Actividades alrededor de los triángulos de oro

Y de los pavimentos de tipo 3 de Roger PENROSE

El pavimento de la iglesia Santa María de Mahón (ESPAÑA)

Por Danielle Salles-Legac (*)

(*) Con el ayudo de Ruben Rodriguez Herrera y Maria Paula Detey.

Introducción: nos interesamos, en nuestra obra "Número de oro" a diferentes motivos particularmente elegantes, nos obtuvimos con los rectángulos y los triángulos de oro. A propósito de eso Ruben Rodriguez nos señaló la existencia de un pavimento "de tamaño natural" de una iglesia de la Menorca en las Islas Baleares. Este pavimento es presentado en artículos escolares sobre los pavimentos (Blog de Teresa Eveilleau por ejemplo (**)) "como Pavimento de tipo 3" sin estudio particular aunque según nuestra opinión, sea muy interesante como ir a comprobarlo.

Nos intrigó porque su motivo principal: un rosetón a 5 ramas nos parecía, " al ojo " un pentágono estrellado inscribible en un círculo.
Una foto, (la de la primera de cubierta) nos desengañó, como vamos a verlo juntos.

En primer lugar: ¿Q**ué es un pavimento regular**?
Un sólo polígono regular es reproducido y suela el plano sin recubrimiento ni hueco, por ejemplo el hexágono.
¿**Un pavimento semi regular**?
Varios polígonos forman un motivo reproducido sobre el plano, por ejemplo un cuadrado y un triángulo isósceles de base el lado del cuadrado.

Un pavimento irregular está constituido por polígonos irregulares por ejemplos los pentágonos descubiertos por Casey Mann, de la universidad Washington Bothell,

Un pavimento no regular puede estar constituido por polígonos regulares pero no contener motivos repetitivos como el pavimento de tipo 3 de Roger Penrose. (Tal que la cobertura de este texto). Existe un motivo reproducido muchas veces pero encuadrado por motivos que cualificamos de "a granel".

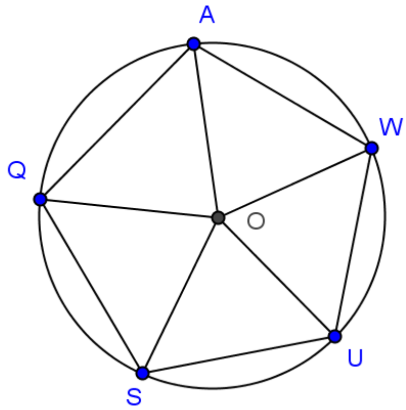
Actividad para la segundaria

Palabras claves: pentágono, triángulos de oro, pavimento "a granel", pavimento de tipo 3, Roger Penrose.

Material: regla, transportador, compás, mucho papel, eventualmente software GEOGEBRA.

Cuestiones (indicaciones de soluciones al final de artículo)

1) **Deseamos trazar un pentágono regular convexo dentro de un círculo dado como sobre la figura más abajo**:



¿Cuál es la medida del ángulo en el centro QOA? Trazar el círculo y el pentágono sobre una hoja de papel fuerte.

2) Trazar, para cada triángulo de cumbre O, el triángulo simétrico con relación a los lados del pentágono para obtener un pentágono estrellado como sobre la figura de la página siguiente. ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero PAU_5Q? ¿Es el pentágono así construido regular?

Definición de los triángulos de oro

Ambos triángulos de oro son construidos del modo siguiente:

El **triángulo de oro agudo**: tiene su ángulo en la cumbre de medida 36 °, es un triángulo isósceles.

¿Cuál es la medida de sus dos otros ángulos?

¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo SAU?

El **triángulo de oro obtuso**: tiene su ángulo en la cumbre de medida 108 °, es un triángulo isósceles también.

¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo PAU_5?

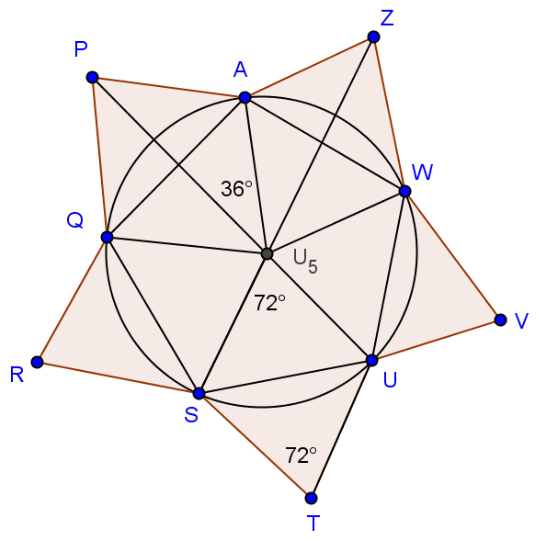
¿Cuál es la medida del ángulo en el centro QOA?

Trazar el círculo y el pentágono sobre una hoja de papel fuerte.

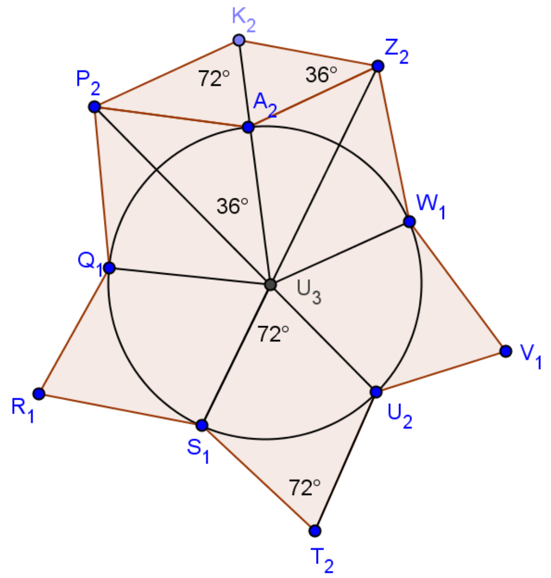
2) Trazar, para cada triángulo de cumbre O, el triángulo simétrico con relación a los lados del pentágono para obtener un **pentágono estrellado** como sobre la figura de la página siguiente.

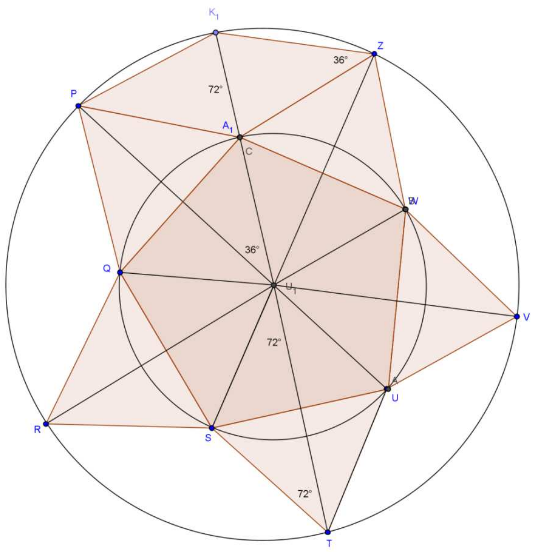
¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero PAU_5Q?

¿Cuales son las medidas de los ángulos del triángulo PAU_5?



Trazamos ahora el pentágono convexo **PZVTR** y completamos los rombos de lados: PAZ ; ZWV ; VUT ; TSR ; RQP ; véase por ejemplo sobre la figura siguiente el rombo: **$P_2K_2Z_2A_2$.**





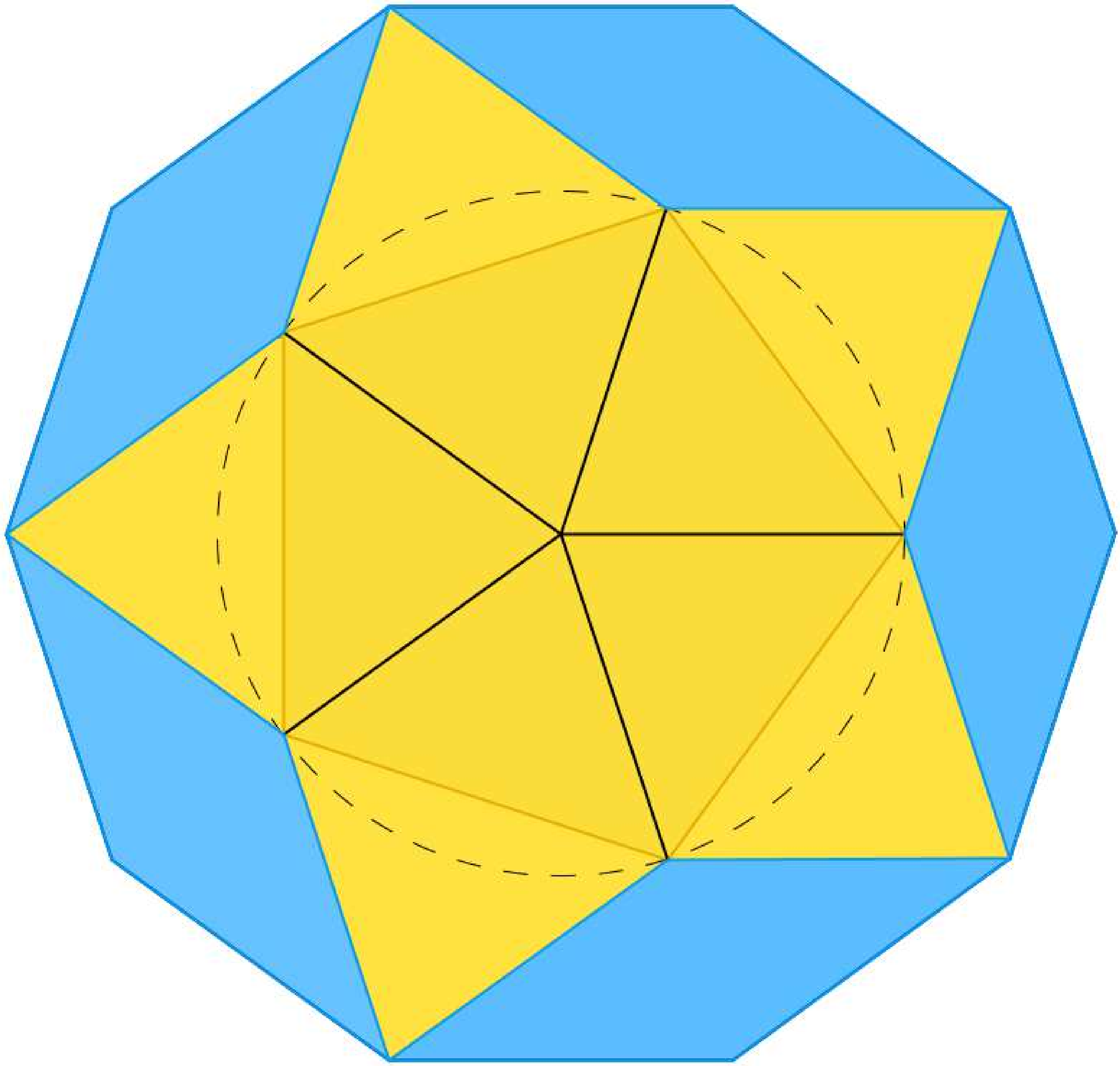
Trazamos ahora el círculo circunscrito al pentágono estrellado, explique porque el punto **K_1 está sobre este círculo**.

Complete el decágono convexo y corte los dos tipos de rombos :

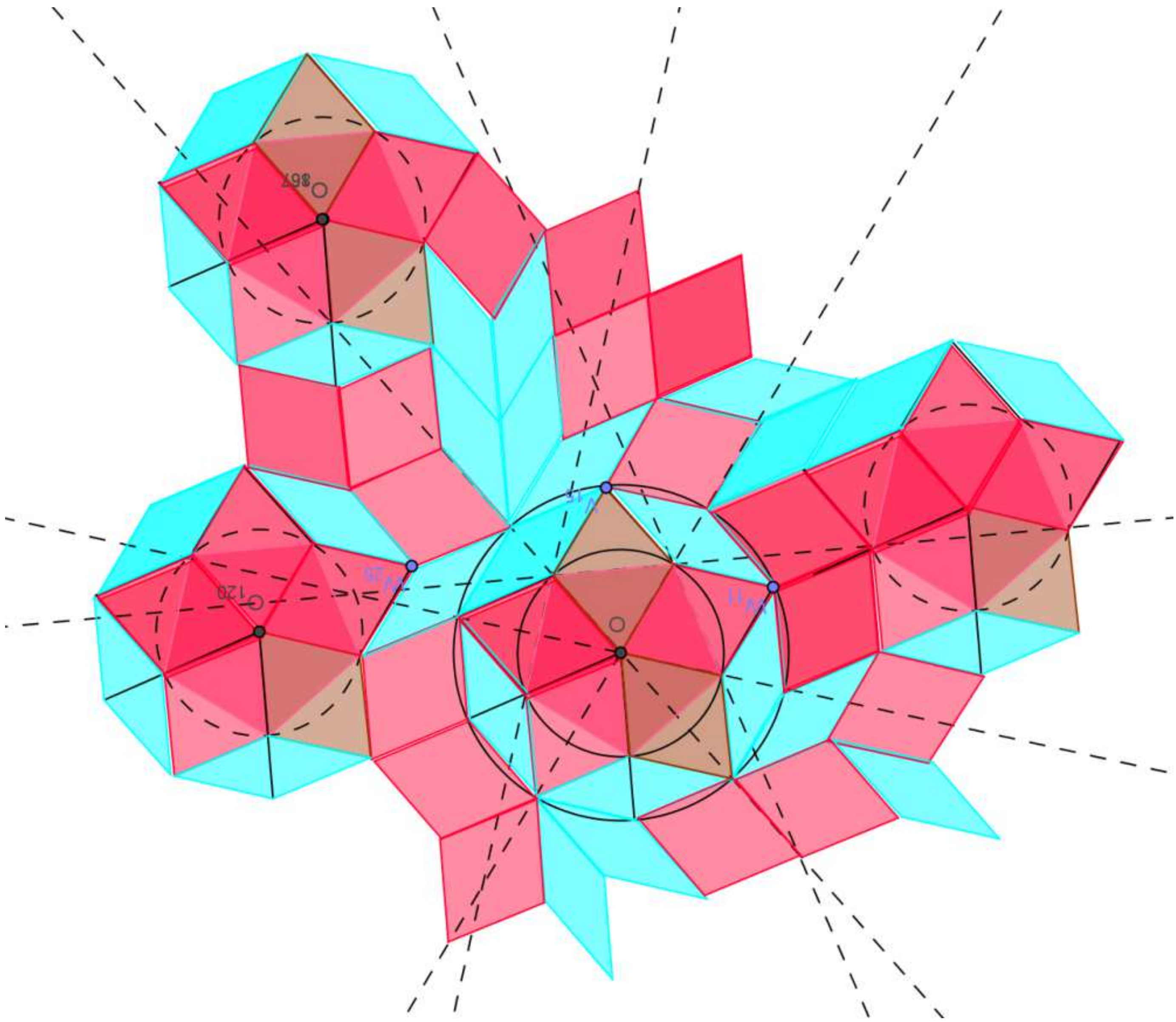
Los rombos del mismo tipo que el rombo PQU_1A_1 ;

Los rombos del mismo tipo que el rombo PA_1ZK_1.

La página siguiente debe ser impresa sobre papel grueso o cartón para poder ser cortada.
Construya usted mismo un pavimento "a granel" como el del pavimento de Roger Penrose en la iglesia Santa María de Mahón en las Islas las Islas Baleares (Usted Documenta personalmente).



En las páginas siguientes construimos un pavimento "a granel" con la técnica que utilizaban los albañiles de la iglesia de las Islas las Islas Baleares, utilizando a veces la simetría axial para encontrar bellos rosetones.



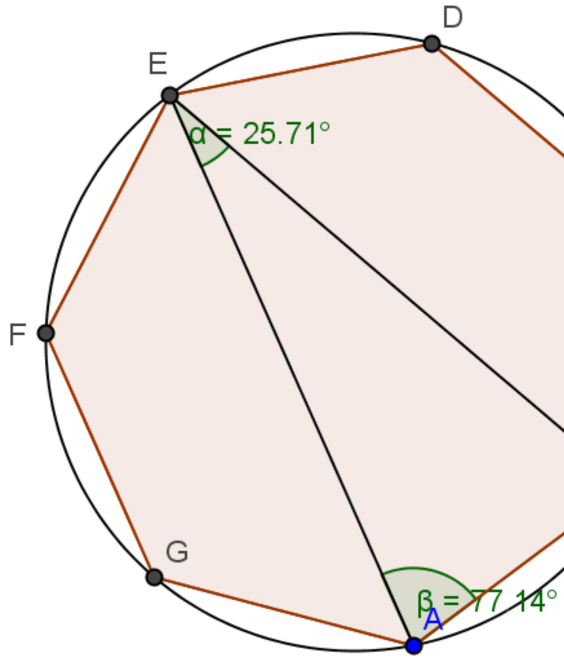
Para los mas grandes

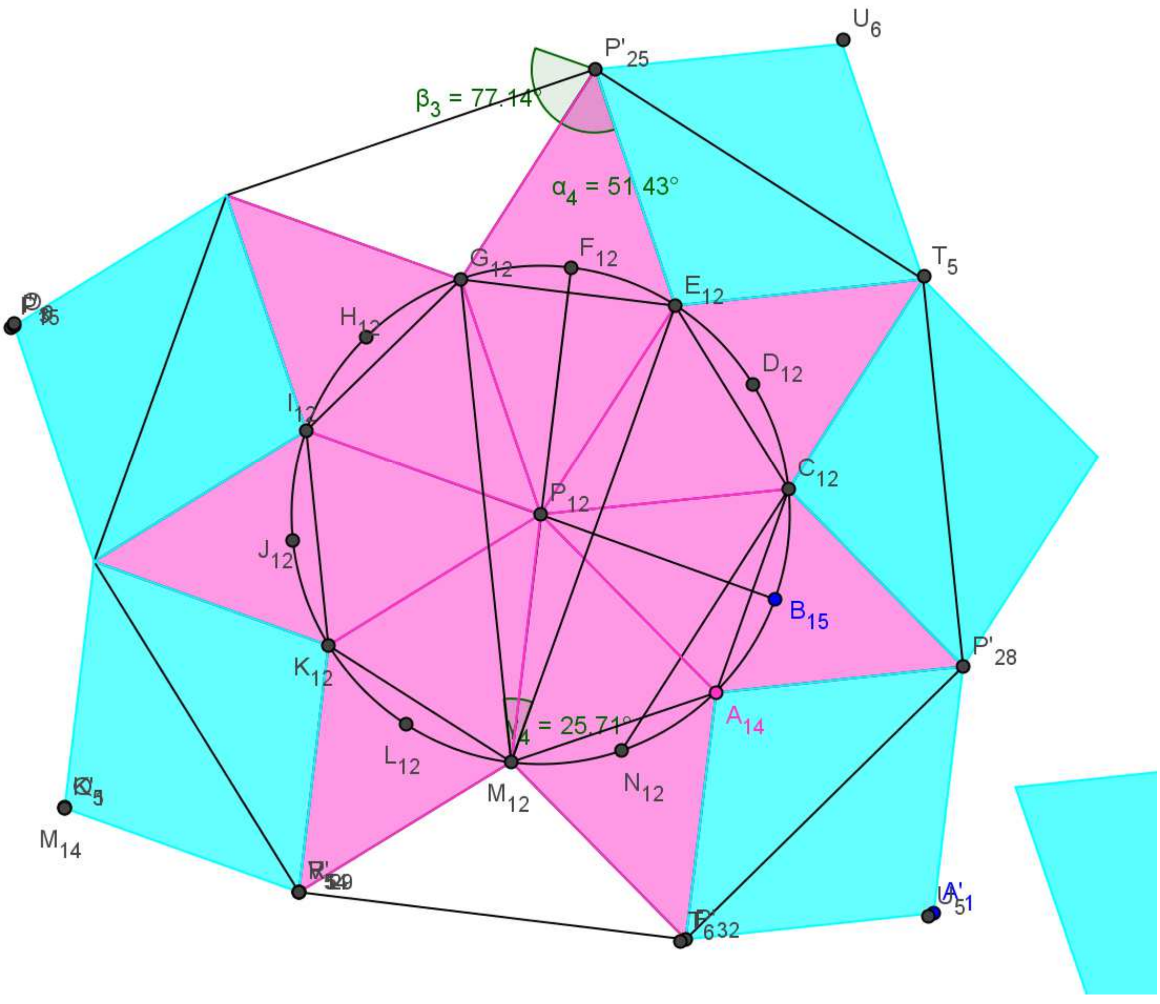
Nos interesamos ahora a una generalización del pavimento de R. Penrose a partir del heptágono regular.

Observamos que Penrose utilizaba constantemente el hecho de que los ángulos de los rombos construidos a partir de los triángulos de oro eran de medidas múltiples de 36°sea: 36 °, 72 ° y 108 °.

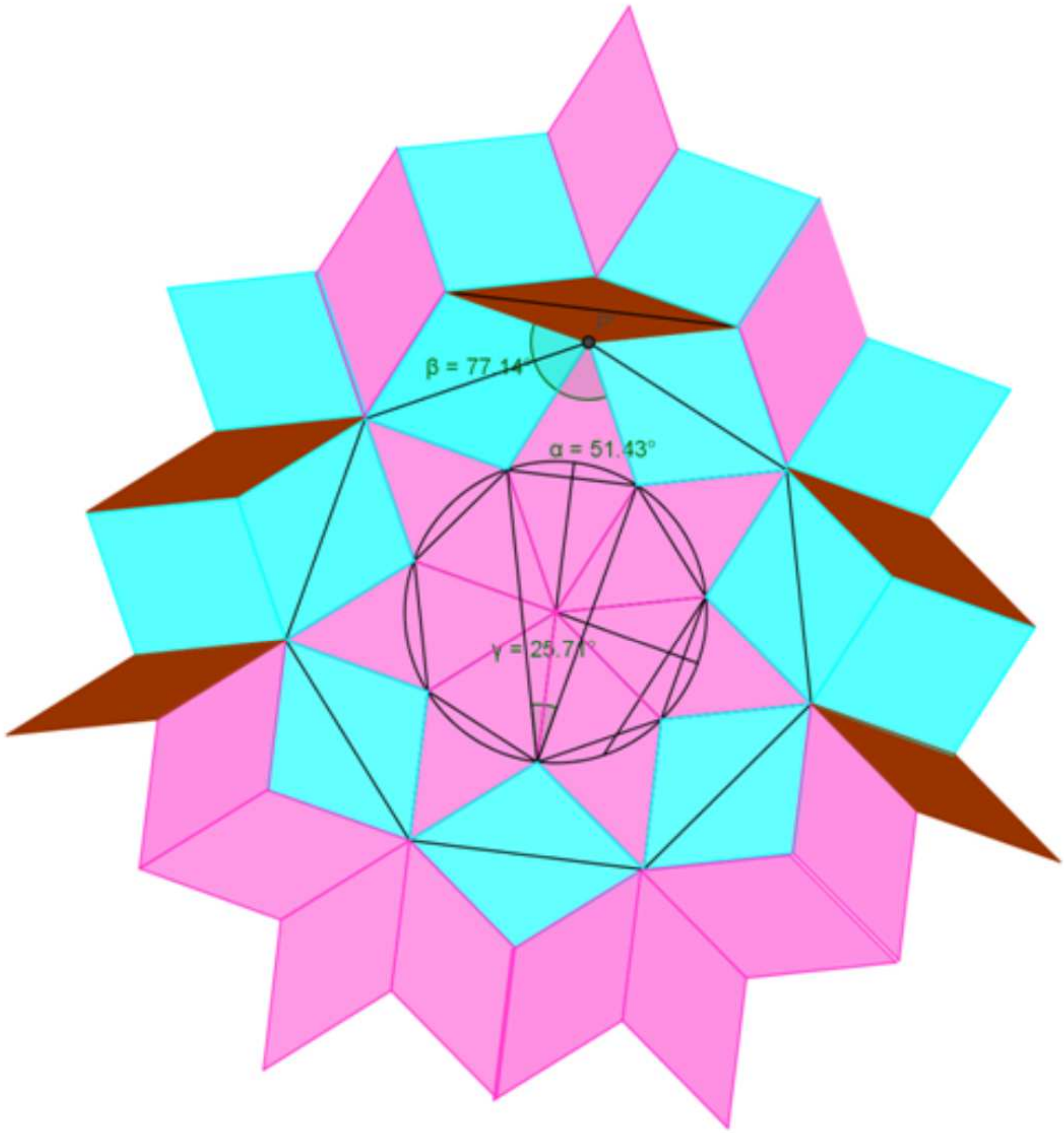
Nos preguntamos si, efectuando la misma construcción que la de Penrose, con un heptágono regular, obtendríamos también un hermoso pavimento de tipo 3.

Vea la página siguiente un borrador de nuestro trabajo sobre GEOGEBRA.


D
E
C
F
B
G
A
$\alpha = 25.71°$
$\beta = 77.14°$


U_6
P'_{25}
$\beta_3 = 77.14°$
$\alpha_4 = 51.43°$
G_{12}
F_{12}
E_{12}
T_5
H_{12}
D_{12}
I_{12}
C_{12}
P_{12}
J_{12}
B_{15}
K_{12}
P'_{28}
A_{14}
$= 25.71°$
L_{12}
N_{12}
M_{12}
M_{14}

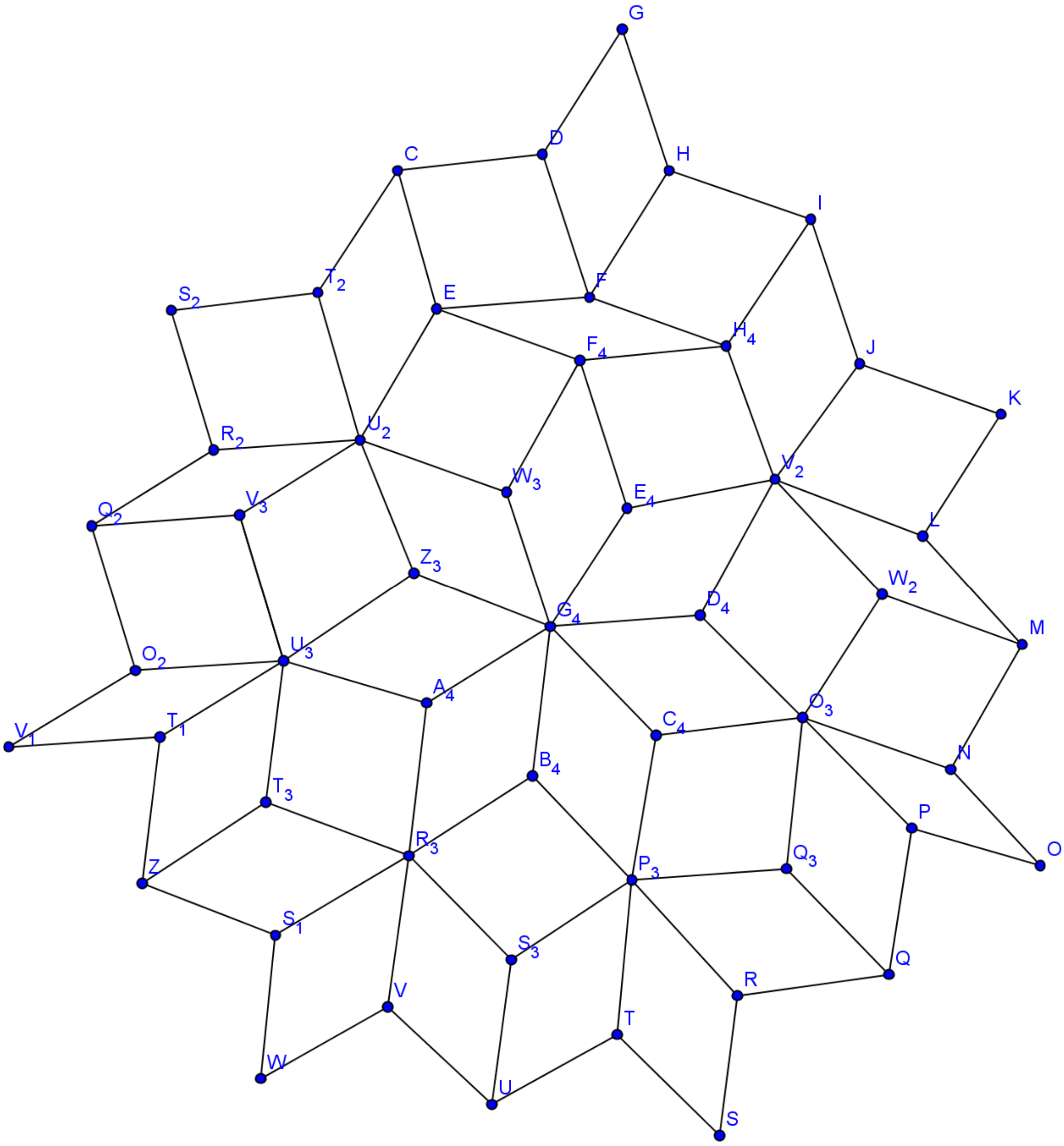
Aquí abajo hemos construido un pavimento más largo.
¿Qué observa sobre el número de rombos necesarios?



IREM de Basse-Normandie Equipe Géométrie et Relations Internationales
Une extension du pavage de type 3 de Penrose à partir de l'heptagone
par Danielle Salles-Legac

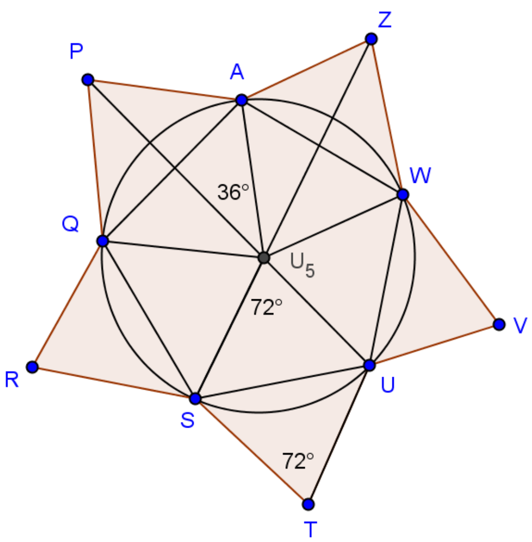
¿Piensa que se puede construir así pavimentos con polígonos estrellados teniendo más lados? ¿Qué pasaría?

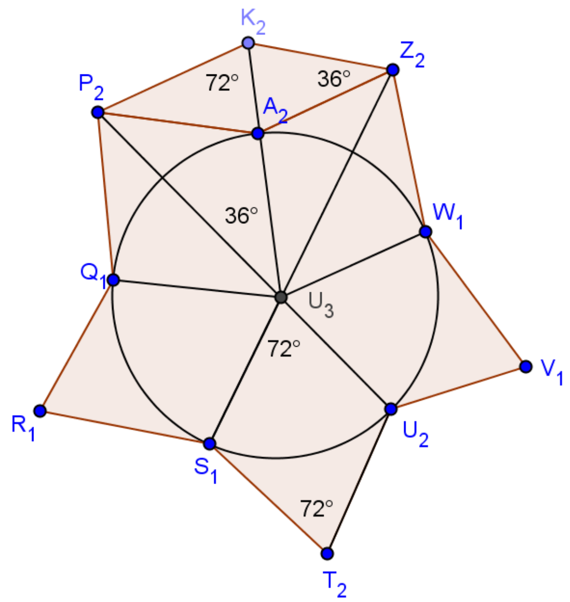
¡Más abajo le proponemos el mismo pavimento sin colores con el fin de que usted pudiera ejercer su talentos! Usted pueda en particular tratar de poner de manifiesto figuras en tres dimensiones…



Buen fin de año a todos!

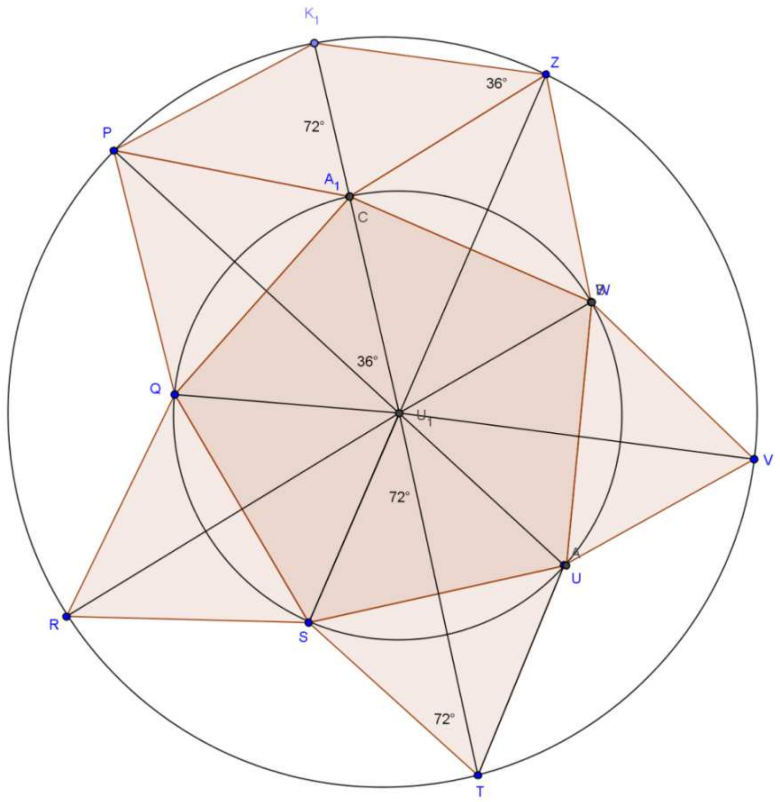
Indicaciones de soluciones: al ser regular el pentágono convexo, tiene 5 ángulos en el centro iguales pues de medida 360/5 = 72 °. Los triángulos construidos simétricamente a los triángulos centrales forman con éstos rombos iguales pues inscribibles en el mismo círculo de centro U_5 y de rayo el gran eje de los rombos iguales a U_5P. Los ejes principales son las bisectrices de los ángulos en el centro del primer pentágono convexo la medida de los ángulos de los triángulos iguales al triángulo PAU_5 es pues: 72/2 = 36 °, es la medida de los ángulos a la base del **triángulo de oro obtuso.**





Completamos los rombos de tipo $P_2A_2Z_2K_2$. Los rombos de tipo $P_2A_2U_3Q_1$ son todos iguales y tienen una cumbre común: U_3 y dos lados comunes, sus cumbres exteriores pues están todos situados sobre el mismo círculo que trazamos.

¿Por qué tienen los pequeños rombos de tipo $P_2A_2Z_2K_2$ su cumbre exterior K_2 sobre este círculo? Observemos en primer lugar que los puntos: U_1, A_1, K_1 son alineados por construcción porque los segmentos $[U_1A_1]$, $[A_1K_1]$ ambos son ortogonales a $[PZ]$. El ángulo PK_1Z es igual al ángulo PA_1Z. El triángulo PA_1U_1 es obtuso y de oro, su ángulo en la cumbre es: 180 - 2x36 = 108 °. El ángulo PA_1Z tiene pues para medida: 360 - 2x108 = 144 °. El ángulo PK_1U_1, igual al ángulo PA_1K_1 mide pues: 144/2 = 72 °. El ángulo $U_1P\ K_1$ tiene pues como medida 180-36-72 = 72 ° y el triángulo $U_1P\ K_1$ es isósceles, $[K_1U_1]$ es igual a $[PU_1]$, rayo del círculo: el punto K_1 es sobre este círculo.



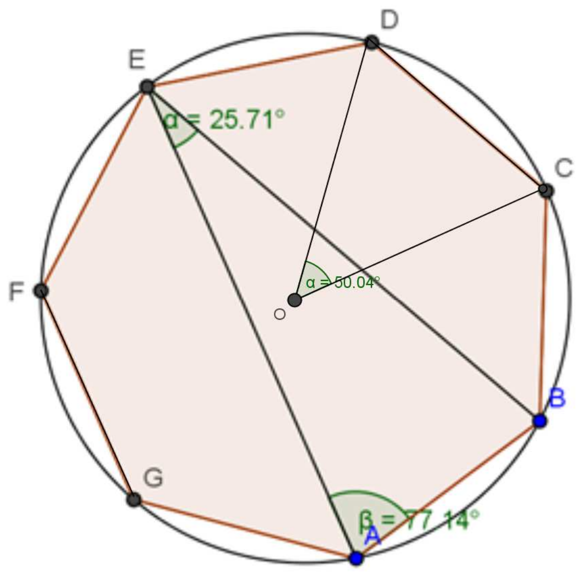
Podemos esperar completar este « triángulo mágico » lo mislo que el triángulo ODC aigudo de cumbre el centro del circulo.

A propósito del heptágono

El número 7 el que mí ha fascinado siempre (¡ no soy la primera!) me pregunté si este número sería de composición por muy buena igual a 5.

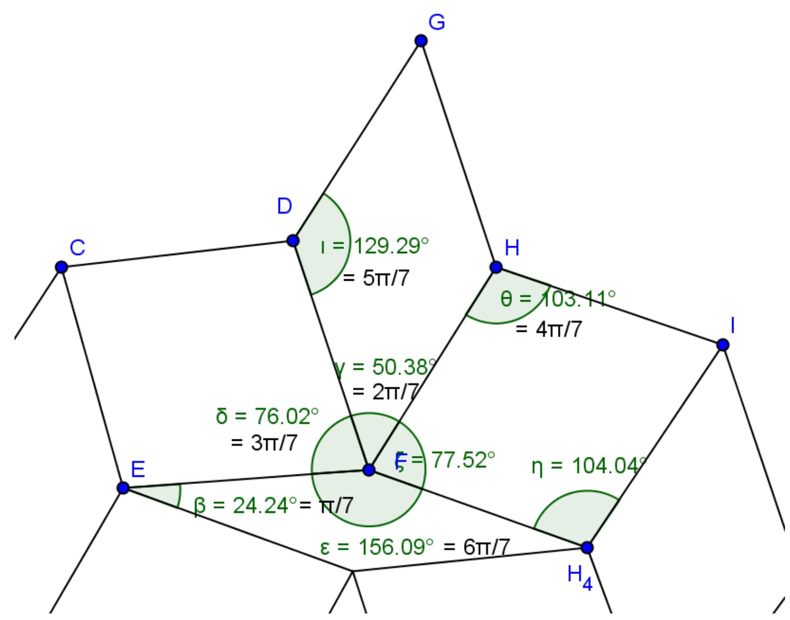
El heptágono regular convexo posee, en efecto, una propiedad divertida que se parece a la del pentágono: el triángulo de oro agudo tiene sus ángulos por la base de medida doble de la de su ángulo en la cumbre; el heptágono, él, posee un triángulo formado de dos rayos de su círculo circunscrito y de uno de sus lados de los que las medidas de ángulos en la cumbre es (evidentemente): **$2\pi/7$** sea 51,43 °. Sus ángulos para la base miden (180-51,43)/2 = 64,28° al centésimo de grado.

Podemos esperar poder completar este triángulo "mágico" lo mismo que el triángulo ODC agudo de cumbre el centro del círculo:



Le construímos un pavimento con rombos construidos a partir del heptágono, pero observamos que nos hacía un rombo suplementario, de ángulo agudo de medida 25,71 ° con el fin de "llenar" algunos hoyos! He mantenido aquí el detalle de las medidas libradas por GEOGEBRA. Observamos que, a causa de nuestro dibujo " en la mano ", las medidas libradas no son rigurosas, también señalamos más abajo las medidas al centésimo de grado:

$\pi/7 = 25{,}70°$; $2\pi/7 = 51{,}40°$; $3\pi/7 = 76{,}10°$; $4\pi/7 = 102{,}80°$;
$5\pi/7 = 128{,}50°$; $6\pi/7 = 154{,}20°$.



Observamos que los pares de ángulos que nos fueran utiles son todas las decomposisiones de 7 en pares de números enteros inferiores cuya suma es 7.