
« Triangles rectangles de Ruben »
Questions et problèmes pour chercher dans un parcours d'étude et de recherche.

Auteur : Ruben Rodriguez Herrera
IREM ESPE UCBN de Basse-Normandie
Juillet 2015

Introduction :

Lorsque je corrige mes copies de mathématiques et que je trouve une erreur du type « formule erronée » (car elle est inapplicable dans le cas général), je m'interroge sur la possibilité de l'existence d'un sous-ensemble formé des cas où la formule « fausse » serait valable.

C'est le cas de cette « petite histoire de recherche» qui m'a permis de réaliser un PER « Parcours d'Étude et de Recherche » autour du théorème de Pythagore et de triangles rectangles un peu particuliers.

De tels PER ont pour objectif de travailler les compétences concernant « l'attitude de recherche en mathématiques».

Il est souhaitable que nos élèves réalisent un PER à partir de la question initiale : « étudier et rechercher les ensembles où une formule serait fausse dans le cas général mais valable dans ces ensembles particuliers.

Avertissements :

1) un PER débute toujours par l'appropriation d'une question commune posée à un groupe d'élèves et suffisamment riche pour permettre à chacun de se construire un parcours des questions associées et ainsi effectuer un parcours d'étude et de recherche personnalisé. C'est ainsi que pour entrer dans le parcours d'un autre élève il est primordial que le récit du PER soit le plus fidèle possible au cheminement réel des questions et recherches telles qu'elles se sont posées. J'ai essayé ici de vous les donner le plus fidèlement possible, en respectant la diversité de mon propre parcours qui comporte parfois des superpositions des résultats découverts dans différents *« univers »*

Il y a dans cette publication douze parties.

Les parties I à X sont celles qui décrivent ma recherche faite en juillet avant la présentation du mois de septembre à la journée de rentrée de notre IREM.

La partie XI est un résumé de l'exposé-atelier de la journée de rentrée IREM où les collègues présents ont travaillé sur la question que je me suis posée au départ sans avoir fait ma présentation, après ma présentation nous avons eu un échange riche qui a ouvert des pistes pour poursuivre la recherche.

La partie XII est consacrée à explorer les nouvelles recherches qui découlent aussi de la question initialement posée.

2) Dans cet article j'ai souvent utilisé le terme de la didactique : *« univers »*. Un *« univers »* est un ensemble où l'élève se place afin de donner sens aux

questions posées. Il s'agit d'un ensemble relativement restreint où l'un des registres des mathématiques est prépondérant.
Par exemple l'élève peut décider de réfléchir à la question dans *« l'univers algébrique des systèmes d'équations du second degré a trois variables ».*

Partie I)
Lors de la correction d'une copie d'examen du master du professorat des écoles à l'ESPE de Basse-Normandie une étudiante avait énoncé le théorème direct de Pythagore sous la forme erronée :
$a^2/b^2 = c^2$ au lieu de la bonne forme **$a^2 + b^2 = c^2$** pour un triangle ABC, rectangle en C.
J'ai fait l'hypothèse d'une cause possible ce cette erreur.

Il est vraisemblable que cette étudiante ait confondu et mélangé les écritures algébriques des deux théorèmes principaux de son programme : Thalès et Pythagore en ayant révisé les formules dans le seul *« univers des formules »* sans faire la correspondance avec *« l'univers des configurations et celui des unités de mesure ».*

Une question m'est apparue :
Existe-t-il des triangles rectangles qui vérifient évidement, non seulement la formule de Pythagore mais aussi :
$a^2/b^2 = c^2$? (ou la condition équivalente dans les réels strictement positifs $a/b=c$)

J'ai commencé ainsi un parcours d'étude et de recherche, en me plaçant tout d'abord dans *« l'univers algébrique des équations de second degré à trois inconnues ».*
Soit le système d'équations dans $\mathbb{R}^*_+$

$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $a^2/b^2 = c^2$ (équation 2)
ou bien le système équivalent dans $\mathbb{R}^*_+$
$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $a^2 = b^2c^2$ (équation 2')

ou bien le système équivalent dans $\mathbb{R}^*_+$
$b^2c^2 + b^2 = c^2$ (équation 1') et $a^2 = b^2c^2$ (équation 2').

On obtient :
$b^2 = c^2 / (c^2+1)$ et $a^2 = c^4 / (c^2+1)$
avec les réels $a>0$ $b>0$ et $c>0$.
On peut alors prendre c comme une variable réelle strictement positive et calculer a et b.
C'est ainsi que tout naturellement j'ai écrit :

Définition : ***« un triangle rectangle ayant pour mesures des côtés de l'angle droit « a » et « b » et de l'hypoténuse « c » est un triangle rectangle de Ruben si a/b = c »***

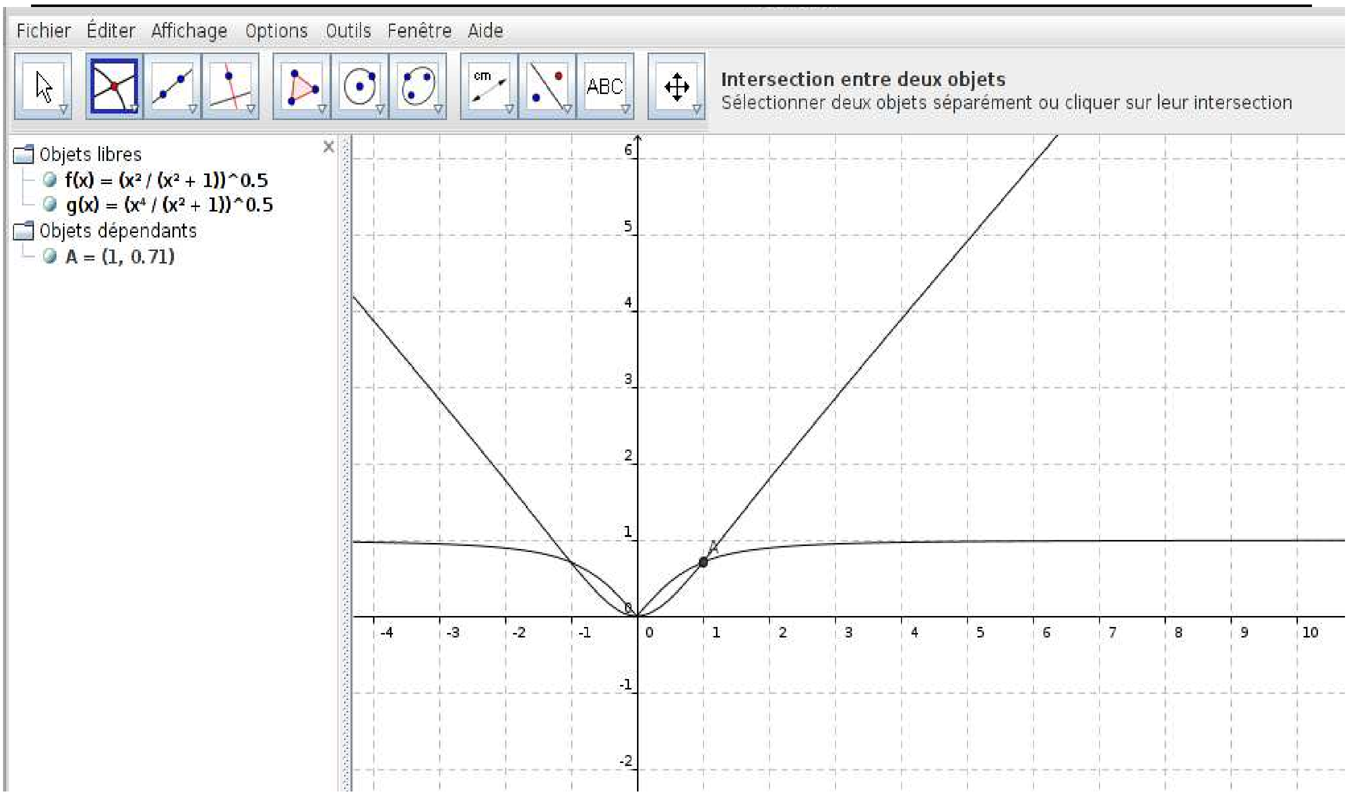
Voici quelques *« triangles rectangles de Ruben » (*).*

1) Pour $c = \sqrt{2}$ on obtient $a = 2\sqrt{3}/3$ et $b = \sqrt{6}/3$
On vérifie qu'il s'agit d'un « triangle rectangle, car $a^2 = 12/9$ $b^2 = 6/9$; $a^2+b^2 = 2$ et $c^2 = 2$ donc $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$ et d'autre part,

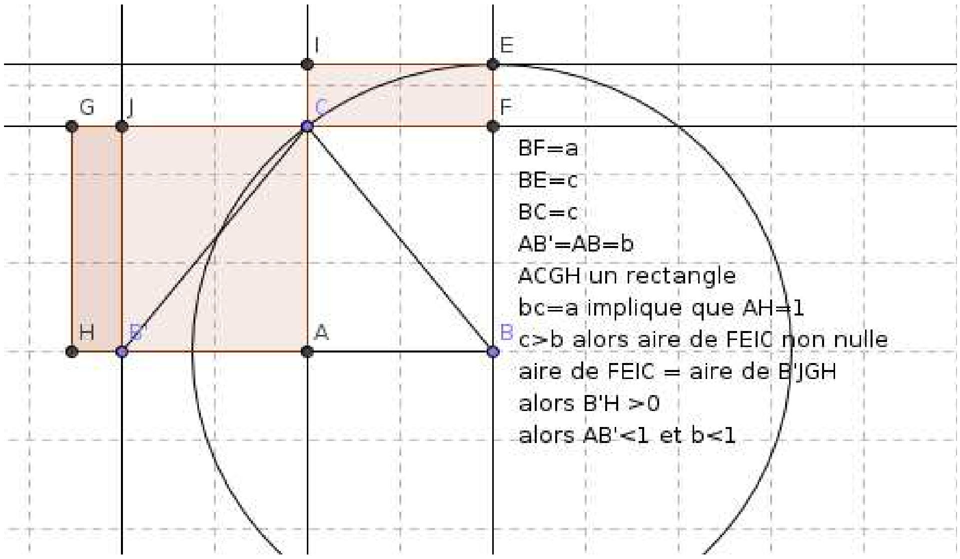
c'est un ***« R-triangle rectangle »*** car $a^2/b^2 = 2$ qui est égal à $c^2= 2$ et alors $a^2/b^2 = c^2$
2) Soit $c = 1$ alors $a = \sqrt{2}/2$ et $b = \sqrt{2}/2$
C'est le seul ***« R-triangle rectangle » isocèle.***

3) J'ai décidé par la suite de travailler dans l'univers des fonctions et représentations graphiques avec les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*_+$ et de regarder les couples possibles.
Par exemple par des graphiques sur GEOGEBRA avec
$f(x) = \sqrt{(x^2/(x^2+1))}$ correspondant à $b^2 = c^2/(c^2+1)$
et
$g(x) = \sqrt{(x^4 / (x^2+1))}$ correspondant à $a^2 = c^4 / (c^2+1)$.

J'ai confirmé graphiquement à l'aide de GEOGEBRA, que le seul ***« R-triangle rectangle » isocèle*** est celui que j'avais trouvé par le calcul algébrique, celui-ci ayant pour mesure de longueur des côtés $a = \sqrt{2}/2$
$b = \sqrt{2}/2$ et $c = 1$ (par rapport à une unité donnée).
La fonction f est celle qui équivaut à 1 en $+\infty$ et admet donc une asymptote d'équation : $y = 1$.
(*) j'ai choisi cette dénomination personnelle car à ma connaissance cette particularité dans un triangle : $a^2+b^2=c^2$ et $a^2/b^2=c^2$ n'a pas reçu de dénomination particulière. Dans la suite de ce travail je noterai ces triangles particuliers des ***« R-triangles rectangles ».***



La fonction g est celle dont un équivalent en +∞ est x et elle admet une asymptote d'équation y = x.
On voit aussi sur le graphique que b sera toujours compris entre 0 et 1 (0<b<1) et que par contre 0<a<+∞ et 0<c<+∞ .
Dans « *l'univers des aires des rectangles et des triangles rectangles* » ceci est évident.



Par un développement limité en x>0 nous obtenons l'égalité :
g(x) = x-1/x + o(1/x) d'où l'asymptote y = x et g(x)<x (nous observons seulement les x positifs).

On voit que la limite de $f(x)/x$ est 1 ce qui veut dire que pour des valeurs très grandes de c la valeur de b sera proche de 1 et celle de a proche de c.
Soit par exemple $c = 10000$ alors $a = 10000{,}00005$ et $b = 0{,}99999$.

4) D'autres questions se posent par la suite, par exemple : *« quelle est la valeur de c si a = 1 ? »*
On part de $a^2 = c^4 / (c^2+1)$ et pour $a = 1$ on obtient :
$1^2 = c^4 / (c^2+1)$ qui conduit à $c^4 - c^2 - 1 = 0$ (équation bicarrée en c) donc j'ai posé : $c^2 = X$.
Voici donc l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ dont la solution positive est $(1+\sqrt{5})/2$

c'est-à-dire le nombre d'or noté habituellement par φ.
Le nombre c est la racine carrée du nombre d'or et b est la racine carrée de l'inverse du nombre d'or.
Rappelons que, dans ce cas nous avions choisi : $a = 1$.

Une autre question peut se poser :
Existe-t-il une « triangle de Kepler » qui soit un ***R-triangle rectangle*** *?*
Rappel : un triangle de Kepler est un triangle ayant pour mesures des côtés :
r , $r\sqrt{\varphi}$ et $r\varphi$ (où r un réel positif et φ le nombre d'or).

C'est-à-dire que les mesures des côtés sont en progression géométrique de raison $\sqrt{\varphi}$
On voit bien que en calculant d'une part $r^2 + (r\sqrt{\varphi})^2 = r^2(1+\varphi)^2$ et comme $1+\varphi = \varphi^2$ on a l'égalité $r^2 + (r\sqrt{\varphi})^2 = (r\varphi)^2$ et donc le triangle est rectangle par la réciproque de Pythagore.

J'ai posé ensuite pour un triangle de Kepler une condition pour qu'il soit un ***R-triangle rectangle :***

$(r\sqrt{\varphi})/r = r\varphi$ et $r = 1/\sqrt{\varphi}$.

J'ai obtenu le triangle ayant pour mesures :

$1/\sqrt{\varphi}$; 1 et $\sqrt{\varphi}$

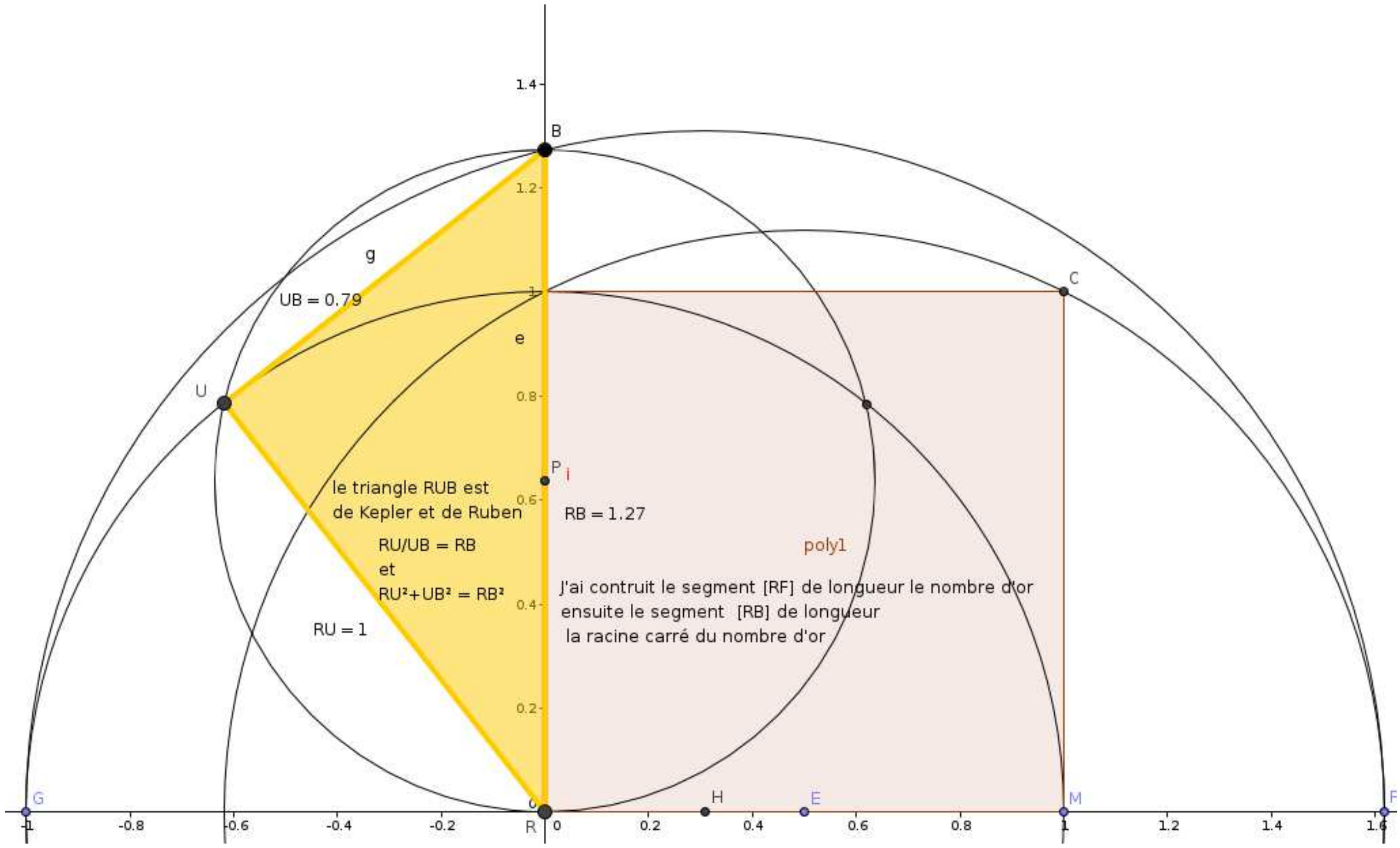
Ici le côté le plus petit est $b = 1/\sqrt{\varphi}$ puis $a = 1$ et $c = \sqrt{\varphi}$.

Vérification : $(1/\sqrt{\varphi})^2 + 1^2 = 1/\varphi + 1 = \varphi - 1 + 1 = \varphi$
qui est égal à $(\sqrt{\varphi})^2$.

D'autre part $1/(1/\sqrt{\varphi}) = \sqrt{\varphi}$.

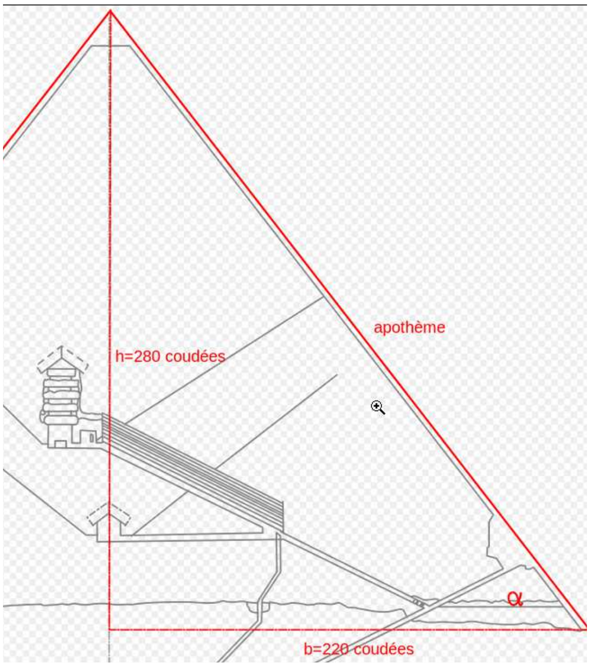
J'ai obtenu ainsi le seul « triangle de « Kepler » qui soit aussi un « rectangle de Ruben » (car la seule solution dans R+* est $r = 1/\sqrt{\varphi}$.

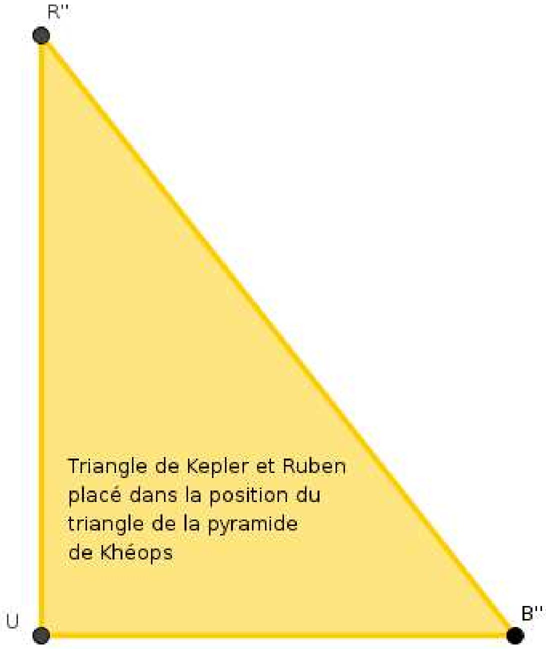
Donc c'est le triangle obtenu précédemment avec le choix de a=1.
J'ai réalisé la construction du triangle de Kepler et ***R-triangle rectangle*** à l'aide de GEOGEBRA et je l'ai trouvé harmonieux…



J'ai remarqué que le rapport entre les mesures de l'hypoténuse (apothème), et le plus petit côté est égal au nombre d'or.
Ceci m'a fait penser à la pyramide de Khéops qui a justement le triangle rectangle qui détermine la pente choisie par les égyptiens de 14/11 et ceci conduit a un rapport entre l'apothème et la demi-base égal au nombre d'or (à 0,01 près).
Donc j'ai constaté que le « triangle de Kepler et de Ruben » est semblable à celui de la grande pyramide de Khéops. Il est aussi un triangle semblable au « triangle d'or de Pythagore ».

Voici les images de la pyramide de Khéops et du « triangle de Kepler et Ruben »





Remarque : le demi-périmètre du carré de la base de la pyramide transposé à notre triangle en prenant comme base *1 / √φ vaut 4/√φ* et en calculant le rapport du demi- périmètre à la hauteur du triangle (qui vaut 1) on obtient *4/√φ = 3,14 (à 0,01 près).* Cette approximation du nombre π *e*st donc présente dans les rapports des mesures de Khéops et dans « le triangle de Kepler et ***R-triangle rectangle »***.

Le nombre d'or à été toujours source de motivation et dans notre IREM de Basse-Normandie le « groupe géométrie » a réalisé un ouvrage que je vous conseille : « **Le nombre d'or. Nouveautés mathématiques ludiques »** Publication de l'IREM de Basse-Normandie, février 2015 par Abderrahamane Nitaj, Anne-Marie Bock, Danielle Salles, Jean-Pierre Legoff, Ruben Rodriguez Herrera.

5) une question : quel est le triangle si c = *φ ?*
Remarque : dans notre parcours d'étude et de recherche une question en appelle une autre par simple démarche de curiosité et ceci est courant dans un PER.
Du point de vue didactique, dans un PER, il faut laisser libre cours aux questions de nos élèves.
Par la suite c'est à l'enseignant et aux élèves conjointement de faire vivre la phase de partage et regarder les questions qui ont apporté du nouveau ainsi que celles qui ont servi à confirmer dans un univers des résultats trouvés auparavant dans un autre univers.
On a :
$a^2 = \varphi^4 / (\varphi^2+1)$ et à l'aide des puissances du nombre d'or (voir le site de Gérard Villemin)

http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Geometri/NbOrPuis.htm

$a^2 = (3\varphi+2)/(\varphi+2)$ et $b^2 = \varphi^2/(\varphi^2+1) = (\varphi+1)/(\varphi+2)$.

6) Question (*je me suis posé cette question avant de m'intéresser aux triangles de Kepler*), : quel est le triangle si $c^2= \varphi$?
On a :
$b^2 = \varphi/(\varphi+1) = \varphi/\varphi^2 = 1/\varphi$ et $a = \varphi^2/(\varphi+1) = \varphi^2/\varphi^2 = 1$.
Cette question a été suscitée par le fait que, précédemment, je me suis intéressé aux ***R-triangle rectangle*** ayant pour longueur de leur hypoténuse le nombre d'or φ.

Partie II Vers l'univers de l'arithmétique...
7) Une autre question : existe-t-il un ***« R-triangle rectangle pythagorique »***, c'est à dire ayant **trois entiers** comme mesures des côtés ?
On peut choisir pour c un entier naturel strictement positif, donc il y a une infinité de ***« R-triangle rectangle »*** ayant comme mesure de l'hypoténuse un nombre entier.

Peut-on avoir en même temps que c entier « a » aussi entier ?

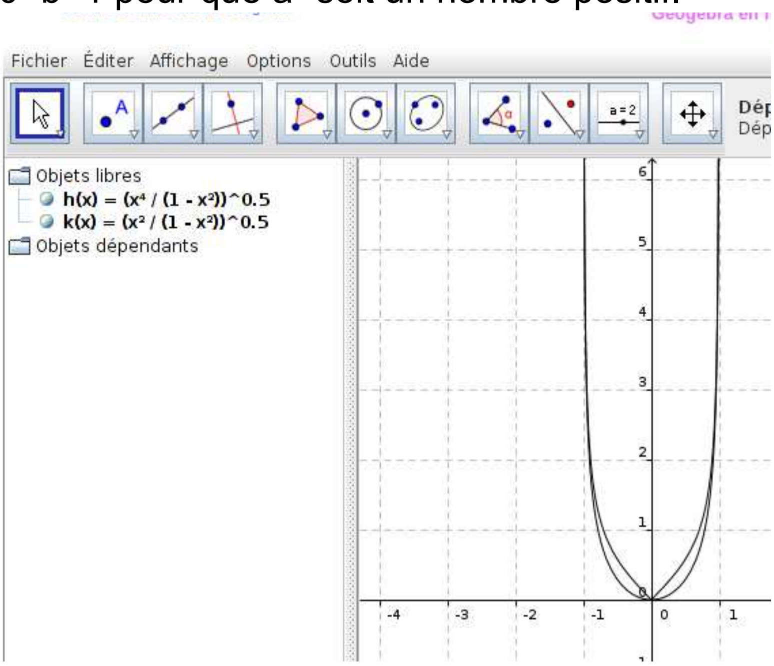
Ceci nous conduit à la question :

$c^4 / (c^2+1)$ peut-il être égal à un carré parfait p^2 où p est un entier naturel ?.
Posons $c^2 = X$ on a alors l'égalité $X^2 = (X+1) p^2$ avec $X>0$.
On voit qu'une condition nécessaire est que X+1 soit un carré parfait et X le soit aussi.
Le seul nombre X tel que X et X+1 soient deux carrés parfaits est 0.
On le voit dans la suite des carrés 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; …
Une voie plus rapide proposée par un collègue, Eric Trotoux, de notre IREM
$a = bc$ et $a^2+b^2 = c^2$ implique que $b^2(c^2+1) = c^2$ puis que, sur R^+ , $0<b<1$.
Donc on ne peut pas avoir dans les ***« R-triangles rectangles »*** deux nombres entiers en tant que mesures de deux côtés.
Remarque : une autre première phase d'entrée du PER pour notre collègue Eric serait de partir au début par cette dernière question.

Partie III Un autre choix sur le système d'équations.
8) Nous avions commencé notre recherche par la voie algébrique : avec le système d'équations dans $\mathbb{R}^{*+}$

$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $a^2/b^2 = c^2$ (équation 2).
Nous pouvons choisir de faire :

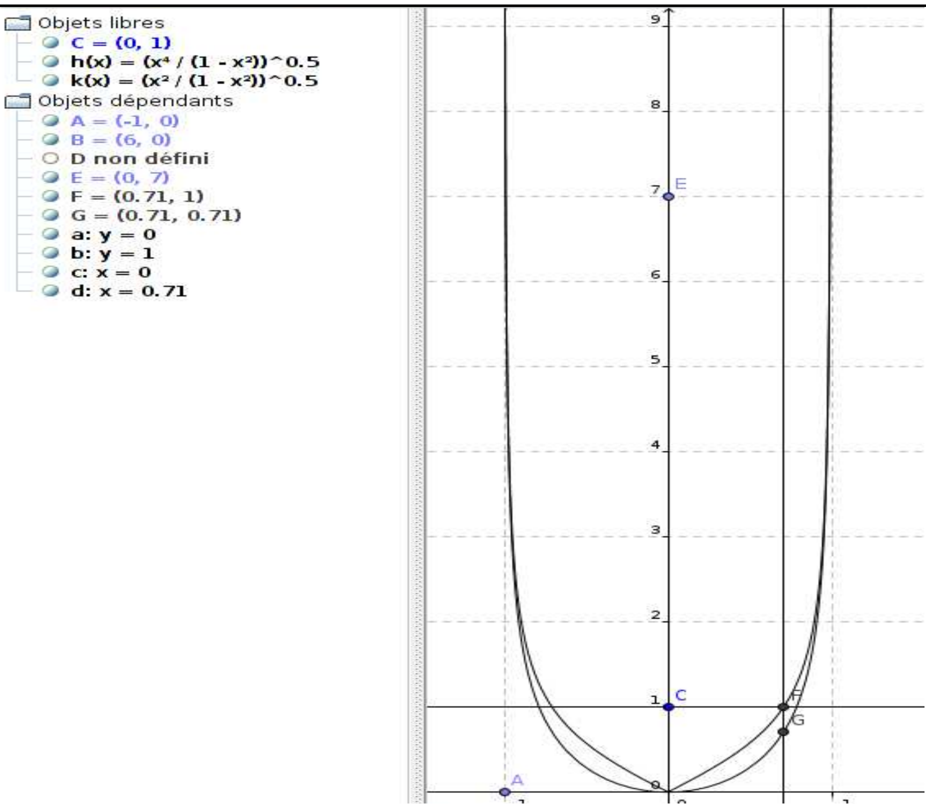
$c = a/b$
alors $a^2 + b^2 = a^2/b^2$ ou bien $(1/b^2-1)a^2 = b^2$ ou bien
$(1-b^2)a^2 = b^4$
ce qui donne
$\mathbf{a^2 = b^4/(1-b^2)}$.
Et on trouve la même condition $0<b<1$ pour que a^2 soit un nombre positif.
Dans ce cas on trouve
$\mathbf{c^2 = b^2/(1-b^2)}$.



Ainsi on peut faire une autre résolution graphique en fonction de b
et des fonctions h et k.

On voit que ce choix de fonction n'est pas visuellement aussi efficace que le choix fait précédemment.

Il est intéressant que les élèves s'exercent à retrouver les résultats dans les graphiques réalisés avec d'autres fonctions.
Par exemple avec les graphiques des fonctions h et k on peut retrouver que, quand $c = 1$ alors $a = \sqrt{2}/2$ $b = \sqrt{2}/2$.
Ici ce sont les points F et G qui nous donnent les valeurs de a et b.



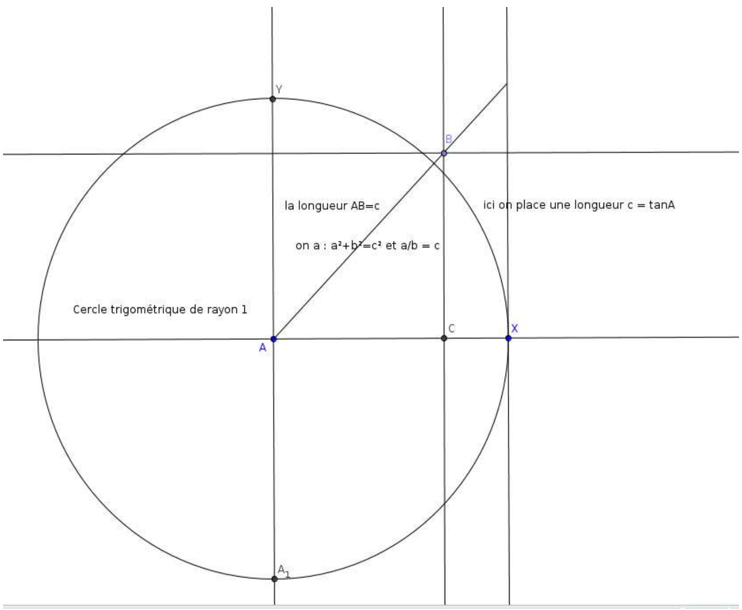
Partie IV Utilisation de l'univers du cercle trigonométrique pour construire des *« R-triangles rectangles »*

9) $a^2+b^2 = c^2$ donne $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$ Ceci peut être vu sous la forme : $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

De même a/b est vu comme tanA

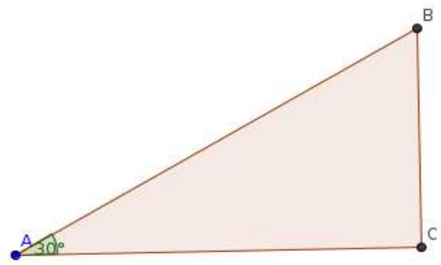
Alors la condition a/b = c pour c donné, nous donne tanA=c

On utilise le cercle trigonométrique pour construire un ***« R-triangle rectangle »*** Voici le cercle trigonométrique (de rayon 1).



Les calculs nous donnent : $c/1 = a/b$ c'est à dire $c^2 = a^2/b^2$ et $a^2+b^2 = c^2$.
On part de $c = \tan A$. Par exemple $c = (\sqrt{3})/3$ et avec $\operatorname{Arctan}((\sqrt{3})/3)$ la mesure en degrés de l'angle non orienté $\hat{A}$, égale à 30°.
Ensuite on calcule :
$a = ((\sqrt{3})/3)\cos 60° = ((\sqrt{3})/6)$ et $b = ((\sqrt{3})/3)\sin 60° = 1/2$.

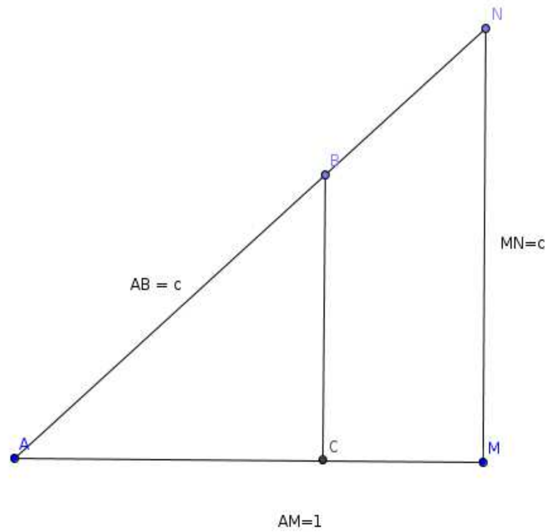
On peut vérifier que $a^2 + b^2 = 3/36 + 1/4 = 12/36 = 1/3 = c^2$
et que $a^2/b^2 = (3/36):(1/4) = 3/9 = 1/3 = c^2$.



Donc il s'agit bien d'un ***« R-triangle rectangle ».***
Remarque ce triangle à une autre particularité il s'agit de « la moitié » d'un triangle équilatéral ayant pour mesure des côtés $(\sqrt{3})/3$.

Partie V Utilisation de l'univers des triangles semblables ou de l'univers des configurations de Thalès pour construire des *« R-triangles rectangles ».*

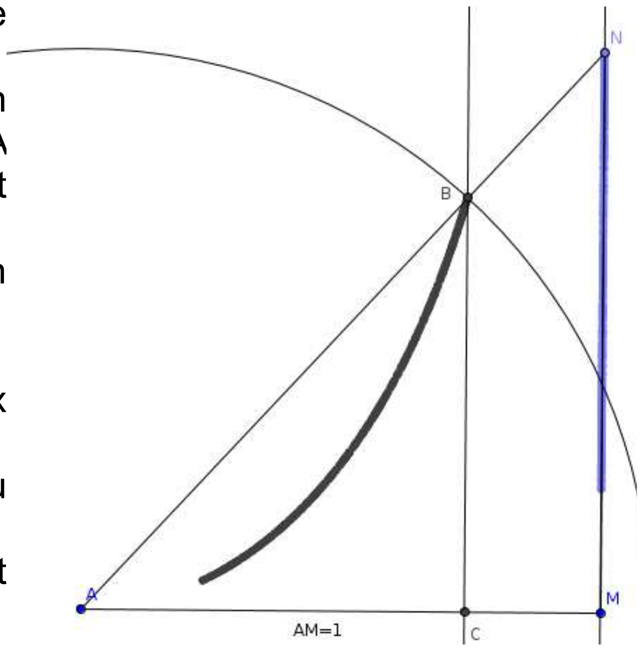
10) On commence par un segment [AM] tel que AM = 1 ensuite on construit un triangle AMN rectangle en M tel que MN = c donné.
Ensuite on place un point B sur [AN] tel que AB = c et on finalise le triangle ABC rectangle en C
Avec a = BC et b = AC.
Par le théorème de Thalès ou par les triangles semblables on a $c/1=a/b$ donc on a les relations :
$a^2+b^2 = c^2$ et $a^2/b^2 = c^2$.
C'est donc un ***« R-triangle rectangle »***



Remarque : dans un PER on se pose des questions successivement et après on peut remarquer qu'il s'agit ici d'une partie équivalente à la précédente (9), du point de vue formel. Il n'est pas habituel de « se répéter » dans un article purement mathématique, par contre du point de vue didactique dans un PER il est fréquent de s'engager dans des voies mathématiquement équivalentes mais présentes dans une forme un peu différente selon le *« petit univers »* où l'on agit.

Partie VI dans l'univers des lieux géométriques.

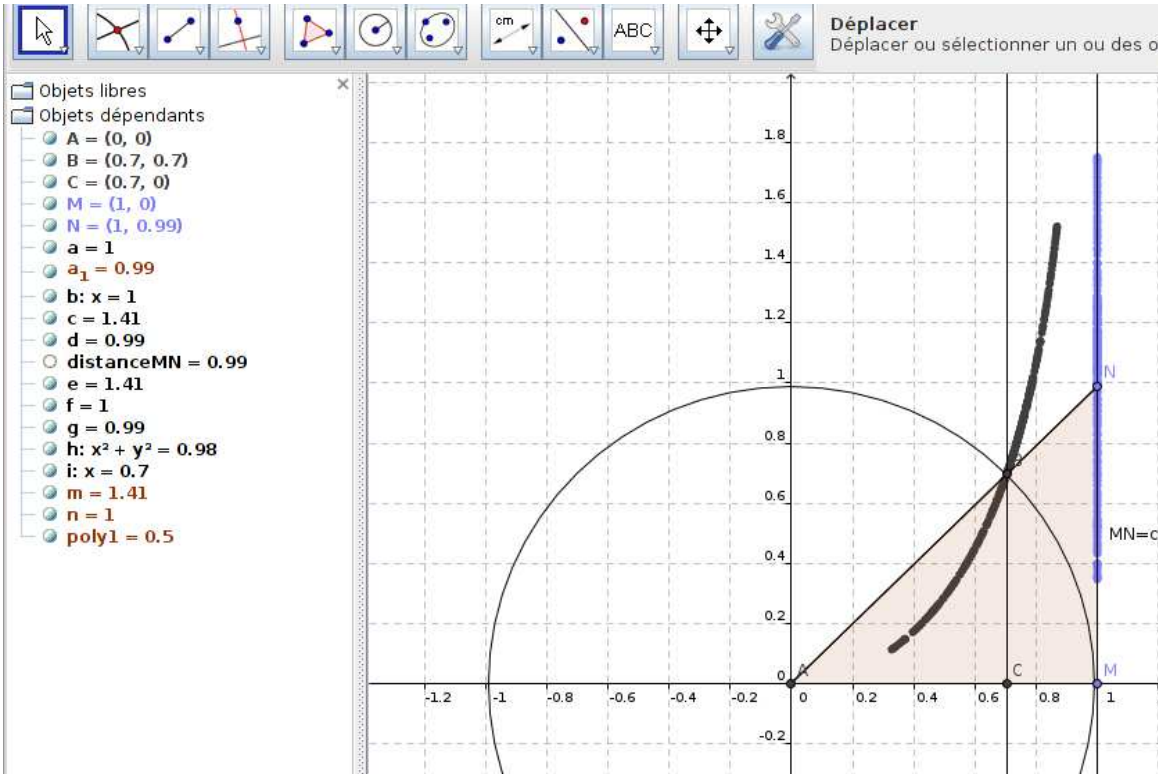
11) On peut s'interroger sur des questions comme : Que se passe-t-il avec le point B si l'on prend différentes valeurs de c. C'est à dire si le point N varie de position toujours sur la perpendiculaire à (AM) passant par M.
Comme le point B est lié au point N on constate expérimentalement et visuellement dans l'univers de GEOGEBRA que le point B est sur une courbe.
Une question s'impose tout de suite : peut-on caractériser par des équations cette courbe ?
On applique les outils de l'univers de la géométrie repérée.
Soit un repère orthonormé du plan définie par un triplet (A;M;P) avec A comme origine, MAP un angle droit et AM = AP = 1.
Soit B(x;y) dans ce repère. On observe un peu avec GEOGEBRA.

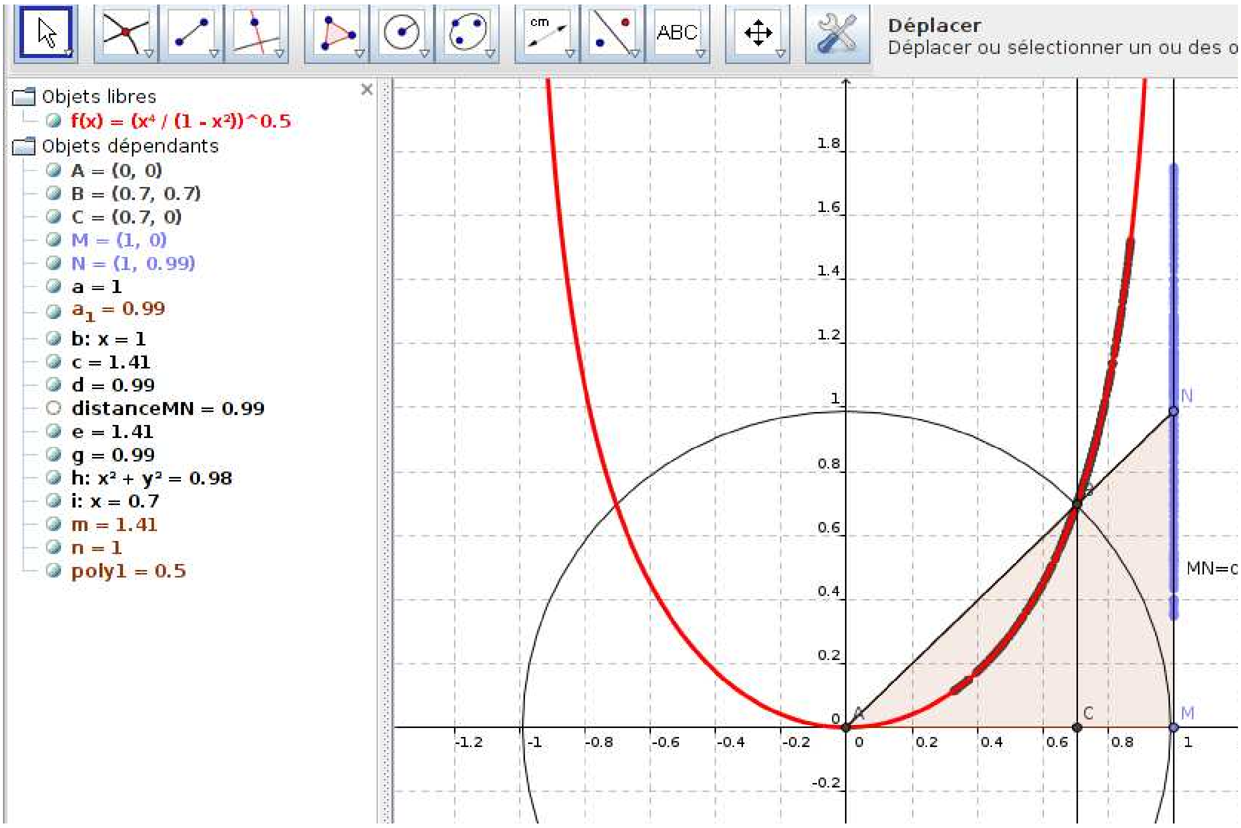


Le point B(x;y) est soumis aux conditions géométriques :
il appartient à la droite (A ;N) et au cercle de centre A et de rayon MN = c
Une équation de (A;N) est $y = cx$, et pour le cercle $x^2+y^2 = c^2$.

On élimine c entre les deux équations ce qui conduit à :
$x^2+y^2 = y^2/x^2$ ou bien $x^2 = (1/x^2 -1)y^2$ d'où $y^2 = x^4 /(1-x^2)$
finalement : $y = \sqrt{(x^4 /(1-x^2))}$ avec $0<x<1$.

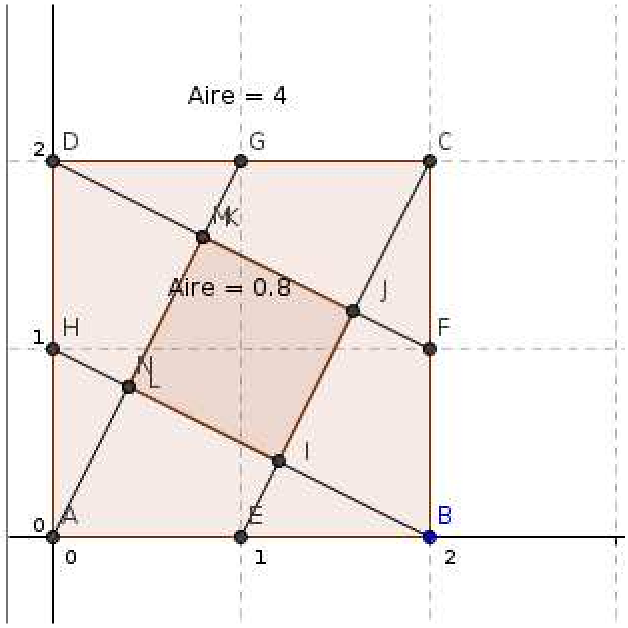
Alors on trace dans GEOGEBRA cette courbe
et on vérifie qu'elle coïncide évidement avec la trace du point B quand on avait déplacé le point N sur la droite perpendiculaire à (AM) passant par M.


Déplacer
Déplacer ou sélectionner un ou des o
Objets libres
Objets dépendants
A = (0, 0)
B = (0.7, 0.7)
C = (0.7, 0)
M = (1, 0)
N = (1, 0.99)
a = 1
a1 = 0.99
b: x = 1
c = 1.41
d = 0.99
distanceMN = 0.99
e = 1.41
f = 1
g = 0.99
h: x² + y² = 0.98
i: x = 0.7
m = 1.41
n = 1
poly1 = 0.5
MN=c


Déplacer
Déplacer ou sélectionner un ou des o
Objets libres
f(x) = (x⁴ / (1 - x²))^0.5
Objets dépendants
A = (0, 0)
B = (0.7, 0.7)
C = (0.7, 0)
M = (1, 0)
N = (1, 0.99)
a = 1
a1 = 0.99
b: x = 1
c = 1.41
d = 0.99
distanceMN = 0.99
e = 1.41
g = 0.99
h: x² + y² = 0.98
i: x = 0.7
m = 1.41
n = 1
poly1 = 0.5
MN=c

Remarque : ici on retrouve tout naturellement les équations de la partie (III) $a^2 = b^4/(1-b^2)$ et $c^2 = b^2/(1-b^2)$

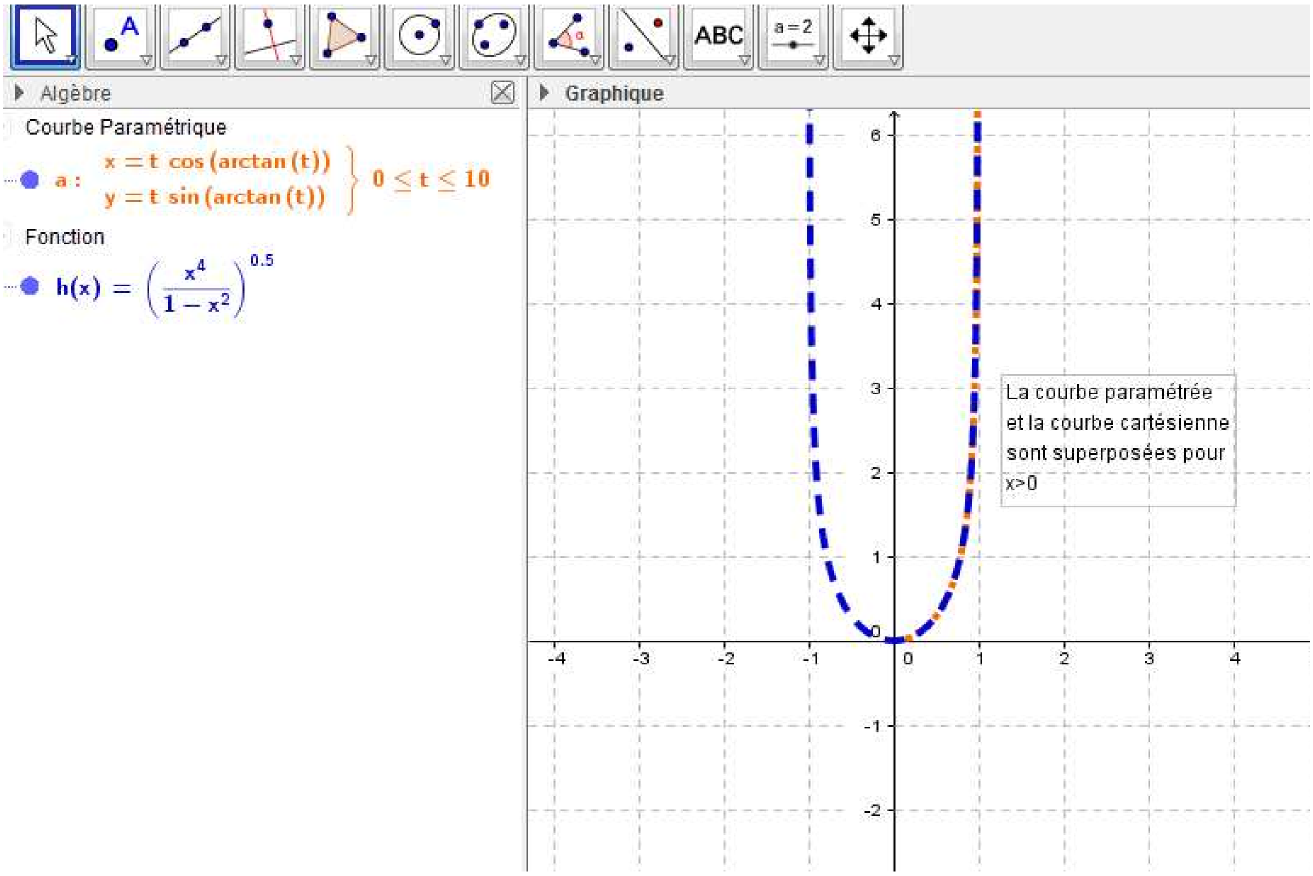
Nous pouvons rechercher encore d'autres ***« R-triangles rectangles »*** en imposant une égalité supplémentaire entre a et c ou entre b et c ou entre a et b. Par exemple c = 2a qui conduit à $a^2+b^2 = 4a^2$ et a/b = 2a .
Ce qui donne a = √3/6 b = 1/2 c = √3/3 (résultat trouvé plus haut)
Par exemple a = 2b qui conduit à $5b^2 = c^2$ et a/b = 2 = c.
Ce qui donne b = 2√5/5 et a = 4√5/5 .
Ce *« triangle rectangle de Ruben »* possède une autre propriété : son aire est le cinquième de l'aire du carré construit sur son hypoténuse. C'est un triangle qui intervient dans la solution du partage d'un carré en cinq parties de même aire et dont une des parties est un carré.



Ici le carré ABCD a pour mesure de côté 2 et les points E,F,G,H sont les milieux respectifs aux côtés du carré ABCD. Les triangles IBC, JCD, DKA, ALB et le « petit carré » IJKL ont une aire égale à 1/5 de celle du « grand carré » ABCD.

J'ai orienté par la suite ma recherche vers l'utilisation des courbes paramétrées et réalisé une représentation graphique avec GEOGEBRA.
Remarque : mon intérêt n'est pas de chercher une nouveauté, mais tout simplement de confirmer par quelques calculs classiques les résultats précédents.
Du point de vue pédagogique je pense que parfois, pour des élèves motivés on peut leur proposer de confirmer des résultats en prenant plaisir à changer d'univers.
L'intention de mon article est de vous montrer que dans un PER on peut prendre des chemins différents tout simplement par plaisir de retrouver des résultats précédents en promenade dans autres univers.

Par exemple avec le paramétrage suivant :
a(t) =[tcos(Arctan(t)),tsin(Arctan(t)) avec t dans [0,10] qui s'écrit en GEOGEBRA : courbe[t*cos(atan(t)),t*sin(atan(t),t,0,10] et retrouver la courbe précédente construite en coordonnées cartésiennes $y=(x^4 /(1-x^2))^{0.5.}$
Voici les deux courbes « superposées » en une seule.



On peut aussi utiliser la transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires.
Par exemple avec la condition x>0 et y>0 on pose :
$\theta = \text{Arctan}(y/x)$ et $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$

$\theta = \text{Arctan}(\sqrt{(x^4 /(1-x^2)}\ )/x) = \text{Arctan}(\sqrt{(x^2 /(1-x^2)}\ )$

$r = \sqrt{(x^2+(x^4 /(1-x^2))} = \sqrt{(x^2/(1-x^2))}$.

En combinant par remplacements dans les deux équations :

$\theta = \text{Arctan}(r)$ d'où $\tan\theta = r$
et alors $r= \tan(\theta)$ est une équation en coordonnées polaires de la courbe trouvée précédemment, avec $0 < \theta < \pi/2$.

Alors r= tan(θ) est l'équation polaire.

Pour le plaisir de faire quelques petits calculs j'ai vérifié, par le changement réciproque :

$r\cos\theta=\cos\theta\tan\theta = x$ et $r\sin\theta = \sin\theta\tan\theta = y$
$y/x=\tan\theta$
$x^2+y^2=\tan^2 \theta=y^2/x^2$ d'où $x^2= (1/x^2 -1)y^2$
$x^4 = ((1-x^2)y^2$
$y^2=x^4/(1-x^2)$
$y=(x^4 /(1-x^2))^{0.5}$.

J'ai eu envie de partir des coordonnées paramétriques et retrouver l'équation polaire précédente.

En partant des coordonnées paramétriques :
(tcos(Arctant),tsin(Arctant) j'ai posé :

$\theta = \mathrm{Arctan}(y/x)$ et $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$
$\theta = \mathrm{Arctan}(t\sin(\mathrm{Arctan}t)/t\cos(\mathrm{Arctan}t) =$
$\theta = \mathrm{Arctan}(t)$ d'où $\tan(\theta) = t$

$r^2 = (x^2+y^2) = (t\cos(\mathrm{Arctan}t))^2+(t\sin(\mathrm{Arctan}t))^2$
d'où $r^2 = t^2$.
$r^2 = \tan^2\theta$ et on obtient : $r = \tan(\theta)$ en polaires, ce qui vérifie bien nos calculs.
J'ai retrouvé en coordonnées polaires les résultats précédents, par exemple pour avoir x=y on doit poser $\theta = \Pi/4$ et alors $r = \tan(\Pi/4$ et r=1 pour $x=y=\sqrt{2}/2$.
J'ai retrouvé l'asymptote x=1 quand θ tend vers Π/2 par des valeurs inférieurs, car $x(\theta) = r\cos\theta = \sin \theta$ qui tend vers 1 et
$y(\theta) = r\sin\theta = \sin^2\theta/\cos\theta$ qui tend vers $+\infty$.

Partie VII Dans l'univers des surfaces et courbes de l'espace de dimension 3.

12) J'ai considéré ensuite les égalités :
$z^2 = x^2+y^2$ (égalité de Pythagore) et $z^2 = y^2/x^2$ comme des équations cartésiennes de deux surfaces dans un repère orthonormal (O,i,j,k) .
Remarque : cette partie est actuellement hors des programmes des classe préparatoires MP , mais je vous rappelle qu'il s'agit de mon parcours personnel dans mon PER, donc mon intérêt est tout simplement de me promener un peu dans cet univers des quadriques.

La première est l'équation d'un cône de révolution noté (C) et d'axe Oz et la seconde peut s'écrire pour $x>0$ $y>0$ et $z>0$ sous la forme $z = y/x$ où $zx = y$ qui est aussi une quadrique (un paraboloïde-hyperbolique).
Une équation cartésienne d'un cône de révolution est :
$x^2+y^2-z^2\tan^2\alpha = 0$ avec α une mesure de l'angle qui est formé par l'axe du cône et une génératrice.
Dans le cas de Pythagore on a $x^2 + y^2 = z^2$ donc il s'agit d'un cône avec $\alpha = 45°$ ou $\alpha = p/4$ (pour ma recherche je m'intéresse à la partie du cône définie par $x>0$, $y>0$ et $z>0$.
(voir :
http://www.mathcurve.com/surfaces/conederevolution/conederevolution.shtml
La seconde équation peut s'écrire : $y = xz$ (avec x,y,z positifs stricts). C'est encore une quadrique, un paraboloïde hyperbolique (dit « selle de cheval »).
Par exemple sur le plan $x = z$ on obtient $y = x^2$, une parabole (on peut aussi remarquer que sur les plans $z=x+h$ on obtient $y= x^2+hx$ encore une parabole) et sur le plan $y= k$ (constante non nulle), on obtient $k=xz$, une hyperbole équilatérale). Pour $k=0$ on obtient les deux droites $x=0$ et $z=0$.
D'où le nom « paraboloïde-hyperbolique » ou « hyperboloïde-parabolique »
Par la méthode classique avec la matrice Q de la forme quadratique associé à la quadrique et la recherche des valeurs propres de Q et j'obtiens :
$\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -1/2$ et $\lambda_3 = 1/2$
d'où la signature (1;1) ce qui implique que la quadrique est un paraboloïde hyperbolique, soit un cylindre hyperbolique ou la réunion de deux plans.
J'ai cherché une base orthonormale des vecteurs propres pour trouver la nouvelle expression de la quadrique et ainsi conclure la classification.
Une telle base est :

$((\sqrt{2}/2 ; 0 ;\sqrt{2}/2) , (0;1;0) , (\sqrt{2}/2 ; 0 ;-\sqrt{2}/2))$.

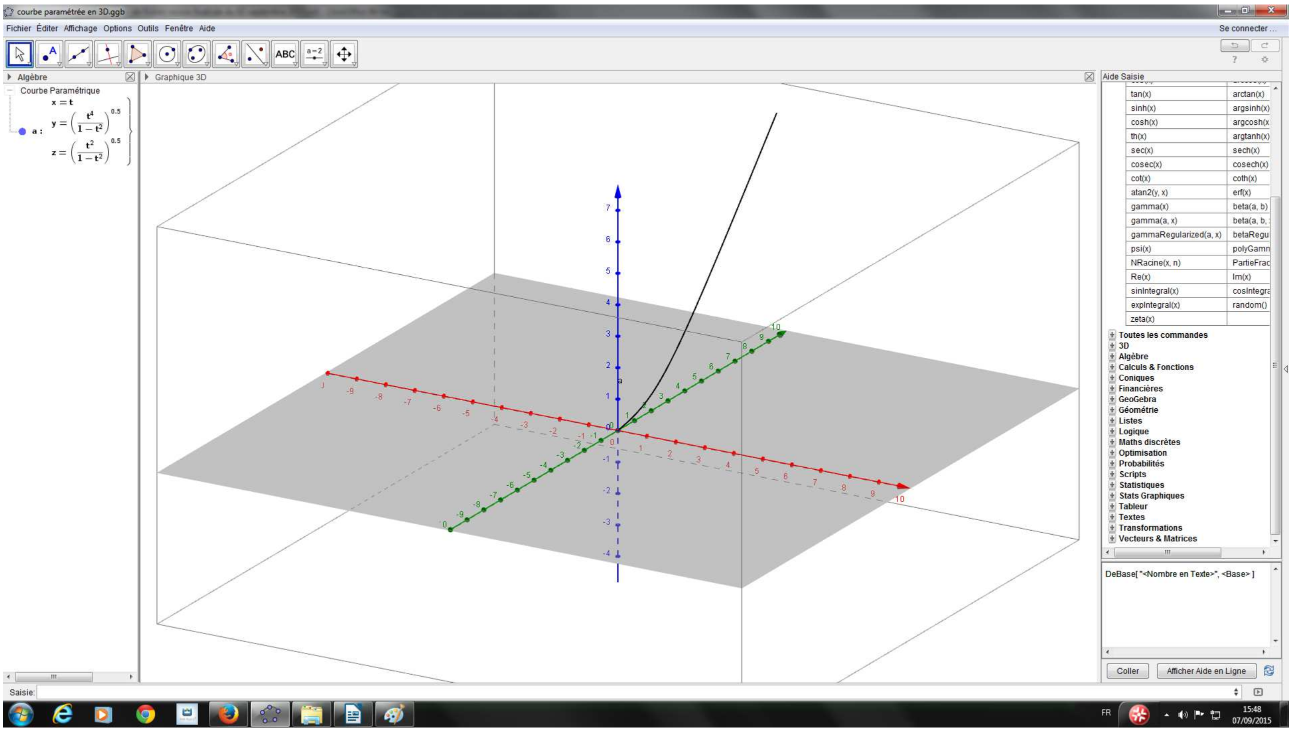
Étant donné la simplicité de $y = xz$ dans (O,i,j,k) j'ai posé $u+v = x$ et $u-v = z$ et $w = y$ pour obtenir l'équation du point M(u;w;v) $w = u^2-v^2$ ce qui m'a permis de reconnaître un paraboloïde hyperbolique dans le nouveau repère orthogonal.
Avec un nouveau changement de repère tel que :
$e=(\sqrt{2}/2)u$ $f=w$ et $g=(\sqrt{2}/2)v$ on obtient pour M(e;f;g) :

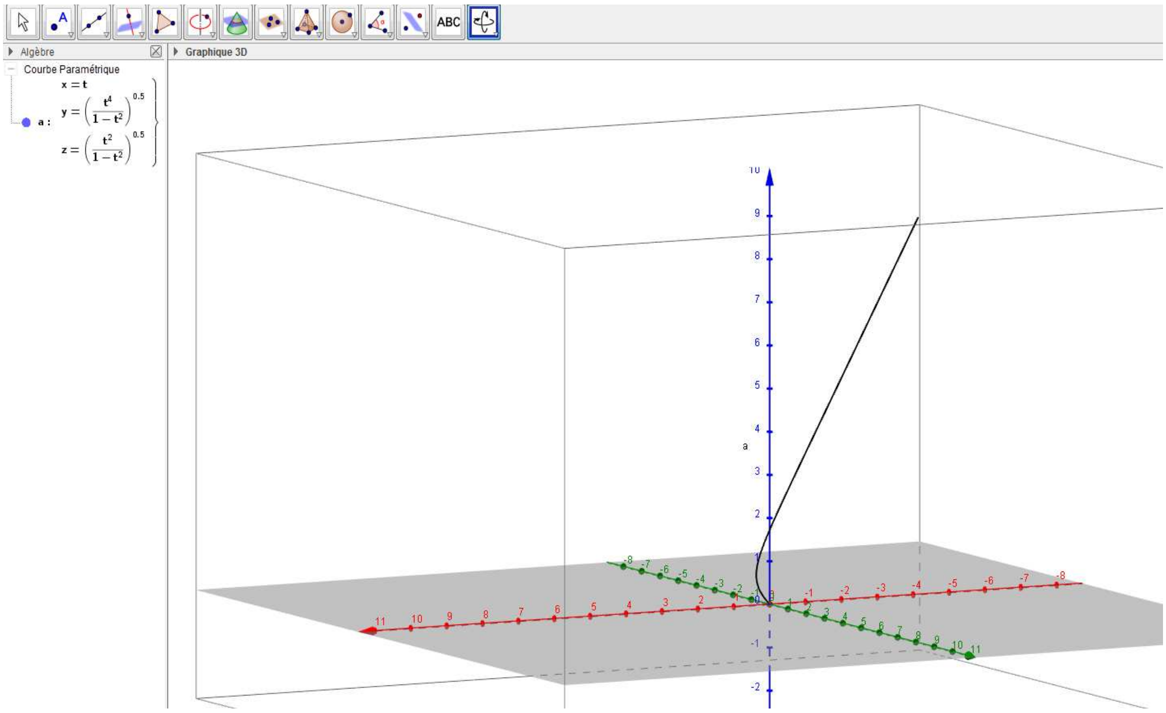
l'équation $f^2=e^2/0,5 – g^2/0,5$ dans le repère orthonormé :
$(O, (\sqrt{2}/2 ; 0 ;\sqrt{2}/2) , (0;1;0) , (\sqrt{2}/2 ; 0 ;-\sqrt{2}/2))$
équation qui est bien l'équation canonique d'un paraboloïde hyperbolique.
Je me suis intéressé au paraboloïde hyperbolique et à son utilisation en architecture.
Par exemple, le fait que c'est une surface réglée a permis que Antonio Gaudi l'utilise dans la forme du toit de la cathédrale de « La Sagrada Familia » à Barcelone (voir :

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/39/2/Ress_design-maths_gauches_eduscol_263392.pdf
J'ai regardé par exemple le fait que cette quadrique peut être engendrée à partir des hyperboles équilatérales sur les plans y = k parallèles à l'axe Oz en faisant parcourir k dans $\mathbb{R}$ ou plutôt dans $\mathbb{R}^*_+$
(j'ai trouvé par exemple le site :
http://www.mathcurve.com/surfaces/paraboloidhyperbolic/paraboloidhyperbolic.shtml
ou dans :
http://debart.pagesperso-orange.fr/ts/paraboloide.html

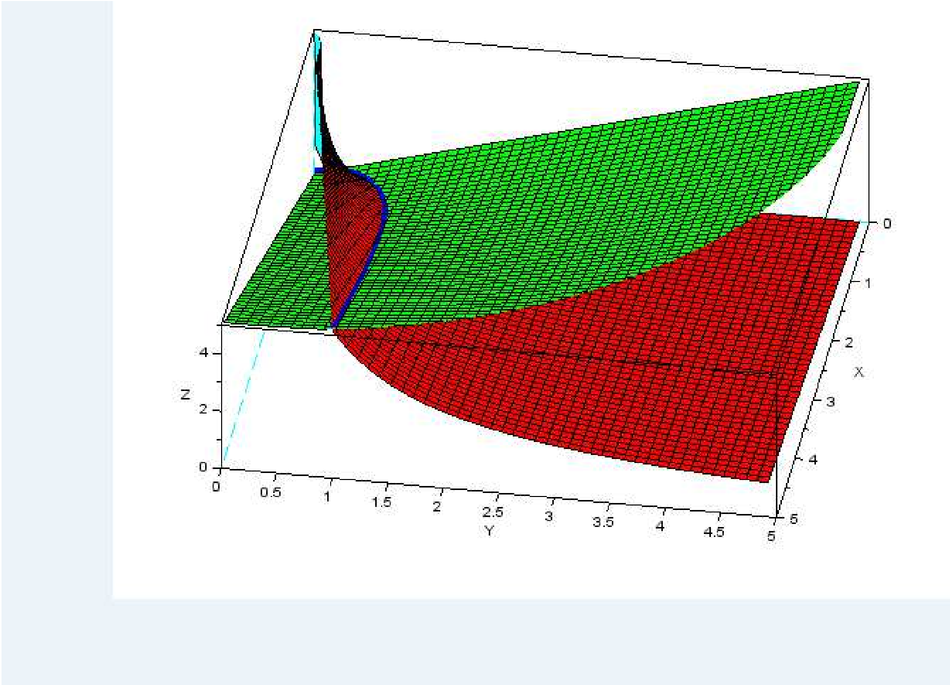
Ma recherche a continué en étudiant tout naturellement l'intersection de ces deux quadriques.

Une équation paramétrique de cette quartique intersection des quadriques est :
x(t) =t
y(t) =$\sqrt{(t^4 / (1-t^2))}$
z(t) = $\sqrt{(t^2 / (1-t^2))}$
avec t dans]0;1[
Voici avec GEOGEBRA cette courbe, (deux vues) :

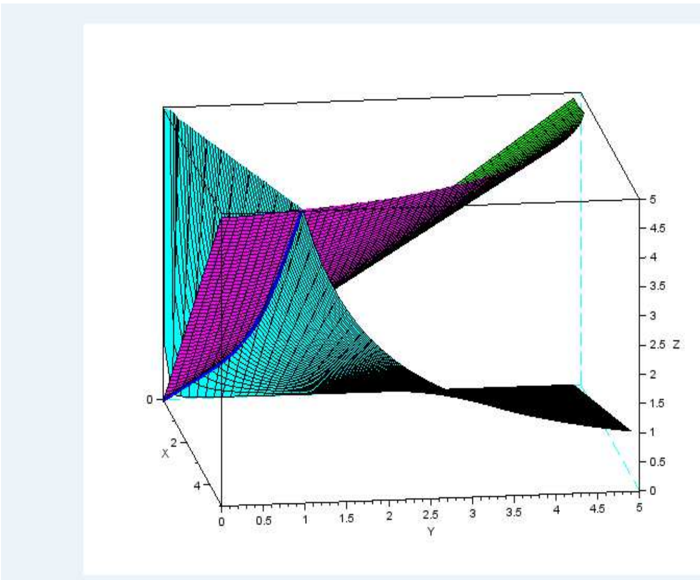


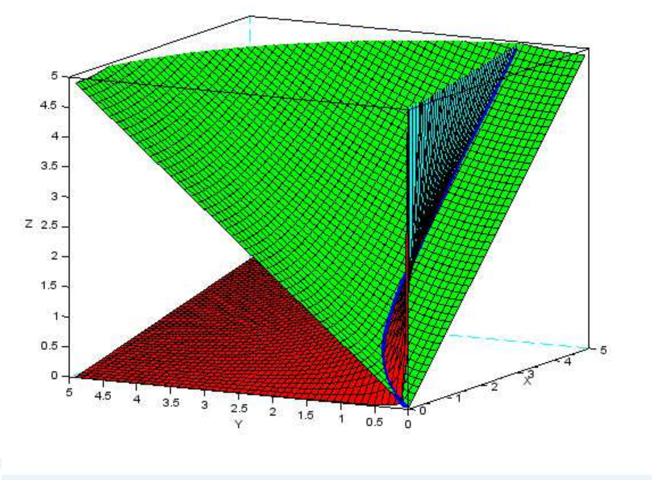

ABC
Algèbre
Graphique 3D
Courbe Paramétrique
a :
$x = t$
$y = \left(\frac{t^4}{1-t^2}\right)^{0.5}$
$z = \left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)^{0.5}$

vue 1

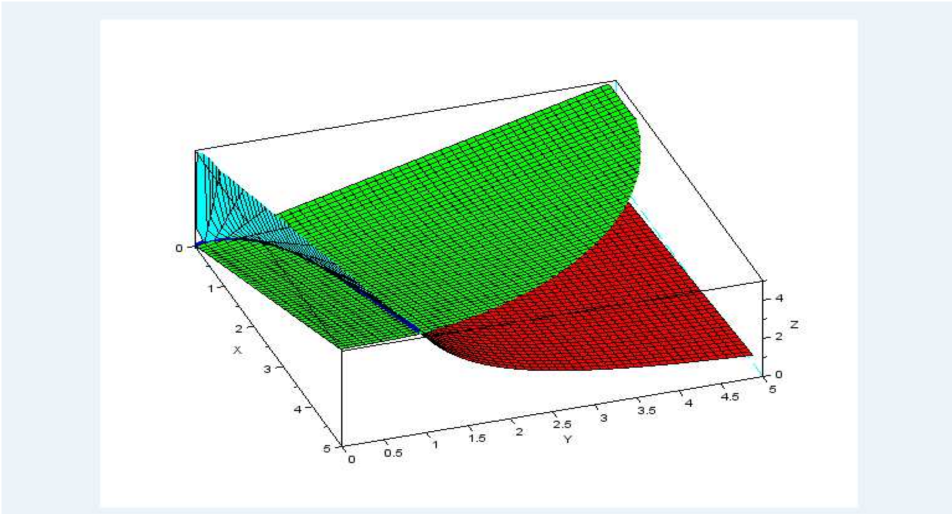


La même quartique visualisée par l'intersection de deux quadriques : cône et paraboloïde-hyperbolique.
(vues 2 et 3)

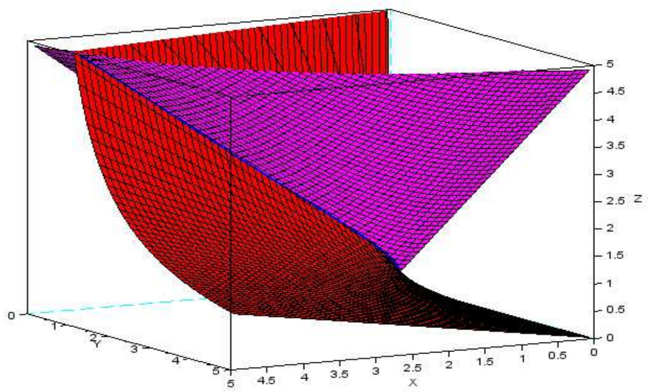




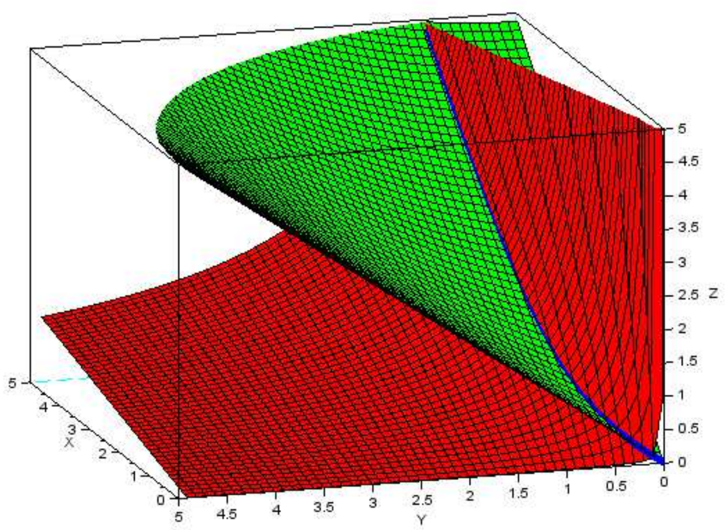
La même quartique visualisée par l'intersection de deux quadriques : cône et paraboloïde-hyperbolique. (vue 4)



La même quartique visualisée par l'intersection de deux quadriques : cône et paraboloïde-hyperbolique.
(vue 5)



(vue 6)



Vue 6 : La même quartique visualisée par l'intersection de deux quadriques : cône et paraboloïde-hyperbolique.

J'ai effectué le calcul de la torsion de cette quartique avec ce paramétrage. En tant que fonction vectorielle f (ceci afin de vérifier que la torsion est non nulle pour t dans]0;1[ce qui équivaut à dire que la courbe n'est pas coplanaire).
Je ne vais pas écrire ici le détail des calculs classiques qui ne sont plus à l'ordre du jour des programmes actuels.
J'ai calculé la torsion :
$\tau = [f,f',f'']/\|f' \wedge f''\|^2$
(le crochet désigne le produit mixte, c'est à dire le déterminant).
J'ai regardé tout simplement l'indépendance linéaire de f,f' et f'' avec t dans]0;1[.
Avec le déterminant $|f,f',f''|$.
Ce déterminant vaut : $(t(t^2+1))/(1-t^2)^4$
Alors j'ai vu que ce déterminant est positif strict pour t dans]0;1[et donc la torsion est toujours strictement positive et la quartique n'est pas planaire.
J'ai placé aussi un point B sur la courbe en 3D et je l'ai déplacé suffisamment pour obtenir x = 0,99 , y = 8,8 et z = 8,86, ceci « confirme visuellement » des résultats précédents.

Partie VIII Dans l'univers de la géométrie avec les nombres complexes.
15) Je me suis posé la question de l'écriture en nombres complexes de l'équation :
$x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$ qui équivaut à l'équation dans R²+ à l'équation $x^2+y^2 = y^2/x^2$.
Soit le nombre complexe Z = x+yi
alors $x^2(x^2+y^2) = y^2$ devient en complexes :
$(\mathrm{Re}Z)^2|Z|^2 = (\mathrm{Im}y)^2$ qui conduit à
$|Z| = \tan(\mathrm{Arg}Z)$ (équation où Z est un nombre complexe).
On retrouve ici un résultat précédent, l'objectif est de le voir sous la forme d'une équation dans les nombres complexes. On peut s'interroger aussi sur l'utilisation de cette dernière équation dans GEOGEBRA.

Partie IX Dans l'univers des matrices ou vecteurs (3,1), les groupes et le produit matriciel de Hadamard.
16) Nous avons cherché dans une autre direction : si l'on considère l'ensemble A = {(x ; y ; z) des triplets de nombres réels tel que x>0 , y>0 et z>0 et tels que xz = y} muni d'une opération binaire interne définie ainsi :
(x;y;z).(x';y';z')=(xx';yy';zz') on obtient un groupe abélien. L'élément neutre est (1;1;1).
La multiplication (x;y;z).(x';y';z')=(xx';yy';zz') est le *produit matriciel d'Hadamard* de deux matrices (1;3).

Ainsi, une matrice (1;3) admet une matrice inverse pour le produit de Hadamard si et seulement si tous ses éléments sont non nuls.
Notre paraboloïde hyperbolique pour les triplets de l'ensemble A est ainsi mis en relation avec un groupe commutatif (A ; .) et la multiplication matricielle de Hadamard.
Essayons d'élargir l'ensemble A à un ensemble :
B = {(x;y;z) triplets de réels quelconques et tels que xz = y}.
Alors, dans ce cas, A est un sous-groupe de B.
Remarque (0;0;0) est dans B et il est absorbant pour la multiplication de Hadamard.
J'ai étudié une addition (x;y;z) + (x';y';z') =(x+x';y+y';z+z') dans B et ai cherché une condition pour que la somme soit dans B.
La condition est : (x+x')(z+z') = (y+y').
On sait que xz = y et x'z' = y' donc : (x+x')(z+z') = y+xz'+z'x+y'.
Alors il faut et il suffit que xz'+x'z = 0. Par exemple : (1;2;2) et (-1 ;-2;2) sont dans B et leur somme (0;0;4) est dans B.
On peut ainsi se donner un élément de B (x;y;z) fixe et définir le sous-ensemble C de B sous la condition xz'+x'z = 0.
Dans cet ensemble C se trouve évidement l'élément (0;0;0).
Dans un PER une question en suscite une autre….
C'est justement sur des parcours d'étude et de recherche, où les élèves ont la liberté de se poser librement des questions, qu'ils peuvent développer la capacité importante : « Savoir choisir les outils mathématiques appropriés ».
Cette démarche est bien différente de celle qui consiste à « appliquer dans un exercice exclusivement les outils du chapitre que l'on est en train d'étudier ».
Notre « parcours d'étude et de recherche » (P.E.R.) a donné naissance à un *« univers de nos questions autour des triangles rectangles particuliers ».*
Je m'arrête ici en vous invitant à partir dans d'autres PER qui vous motivent et aussi pour chercher du côté de triangles pythagoriciens, ce que nous allons faire maintenant.

Partie X D'autres triangles particuliers de Pythagore.

17) Nous vous conseillons un site si vous voulez rencontrer d'autres cas de triangles pythagoriciens particuliers. Voici :
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Addition/TripTrg.htm
triplets *de Pythagore* - formation de *triangles particuliers*, avec aire et périmètre spécifiques.
Conclusion : Cette petite recherche nous montre que quand on s'interroge sur certaines « erreurs » des élèves qui se produisent en écrivant une égalité fausse sur un certain ensemble, on peut trouver à leur proposer une activité de recherche amusante : ***découvrir des sous-ensembles où les égalités deviennent vraies.***

Ce type d'exercice est très formateur pour la pensée scientifique et je vous conseille de les proposer à vos élèves.
Quand un élève se trompe car l'affirmation qu'il propose est fausse sur l'ensemble où l'on travaille, on proposera à la classe de trouver des contre-exemples, (ici pour $a^2/b^2 = c^2$, il est facile de trouver un contre-exemple chez les triangles rectangles, par exemple (3;4;5)).
Mais il ne faut pas toujours en rester là, on profitera pour poser la question : « ***cette affirmation serait-elle vraie sur un sous-ensemble ? ».*** Ou bien : ***« serait-elle vraie sur un autre ensemble ? »***
Les élèves doivent apprendre que les propriétés sont toujours **relatives à un ensemble de référence** et qu'ils doivent s'habituer à chercher les ensembles où certaines affirmations dites « fausses » (pour un ensemble donné), deviennent « vraies » pour un autre.
Dans le développement des compétences pour « chercher en mathématiques » vous avez constaté qu'**il est important que les élèves apprennent à chercher sur une même question en utilisant les outils de plusieurs univers et faire ainsi des correspondances entre les propriétés trouvées dans un univers et celles trouvées dans un autre.**
Cette attitude consistant à chercher une dialectique entre les univers est primordiale dans les activités autour des « questions de recherche ».
Apprendre les mathématiques par des **parcours d'étude et de recherche (PER),** dans lesquels une question en suscite d'autres et qu'ainsi l'élève cherche dans plusieurs univers(*) est un choix didactique du groupe **PERMES de l'Ifé** (voir dans la série des modules :
« Didactique des mathématiques : les fondamentaux en Canal U Ruben Rodriguez Herrera le module 7 :
« La progressivité des apprentissages » la diapositive du diaporama synchronisé à 1h10' et les suivantes). Voici un lien :
https://www.canal-u.tv/video/centre_d_enseignement_multimedia_universitaire_c_e_m_u/07_la_progressivite_des_apprentissages.17581

(*) Pour en savoir plus sur le terme « univers » en didactique des mathématiques voir :
https://www.canal-u.tv/...universitaire...u/01_les_univers_et_les_psychomorphismes.15034

Je vous remercie de votre attention.

Fait à Caen le lundi 6 juillet de l'année 2015
Ruben Rodríguez Herrera

Partie XI Poursuite du PER dans les journées de prérentrée de notre IREM en septembre 2015.

J'ai réparti nos collègues en atelier par « petits groupes » où il fallait que dans chacun ait des collègues du collège, du lycée et de l'université. Ils avaient à chercher sur la même question que je me suis posée au départ.

C'est ainsi que j'ai constaté avec plaisir que mes collègues ont trouvé en premier lieu une voie par le calcul algébrique, puis très vite chaque groupe a choisi différents univers pour se poser de nouvelles questions.

Bien que le temps de leur « petit parcours d'étude et de recherche » fut trop bref les résultats trouvés furent bien riches et instructifs sur leurs goûts et surtout sur **leur choix des univers mathématiques qu'ils ont construit à partir de leurs questions successives.**

J'ai vu des travaux orientés à la constructibilité à la règle et au compas des ***« R-triangles rectangles ».*** D'autres vers des cas particuliers. D'autres vers l'univers du cercle trigonométrique ; D'autres comme notre collègue Abderahamane Nitaj sur la question : existe-t-il des ***« R-triangles rectangles »*** donnant des nombres congruents.

Cette dernière question a ouvert une nouvelle voie de recherche. Quelques travaux ont été réalisés depuis et ils sont présentés dans la partie suivante (XII) .

De même vous trouverez à la fin de cette publication un très bon document indiqué par notre collègue Nitaj à propos des ***« R-triangles rectangles »*** donnant des nombres congruents.

Partie XII

18) Depuis la journée de septembre je me suis intéressé à la question suivante : existe-t-il des ***« R-triangles rectangles »***tels que leur aire soit égale à leur périmètre ?

Pour les questions de géométrie nous vous conseillons de consulter le très bon site de Patrice Debart
http://debart.pagesperso-orange.fr/

Soit le système d'équations dans $\mathbb{R}^{*}$**+** **caractérisant les R-triangles rectangles**

$a^2 + b^2 = c^2$ (équation 1) et $a/b = c$ (équation 2).

On peut alors considérer c comme une variable réelle strictement positive et calculer a et b **de telle façon que l'aire du triangle soit égale à son périmètre**.

J'ai donc ajouté la nouvelle relation : $ab/2 = a+b+c$.

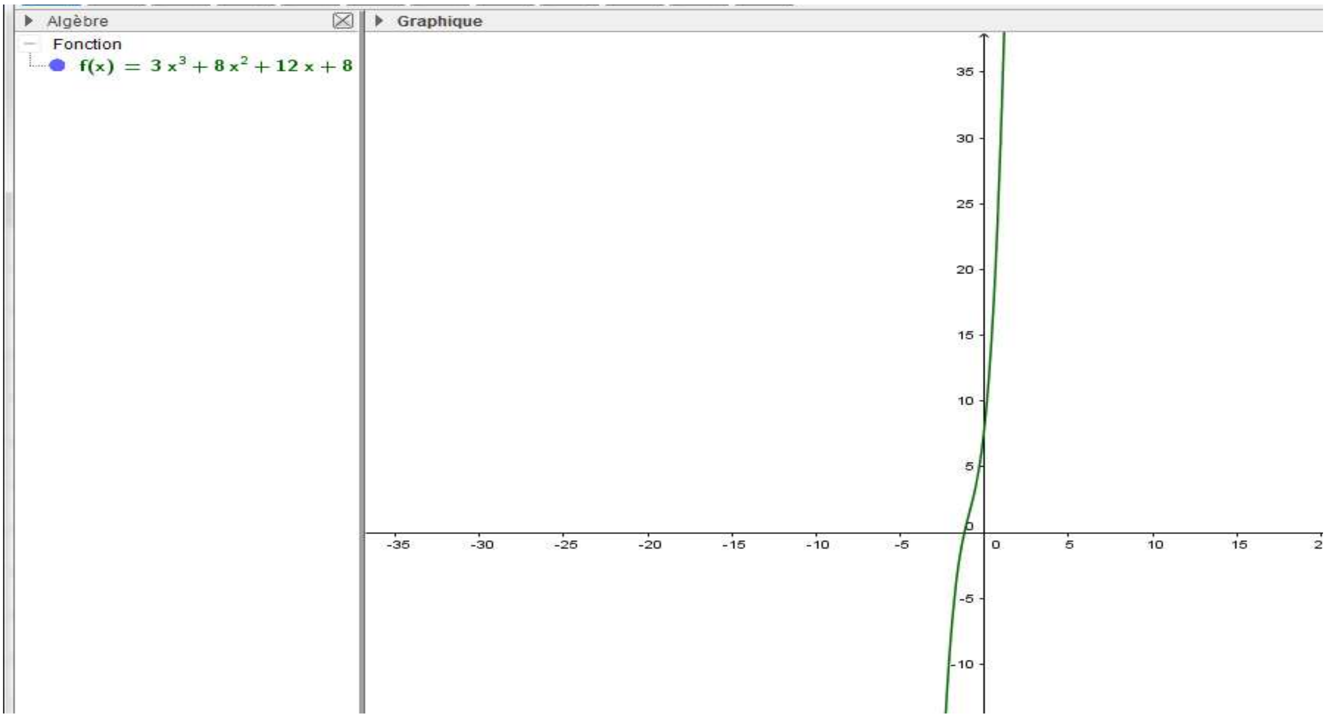
Avec les équations précédentes on a :

$ab =(c^3/ (c^2+1))= 2(\sqrt{}(c^2/(c^2+1)) + \sqrt{}(c^4 / (c^2+1)) + c)$

$(c^3/(c^2+1)) = 2(\sqrt{}(c^2/(c^2+1)) + \sqrt{}(c^4 / (c^2+1)) + c)$

$c^3/(c^2+1))=2(c/(\sqrt{}c^2+1)+ (c^2 / \sqrt{}(c^2+1)) + c))$.

Après simplifications on trouve : $c(3c^3+8c^2+12c+8) = 0$.
Comme $c>0$ on ne peut pas avoir $3c^3+8c^2+12c+8 = 0$
car $3c^3+8c^2+12c >0$ si $c>0$.
Avec GEOGEBRA on confirme visuellement que $3c^3+8c^2+12c+8 > 0$ pour $c >0$.



A propos des considérations sur l'aire et le périmètre, j'ai pensé aux « triangles Héroniens » et à la formule de Héron pour obtenir l'aire d'un triangle en fonction des mesures de ses côtés.

Un triangle est héronien si les mesures de tous ses côtés et de l'aire sont des nombres rationnels (voir entiers). On peut affirmer qu'il n'y a pas de triangle héronien qui soit un ***R-triangle rectangle***, ayant pour mesures de ses côtés trois entiers (voir paragraphe 7). Je me pose la **conjecture suivante :**

*« il n'existe pas de triangle **R-triangle rectangle**, ayant pour mesures de ses côtés trois nombres rationnels non entiers qui soit héronien. »*

Pour chercher si cette conjecture est vraie il est utile d'employer les méthodes de génération de triplets pythagoriciens, par exemple :

Il existe diverses méthodes pour trouver un triplet de Pythagore. La plus utilisée est celle-ci: on pose une équivalence pour un triplet pythagoricien :
(a, b, c,) <=> ($u^2 - v^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$).

Alors une solution générale en nombres entiers de l'équation :

$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ avec a>0, b>0 et c>0 (avec a et b premiers entre eux) est $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$ où u, v sont des entiers positifs premiers entre eux . Par exemple pour u=3 et v=2 on obtient a=5 b=12 et c=13 et on vérifie que $13^2 = 5^2+12^2$.

Nous avons trouvé tout au début de ce parcours d'étude et de recherche $b^2 = c^2 / (c^2+1)$ et $a^2 = c^4 / (c^2+1)$. Il faudrait prouver que pour tout choix de rationnel c on ne peut pas avoir simultanément a et b rationnels.

Voici une possible direction de la recherche, à suivre dans une prochaine publication ...

19) Une autre question qui ouvre une belle voie de recherche est : existe-il des ***« R-triangles rectangles »*** donnant des nombres congruents ? (question posée par notre collègue Nitaj).

Définition Un nombre congruent est un nombre entier de la forme ab/2 où a et b sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle.

J'ai étudié cette question en posant :

$b^2 = c^2/(c^2+1)$ et $a^2 = c^4 / (c^2+1)$ avec ab/2 entier congruent
ceci entraîne : $ab/2 = c^3/2(c^2+1) = M$ (entier congruent).

Ce qui donne une équation de troisième degré : $c^3 - 2Mc^2 - 2M = 0$.

J'allais regarder les possibles solutions de cette équation en fonction de M entier congruent quand j'ai reçu un message de Nitaj qui avait très bien travaillé cette question et trouvé une réponse positive, (il existe bien une solution $c > 4\pi/3$). Je vous invite à bien regarder en annexe ce beau travail.

Nitaj et moi nous sommes en train d'étudier la question suivante :

Conjecture « Il n'existe aucun nombre congruent qui provienne d'un triplet rationnel de Ruben »

A. Nitaj définit les triplets de Ruben ainsi :

« Définition Soient (a; b; c) un triplet de nombres réels positifs avec b non nul. on dit que (a; b; c) est un triplet de Ruben si les deux égalités suivantes sont satisfaites :
$a^2+b^2 = c^2$ et $a/b = c$ ».

Voila donc où le parcours d'étude et de recherche nous a amené…

À suivre… nous vous invitons à participer vous-aussi à la recherche des réponses aux conjectures issues de ce parcours d'étude et de recherche !

Fait à Caen le 14 octobre 2015.

Remerciements

*À tous les collègues de l'IREM de Basse-Normandie qui ont participé à l'exposé-atelier de la journée de rentrée du samedi 19 septembre 2015, à nos collègues Eric Trotoux et Danielle Salles-Legac pour les figures en 3D et la relecture attentive, Abderrhamane Nitaj pour son encouragement et intérêt à poursuivre les recherches sur les **« R-triangles rectangles »** et les nombres congruents dont il a réalisé une riche contribution disponible en annexe.*