Les triplets de Ruben : Los trillizos de Rubén

Mathématiques

Définition 1. *Soient* (a, b, c) *un triplet de nombres réels positifs avec* $b \neq 0$*. On dit que* (a, b, c) *est un triplet de Ruben si les deux égalités suivantes sont satisfaites :*

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad et \qquad \frac{a}{b} = c.$$

Exercice 1. *Démontrer que les triplets suivants sont des triplets de Ruben*

1. $\left(\frac{9}{20}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$.
2. $\left(\frac{16}{15}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right)$.
3. $\left(\frac{4u^2v^2}{u^4-v^4}, \frac{2uv}{u^2+v^2}, \frac{2uv}{u^2-v^2}\right)$.

Exercice 2.
1. *Démontrer qu'il n'existe pas de triplets de Ruben entiers* (a, b, c) *avec* $abc \neq 0$.
2. *Démontrer qu'il existe une infinité de triplets de Ruben rationnels* (a, b, c) *avec* $abc \neq 0$.

Proposition 1. *Un triplet* (a, b, c) *est un triplet de Ruben si et seulement si*

$$a = \frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}, \qquad b = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \qquad c > 0.$$

Démonstration. Facile ☐

Proposition 2. *Un triplet* $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ *est un triplet de Ruben si et seulement s'il existe deux entiers* u *et* v *tels que*

$$a = \frac{4u^2v^2}{u^2+v^2}, \qquad b = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \qquad c = \frac{2uv}{u^2-v^2},$$

ou bien

$$a = \frac{\left(u^2-v^2\right)^2}{2uv\left(u^2+v^2\right)}, \qquad b = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}, \qquad c = \frac{u^2-v^2}{2uv}.$$

Démonstration. On veut que $1 + c^2$ soit un carré parfait, c'est à dire $1 + c^2 = x^2$. Si $c = \frac{c_1}{c_2}$, alors $c_1^2 + c_2^2 = c_2^2 x^2$. Ainsi $c_1 = 2uv$, $c_2 = u^2 - v^2$ ou inversement. ☐

Proposition 3. *Soient* (a, b, c) *un triplet de Ruben. Alors il existe deux nombres réels non nuls* u *et* v *tels que*

$$a = u^2 - v^2, \qquad b = 2uv, \qquad c = u^2 + v^2 \quad avec \qquad 2u^3v + 2uv^3 - u^2 + v^2 = 0.$$

Démonstration. C'est un résultat bien connu. Le triplets de Pythagore vérifient les égalités de la propriété. De plus, $\frac{a}{b} = c$ donne lieu à l'équation $\frac{u^2-v^2}{2uv} = u^2 + v^2$ d'où l'on déduit que $2u^3v + 2uv^3 - u^2 + v^2 = 0$. ☐

Soit u un réel positif. On peut montrer que l'équation $2u^3v + 2uv^3 - u^2 + v^2 = 0$ peut avoir soit une seule solution réelle v soit trois solutions réelles, suivant la valeur de u.

Dand la suite, on considère uniquement le cas où $u \geq 1$ est un nombre entier.

Proposition 4. *Soit* $u \geq 1$ *un nombre entier. Alors il existe un seul nombre réel non nul* v *vérifiant*

$$2u^3v + 2uv^3 - u^2 + v^2 = 0.$$

Démonstration. Soit $u \geq 1$ un nombre entier. On pose $f(v) = 2u^3v + 2uv^3 - u^2 + v^2$. On a $\lim_{v\to-\infty} f(v) = -\infty$ et $\lim_{v\to+\infty} f(v) = +\infty$. Aussi $f(-u) = -4u^4 < 0$, $f(u) = 4u^4 > 0$. De plus, $f'(v) = 6uv^2 + 2v + 2u^3$. Le discriminat est alors $\Delta = 2^2 - 4(6u)(2u^3) = 4\left(1 - 12u^4\right) < 0$. Alors $f'(v)$ est positif et donc la fonction f est strictement croissante. Puisque f est continue, alors d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe un seul $v \in [-u, u]$ tel que $f(v) = 0$. □

Proposition 5. *Soit $u \geq 1$ un nombre entier. la solution de l'équation $2u^3v + 2uv^3 - u^2 + v^2$ est*

$$v = -\frac{1}{6u} + \left(\frac{72u^4 - 1}{216u^3} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{16u^8 + 44u^4 - 1}}{36u}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{72u^4 - 1}{216u^3} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{16u^8 + 44u^4 - 1}}{36u}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Démonstration. On sait que u et v sont liés par l'équation $2u^3v + 2uv^3 - u^2 + v^2 = 0$. On obtient alors l'équation

$$v^3 + Av^2 + Bv + C = 0 \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{2u}, \quad B = u^2, \quad C = \frac{u}{2}.$$

L'équation peut être aussi transformée en une équation de la forme

$$\left(v + \frac{1}{6u}\right)^3 + P\left(v + \frac{1}{6u}\right) + Q = 0 \quad \text{avec} \quad P = \frac{12u^4 - 1}{12u^2}, \quad Q = \frac{1 - 72u^4}{108u^3}.$$

pour résoudre cette équation avec les radicaux, on calcule

$$Q^2 + \frac{4P^3}{27} = \frac{16u^8 + 44u^4 - 1}{108u^2}.$$

Puisque $u \geq 1$, alors $16u^8 + 44u^4 - 1 > 0$ et on peut donc calculer

$$\sqrt{Q^2 + \frac{4P^3}{27}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{16u^8 + 44u^4 - 1}}{18u}.$$

Il est à noter que le discriminant du numérateur est égal à 2000 (étonnant non ?). Alors la solution de l'équation $2u^3v + 2uv^3 - u^2 + v^2 = 0$ est

$$v = -\frac{1}{6u} + \left(\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \frac{4P^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-Q - \sqrt{Q^2 + \frac{4P^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui donne la très belle forme

$$v = -\frac{1}{6u} + \left(\frac{72u^4 - 1}{216u^3} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{16u^8 + 44u^4 - 1}}{36u}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{72u^4 - 1}{216u^3} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{16u^8 + 44u^4 - 1}}{36u}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

□

Définition 2. *Soit n un nombre entier. On dit que n est un nombre congruent s'il existe un triplet Pythagoricien de nombres rationnels (a, b, c) tel que*

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad et \quad n = \frac{1}{2}ab$$

Exercice 3. *Démontrer les affirmations suivantes.*

1. *5 est un nombre congruent avec* $a = \frac{3}{2}$ *et* $b = \frac{20}{3}$*.*
2. *6 est un nombre congruent avec* $a = 3$ *et* $b = 4$*.*
3. *7 est un nombre congruent avec* $a = \frac{35}{12}$ *et* $b = \frac{24}{5}$*.*

Proposition 6. *Il existe un nombre infinie de nombres congruents qui proviennet de triplets de Ruben.*

Démonstration. Soit $n = \frac{1}{2}ab$ un entier qui correspont à un triplet de Ruben. Alors,

$$a = \frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}, \qquad b = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \qquad n = \frac{c^3}{2(1+c^2)}.$$

□

La dernière égalité s'écrit aussi sous la forme $c^3 - 2nc^2 - 2n = 0$, ou encore sous la forme

$$\left(c - \frac{2n}{3}\right)^3 + P\left(c - \frac{2n}{3}\right) + Q = 0, \quad P = -\frac{4n^2}{3}, \quad Q = -2n - \frac{16}{27}n^3.$$

On peut montrer facilement que l'équation $c^3 - 2nc^2 - 2n = 0$ n'admet qu'une seule racine supérieure à $\frac{4n}{3}$. Cette la solution est

$$c = \frac{2n}{3} + \left(\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \frac{4P^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-Q - \sqrt{Q^2 + \frac{4P^3}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui donne la très belle forme

$$c = \frac{2n}{3} + \left(\frac{8n^3 + 27n}{27} + \frac{\sqrt{3}n\sqrt{16n^2+27}}{9}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{8n^3 + 27n}{27} - \frac{\sqrt{3}n\sqrt{16n^2+27}}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Exemple 1.

1. *Si* $n = 9$*, on on trouve* $c = 9 + 288^{\frac{1}{3}} + 162^{\frac{1}{3}}$*.*
2. *Si* $n = 126$*, on on trouve* $c = 84 + 605052^{\frac{1}{3}} + 580608^{\frac{1}{3}}$*.*

Proposition 7. *Il n'existe aucun nombre congruent qui provient d'un triplet rationnel de Ruben.*

Démonstration. To be continued □