

Fibonacci et les paquerettes

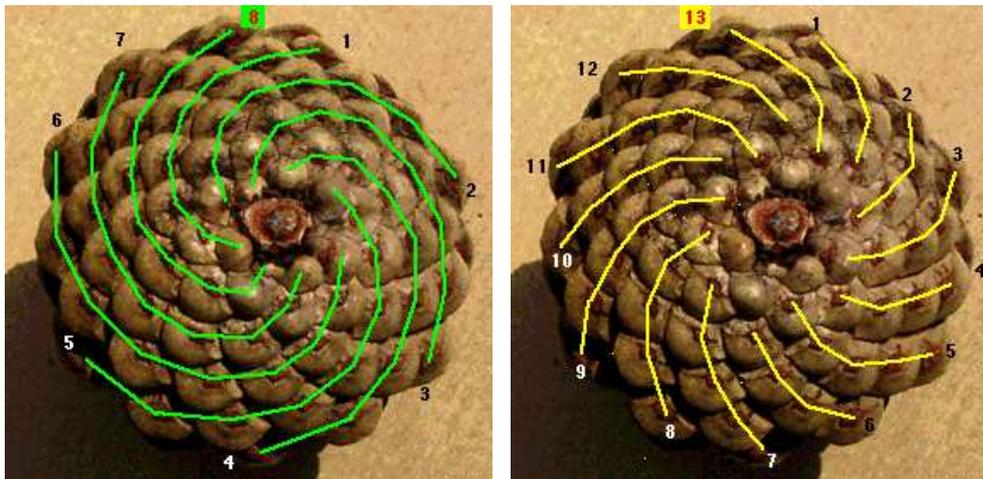
JOLY Romain & RIVOAL Tanguy

1 Introduction

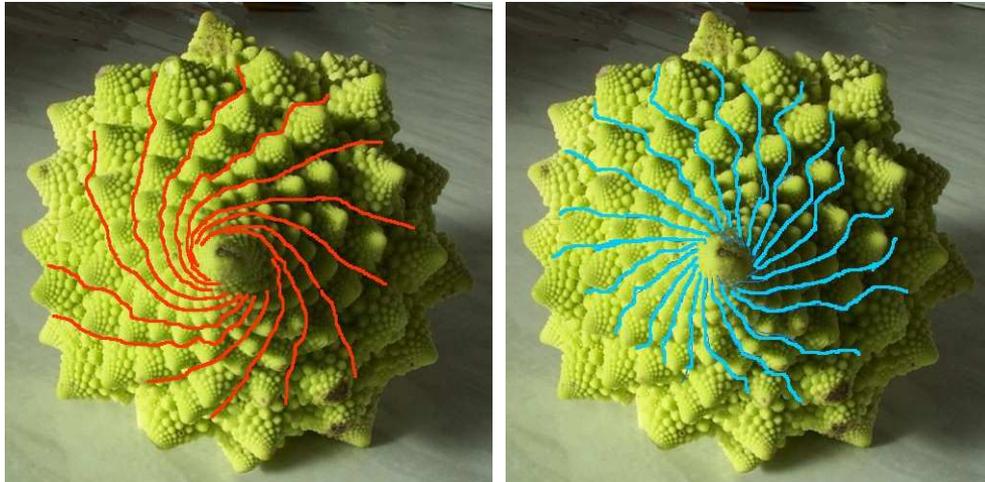
Quand on entend dire que l'on peut trouver le nombre d'or et la suite de Fibonacci dans les fleurs et les pommes de pin, on est au départ bien sceptique. Mais si on tente l'expérience, on est surpris de constater que cela semble se vérifier. Voici par exemple une simple pomme de pin :



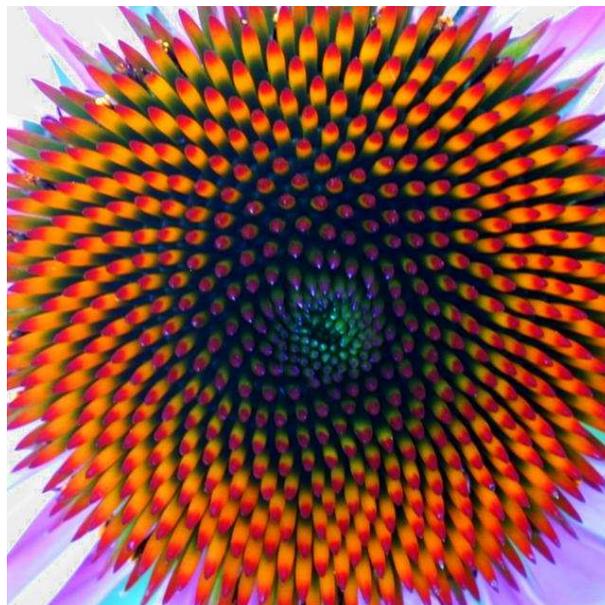
Si l'on compte le nombre de spirales gauches et le nombre de spirales droites, on tombe sur deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci :



On pourra retenir l'expérience avec un chou :



De manière générale, le meilleur moyen de se convaincre qu'il ne s'agit pas d'une simple coïncidence est de compter les spirales dans tout ce que l'on peut trouver : pommes de pin, paquerettes, artichauts, tournesol etc. Voyez-vous les séquences de 21 et 34 spirales dans cette fleur ?

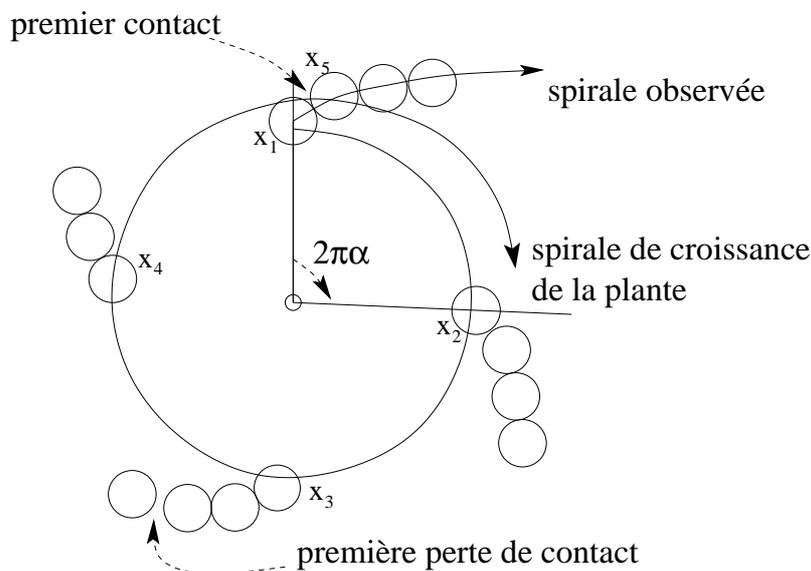


NB : Toutes les illustrations précédentes proviennent du site web de Ron Knott
<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/>

2 Modélisation du problème

Le but de cette note est de montrer le lien entre fractions continues et nombres de spirales visibles. Nous allons faire des hypothèses sur la croissance de la plante afin de nous ramener à un modèle très simple. Les éléments végétaux formant les spirales (fleurs, feuilles, écailles etc.) seront modélisés par des cercles de rayon a . Nous allons considérer que la croissance de la plante correspond à l'apparition autour d'un point central d'éléments séparés d'un angle $2\pi\alpha$ et à distance ρ_n du centre. Autrement dit, le végétal sera une suite de cercles de rayon a centrés en $x_n = \rho_n e^{2i\pi n\alpha}$. On supposera la suite (ρ_n) croissante.

La constance de l'angle entre deux ronds est une hypothèse très simplificatrice qui mériterait une vraie justification qui ne sera pas faite ici. On suppose que la plante cherche à mettre le plus d'objets dans le moins de place possible. Ainsi, on peut prendre ρ_n égal au plus petit $\rho \geq \rho_{n-1}$ tel que le cercle de rayon a et de centre x_n ne recoupe aucun autre cercle déjà présent (la tangence est admise). On pourrait aussi chercher à prendre (ρ_n) sous forme d'une suite plus régulière (arithmétique par exemple). On remarquera qu'il est plus simple d'imaginer une croissance par l'extérieur à l'intérieur fixé comme nous le faisons. Mais en réalité, c'est bien l'inverse qui se produit : la plante pousse depuis le centre de manière centrifuge.



Le problème de la vision des spirales est qu'elle est relativement subjective. En effet, on voit des spirales qui ne correspondent pas du tout à la croissance de la plante. En fait, on voit les spirales correspondant à des suites de ronds ayant juste un petit décalage entre eux. On considèrera qu'il y a une spirale si deux éléments aux points x_n et x_{n+p} sont assez proches pour se toucher (pour se fixer un critère, mais l'oeil repère aussi des spirales du moment qu'une série de cercles sont assez proches, sans qu'il y ait forcément contact).

Les cercles centrés en x_{n+k} et x_{n+k+p} vont alors se toucher tant que k est assez petit et former p spirales. Au bout d'un certain temps, la distance au centre de la formation ρ_{n+k} grandissant, les éléments x_{n+k_0} et x_{n+k_0+p} ne se toucheront plus. On perdra alors les p spirales liées au contact entre x_n et x_{n+p} , mais d'autres apparaîtront.

Il faut noter que dans une situation très compacte, on peut voir simultanément deux familles de spirales, gauches et droites. Voir par exemple les illustrations de l'introduction.

3 Spirales et fractions continues

Suivant la discussion du paragraphe précédent, le nombre de spirales correspond au nombre de fois que la rotation d'angle $2\pi\alpha$ doit être effectuée avant de retomber assez proche du point de départ pour qu'il y ait contact. On peut alors établir le résultat central de cette note. Les rappels sur les fractions continues sont regroupés en annexe.

Proposition 3.1. *Le cardinal d'une famille de spirales visibles est un dénominateur d'une réduite de α .*

Démonstration : On cherche à placer le plus de cercles de rayon a espacés d'un angle $2\pi\alpha$ le long d'un cercle de rayon $\rho > 0$. On supposera bien sûr que $\rho > a$. On note \hat{a} l'angle sous lequel est vu un cercle de rayon a et à distance ρ , c'est-à-dire $\hat{a} = 2\arctg(a/\rho)$. Notons que $\hat{a} < \pi$. On cherche le plus petit entier $q > 0$ tel que $|2\pi\alpha q \bmod(2\pi)| < \hat{a}$. Autrement dit, on choisit q comme le plus petit $q \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

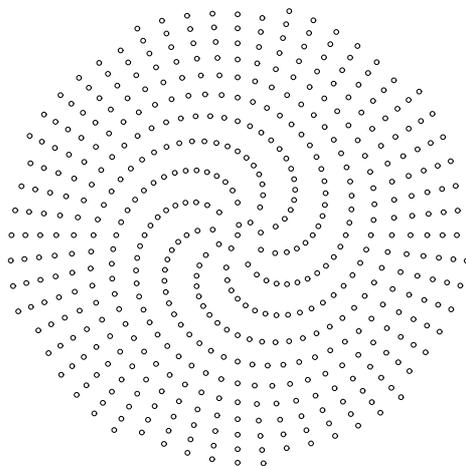
$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad |p - \alpha q| < \frac{\hat{a}}{2\pi} . \quad (1)$$

Montrons que p/q est une meilleure approximation de α et donc une réduite de α (voir annexe). Supposons que p'/q' avec $q' \leq q$ approche mieux α i.e.

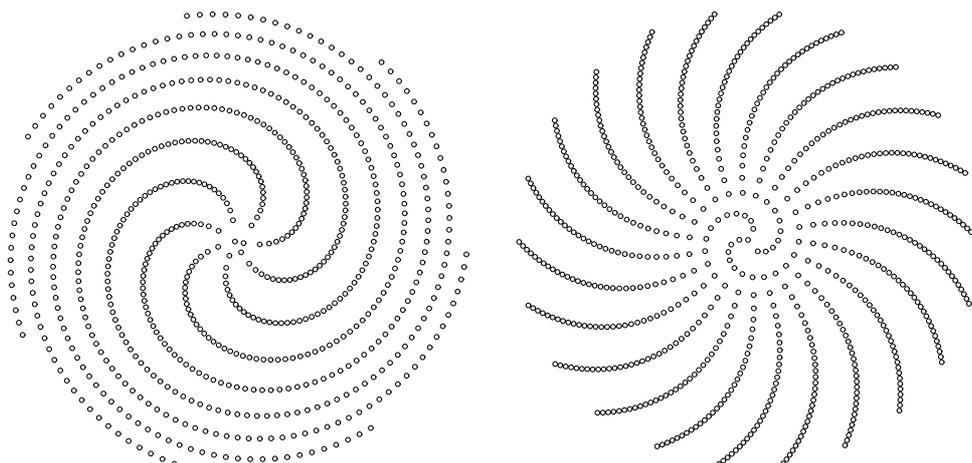
$$|p' - \alpha q'| \leq |p - \alpha q| < \frac{\hat{a}}{2\pi} < \frac{1}{2} . \quad (2)$$

Comme q est le plus petit entier vérifiant (1), $q' \geq q$ et donc $q' = q$. Or (2) montre que p et p' sont deux entiers à distance inférieure à $1/2$ du même nombre αq . Donc $p = p'$ et $p'/q' = p/q$. \square

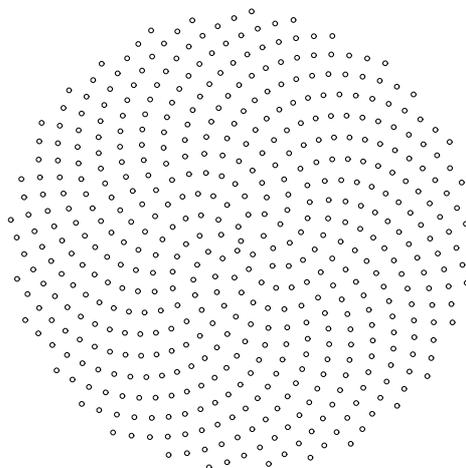
Vérifions visuellement ceci sur quelques exemples générés par un petit programme Maple que l'on peut trouver sur le web et rappelé ici en annexe. Le plus simple est de prendre une fraction comme $\frac{31}{56}$. On voit au centre une famille de 9 spirales correspondant au 9 de $\frac{5}{9}$ qui approche notre fraction, et bien sûr 56 spirales ensuite.



Voici un autre exemple, avec π à gauche et $1/\pi$ à droite, où on voit apparaître les approximations 3 , $\frac{22}{7}$ et $\frac{355}{113}$.



Pour finir, $\sqrt{2}$ nous donne tous les nombres pairs.



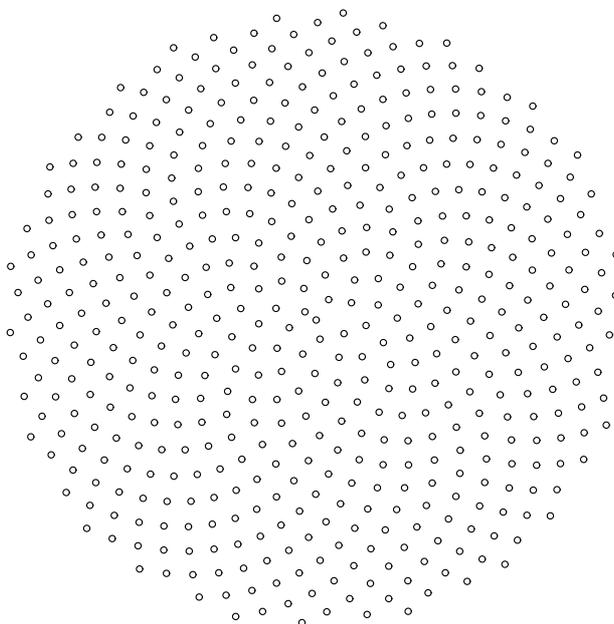
4 L'apparition de la suite de Fibonacci

On ne va pas justifier ici de façon rigoureuse quel est le meilleur α possible pour la plante. On ne donne simplement qu'un argument intuitif. On observe sur les exemples précédents que mieux une réduite approche α , plus longue est la vision des spirales correspondantes. Or ceci n'est pas bon pour le remplissage du volume par les cercles. En effet, tant qu'une spirale reste valide, les distances ρ_n au centre croissent régulièrement alors que le nombre d'éléments mis sur chaque cercle reste constant. Du coup, les plantes ont intérêt à utiliser le nombre $\alpha \in [0, 1]$ le moins bien approché par ses fractions continues, c'est-à-dire

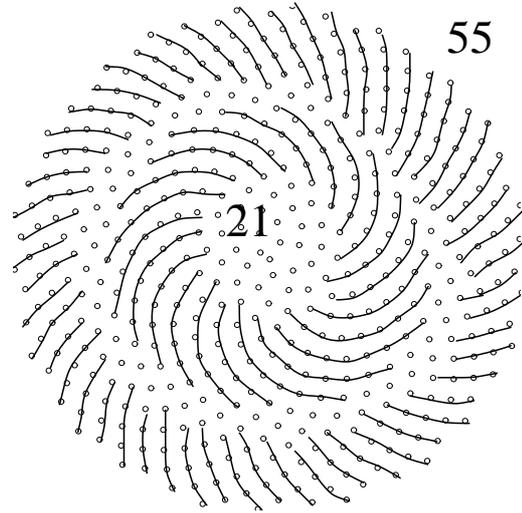
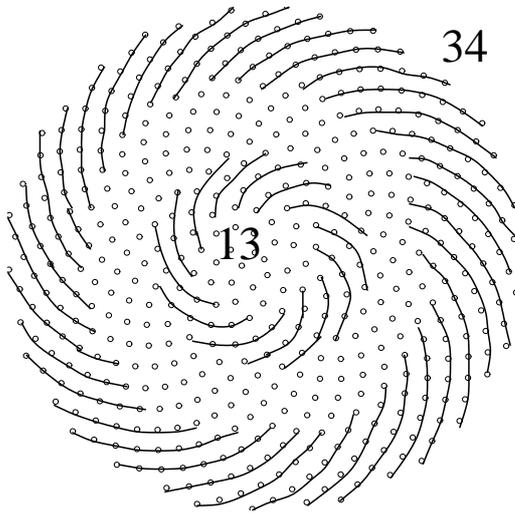
$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

On retrouve l'angle d'or $2\pi\alpha = 2\pi/\Phi$ où Φ est le nombre d'or. Les réduites de $\alpha = 1/\Phi$ sont de la forme $\frac{F_n}{F_{n+1}}$, où (F_n) est la suite de Fibonacci (voir annexe). Le nombre de spirales sur les végétaux est donc un nombre de Fibonacci ! De plus, les approximations sont tellement mauvaises, que l'on peut voir deux sortes de spirales : les droites et les gauches, correspondant à deux nombres de Fibonacci consécutifs, puisque les fractions continues successives sont de chaque côté de α .

Vérifions que le choix $\alpha = 1/\Phi$ donne ce qu'on attend, c'est à dire un magnifique tournesol :



On pourra s'amuser à compter les spirales sur la figure précédente pour retrouver la suite de Fibonacci.



Annexe sur les fractions continues

Les références qui ont servi à la rédaction de cette annexe sont :

M. Demazure, *Cours d'algèbre*, Cassini.

A. Khinchin, *Continued fractions*, Phoenix Science Series.

A.1 Définitions et premiers résultats

Dans la suite α désignera un irrationnel afin de ne pas avoir à se préoccuper de la division par 0. Il s'agit du cas qui nous intéresse ici et de plus le principe est le même pour un rationnel, sauf que la fraction continue est de taille finie.

On définit deux suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\alpha_0 = \alpha, \quad q_0 = [\alpha_0] \quad \text{et} \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - q_n}, \quad q_{n+1} = [\alpha_{n+1}]$$

Une réduite de α est une fraction de la forme

$$r_n = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}}$$

On appelle développement en fraction continue de α l'écriture

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \ddots}}}$$

Proposition A.1. *Les réduites r_n s'écrivent $r_n = \frac{u_n}{v_n}$ avec (u_n) et (v_n) deux suites d'entiers définies comme suit.*

$$\begin{cases} u_0 = q_0, & u_1 = q_0 q_1 + 1 \\ v_0 = 1, & v_1 = q_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = q_{n+1} u_n + u_{n-1} \\ v_{n+1} = q_{n+1} v_n + v_{n-1} \end{cases}$$

Démonstration : On introduit les polynômes d'Euler définis par

$$Q_0 = 1, \quad Q_1(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad Q_{i+1}(x_1; \dots; x_{i+1}) = x_{i+1} Q_i(x_1; \dots; x_i) + Q_{i-1}(x_1; \dots; x_{i-1}).$$

La proposition revient à montrer que $r_n = \frac{Q_{n+1}(q_0; \dots; q_n)}{Q_n(q_1; \dots; q_n)}$. On procède par récurrence. C'est

bon pour r_0 , puis

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\dots + q_n + \frac{1}{q_{n+1}}}} \\
&= \frac{Q_{n+1}(q_0; \dots; q_n + \frac{1}{q_{n+1}})}{Q_n(q_1; \dots; q_n + \frac{1}{q_{n+1}})} \\
&= \frac{q_n Q_n(q_0; \dots; q_{n-1}) + \frac{1}{q_{n+1}} Q_n(q_0; \dots; q_{n-1}) + Q_{n-1}(q_0 \dots; q_{n-2})}{q_n Q_{n-1}(q_1; \dots; q_{n-1}) + \frac{1}{q_{n+1}} Q_{n-1}(q_1; \dots; q_{n-1}) + Q_{n-2}(q_1; \dots; q_{n-2})} \\
&= \frac{q_{n+1} Q_{n+1}(q_0; \dots; q_n) + Q_n(q_0 \dots; q_{n-1})}{q_{n+1} Q_n(q_1; \dots; q_n) + Q_{n-1}(q_1; \dots; q_{n-1})} = \frac{Q_{n+2}(q_0; \dots; q_{n+1})}{Q_{n+1}(q_1; \dots; q_{n+1})}
\end{aligned}$$

□

Proposition A.2. *Les suites (u_n) et (v_n) sont strictement croissantes et tendent donc vers $+\infty$. En outre $u_{n+1}v_n - u_nv_{n+1} = (-1)^n$ et en particulier $\text{PGCD}(u_n; v_n) = 1$ et $r_{n+1} - r_n = \frac{(-1)^{n+1}}{v_{n+1}v_n}$.*

Démonstration : Une fois fait le calcul

$$\begin{aligned}
u_{n+1}v_n - u_nv_{n+1} &= q_{n+1}u_nv_n + u_{n-1}v_n - u_nq_{n+1}v_n - u_nv_{n-1} \\
&= u_{n-1}v_n - u_nv_{n-1} = \dots = (-1)^n(u_1v_0 - u_0v_1) \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

le reste de la proposition est évident. □

Proposition A.3. *La suite (r_n) tend vers α en se plaçant alternativement de part et d'autre de α . Plus précisément,*

$$r_n - \alpha = (-1)^{n+1} \frac{1}{\alpha_0 \dots \alpha_n} \frac{1}{v_n}, \quad (3)$$

et par conséquent $|\alpha - r_n| < \frac{1}{v_nv_{n+1}}$.

Démonstration : L'expression (3) se démontre simplement par récurrence puisque si (3) est vraie pour n et $n-1$ alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - \alpha v_{n+1} &= q_{n+1}u_n + u_{n-1} - \alpha q_{n+1}v_n - \alpha v_{n-1} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{q_{n+1}}{\alpha_0 \dots \alpha_n} - (-1)^{n+2} \frac{1}{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \\
&= (-1)^{n+2} \frac{1}{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n} (\alpha_n - q_{n+1}) = (-1)^{n+2} \frac{1}{\alpha_0 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}}
\end{aligned}$$

Comme $\alpha_k > 1$ et $v_n \rightarrow +\infty$, cela montre que (r_n) tend vers α . Enfin, comme on vient de montrer que α est entre r_n et r_{n+1} , l'estimation de $|\alpha - r_n|$ vient simplement de l'estimation de $|r_n - r_{n+1}|$ de la proposition A.2. \square

A.2 Réduites et meilleures approximations

On appelle meilleure approximation de α une fraction $\frac{u}{v}$ telle que pour toute autre fraction $\frac{u'}{v'} \neq \frac{u}{v}$ approchant mieux α au sens que $|u' - \alpha v'| \leq |u - \alpha v|$, on a forcément $v' > v$. Autrement dit une meilleure approximation est une fraction approchant au mieux α pour un dénominateur soumis à une borne fixée.

Proposition A.4. *Toute meilleure approximation de α est une réduite r_n de α .*

Démonstration : Soit $r = u/v$ une meilleure approximation de α qui ne soit pas une réduite r_n . On rappelle que les réduites de α sont ordonnées ainsi : $r_0 < r_2 < r_4 < \dots < \alpha < \dots < r_3 < r_1$.

Si $r < r_0 = u_0/v_0 = \lfloor \alpha \rfloor / 1$ alors $|u - \alpha v| \geq |\frac{u}{v} - \alpha| > |r_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha v_0|$. Comme $v_0 = 1 \leq v$ ceci contredit le fait que u/v est une meilleure approximation.

Si $r > r_1 = u_1/v_1 = q_0 + 1/q_1$ alors

$$|\alpha - r| > |r_1 - r| = \frac{|u_1 v - u v_1|}{v v_1} \geq \frac{1}{v v_1},$$

et donc $|u - \alpha v| > 1/v_1 = 1/q_1$. Mais $q_1 = \lfloor 1/(\alpha - \alpha_0) \rfloor \leq 1/(\alpha - \alpha_0)$ donc puisque $r_0 = \alpha_0/1$, $|u_0 - v_0 \alpha| \leq 1/q_1 < |u - \alpha v|$. Comme $v_0 = 1 \leq v$ ceci contredit le fait que u/v est une meilleure approximation.

On en conclut qu'il existe donc k tel que r soit strictement entre r_{k-1} et r_{k+1} . On a $|r - r_{k-1}| = |u v_{k-1} - v u_{k-1}| / (v v_{k-1}) \geq 1 / (v v_{k-1})$. Comme $|r - r_{k-1}| < |r_k - r_{k-1}| = 1 / (v_k v_{k-1})$, on trouve que $v > v_k$. Or $|\alpha - r| \geq |r_{k+1} - r| \geq 1 / (v v_{k+1})$ et donc $|u - \alpha v| \geq 1 / v_{k+1}$. Puisque $|u_k - v_k \alpha| \leq 1 / v_{k+1}$ d'après la proposition A.3, on conclut que $|u_k - v_k \alpha| \leq |u - \alpha v|$. Comme par ailleurs on a vu que $v > v_k$, cela contredit le fait que u/v est une meilleure approximation.

On vient de montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de meilleure approximation de α qui ne soit pas une réduite r_n . \square

Même si cela ne sert pas à notre exposé, on peut signaler que la réciproque est quasiment vraie.

Proposition A.5. *Toute réduite r_n est une meilleure approximation à l'exception du cas de $r_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ si α est de la forme $\alpha = N + 1/2$ avec $N \in \mathbb{Z}$.*

A.3 Exemples

Donnons quelques exemples de décomposition des irrationnels les plus connus:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \ddots}}}}$$

Notons que l'on retrouve les approximations :

$$\pi \simeq \frac{22}{7} \simeq \frac{333}{106} \simeq \frac{355}{113}$$

La dernière approximation étant très bonne grâce au 292 qui suit.

Pour e la suite des (q_n) est très particulière : 2 1 2 1 1 4 1 1 6 1 1 8 1

Remarquons pour les intéressés que l'on peut démontrer qu'un nombre possède une suite (q_n) périodique à partir d'un certain rang si et seulement s'il est quadratique. Ainsi, par exemple,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}}$$

A.4 Les réduites du nombre d'or

On appelle nombre d'or le nombre $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ qui est la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. En particulier, on note que

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \text{ et } \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

Sa décomposition en fraction continue est remarquable.

Proposition A.6. *Le développement en fraction continue de Φ est*

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Démonstration : $q_0 = \lfloor \Phi \rfloor = 1$ puis $q_1 = \lfloor \frac{1}{\Phi - 1} \rfloor = \lfloor \Phi \rfloor = 1$ etc. □

La fameuse suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Les premiers termes de cette suite sont donc : 1 1 2 3 5 8 13 21 34 ... Il est bien connu que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^{n+1} - (-\frac{1}{\Phi})^{n+1})$ et donc que $F_{n+1}/F_n \longrightarrow \Phi$. En fait, on peut préciser cette convergence.

Proposition A.7. *Les fractions $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ sont exactement les meilleures approximations de Φ .*

Démonstration : Comme $(q_n) \equiv 1$, les suites (u_n) et (v_n) de la proposition A.1 ont des récurrences du même type que la suite de Fibonacci. \square

Corollaire A.8. *Les meilleures approximations de $1/\Phi$ sont de la forme $\frac{F_{n-1}}{F_n}$.*

Démonstration : Soient $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ les réduites du nombre d'or Φ . On a $1/\Phi = \Phi - 1$. Les meilleurs approximations de $1/\Phi$ sont donc de la forme $r_n - 1 = \frac{F_{n+1}-F_n}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n}$. \square

Programme Maple

Voici un petit programme Maple, qui n'est pas de nous, qui a permis de faire les figures des spirales présentées dans cette note.

```
[>with(plots);
[>growpts:=(n,TpS)->growpts1(n,TpS,CIRCLE):
[>growpts1:=proc(n,TurnperSeed,symb) local i,a,r,s,phi2pi: s:=null;
phi2pi:=2*Pi*TurnperSeed;
listplot([seq([sqrt(n-i)*cos(phi2pi*i),sqrt(n-i)*sin(phi2pi*i)],i=1..n)],
style=point,axes=NONE,scaling=CONSTRAINED, symbol=symb) end;
```

Pour obtenir par exemple la figure avec $\alpha = \pi$, il suffit alors de lancer

```
[>growpts(500,Pi);
```