueur qui parie pour le joint est

$$\frac{a^2C}{4ab^2\sqrt{\frac{1}{2}} - b^3 - \frac{1}{2}Ab}$$

où A désigne l'excès du cercle circonscrit à la pièce carrée sur ce carré. Sachant que $C = \dfrac{\pi}{2}$ et que $A = (\pi-2)b^2$, ce rapport se simplifie en $\dfrac{\pi a^2}{4\sqrt{2}ab - \pi b^2}$.

En dépit de ses imprécisions et d'une erreur dans la dernière partie, l'essai de Buffon a le grand mérite d'avoir abordé des problèmes de probabilités continues pour la première fois, semble-t-il. Buffon y utilise avec bonheur, les résultats de la géométrie du XVIIe siècle, en particulier sur la cycloïde, ce dont témoigne Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences en 1733* : « Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendrait le pari ou le jeu égal, & c'est ce que M. le Clerc a déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d'élégance au jugement de l'Académie. ». Une lecture attentive du texte montre que son objet ne concerne pas le calcul d'une approximation du nombre π auquel il a été maintes fois réduit par la suite.

Bibliographie.

[A & Z, 2006] **M. AIGNER & G. M. ZIEGLER**, *Raisonnements Divins*, 2ème éd., Berlin, Springer, 2006. Chap. 21, Le problème de l'aiguille de Buffon, p. 153-156.

[B, 1777] **G.-L. LECLERC**, Comte de **BUFFON**, l'*Histoire naturelle, générale et particulière. Servant de suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme* (1777). Supplément, Tome Quatrième. XXIII, p. 95-105.

[H, 1981] **P. HOLGATE**, Buffon's Cycloid *in Studies in the history of probability and statistics* XXXIX, *Biometrika*, 68, 3, p. 712-716.

[K, 2009] **A. KALOUSOVA**, Solutions of Buffon's problems in the 19th century, in WDS'09 Proceedings of contributed Papers, Part I, Matfyzpress, 198-203, 2009.

[L, 1812] **P.-S. de LAPLACE**, *Théorie analytique des Probabilités*, 1ère éd., Paris : Veuve Courcier, 1812, p. 359-362.

[17] En fait Buffon utilise ici le terme *aiguille* au lieu du mot *baguette* employé jusqu'à présent.

Appendices

1. Solution du problème de Buffon par Laplace

À la fin du chapitre V du Livre II de son monumental traité, Théorie analytique des probabilités, publié en 1812, Pierre-Simon de Laplace propose de « faire usage du Calcul des Probabilités pour rectifier les courbes et quarrer les surfaces. » Il mentionne ensuite le problème de Buffon, sans faire aucune référence à son auteur, dans les termes suivants : « Imaginons un plan divisé par des lignes parallèles équidistantes de la quantité a ; concevons de plus un cylindre très étroit, dont $2r$ soit la longueur, supposée égale ou moindre que a. On demande la probabilité qu'en le projetant, il rencontrera une des divisions du plan. »[18]. La résolution qu'il propose est plus simple que celle de Buffon pour deux raisons principales. La première est sa façon de modéliser le problème : il étudie l'intersection d'un cylindre d'épaisseur négligeable, espace balayé par la baguette quand elle tourne autour de son centre, et d'un réseau de lignes parallèles équidistantes. La seconde est l'utilisation du calcul intégral pour le traitement mathématique du problème. Il imagine que le centre du cylindre est placé sur une perpendiculaire à deux divisions parallèles successives, à la hauteur y au-dessus de la première de ces divisions et note φ l'angle que fait le cylindre avec la perpendiculaire, au moment où il rencontre cette division (Fig. 12). L'ensemble des cas favorables à cette rencontre correspond à toutes les positions obtenues en faisant tourner le cylindre autour de son centre pour lesquelles une des extrémités d'un diamètre est sur la partie de circonférence de longueur 2φ. Il somme tous ces arcs pour y variant de 0 à r et, comme un diamètre a deux extrémités, doit calculer $4\int_0^r \varphi\, dy$.

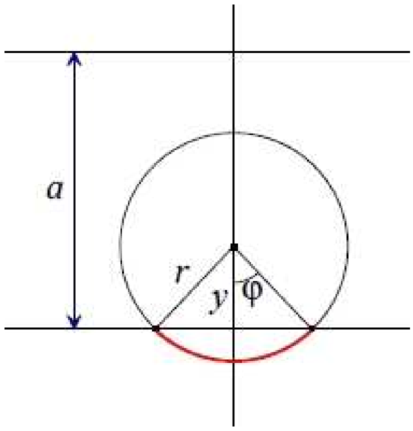


Fig. 12.

À l'aide d'une intégration par parties, il obtient : $4\displaystyle\int_0^r \varphi\, dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi\, d\varphi.$

En remarquant que le cylindre peut rencontrer la division suivante quand y varie de $a - r$ à a, il obtient de même une somme des arcs favorables à une rencontre avec la deuxième division égale à $4r$ et obtient finalement la somme de tous les arcs favorables à une rencontre égale à $8r$. La somme de tous les arcs (ensemble des cas possibles) quand le centre du cylindre décrit le segment perpendiculaire aux deux divisions entre celles-ci vaut $a2\pi$. Il en déduit :

« la probabilité de rencontre d'une des divisions du plan par le cylindre est donc $\dfrac{4r}{a\pi}$. »

Ensuite, il imagine un système de lignes perpendiculaires aux précédentes et équidistantes d'une distance b supérieure ou égale à la longueur $2r$ du cylindre formant avec les précédentes un réseau rectangulaire. C'est une généralisation du problème de Buffon (qui avait envisagé le cas $a = b$) et Laplace le résout correctement. Il considère un rectangle de hauteur a et de longueur b et construit à l'intérieur de ce dernier des droites parallèles aux côtés du premier, à une distance r. Le rectangle initial est ainsi constitué d'un rectangle de longueur $b-2r$ et de hauteur $a - 2r$, de deux rectangles de hauteur r et de longueur $b-2r$, de deux rectangles de hauteur $a-2r$ et de longueur r et de 4 carrés de côté r.

Lorsque le centre du cylindre se trouve à l'intérieur du premier rectangle, le cylindre ne peut rencontrer les côtés du grand rectangle.

[18] Voir [L, 1812], p. 359 dans la bibliographie de fin d'article

Lorsque le centre du cylindre se trouve à l'intérieur d'un des deux rectangles de hauteur r et de longueur $b - 2r$, le nombre de combinaisons où le cylindre rencontre les côtés du grand rectangle s'obtient comme précédemment et vaut $8r(b - 2r)$.

De même, lorsque le centre du cylindre se trouve à l'intérieur d'un des deux rectangles de hauteur $a - 2r$ et de longueur r, le nombre de combinaisons où le cylindre rencontre les côtés du grand rectangle vaut $8r(a - 2r)$.

Il considère enfin le cas des quatre petits carrés. Soit $ABCD$ le carré situé en haut à droite (A étant le sommet du grand rectangle) et trace dans ce carré le quart de cercle $\overset{\frown}{BD}$ de centre A et de rayon r.

Lorsque le centre du cylindre se trouve dans le quart de disque limité par $\overset{\frown}{BD}$, le cylindre, quelle que soit sa position, rencontre les côtés du grand rectangle : le nombre de combinaisons correspondant à ce cas est égal au produit de 2π par l'aire du quart de disque, c'est-à-dire $\dfrac{\pi^2 r^2}{2}$.

Lorsque le centre du cylindre se trouve dans la partie du carré à l'extérieur du quart de disque limité par $\overset{\frown}{BD}$, le cylindre en tournant peut rencontrer l'un ou l'autre des côtés AB et AD prolongés, mais pas les deux simultanément. Pour déterminer le nombre de combinaisons relatives à cette rencontre, il considère les projections du centre sur les côtés AB et AD, place les quatre points à distance r du centre sur les côtés AB et AD éventuellement prolongés (Fig. 13). En notant x et y les distances du centre aux côtés AB et AD, 2φ et $2\varphi'$, les angles interceptés par les arcs extérieurs au grand rectangle, il trouve un nombre de combinaisons dans lesquelles le cylindre rencontre l'un des côtés du grand rectangle égal à $4\displaystyle\int \varphi + \varphi' \, dxdy$ où $x = r\cos\varphi'$ et $y = r\cos\varphi$.

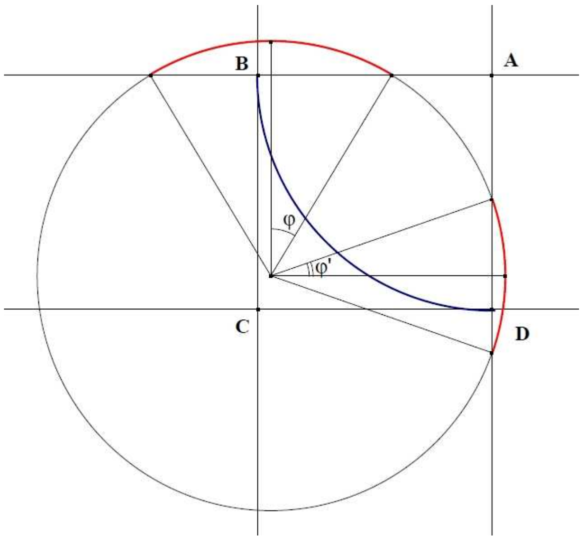


Fig. 13.

Cette intégrale vaut $4r^2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi + \varphi') \sin\varphi' d\varphi' d\varphi$ soit $\dfrac{1}{2} r^2 (12 - \pi^2)$.

D'où pour l'ensemble des quatre carrés, $4\left(\dfrac{1}{2} r^2(12 - \pi^2) + \dfrac{\pi^2 r^2}{2}\right)$ et pour les quatre rectangles périphériques, $8ar - 16r^2 + 8br - 16r^2 = 8(a + b)r - 32r^2$.

Le nombre total de combinaisons relatives à la rencontre du grand rectangle par le cylindre est donc égal à $8(a + b)r - 8r^2$. Comme la somme de tous les arcs (ensemble des cas possibles) quand le centre du cylindre parcourt le rectangle vaut $ab2\pi$, Laplace en déduit :

« la probabilité de la rencontre des divisions du plan par le cylindre est donc $\dfrac{4(a + b)r - 4r^2}{ab\pi}$. »

Remarque :

Si on utilise le résultat obtenu par Laplace au cas où $a = b$ (celui qu'avait envisagé Buffon), on a donc une probabilité de rencontre égale à $\dfrac{8ar - 4r^2}{a^2\pi}$.

Le jeu sera égal si $\dfrac{8ar - 4r^2}{a^2\pi} = \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{16a'r - 4r^2}{4a'^2\pi} = \dfrac{1}{2}$, en notant a' le demi-côté du carré.

Cette équation équivaut à : $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{a'}{r}\right)^2 - 4\dfrac{a'}{r} + 1 = 0$, équation polynomiale du second degré dont l'unique solution vérifiant $\dfrac{a'}{r} \geq 1$, vaut $\dfrac{4 + \sqrt{16 - 2\pi}}{\pi}$.

Cette valeur voisine de $\dfrac{4+\sqrt{16-2\cdot\dfrac{22}{7}}}{\dfrac{22}{7}} = \dfrac{28+2\sqrt{119}}{22} \approx \dfrac{50}{22}$ est différente de celle trouvée par Buffon.

2. Sur l'évaluation de π

En revenant au cas de la baguette jetée sur un parquet, il a été montré que la "quantité" des positions de la baguette coupant (AB) est "mesurée" par $f \cdot \int y\,dx$ tandis que la "quantité" totale des positions de la baguette est "mesurée" par $f \cdot aC$, si bien que la probabilité p pour que la baguette rencontre le joint est

$$p = \frac{f \cdot \int y\,dx}{f \cdot aC} = \frac{b^2}{a\dfrac{\pi}{2}b} = \frac{2b}{\pi a}$$

soit, en posant $r = \dfrac{a}{b}$ qui est la véritable variable du problème,

$$p = \frac{2}{\pi r} \tag{1}$$

Si la longueur de la baguette est égale à la largeur de la lame de parquet, donc si r = 1, alors $p = \dfrac{2}{\pi}$

Soit $\pi = \dfrac{2}{p}$ ou, en remplaçant p par la fréquence f de rencontre de la baguette avec le joint pour un grand nombre de jets, $\boxed{\pi \approx \dfrac{2}{f}}$. Toutefois , si $b > \dfrac{\pi}{2}a$, il vient $r < \dfrac{2}{\pi}$. La formule (1) semble alors induire un résultat aberrant, à savoir : $p > 1$

Ce serait oublier que la démarche adoptée par Buffon n'est valide que pour $b \leq a$.

Au sujet de cette méthode du type *Monte-Carlo*, nous pouvons lire dans l'ouvrage de **Jean-Paul Delahaye**, *Le fascinant nombre* π, que son efficacité est très mauvaise et se distraire, pour finir, des faits rapportés.

« Des expériences ont prétendument été réalisées pour mesurer π par la méthode de Buffon :

– en 1850, **Wolf** lance 5000 aiguilles avec un rapport $\dfrac{b}{a} = 0,8$ et trouve 2532 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1596$

– en 1855, **Smith d'Aberdeen** lance 3204 aiguilles avec un rapport $\dfrac{b}{a} = 0,6$ et trouve 1218,5 intersections (les demi-intersections correspondent aux cas ambigus) ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1553$

– en 1860, **Augustus De Morgan** lance 600 aiguilles avec un rapport $\dfrac{b}{a} = 1$ et trouve 382,5 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,137$

– en 1864, le capitaine **Fox** lance 1030 aiguilles avec un rapport $\dfrac{b}{a} = 0,75$ et trouve 489 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1595$

– en 1901, **Lozzerini** lance 3404 aiguilles avec un rapport $\dfrac{b}{a} = 0,83$ et trouve 1808 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1415929$

– enfin en 1925, **Reina** lance 2520 aiguilles avec un rapport $\dfrac{b}{a} = 0,5419$ et trouve 859 intersections ; il en déduit l'approximation $\pi \approx 3,1795$.

Pour railler ceux qui prétendent déterminer π avec ce type d'expérience, et qui arrangent parfois leurs résultats (le résultat de Lozzerini est trop beau pour être vrai), **N. Gridgeman** proposa d'utiliser des aiguilles de taille adaptée. En prenant par exemple $b = 78,5398$ centimètres et $a = 1$ mètre, la probabilité est $\dfrac{2 \times 0,785398}{\pi}$; en lançant seulement deux aiguilles, si l'une coupe le bord de la lame et pas l'autre, on obtient un score de $\dfrac{1}{2}$, d'où l'on tire l'approximation de $\pi = 4 \times 0,785398 = 3,141592$ ce qui n'est pas mal ! »

Notes de lecture : livres récents en histoire et épistémologie des mathématiques

Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique*, vi + 208 pages, collection *Références sciences*, Ellipses, Paris, 2011, 27 euros

Ce livre très personnel défend une conception constructive des mathématiques, dans la lignée du mathématicien américain Errett Bishop. Il intéressera certainement tous les enseignants et passionnés de mathématiques qui s'intéressent aux fondements pratiques de leur discipline. Il risque cependant d'irriter non seulement les mathématiciens « orthodoxes », mais aussi, par ses approximations, les philosophes et historiens des sciences. Il souffre d'un style peu aisé, parfois péremptoire. De nombreuses coquilles (p. 102 : *interptétation*, p. 138 : *hypotèse*, etc.) indiquent que l'éditeur n'a pas fait le plus élémentaire de son travail. L'index et la bibliographie présentent des lacunes. Enfin, le remplissage de treize pages par le copié-collé d'une « chronologie de scientifiques » sans le moindre rapport avec le sujet est surprenant. Mais le cœur de l'ouvrage est intéressant : il se trouve dans l'étude fine et détaillée de plusieurs démonstrations classiques d'arithmétique, d'analyse ou d'algèbre linéaire, ayant pour but de montrer comment des méthodes effectives peuvent souvent être substituées aux méthodes abstraites. Le chapitre consacré à la théorie des ensembles rappelle à juste titre – après d'autres auteurs – que le théorème de Cantor, dont la démonstration n'utilise pas le principe du tiers exclu, appartient aux mathématiques constructives. Celui qui s'intitule *Points de repère historiques sur l'infini en mathématiques*, superficiel et maladroitement rédigé au futur, s'achève par une attaque en règle du traité de Bourbaki, sur un ton qui rappelle le Roger Apéry des années 1970, mais me paraît désormais bien inutile : il aurait été plus à propos d'expliquer sans le caricaturer ce qu'était le dessein de Bourbaki, dont l'auteur semble supposer, bien à tort, que le nom est connu des étudiants et enseignants du XXI^e siècle. J'ai trouvé plus stimulant, même s'il est hautement spéculatif du point de vue historique, le chapitre où l'auteur avance l'idée selon laquelle les démonstrations réputées fausses du *Cours d'analyse* de Cauchy étaient en fait parfaitement correctes : il faut, selon lui, comprendre les différentes définitions données par Cauchy comme contenant la dose suffisante d'uniformité.

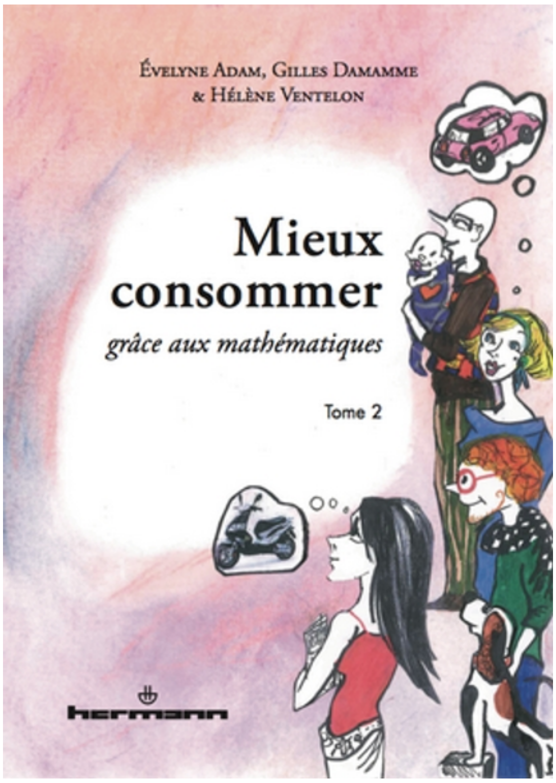
Ahmed Djebbar et Marc Moyon, *Les sciences arabes en Afrique. Mathématiques et astronomie IX^e-XIX^e siècles*, suivi de *Nubdha fî 'ilm al-hisâb* d'Ahmad Bâbir al-Arawânî, 192 pages, collection Manuscrits du désert, Grandvaux-Vecmas, Brinon-sur-Sauldre, 2011, 19 euros

Le titre de la collection dans laquelle cet intéressant ouvrage prend place ne doit pas tromper : il concerne bien l'ensemble du continent africain, et non les seules régions sahéliennes ou subsahariennes. Plus de la moitié du livre est donc occupée par deux synthèses brillantes de Ahmed Djebbar, l'une sur l'Égypte et l'autre, issue en partie de ses propres recherches, sur le Maghreb. La période qui s'étend du XVI^e siècle au XIX^e siècle, réputée moins brillante et encore peu étudiée, est traitée de manière un peu plus détaillée qu'à l'accoutumée. En ce qui concerne l'Afrique occidentale subsaharienne, après une courte mise en contexte d'Ahmed Djebbar, Marc Moyon donne une liste importante, établie sur catalogues, de manuscrits mathématiques ou astronomiques qui y sont ou y étaient conservés. On remarque que les auteurs locaux y sont très peu nombreux : ceci ne doit pas conduire à minorer l'intérêt de cette liste, car c'est la circulation des textes qu'il convient de placer au centre de la réflexion (malheureusement, aucun manuscrit daté n'est signalé). En annexe sont donnés le texte arabe et une traduction française d'un petit traité d'arithmétique élémentaire « soudanais » du XX^e siècle, très mutilé, mais intéressant par les auteurs qu'il cite ; je regrette l'absence de toute description physique de ce manuscrit, hormis deux montages photographiques ambigus. L'usage de la photographie est franchement désinvolte dans tout livre : on ne sait pas quels sont les manuscrits reproduits p. 31, 76, 115 (seul le titre en est donné), ni pourquoi ils le sont. La « couture » entre les contributions des deux auteurs est imparfaite : ainsi le ar-Ragrâgî de la p. 98 n'est certainement pas le même que son homonyme de la p. 127, contrairement à ce que laisse supposer l'index. Il ne s'agit là que de petits défauts : ce livre aborde un sujet passionnant, presque vierge, et se veut d'abord un signalement de sources, augmenté d'une riche bibliographie – un bel et précieux encouragement à la recherche. Mais le jour même où j'écris ces lignes, l'Unesco s'inquiète du sort des vieilles cités du Mali du nord, tombées aux mains de groupes rebelles touaregs et islamistes. Sans même envisager le pire (le pillage des lieux de conservation), il est à craindre que ces événements n'interrompent durablement les recherches dans les bibliothèques du désert.

Pierre Ageron

Présentation de « Mieux consommer grâce aux mathématiques - Tome 2 »

Depuis une dizaine d'années le groupe, « Maths et consommation », de l'IREM de Basse-Normandie travaille sur des problèmes de mathématiques liés à la consommation.
Sa motivation initiale a tout d'abord été de donner du sens aux mathématiques que nous enseignons, de motiver un certain public d'élèves habituellement rebuté par les mathématiques, et aussi de rendre les élèves plus autonomes et plus responsables face à notre société de consommation.
Il a développé de nombreuses activités sur ce thème et travaillé sur un ouvrage : « Mieux consommer grâce aux mathématiques » dont le premier tome est paru en septembre 2010 aux éditions Hermann. Voici le deuxième tome qui vient de paraître fin avril 2012.



L'avantage du livre « Mieux consommer grâce aux mathématiques » est que contrairement aux romans, il n'est pas nécessaire d'avoir lu le premier tome[1] pour aborder le second tome[2]. En fait, la subdivision choisie correspond à deux niveaux distincts : le tome 1 est plutôt centré sur des exercices de niveau collège, le tome 2 sur des exercices de niveau lycée, même si quelques exercices peuvent être abordés dès le collège et quelques autres à l'université ; toutefois, les exercices ne font appel qu'à des outils mathématiques ne dépassant jamais ceux du lycée et abordent directement la résolution de problèmes. Ils ont été conçus de manière à rester accessibles au public le plus large possible.

Disposer des outils du lycée permet d'aborder deux thèmes nouveaux : les crédits (en particulier les crédits renouvelables) et les jeux. Nous abordons aussi les pourcentages, les garanties, les courses, etc. Dans le prolongement du tome 1, développer l'autonomie des citoyens face aux pièges de notre société de consommation nous a semblé un objectif primordial. L'exercice "Une offre alléchante"[3], que vous pourrez découvrir, illustre la démarche des auteurs. L'enjeu est de taille : le chiffre d'affaires des organismes de crédit s'élève à plusieurs dizaines de milliards d'euros ; en 2010 plus de 184 000 dossiers de surendettement avaient été déposés. Au total plus de 900 000 ménages français étaient surendettés, et plus de 80% avaient contracté des crédits renouvelables. Pour traiter du calcul de ces crédits, l'utilisation des algorithmes se révèle un outil pertinent, et une partie du livre est consacré à la construction de ces algorithmes.

La construction d'un algorithme est plus appropriée que l'utilisation d'outils mathématiques rendue difficile à cause des mensualités variables et arrondies. De plus, une fois cet algorithme construit, les modifications pour construire un nouveau programme pour calculer le coût du crédit quand on change le montant de la mensualité ou que l'on ajoute une assurance au crédit sont plus souples à apporter et permettent de s'assurer de la compréhension des élèves.

Une autre partie de ce tome 2 est consacrée à l'étude de jeux utilisant les probabilités.

Par exemple, un exercice "Le Rapido"[3] permet d'aborder sur une situation concrète quelques notions de probabilité : combinaisons, variable aléatoire, loi de probabilité, espérance. L'aspect répétitif permet de se familiariser doucement avec une notion, de détailler le calcul de combinaisons sur une question, et de vérifier sur les autres questions si les élèves ont bien assimilé la technique. L'interprétation du résultat permet de donner un sens un peu concret à la notion d'espérance.

De plus, une fois la table de la loi de probabilité construite, elle peut être réinvestie pour construire d'autres exercices : simuler par exemple plusieurs enjeux consécutifs en utilisant la loi binomiale pour ré-

[1] Il a été présenté dans le numéro 21 de MathémaTICE (http ://revue.sesamath.net/spip.php ?article302)
[2] présenté sur MathémaTICE (http ://revue.sesamath.net/spip.php ?article401)
[3] exercices détaillés disponibles sur l'article présentant le tome 2 sur MathemaTICE

pondre à une question précise : combien a-t-on de chances de gagner au moins une fois une somme supérieure à 100 € en jouant chaque jour pendant un an ? Etc.

Tous les exercices ont été construits à partir de situations réelles : choisir entre deux promotions, évaluer s'il est plus intéressant de louer ou de payer les intérêts d'un emprunt immobilier, estimer le prix du fuel, etc. Ils sont tous corrigés et quelques rappels de cours sur les pourcentages, les suites, les remboursements d'emprunt et les algorithmes peuvent être consultés si besoin. L'élaboration de ces exercices a demandé un travail de préparation important afin de réduire la distance entre une situation réelle et une situation d'apprentissage. Ils illustrent notre démarche d'accompagnement des élèves (et des professeurs) afin qu'ils utilisent les mathématiques qu'ils ont apprises, dans des situations réelles.

Les exercices correspondent à l'esprit « Real life » des études PISA. Ils permettent aussi de mieux ancrer les notions apprises, en les réinvestissant, parfois plusieurs fois de suite.

Comme le souligne Gérard Kuntz dans sa préface, reproduite partielllement ci-dessous, cet ouvrage s'inscrit dans une démarche citoyenne qui dépasse le seul cadre mathématique, que les auteurs ont essayé de prolonger par une conclusion où une réflexion éthique est amorcée.

> « Depuis que l'attelage Mathématiques et Finance a montré ses limites et que les critiques pleuvent sur les mathématiciens qui l'ont conçu, la prudence est de mise quand les mathématiques sont convoquées pour aider le futur citoyen à mieux consommer ! Car si les mathématiques correctement maîtrisées permettent de calculer le véritable coût d'un crédit et de démonter les mécanismes redoutables du crédit renouvelable, elles sont totalement incapables d'éclairer l'acte même de consommation qui est au cœur des sociétés modernes. Comparer le coût final de trois propositions de crédit, choisir entre plusieurs promotions, déterminer le forfait le plus approprié pour un abonnement de train ou si telle garantie est utile, estimer le nombres de vignettes à acheter pour compléter un album, tout cela renforce le citoyen face aux organismes marchands à éthique approximative. C'est le projet essentiel du présent ouvrage. Il est important et parfaitement traité. Les nombreux exemples qu'il propose traversent le Collège et le Lycée et introduisent clarté et rationalité dans la consommation courante. Au passage, l'élève découvre que les mathématiques n'ont pas qu'un caractère scolaire et qu'elles offrent des outils de résolution pour des problèmes de la vie courante. On peut alors espérer qu'il leur fera crédit pour traiter d'autres situations, plus éloignées de son quotidien. Mais les mathématiques ne prétendent pas répondre à d'autres questions, au moins aussi importantes, bien que de nature différente et qui lui échappent : ai-je besoin des objets ou services convoités ? Le plaisir que j'en attends mérite-t-il que je mette en danger mon équilibre budgétaire ? L'accumulation d'achats contribue-t-elle à une meilleure qualité de vie ? Ne vaudrait-il pas mieux développer ma vie relationnelle et culturelle que de consommer frénétiquement ? Ces questions débordent de la simple rationalité et exigent des modèles plus complexes, que les seules mathématiques ne sauraient fournir.[...]
>
> La consommation mondialisée pose enfin des questions que nos médias abordent de façon biaisée. La production délocalisée appauvrit ceux qu'elle fuit (d'où de vives protestations, relayées avec gravité), mais permet au consommateur national d'acquérir des objets à moindre coût (silence assourdissant dans les mêmes médias). Elle donne espoir aux populations qui l'accueillent (d'autres diront qu'elles sont exploitées). On le voit, rien n'est simple et on est loin de nos exercices tirés du quotidien. «Maths et consommation» est un aspect important, mais mineur du problème central posé au monde global : comment produire des objets et des services vraiment utiles pour le plus grand nombre, sans abîmer l'environnement, en redistribuant à l'échelle mondiale les richesses ? Vaste question transversale, évoquée dans la conclusion de l'ouvrage, que l'école s'honorerait à aborder toutes disciplines confondues, pour former des citoyens (un peu) plus responsables. Le présent ouvrage y contribue pour une part, là où les mathématiques ont quelque chose à dire. Mais les réponses qu'il propose sont nécessairement partielles et limitées, tant la consommation est une démarche complexe, contradictoire et qui ne se résume évidemment pas à des choix rationnels. Le fait de savoir que le risque est grand de perdre beaucoup en persévérant au Loto ne rend-il pas plus désirable l'espoir du gain ? A l'intérieur de ces limites, l'ouvrage fait œuvre utile, tout en appelant des compléments économiques, historiques, géographiques, éthiques et philosophiques. En un mot, une pensée complexe, chère à Edgar Morin , qui manque cruellement à l'École et à nos sociétés. »

En ces temps de crise économique, il faut souhaiter que ce livre, avec l'action des professeurs, apportera des solutions à chacun pour agir de manière concrète afin d'améliorer sa vie ou celles des autres.

NUMÉRO NEUF : Avril 2012

ISSN : 1969-7929 (imprimé)
ISSN : 1760-6500 (en ligne)

LE MIROIR DES MATHS

Sommaire

Comité de rédaction Pierre Ageron & Éric Trotoux - Composition LaTeX.