Calcular, plegar y demostrar propiedades geométricas de los triángulos y cuadrilateros clásicos

Con la ayuda de rompecabezas construídos por los alumnos

Les presentamos a los Profesores de la educación secundaria básica y superior que estan en formación inicial y / o contínua, actividades en curso de geometría realizadas con un material simple y económico: los pliegues, los cortes, la construcción de piezas de rompecabezas para descubrir y "ponerse en las manos" las figuras geométricas fundamentales que son: los ángulos, los triángulos y cuadriláteros para estudiar sus notables propiedades. El aspecto manual y lúdico de estas actividades les puede ofrecer a los alumnos de once años hasta dieciseis en la iniciación o para la consolidación de los conocimientos.

Este folleto está tan disponible en francés, el lector interesado en la versión francesa lo recibirá a petición. Puede pues ser útil para los Profesores de clases europeanas hispanas así como para los profesores de los países de lengua española, en particular de América Latina con los cuales colaboramos en el marco de la red internacional del I.R.E.M.

Palabras claves : Área doblada**,** área media, actividad geométrica, arco tangente, cálculo algebraico, ángulo llano, ángulo recto, ángulo agudo, ángulo obtuso, cometa, cosenos, recorte, deltoide, equilátero, formalización, isósceles, línea trigonométrica, rombo, Número de Oro, pavimento del plano, pentágono, plegamiento, plegamiento con deslizamiento, polígono, psicomorfismos, radical, rectángulo, Rectángulo de Oro, senos, suma de los ángulos de un triángulo, suma de los ángulos de un cuadrilátero, superponible, simetría ortogonal, tangente, teorema de Pitágoras, trapecio, trapecio isósceles, trapecio rectángulo, triángulo isósceles, triángulo equilátero, triángulo rectángulo, triángulo rectángulo isósceles, triángulo escaleno.

Miembros del equipo "Geometría" del I.R.E.M. de Baja-Normandía

Anne-Marie Block, Profesora Certificada

Olivier Longuet, Profesor Certificado

Danielle Salles-Legac, Doctora es Ciencias

Ruben Rodriguez Herrera, Profesor Agregado, Doctor en Didáctica de la Matemática.

Profesores aciosiados

En Perú: **Carlos Aparcana Aquije, Carlos Sabino Escobar, Eladio Ocaña, Silvia Sanchez D'Arrigo**.

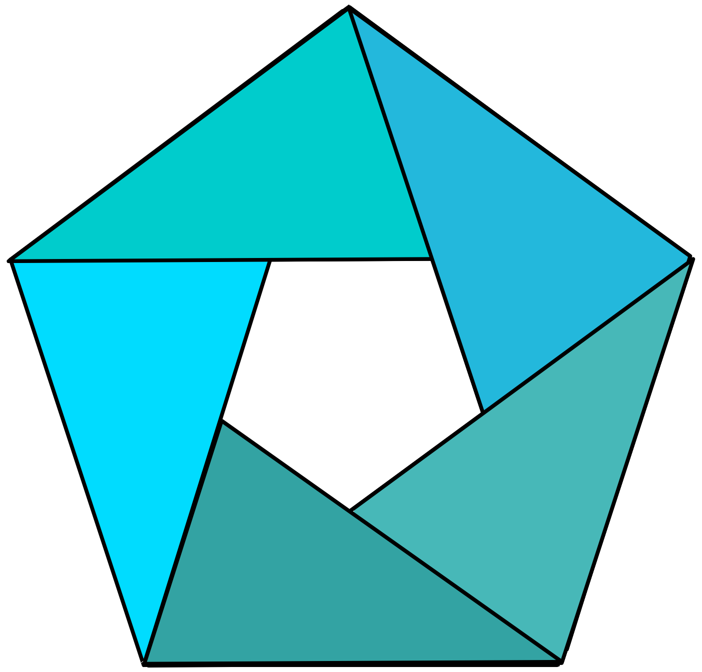
En Francia : **Evelyne Adam, Éric Lehman.**

danielle.salles@unicaen.fr ruben.rodriguez@unicaen.fr

Formato A4	Número de páginas: Ejemplar en francés: 36 Ejemplar en español: 36 Patrones: 12 páginas	N°ISBN 978-2-902498-07-9 Junio 2011	Precio: 4,5 € Cada folleto con colores 8 € los dos

I.R.E.M. de Baja-Normandia Universidad de Caen

I.R.E.M. del Perú Universidades de Ica, Lima, Tumbes



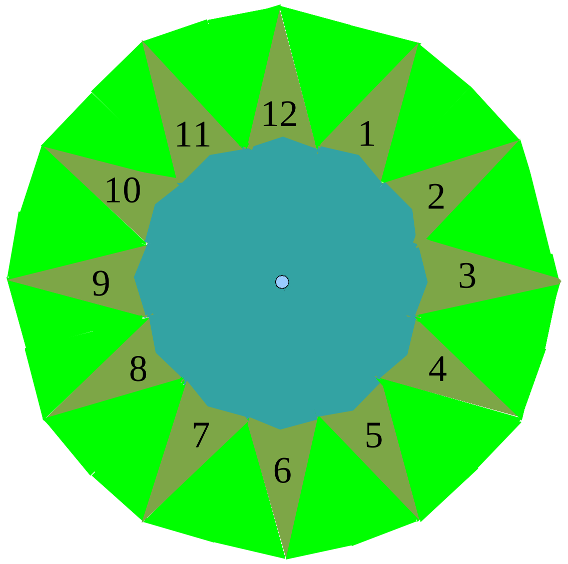
Calcular, plegar y demostrar propiedades geométricas de los triángulos y cuadriláteros clásicos

Con la ayuda de rompecabezas construïdos por los alumnos

Patrones para el docente

Para los alumnos de secundaria básica y superior

Danielle SALLES-LEGAC, Ruben RODRIGUEZ HERRERA, Silvia SÁNCHEZ D'ARRIGO



La esfera estrellada construida "a mano"

símbolos y operaciones. Las estructuras de cada universo son mórficas entre ellas. Eso es lo que permite de realizar anticipaciones. El resultado que se encuentra en un universo de una operación o relación, permite de anticipar el resultado que se encontrara en el otro universo con los elementos respectivos.

Es así que, por ejemplo, el resultado que se encuentra en el "universo de los plegamientos" anticipa el resultado que se encontrara en el "universo de las medidas" y viceversa. Se ve bien claro que la noción matemática existe en los distintos universos y lo que el alumno aprende es que la matemática posee universos formalizados que permiten anticipar el resultado de las acciones que se realizarían en otros universos mucho más físicos y mucho menos operacionales simbólicamente.

Bibliografía

BOURSIN Didier, LAROSE Valérie, *Pliages et mathématiques*. Paris, ACL/Les éditions du kangourou, 1997.

DEBART Patrice, « Descartes et les mathématiques » en ligne:
http://www.debart.fr/

EVEILLEAU Thérèse, « Construction du pentagone par une méthode des Compagnons » en ligne:
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/compagnons.htm

MARTINEZ-LABROUSSE Isabelle, « Un essai de synthèse entre le théorème de Pythagore et la **procédure gou-gu** » in Colloque « *Circulation transmission héritage* » Compte-rendu édité par l'IREM de Basse-Normandie à paraître courant 2011.

MØLLER Anders Pape, « La nature préfère la symétrie » en ligne:
http://www.larecherche.fr/content/recherche/article?id=19025

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, *La pédagogie des mathématiques est-elle moderne ?* Thèse de Doctorat en Sciences de l'éducation. Université de Caen 1978.

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, « Une autre gestion du puzzle de Guy Brousseau », en ligne sur le site de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie:
http://www.math.unicaen.fr/irem/spip.php?article23

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle, *Du dessin perçu à la figure construite.* Paris Ellipses 2006.

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle, « Les symétriseurs » in *Le miroir des mathématiques* (n°6) Décembre 2010.Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne:
http://www.math.unicaen.fr/irem/

RODRIGUEZ HERRERA Ruben, SALLES-LEGAC Danielle, *Practicar la geometría . De las acciones directamente experimentables a sus formalizaciones matemáticas.* Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2010.

SALLES-LEGAC Danielle, RODRIGUEZ HERRERA Ruben, *Nouvelles pratiques de la géométrie*. Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2006.

SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie, *Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères, Historias de cometas y otros cuadriláteros* (en español y en francés). Caen, I.R.E.M. de Basse-Normandie 2008.

SALLES-LEGAC Danielle et l'équipe de géométrie de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie, « Géométrie des pliages » in *Le miroir des mathématiques* (n°5) Décembre 2009. Caen I.R.E.M. de Basse-Normandie et en ligne:
http://www.math.unicaen.fr/irem/

Área del deltoide :

$$(2-\sqrt{3}) - \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2} = (2-\sqrt{3})\left(\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}\right)$$

$$= (2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}.$$

Conclusión didáctica

Recordamos que para instalar una noción, que sea geométrica o no en lo conceptual mental del alumno se necesita tratarla de dentro de universos distintos. Decimos, según la palabra introducida por Ruben Rodriguez en su tesis de doctorado que hacemos **psicomorfismos**, partiendo del universo de las acciones directamente experimentables hasta llegar por medio de formalizaciones cada vez mas potentes al universo de los "seres geométricos" (o, más generalmente, de los "seres matemáticos"). Atención que el universo de los seres matemáticos no es un universo fijo eternamente, sino que a medida que los conocimientos se enriquecen, los "seres matemáticos" también. Por ejemplo el teorema de Pitágoras se ha enriquecido a través de la historia y hoy día se lo utiliza en hasta en estadística matemática, por ejemplo.

La utilización de objetos físicos como los rompecabezas permite al alumno de "ponerse en las manos" estos objetos, sobre todo sus propiedades matemáticas. El alumno podrá conservar las piezas a su casa y manipularlas cada vez que ha olvidado sus propiedades o, más generalmente, su forma. Entonces hay una sensación de “ya visto" que hace que el objeto matemático no es una cosa “extranjera” y que el alumno puede sentirse cómodo. Ese es para nosotros un universo directamente experimentable. Cuando el alumno formaliza sus manipulaciones y las relaciones que obtiene por superposición y plegamiento en relaciones numéricas entre medidas, él esta realizando un psicomorfismo entre el universo experimentable de los plegamientos y el universo formalizado matemático de las medidas y teoremas numéricos de la geometría. Es este psicomorfismo que le permite acceder a las nociones matemáticas del programa de estudios.

Para terminar una aclaración importante sobre el neologismo "psicomorfismo". Cuando uno de nosotros (R. Rodriguez) realizo la tesis de doctorado, (*La pédagogie des mathématiques est-elle moderne?* Thèse de Doctorat en Sciences de l'éducation. Université de Caen 1978.), hubo un intercambio muy enriquecedor con el investigador Jean Piaget que califico favorablemente el hecho de que las correspondencias entre universos estructurados son a la base de la adquisición de los conocimientos por parte de la especie humana. También se analizo el hecho que esta correspondencia era dialéctica, pero que el término "dialéctica", era insuficiente y muy general. Es así que se invento **el vocablo "psicomorfismo" para nombrar la correspondencia entre dos universos estructurados por operaciones y relaciones.** Uno de ellos directamente experimentable y el otro formalizado con

Calcular, plegar y demostrar propiedades geométricas de los triángulos y cuadriláteros clásicos

Actividades geométricas con piezas de rompecabezas construídos por los alumnos.

Por Danielle Salles-Legac, Ruben Rodriguez Herrera y Silvia Sánchez D'Arrigo

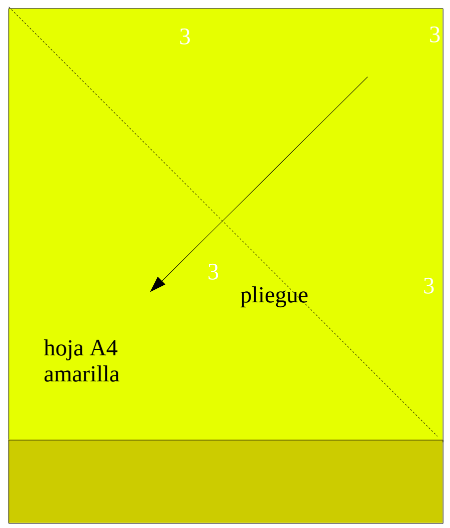
Construcción del universo de las piezas del rompecabezas

Explicamos a los alumnos que vamos a trabajar sobre las medidas de los ángulos y las figuras, utilizando el transportador solamente para las verificaciones. Para ello vamos a construir piezas del rompecabezas. Luego usamos las piezas del rompecabezas para las demostraciones.

Conocimiento básico: El ángulo plano, el ángulo recto, ángulos iguales (que se superponen) (los maestros de lengua española pueden consultar la obra de Rubén Rodríguez y Danielle Salles: "Practicar la Geometría" páginas 14 y siguientes, véase la bibliografía), la igualdad de las formas geométricas por superposición. Los conceptos de triángulo rectángulo, isósceles y equilátero serán necesarios y los alumnos podrán integrarlos a medida de descubrir y estudiar las figuras, el concepto de simetría ortogonal desde el primer pliegue. Para este último concepto puede ser útil leer (en línea y en francés en el sitio del IREM de Basse-Normandie) el artículo de R. Rodríguez: "Alrededor de los sistemas articulados: simetría ortogonal" en "El espejo de las matemáticas", nº 6.

Material: hojas A4 de papel grueso (160 g) de varios colores, tijeras, regla graduada plana; transportador y calculadora (para las verificaciones).

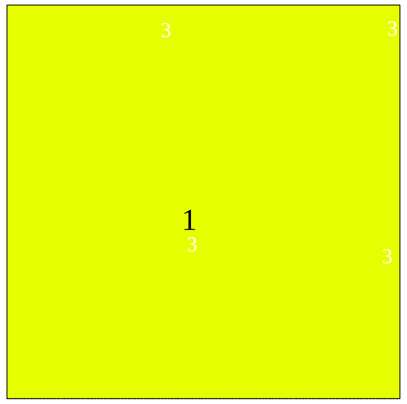
I - Primera fase: cortar las piezas



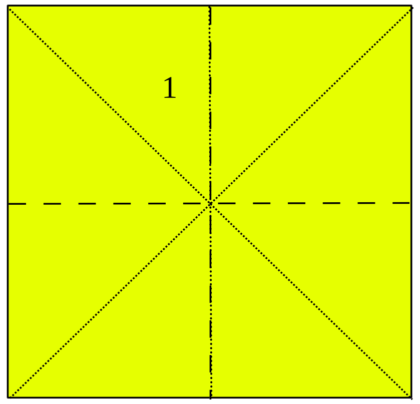
Distribuimos a los alumnos las hojas A4 del mismo color, por ejemplo, amarillo y les pedimos que construyan con un plegamiento de la hoja un: "cuadrado" materializado en el papel: Los alumnos consideran que es suficiente doblar una esquina de la hoja de modo que el lado de menor longitud coincida con el lado mayor. Luego cortar con tijeras la parte restante, que se muestra aquí en color amarillo oscuro.

A continuación, puede pedirse a los alumnos de escribir en su cuaderno las propiedades del cuadrado y de la hoja que se utiliza para cortar el cuadrado.

Por ejemplo: La hoja A4 es un rectángulo, entonces tiene cuatro ángulos rectos, para obtener un cuadrado, tenemos que construir un rectángulo cuyos cuatro lados son de igual longitud. Así que como se acaba de ver la medida del lado corto del rectángulo a lo largo del lado largo, se puede hacer doblando la hoja. Cortamos el rectángulo que se extiende más allá del cuadrado y se obtiene un cuadrado (pieza denota n°1).



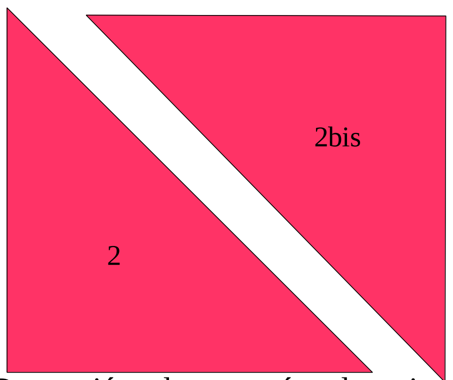
El cuadrado amarillo (n°1)



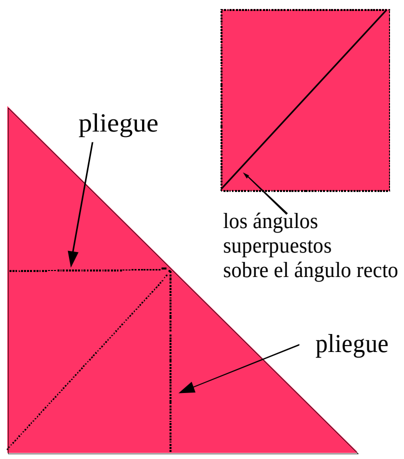
Los cuatro ejes de simetría del cuadrado

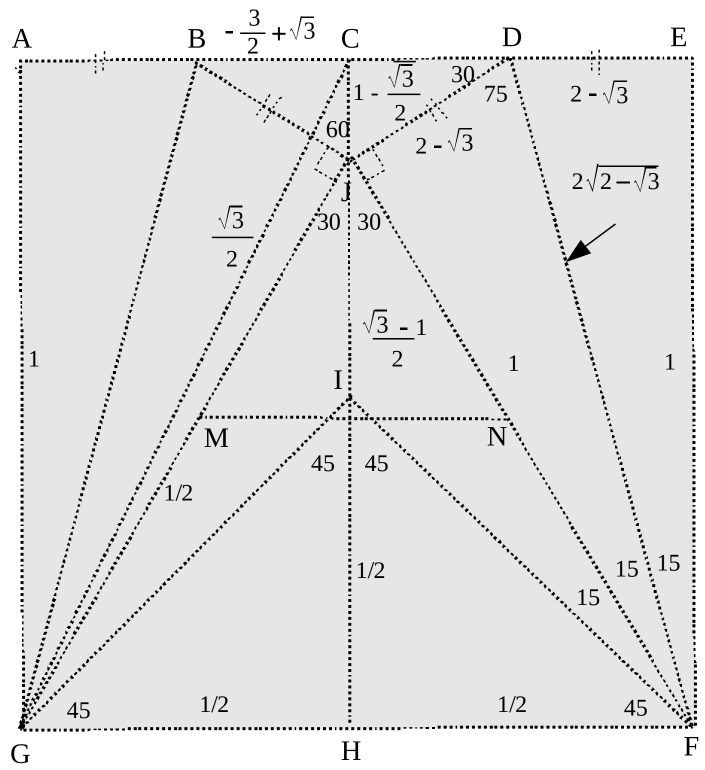
A continuación, pedimos a los alumnos plegar su cuadrado en cuatro partes iguales en todos los medios posibles para verificar los ejes de simetría y luego escribirlos en sus cuadernos. Esta será una revisión útil de estas propiedades si ya han sido estudiados (véase Rodríguez R. Op cit.). Distribuimos una hoja A4 de otro color, por ejemplo el rojo, cortamos un cuadrado de la misma manera que antes, la diagonal trazada por el pliegue que se utilizó para construir el cuadrado se corta para obtener dos triángulos isósceles (marcados piezas 2 y 2 bis).

Les pedimos a los alumnos que escriban en sus cuadernos una definición de un triángulo isósceles, que será interesante para discutir en la pizarra las diferentes definiciones propuestas por los alumnos. Doblado, sin marcar el pliegue, los dos pequeños ángulos de la pieza nº 2 en uno al otro, comprobamos que los dos pequeños ángulos son iguales porque son superponibles. En segundo lugar, les pedimos poner con dos pliegues los ángulos que no son rectos sobre el ángulo recto de la pieza como se muestra abajo a la derecha.



Dos triángulos rectángulos isocéles rojos





El cálculo del área de la cometa JDEF es fácil ya que éste está constituido por dos triángulos rectángulos DEF y DJF de misma medida cuyos lados del ángulo recto miden 1 y $2-\sqrt{3}$. El área de la cometa es pues $2-\sqrt{3}$.

Para calcular el área del deltoide JLEF debemos calcular el área del triángulo JDE.

Llamamos K la intersección de ambas diagonales [JE] y [DF] de la cometa JDEF.

Vamos en primer lugar a calcular el área del triángulo JDK utilizando los cálculos de las medidas algébricas de las longitudes (i.e. con radicales) así como las medidas de ángulos indicadas sobre la figura.

Calculamos anteriormente el coseno del ángulo de 75 ° sea $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

En el triángulo DKJ, tenemos:

Cos 75 = $\frac{DK}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Entonces : $DK = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \times 2-\sqrt{3}$.

Lo mismo: sin 75 = $\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{JK}{2\text{-}\sqrt{3}}$. Entonces: $JK = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

El área del triángulo DJE es pues: $DK\times JK = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4}$. Para obtener el del deltoide basta con sustraer dos veces el del triángulo DJE a la de la cometa JDEF, obtenemos:

cometas) que puede dar lugar a un desarrollo que interesa en el estilo del "hermoso diamante" estudiado en nuestra obra "Del dibujo percibido a la figura construida" párrafos 1.14 y 2.14 (ver bibliografía).

Podemos así pedirles a los alumnos reagruparse con el fin de construir el polígono regular presentado página 2 y de fijarlo en la clase. Ya que contiene un polígono estrellado que contiene doce cumbres, lo llamaremos la "Esfera Estrellada".

Observemos que la figura de la página 2 no es perfeccionada porque ha sido construida "en la mano" desplazando las piezas con las funciones "desplazamiento" y "rotación" del computador.

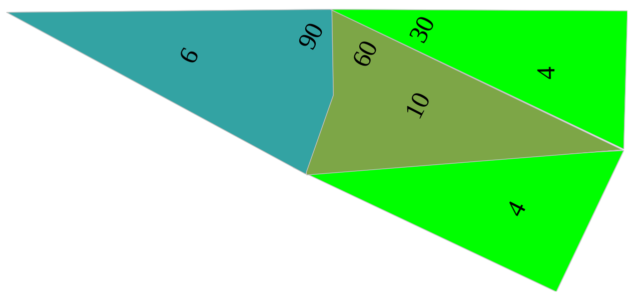
He aquí a titulo de ejemplo algunas propiedades de la Esfera Estrellada que puedan ser estudiadas:

- Contar las cumbres del polígono estrellado.
- Justificar, utilizando las medidas anteriormente calculadas de ángulos, que el polígono cubre bien el plano alrededor del centro indicado por un pequeño círculo.
- Calcular el número de ejes de simetría del polígono.
- Calcular la superficie del polígono estrellado y la del polígono convexo exterior y la del polígono convexo interior. Esta última actividad, más delicada será propuesta a los más grandes.

Vamos a dar algunas indicaciones a los cálculos algébricos necesarios.

Repitamos el motivo de base que sirve para la construcción de la esfera estrellada. Está constituido por dos piezas número 4 (el triángulo rectángulo la mitad del triángulo equilátero), de una pieza 6 (la cometa) y de pieza 10 (el deltoide).

Calcular el área del triángulo rectángulo es fácil, sus lados que son de medidas 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$ respectivas, Calcular el área de la cometa es más difícil porque todavía no conocemos la medida de sus dos diagonales. Vamos pues a repetir las características de esta pieza sobre el dibujo recapitulativo de la página 18. (Las escalas de ambas figuras son diferentes por razones de legibilidad.)



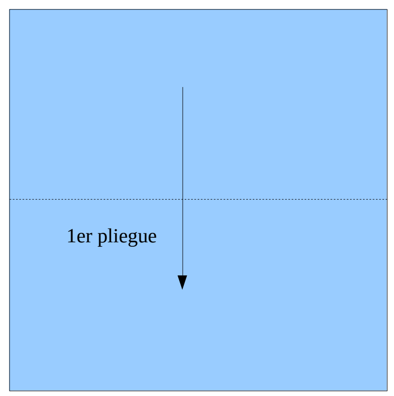
Les preguntamos entonces ¿Cuál es la medida de los dos ángulos agudos iguales? ¿Cuál es la suma de los ángulos del triángulo?

Utilizando la superposición, los alumnos encuentran que la suma de los dos ángulos agudos iguales cubre el ángulo recto, entonces que la medida de cada uno es 45° y la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Hacemos hincapié en que esto es una **conjetura** (puede ser necesario explicar la palabra: es una propiedad observada que "es probable que sea cierto", pero que se debe demostrar matemáticamente). Haremos lo mismo con los alumnos mayores en el caso de los triángulos escalenos en el párrafo: "Segunda fase: 3 - Usar las piezas del rompecabezas para verificar algunas propiedades geométricas de los ángulos y polígonos".

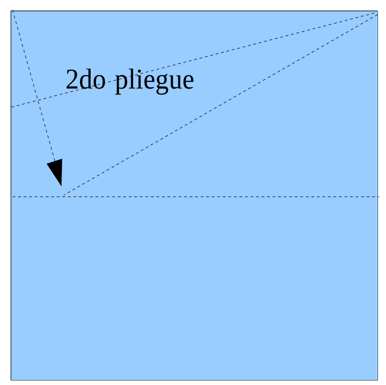
A continuación, distribuimos una hoja A4 de otro color, por ejemplo azul, recortamos un cuadrado, igual el anterior, pedimos a los alumnos para verificar la igualdad mediante la superposición de los dos cuadrados. A continuación, pedimos a los alumnos construir con un plegamiento de la hoja azul, un triángulo equilátero. Pedimos los alumnos que anoten en sus cuadernos una definición del triángulo equilátero, como "la igualdad de las medidas de los tres lados."

Para ayudar, les pedimos que se plieguen la hoja azul en la mitad para obtener dos rectángulos iguales (superponibles), a continuación, abrir la hoja azul. Pedimos los alumnos que usen el borde superior de la hoja para un segundo pliegue para que superpongan el vértice del cuadrado que se encuentra en la parte superior izquierda sobre el primer pliegue.

Nota: Este trabajo es parte de la: "geometría, con el desplazamiento de plegado" (ver nuestra bibliografía: "Géométrie des pliages " en francés).



Una hoja azul



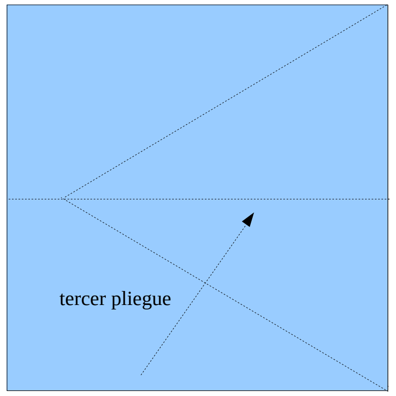
Para ello, volvemos a traer la parte superior del cuadrado al primer pliegue de manera que su borde izquierdo se reúne la huella del primer doblez.

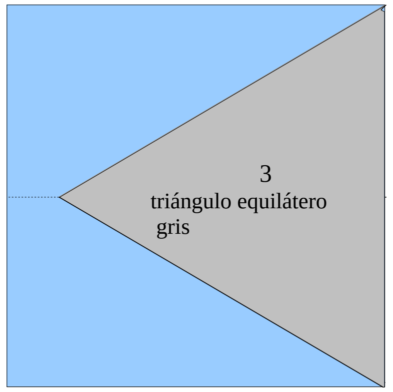
Hacemos el mismo trabajo, con un tercer pliegue en el lado opuesto del cuadrado, de modo que ambos extremos de los dos lados se doblan juntos sobre el primer pliegue.

Se obtiene, con el lado derecho del cuadrado perpendicular al primer pliegue, un triángulo equilátero, es decir, un triángulo cuyos tres lados tienen la misma medida. Con los pliegues sucesivos, los tres lados del triángulo equilátero tienen la misma medida que la del cuadrado. Esta explicación tiene valor de demostración ya que experimentalmente los tres lados son exactamente de la misma longitud, que es la longitud de cada lado del cuadrado.

A los alumnos en grupos de tres, les pedimos que hagan superponer sus tres triángulos equiláteros, después girar cada triángulo a fin de observar la igualdad de los tres lados.

Los alumnos verifican que los tres ángulos de estos triángulos son superponibles, después escriben la propiedad en su cuaderno.



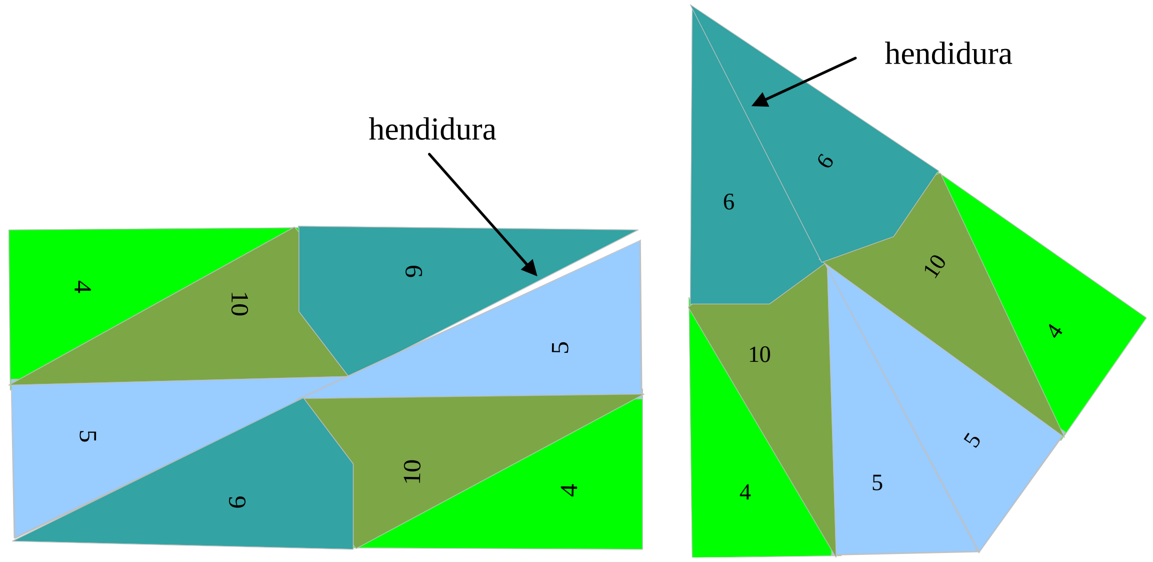


A continuación, les pedimos que recorten el triángulo equilátero y mantengan las dos piezas restantes de la hoja azul para otra actividad. El triángulo equilátero azul es el patrón para cortar dos idénticos con hojas de color gris (pieza 3) y una hoja de color verde.

El triángulo gris se mantiene intacto. Les preguntamos si es posible para el triángulo equilátero gris, sin utilizar pliegues, pero con la ayuda de la figura de la página 2, demostrar, como en el caso del triángulo isósceles, que la suma de los tres vértices de un triángulo equilátero es 180°.

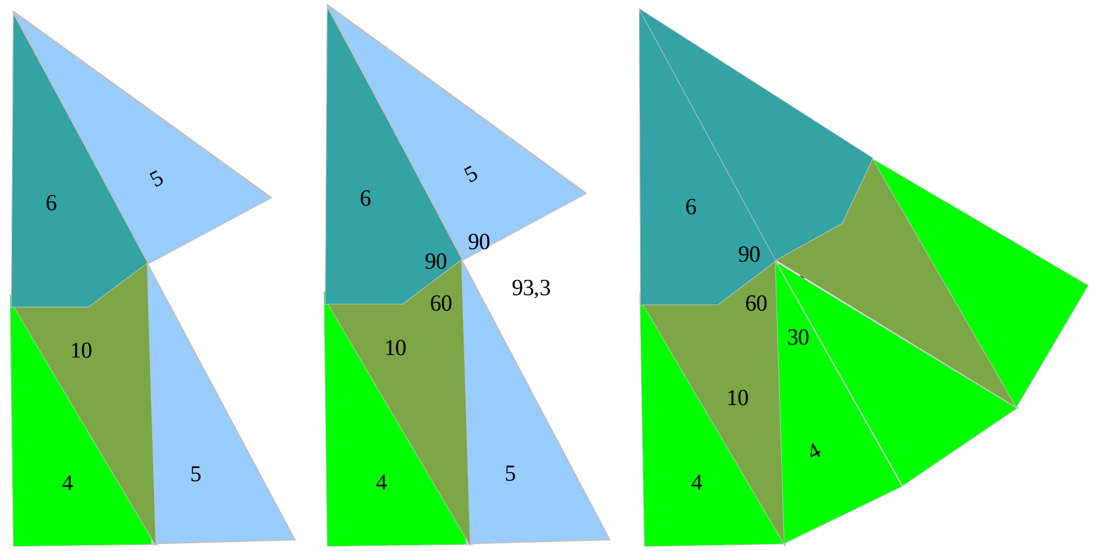
La respuesta es sí, siempre que utilicen las propiedades de la recta: un ángulo, definido por dos semirectas que están alineadas, es de medida 180° (ver figura página siguiente).

Hemos plegado el triángulo verde a lo largo de una de sus mediatrices (o eje de simetría), después lo cortamos en dos partes iguales. Se obtienen dos triángulos superponibles (piezas 4 y 4 bis) quienes por lo tanto son iguales, notamos que no son isósceles.



Pedimos entonces a los alumnos si es posible construir una "verdadera" figura geométrica, sin traslapo ni espacio entre las piezas. Éstos pueden proponer la construcción de derecha y decir: construímos una "verdadera" cometa. Los dejamos reflexionar y encontrar que aquí todavía hay un problema de hendidura entre el lado común de ambos triángulos y la cumbre común de los deltoides verde oscuro.

Proponemos entonces el "pavimiento" página siguiente luego una actividad un poco diferente: la construcción de la "esfera estrellada".

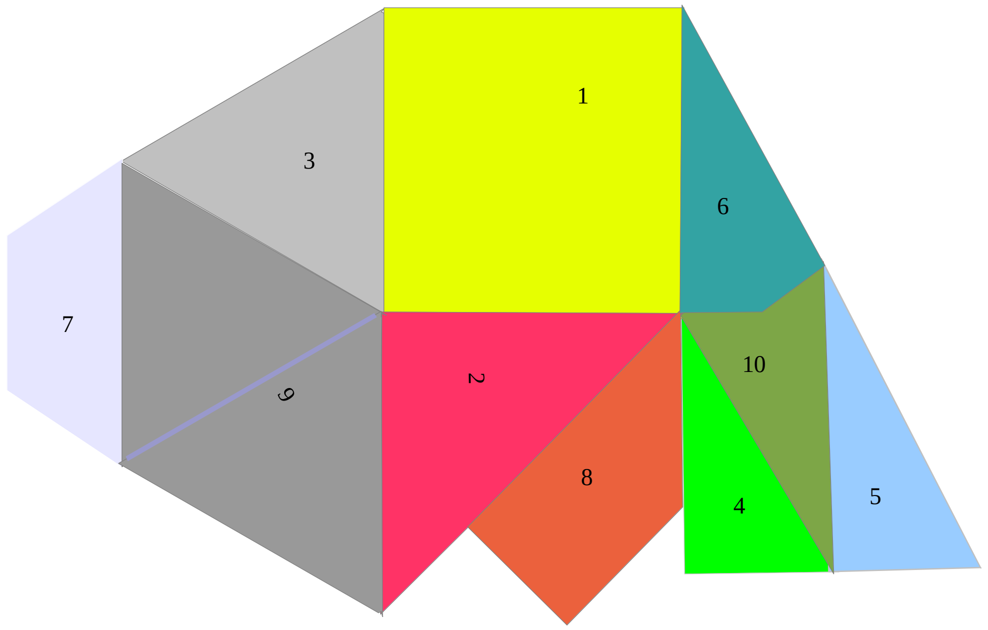


Sobre la primera figura más arriba verificamos que las piezas 6 y 5 desde lo alto del rompecabezas se ajustan bien porque ambos lados unidos miden 1. Observamos que "el hueco" entre ambas piezas 5 "da el aire" de definir un ángulo recto. Les pedimos pues a los alumnos verificarlo rellenando eventualmente el tablero de la página 10. Encontramos 93,3 sobre la segunda figura lo que no conviene y pidámosles a los alumnos buscar si se puede colocar otra pieza con el fin de que el "hueco" defina un ángulo recto. Sobre la tercera figura, abandonamos el triángulo azul y utilizamos 4 triángulos verdes. Les pedimos a los alumnos verificar que, esta vez, tenemos un verdadero pavimento de una parte del plano (la figura obtenida está constituida por dos nuevas

VIII - Una experiencia de pavimento de una parte del plano con todas las piezas (para ellos todos en revisión de las medidas de ángulo) seguida por la construcción de la " Esfera estrellada"

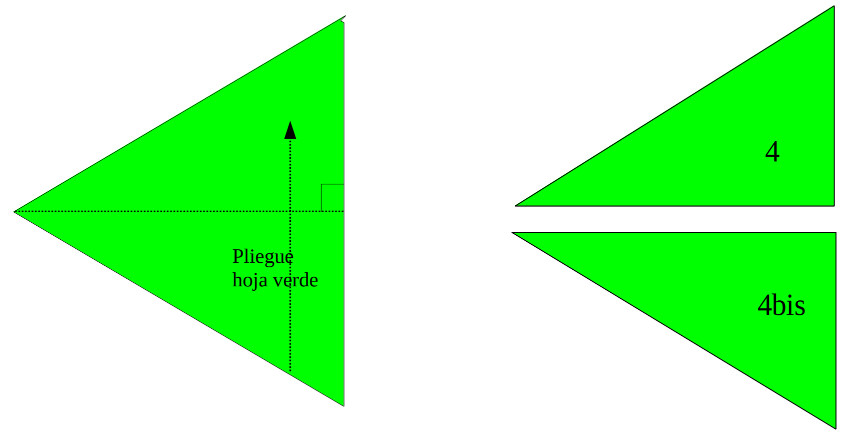
Este trabajo que distrae consolidación puede ser propuesto tan pronto como todas las piezas son recortadas. Podemos pues pedirles a los alumnos colocar lado a lado sus piezas para realizar un pavimento del plano más hermoso posible. Les pedimos verificar bien que el pavimento es correcto es decir que las medidas de los ángulos y las longitudes de los lados adyacentes coinciden bien, es decir que no hay traslapo de las piezas, ni espacio entre ellas.

He aquí un ejemplo.

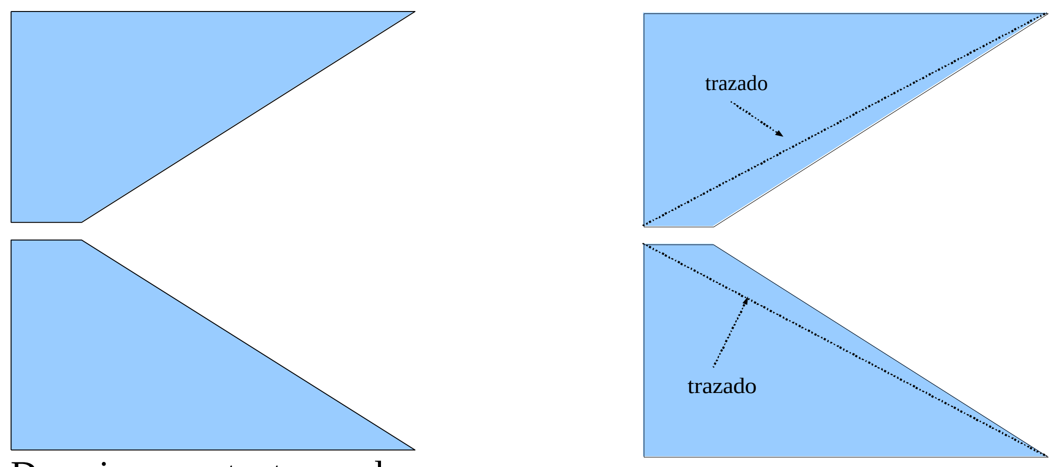


Observamos que las cumbres del triángulo azul (5) y de la cometa turquesa (6) (a la derecha de la figura) se parecen ser alineadas. Les pedimos a los alumnos verificarlo por el cálculo. Los tres ángulos concernidos que pertenecen al triángulo (5) azul, al deltoide (10) verde oscuro y a la cometa turquesa (6) miden respectivamente 26,7; 30 y 90 en grados, su suma no es 180 pues la raya que sigue el borde de las piezas no está un segmento de derecha a pesar de las apariencias.

Lo mismo para la otra parte exterior del triángulo azul (5) y el lado exterior del triángulo verde claro (4) parecen formar un segmento de derecha, verifiquemoslo. La suma de los ángulos concernidos es 60 + 30 + 90 = 180 en grados: los lados forman un segmento de derecha. Las piezas 4, 5, 6 y 10 pueden pues ser utilizadas para construir un rectángulo falso como lo proponemos más abajo con el fin de reforzar el espíritu crítico de los alumnos. Ponemos de manifiesto tan mejor la hendidura entre el triángulo azul y la cometa turquesa.

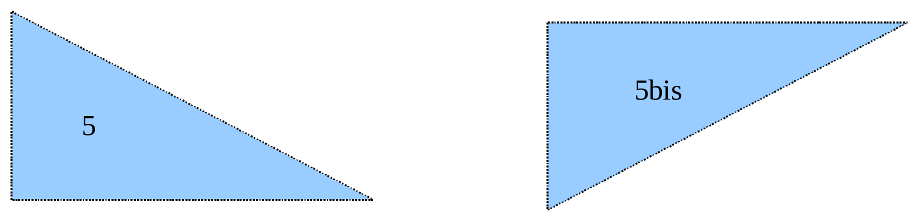


Tomemos las piezas azules no utilizadas durante la construcción del triángulo equilátero, que tienen la forma de la siguiente figura y pedimos a los alumnos dibujar en cada pieza, con la regla, la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un lado del ángulo recto de misma medida que la del cuadrado amarillo (pieza 1):

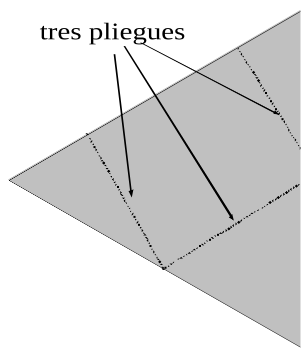


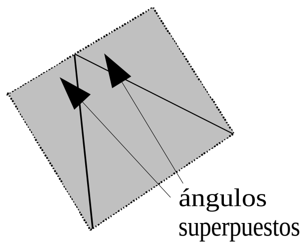
Dos piezas restantes azules

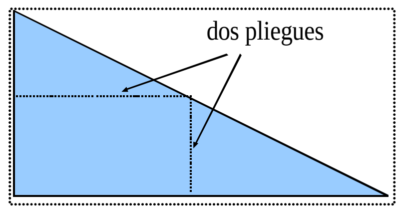
Después, cortar y marcar los dos triángulos rectángulos azules (piezas 5 y 5bis)



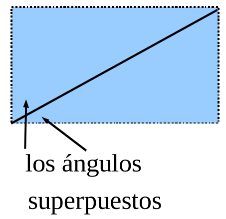
Preguntamos lo mismo que lo del triángulo gris: ¿Es posible, plegando el triángulo azul, sin marcar los pliegues, pero ayudándose de la pieza 5, mostrar que la suma de los tres ángulos del triángulo rectángulo es 180°? La respuesta es de nuevo: "¡Si!" como lo mostramos siguiente página, a derecha.





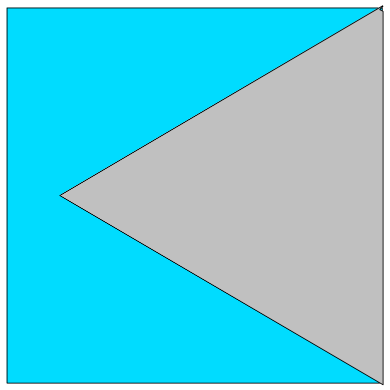


Pliegues del triángulo
rectángulo azul

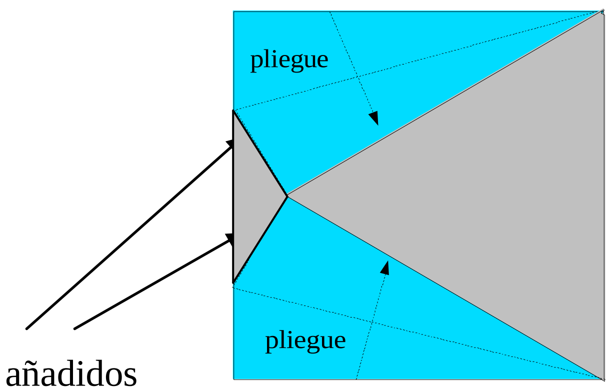


Pliegues del triángulo
equilátero gris

Tomamos un cuadrado igual al precedente pero de otro color, por ejemplo de color turquesa. Ponemos sobre el cuadrado, el triángulo gris que será utilizado como patrón. Cortamos las partes turquesa no cubiertas por el triángulo (ver la figura siguiente). Después, plegamos cada pieza turquesa sobre sí misma, y cortamos la parte inútil a lo largo de los pequeños trazos a fin de hacer una cometa (figura a la derecha).



Una hoja turquesa y
un triángulo equilátero gris



Trazos añadidos
para cortar

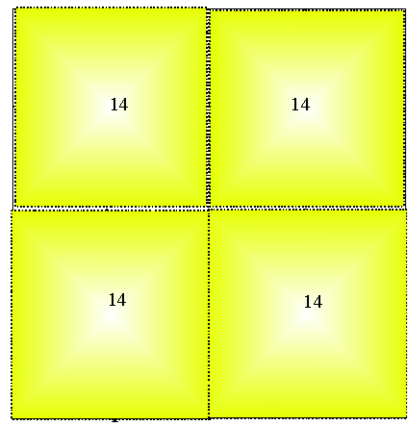
Pedimos a los alumnos escribir sobre su cuaderno una de las definiciones de una cometa (no es la mejor pero es fácil).

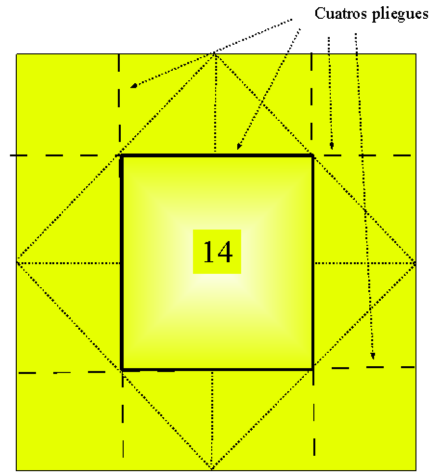
Una cometa es una figura geométrica construida con dos triángulos isósceles cuyas bases principales son superpuestas. Cuando los triángulos son iguales obtenemos un rombo.

Una definición mejor matemáticamente, para los que conocen la mediatriz o los ejes de simetría:

Una cometa es un cuadrilátero cuya diagonal es mediatriz (o eje de simetría) de la otra.

Cuatro pequeños cuadrados de área ¼
cobren el cuadrado amarillo de área 1.





Si se construye por plegados el cuadrado de área ¼ a partir del cuadrado amarillo inicial de área unidad "vemos bien" que recobramos, con cuatro pequeños cuadrados, nuestra primera construcción.

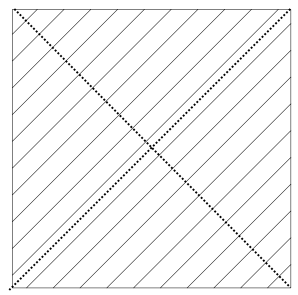
Para una **segunda acción de fortalecimiento del conocimiento**, podemos pedir a los alumnos de construir, conociendo un cuadrado, sin conocer sus medidas, un cuadrado de área doble, pues explicar sobre su cuaderno su razonamiento. Podremos utilizar la regla no graduada y los pliegues.

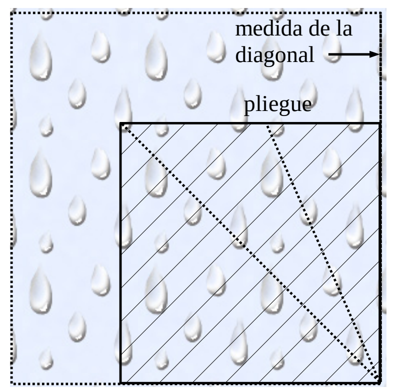
Por ejemplo:

Hemos obtenido un cuadrado de área media plegando los cuatros vértices del cuadrado hasta su centro. Ahora debemos hacer el inverso.

Hacemos dos pliegues para encontrar las diagonales del cuadrado. Es ahora suficiente reportar con pliegues la medida de las diagonales a lo largo de los lados del cuadrado original y trazar con la regla los lados del cuadrado de área doble.

Verificamos midiendo los lados del nuevo cuadrado y calculando su área que es doble de la del primer cuadrado





Estas actividades de fortalecimiento son muy útiles para instalar el concepto importante de diferencia entre las relaciones de longitud y las relaciones de área. Más tarde podremos proseguir este tipo de actividad con los relaciones de volumen.

- Cada pequeño cuadrado mide 1/16 del área unidad.
- Cada rectángulo mide la mitad de un pequeño cuadrado sea 1/32 del área unidad.
- Cada cuadrado pequeñito mide el cuarto de un pequeño cuadrado pues (1/16): 4 = 1/64 del área unidad.

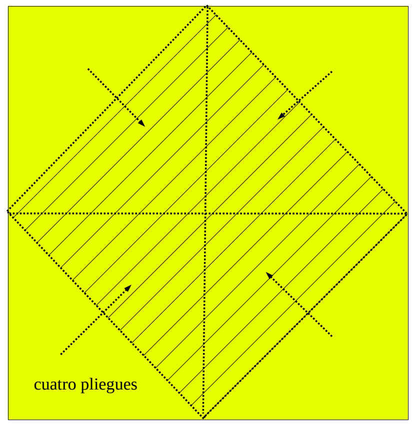
La suma de los rectángulos y de los cuadrados rayados es pues:

$$4\times\frac{1}{16}+8\times\frac{1}{32}+4\times\frac{1}{64}=\frac{9}{16}>\frac{1}{2}.$$

Nos acercamos a la respuesta pero cada alumno puede si se procede "por aproximación sucesiva" sobre los pliegues, el resultado va a ser poco preciso.

2a propuesta

Alguien puede proponer "bajar los vértices" del cuadrado amarillo como más abajo, ayudándose de pliegues que juntan los medios de los lados:



Pedimos entonces "¿cuál es el área del cuadrado rayado?"

Los alumnos observan que los lados vueltos exactamente recubren lo que se queda del cuadrado amarillo y lo justifican por el hecho de que los cuatro pliegues son unas diagonales de los pequeños cuadrado de color amarillo. La conclusión es:

El área del pequeño cuadrado rayado es la mitad de la del cuadrado amarillo.

Actividad de fortalecimiento para ellos todos

Observamos en el momento del primer doblado que teníamos obtengamos un cuadrado de área ¼ en lugar de ½. El último cuadrado amarillo rayado tiene bien una área de ½ como esto fue pedido. Lo llamamos pieza 13. Es pues fácil, con mismo procedimiento, plegando los vértices de esta pieza, de obtener una pieza de área la mitad es decir ¼ que nombraremos pieza 14.

Les pediremos pues, a los alumnos, de reagruparse por 4 y verificar que cuatro de las piezas 14 recubren bien el primer cuadrado amarillo de área unidad.

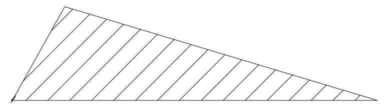
Comentario pedagógico

Después esta actividad de "Descubrimiento de una situación", podemos tomar un descanso observando nuestras obras y posiblemente mejorar los recortes.

También podemos, ya que hemos construido, todos los triángulos que son notables, introducir el término "escaleno". Este término, normalmente, se utiliza sólo en el caso de los triángulos, pero que podría, en nuestra opinión, utilizarse en el caso de otros polígonos. Es interesante descubrir que no es tan obvio de dibujar un triángulo que tiene, a primera vista, ninguna propiedad, si no, al menos, que "no tener dos lados de igual medida". Nuestra cultura nos han dado un gusto por la simetría, que tiende a dibujar lo que llamamos "figuras hermosas", es decir, para la mayoría de nosotros, que son simétricas (ve, por ejemplo, el artículo en francés de MØLLER Anders Pape en la bibliografía). Entonces, pedimos a los alumnos de construir un "verdadero triángulo escaleno" es decir un triángulo que no tiene ninguna propiedad habitual (a primera vista).

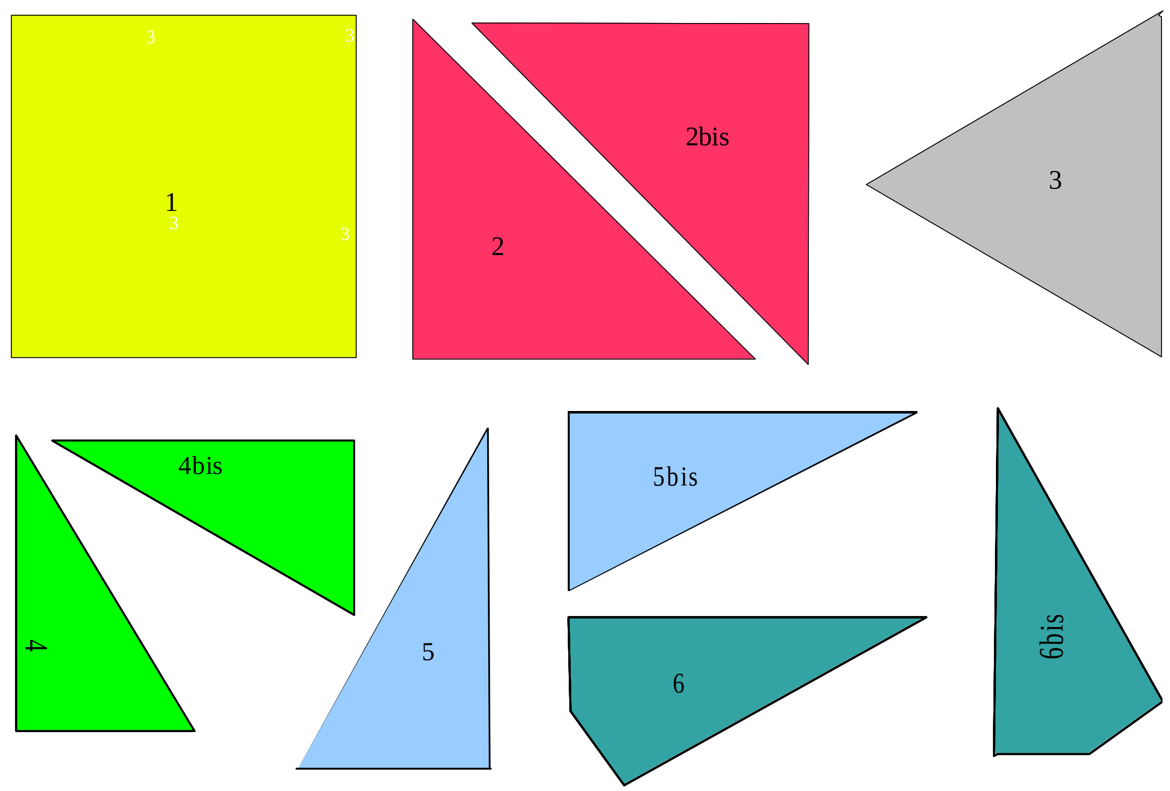
Pedimos que uno de sus lados tenga la misma medida que la del cuadrado amarillo.

Hacemos otras dos copias de él para utilizarle en el siguiente párrafo.

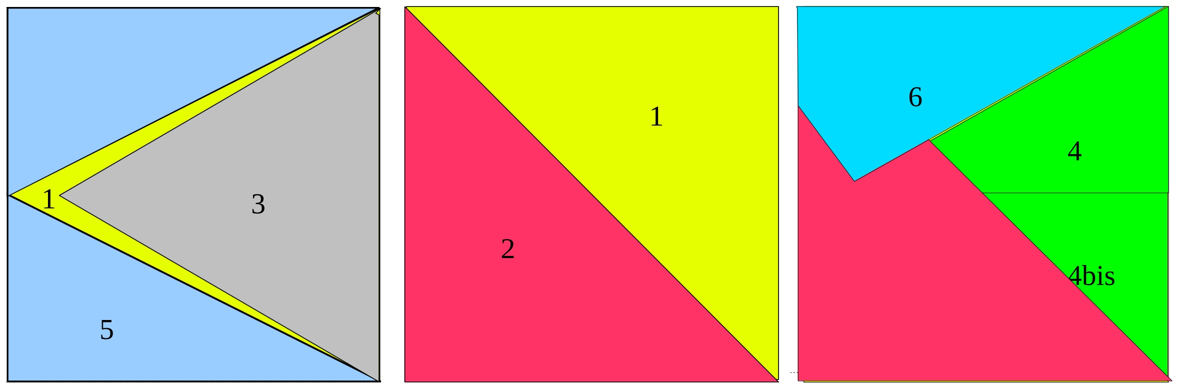


Un triángulo escaleno

Aquí, una recapitulación de las diferentes piezas a escala reducida:



Pedimos los alumnos verificar, por superposición de las piezas, que sus medidas sean "correctas al milímetro". Se pueden recortar un poco, o hacer nuevas piezas si no son buenas. Cada vez se superponen las piezas sobre el cuadrado amarillo.

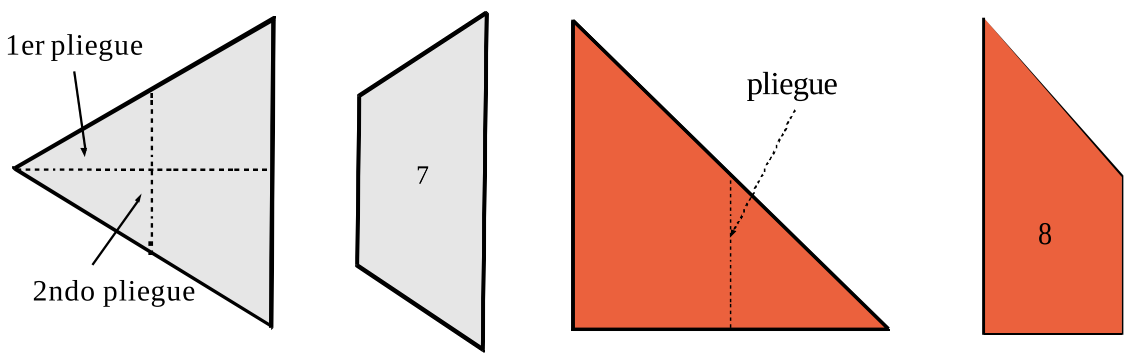


Para terminar esta actividad de construcción de triángulos y cuadriláteros "clásicos" preguntamos a los alumnos si hemos encontrado todas las figuras geométricas. La respuesta es: "no" porque no tenemos el trapecio rectángulo, el trapecio isósceles, el rombo y el deltoides.

Pedimos a los alumnos construir los trapecios con una copia clara del triángulo equilátero de color gris y una copia oscura del triángulo rectángulo rojo.

Trazamos, sobre las figuras, los pliegues que son útiles para la construcción.

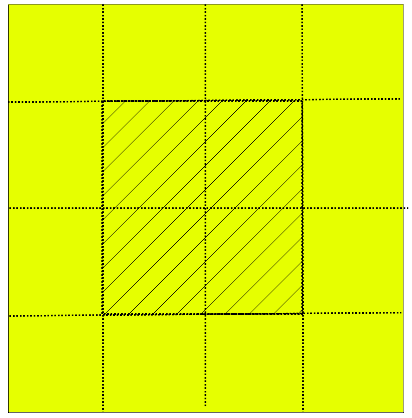
Les pedimos a los alumnos escribir, sobre las figuras geométricas, las medidas de las longitudes y de los ángulos que reconocen.



Un trapecio isósceles gris claro   Un trapecio rectángulo rojo oscuro

Podemos construir fácilmente un rombo con dos triángulos juntos por uno de sus lados. Es un rombo especial porque una de sus diagonales es de la misma medida que la de sus lados (pieza 9).

El deltoides se obtiene con un plegamiento de la cometa y después de corte (pieza 10).



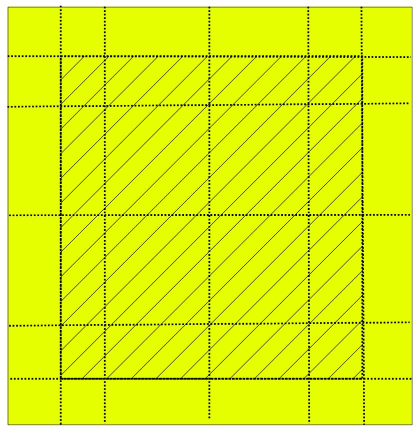
Un cuadrado amarillo de lado unidad

Obtienen por doblados sucesivos el cuadrado rayado: dos primeros pliegues juntan los puntos medios de los lados del cuadrado, luego cuatro pliegues juntan los puntos que indican el cuarto por cada lado. Les pedimos justificar el hecho de que la parte rayada es un cuadrado y de escribirlo sobre su cuaderno.

Les pedimos comparar las áreas del gran cuadrado y del pequeño contando los pequeños cuadrados que aparecen por plegamiento que son reparados sobre la figura por rayas punteados.

Cuentan 12 cuadrados no rayados y 4 cuadrados rayados, el cuadrado entero cuenta pues 16 cuadrados. Les pedimos: ¿cuál es la relación entre las áreas del gran cuadrado y del pequeño cuadrado rayado? Es cuatro. No respondimos a la cuestión. Pueden entonces sugerir: vamos a hacer "menos veces" por ejemplo vamos a "disminuir la banda no rayada por la mitad".

Lo que da:



Es un poco difícil de contar y nos da la ocasión de ver de nuevo la adición de las fracciones para los más grandes. Para los más jóvenes vamos a detallar las diferentes piezas de la banda que vamos a quitar para obtener un cuadrado más pequeño. Vamos a contar con los pequeños cuadrados que construimos en la actividad precedente.

En la banda no rayada, hay:

8 rectángulos que son las mitades de los pequeños cuadrados, 12 muy pequeños cuadrados que son cuarto de pequeños cuadrados.

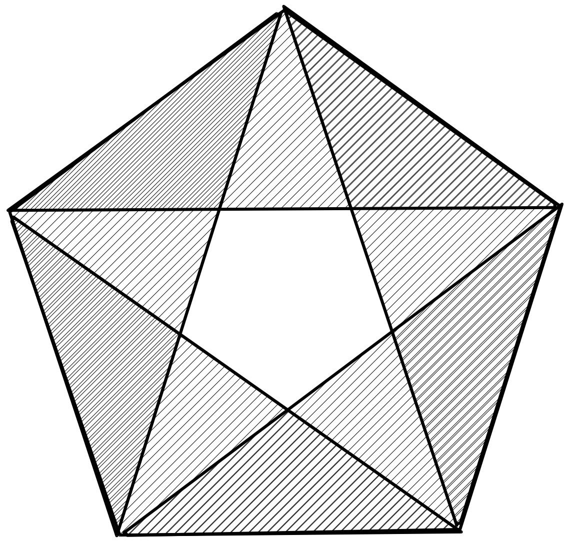
Pedimos: "¿cuánto esto representa pequeños cuadrados?"

Se necesita dos rectángulos para hacer un pequeño cuadrado, esto hace 4 pequeños cuadrados. Se necesita cuatro cuadrados pequeñitos para hacer un pequeño cuadrado, esto hace un pequeño cuadrado. Lo que hace en totalmente 9 pequeños cuadrados. No obtenemos la mitad de 16 pequeños cuadrados pero 14.

Para los más grandes Pedimos, ya que decidimos anteriormente que el gran cuadrado amarillo (pieza 1) es la unidad de área ¿Cuál es el área rayada?

Encontramos 106° mientras que el ángulo en el vértice del Triángulo de Oro debe medir 108° (hacemos los cálculos explícitos en nuestros folleto " Nouvelles pratiques..." loc. cit.) sea un error de menos de 2 %, lo que nos parece aceptable.

Reagrupamos a los alumnos por cinco y les pedimos poner sus piezas las unas sobre otras como sobre la figura más abajo con el fin de construir un pentágono:



Las imperfecciones en los ajustes son debidas, desde luego, a los errores de recorte de las piezas y al error que resulta de eso sobre el valor del ángulo a la cumbre del Triángulo de Oro pero el conjunto nos parece bastante satisfactorio.

VII - Una cuestión clásica de geometría en el colegio

Una cuestión clásica y fundamental de geometría en el colegio es la de las relaciones entre la ampliación (o la reducción) medidas de longitud y medidas de áreas (ver R. RODRIGUEZ bibliografía: "Une autre gestion du puzzle de Guy Brousseau").

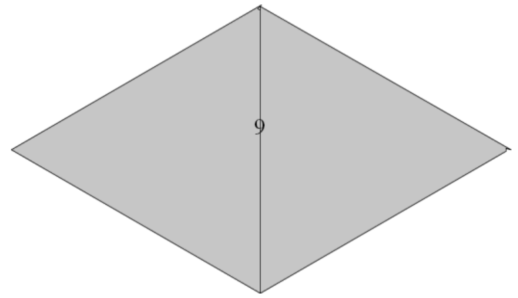
Vamos a evocar esta cuestión en el marco de nuestras piezas de rompecabezas.

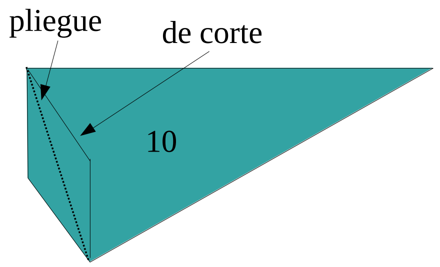
Consideremos de nuevo la primera pieza: el cuadrado amarillo. Les pedimos a los alumnos de hacer una copia que también puede ser amarilla. Les pedimos:

¿Puede construir, plegando el cuadrado amarillo, el cuadrado de superficie dos veces más pequeña?

1a Propuesta

Los alumnos pueden tener la idea de plegar el cuadrado paralelamente a sus lados para sustraer bandas:





Observación a propósito de la noción de deltoide

Algunos **libros escolares** dicen que el deltoide es un cometa cóncavo.

Se parece mejor conservar la palabra deltoide porque es una noción más difícil que la de cometa. Podrá ser estudiada después.

Será útil, durante las actividades, de pedir a los alumnos, de escribir sobre las piezas, con el lápiz, las medidas que conocen.

II - Observación de las piezas y estudio de sus propiedades

Decidimos que la medida del **lado del cuadrado (pieza 1) es la unidad.**

II-1- Reconocimiento de las figuras y estudio de las medidas características

Pedimos los alumnos, sucesivamente:

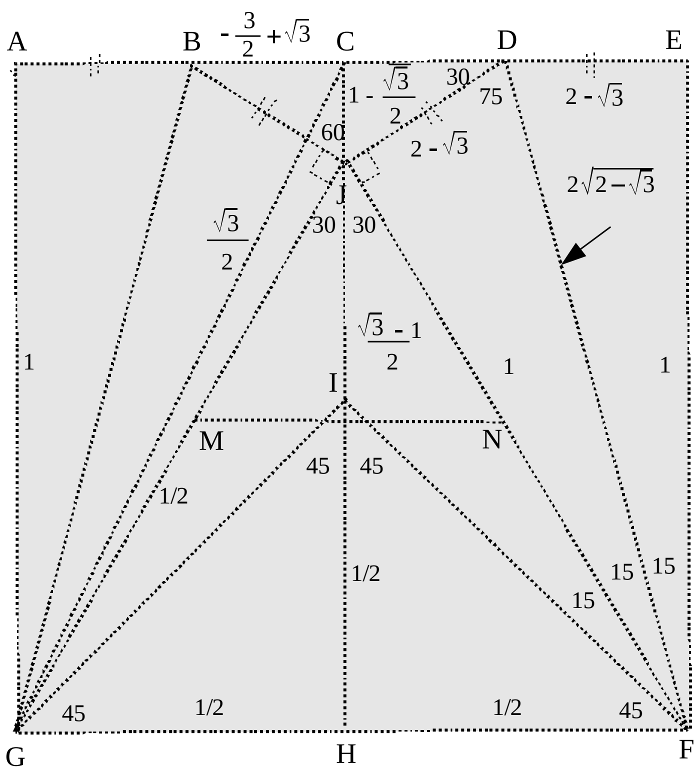
- Estudiar las piezas
- Dar sus nombres
- Dar las propiedades elementales de cada pieza
- Dar la medida de la diagonal del cuadrado, la altura del triángulo equilátero, la medida de la hipotenusa de los triángulos azules.

II-2- Cálculo de los ángulos (para los alumnos de secundaria)

Escribir o calcular la medida de los ángulos, escribir con el lápiz sobre la figura.

Observación: no es clásico el triángulo azul, en efecto los lados del ángulo recto miden 1 y ½. Se debe utilizar la trigonometría y la calculadora para calcular la medida de los ángulos que no son rectos. Vemos aquí la utilidad de las funciones trigonométricas de la calculadora o la computadora. Se podrá utilizar la pieza para construir un triángulo escaleno. Escribimos siguiente página el cuadro de las medidas que pueden ser calculadas. Aquí el teorema de Pitágoras es fundamental.

Cada alumno puede escribir sus resultados sobre la pizarra**.**



Indicamos sobre la figura las medidas de los ángulos de las piezas de rompecabezas que escribiremos abajo.

Cuadrado AEFG (amarillo)

Triángulos rectángulos isóceles AGF y AEF (rojo)

Triángulo equilátero GJF (gris)

Pequeños triángulos rectángulos no isoceles GHJ y FHJ (verde)

Grandes triángulos rectángulos no isoceles GAC y FEC (azul)

Cometas ABJG y EDJF (turquesa)

Trapecio rectángulo AGHI y EFHI (rojo oscuro)

Nombre de la figura	**Color**	**Número de pieza**	**Medida de los lados**	**Medida de los ángulos en grados**
Cuadrado	Amarillo	1	1	90
Triángulo rectángulo isóscéles	Rojo	2	$1 ; 1 ; \sqrt{2}$	45 ; 45 ; 90
Triángulo ó equilátero	Gris	3	1	60
Triángulo rectángulo no isósceles	Verde	4	$1 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}$	30 ; 60 ; 90
Triángulo rectángulo no isósceles	Azul	5	$1 ; \frac{\sqrt{5}}{2} ; \frac{1}{2}$	26,7 ; 63,3 ; 90
Cometa	Turquesa	6	$1 ;1 ; 2-\sqrt{3} ; 2-\sqrt{3}$	30 ; 90 ; 90 ; 150
Trapecio isósceles	Gris claro	7	$1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}$	60 ; 60 ; 120 ; 120
Trapecio rectángulo	Rojo oscuro	8	$1 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}$	60 ; 90 ; 90 ; 120
Diamante (o rombo)	Gris oscuro	9	1 ; 1 ; 1 ; 1	60 ; 120 ; 60 ; 120
Deltoide	Verde oscuro	10	$1 ;1 ; 2-\sqrt{3} ; 2-\sqrt{3}$	30 ; 40 ; 40 ; 210

La tercera expresión se simplifica en: Tan 36 = $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

cos 54' = $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$; sen 54' = $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; tan 54' = $\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

Podemos completar la tabla de la página 16:

medida	seno	coseno	tangente
15 al céntimo	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; (0,26)	$\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ (0, 96)	$2-\sqrt{3}$ (0,27)
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36 al céntimo	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ 0,(0,59)	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (0,81)	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ (0,73)
45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
54	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
75 al céntimo	$\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ (0,97)	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (0,26)	$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ (3,73)

Como de costumbre les pedimos a los alumnos verificar que la calculadora da bien los valores cercanos a estos resultados exactos.

Indicamos entre paréntesis algunos resultados con ambos cálculos: el valor de la función trigonométrica directa librada por la calculadora y el valor algebraico (con radicales) calculada con la misma calculadora, todo al centésimo cerca, vemos que son iguales.

Aplicación a la construcción del pentágono (para todos los alumnos)

Recortamos entonces el Triángulo de Oro representado por la parte rayada sombría que nombramos pieza número 12. Les pedimos entonces a los alumnos medir el ángulo en la cumbre del Triángulo de Oro recortado con transportador.

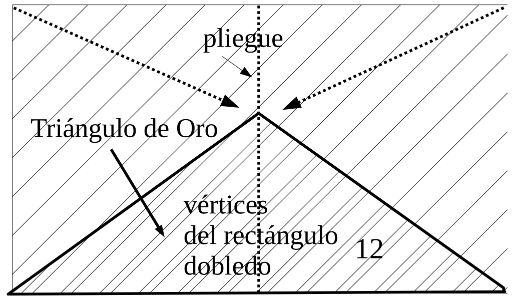
Es una buena opción pedagógica en la enseñanza de la matemática ya que es mucho, mas probable que las actividades se sitúen en la "zona proximal de desarrollo" de Lev Vygotsky (*)

Extensión de esta actividad para los grandes

Los mayores pueden cortar el Rectángulo de Oro y el resultado es una nueva pieza del rompecabezas que denotamos pieza 11.

Proponemos a los alumnos a utilizar el método de construcción del triángulo equilátero para construir el Triángulo de Oro. Este triángulo tiene sus dos lados iguales de medida 1 y su base es de medida el Número de Oro.

Basta con plegar el rectángulo en dos partes iguales utilizando el centro de sus dos largos lados. Abrir el pliegue y, sobre el pliegue, dibujar una recta. Pues, doblar cada lado corto para que sus vértices se encuentren en el mismo punto sobre la recta pequeña.



Siempre para los alumnos mayores, puede ser interesante hacer, para completar esta construcción, un cálculo algebraico de las funciones trigonométricas de los ángulos que aparecen en la construcción del Triángulo de Oro.

Hemos desarrollado este tema en nuestro folleto (en francés), "Nouvelles pratiques de la géométrie" Capítulo VII: polígonos.

En efecto, nuestros cálculos nos indican que los ángulos del Triángulo de Oro son 108° y dos veces 38°.

Suponemos que los dos lados iguales son de medida 1, entonces su altura es: $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Entonces las líneas trigonométricas de los ángulos 36° y 54° son:

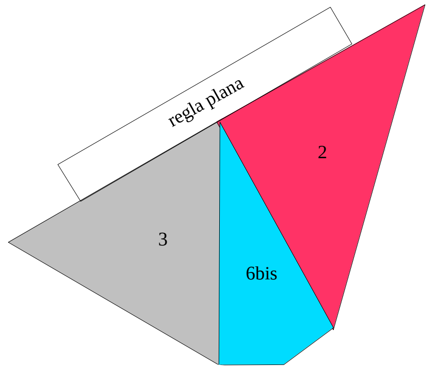
$$\cos\ 36' = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\ ;\ \text{sen}\ 36' = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\ ;\ \tan\ 36' = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}.$$

(*) Las investigaciones de Lev Vygotsky se centran en el pensamiento, el lenguaje, la memoria y el juego del niño. Al final de sus días trabajó sobre problemas educativos. En su teoría podemos encontrar varias ideas importantes, en primer lugar el lenguaje es un instrumento imprescindible para el desarrollo cognitivo del niño. La "zona proximal de desarrollo" es un concepto elaborado por Vygotsky, y define la distancia entre el *nivel de desarrollo real*, determinado por la capacidad de resolver un problema sin ayuda, y el *nivel de desarrollo potencial*, determinado a través de resolución de un problema bajo la orientación de un adulto o en colaboración con otro compañero.

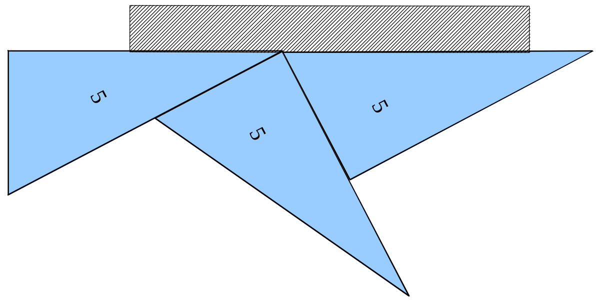
II - 3 - Usar las piezas del rompecabezas para ver "con vista y tacto" las grandes propiedades geométricas de los ángulos y polígonos.

A continuación, puede utilizar las piezas, colocándolas al lado del otro, con las medidas registradas en el cuadro anterior, a redescubrir (o descubrir) las propiedades geométricas básicas, por ejemplo (se pueden agrupar varios alumnos para tener más piezas, pero al final de la actividad de cada alumno mantendrá sus propias piezas):

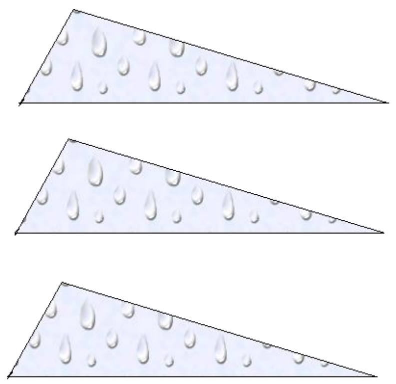
- El ángulo plano mide 180°.
- La suma de los ángulos de un triángulo mide 180°.
- La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo mide 360°.



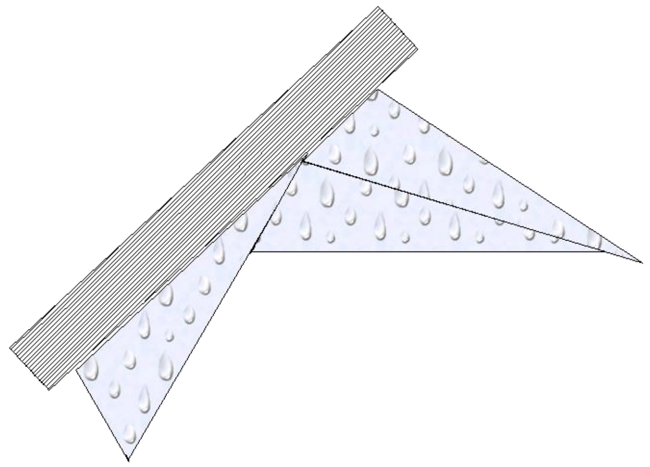
1ero ejemplo : verificación con la regla plana : el ángulo plano mide 180°.



2do ejemplo : verificación con la regla plana : la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. (Se podrá también construir un "verdadero" triángulo escaleno y verificar la misma propiedad, ve la siguiente construcción.

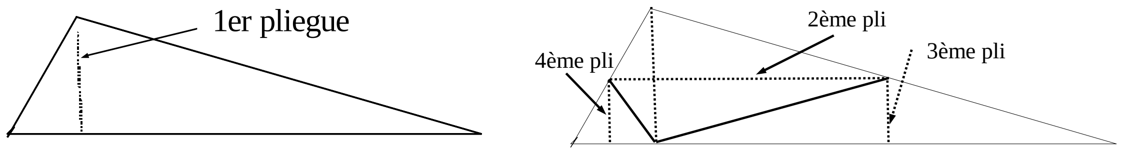


3ro ejemplo : tres triángulos escalenos superponibles o iguales.



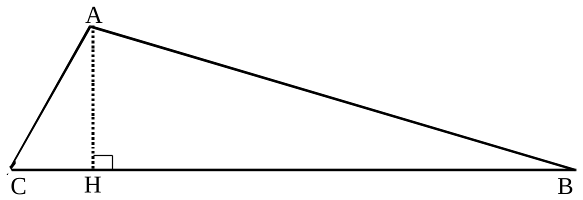
Verificación con la regla: la suma de los ángulos de un triángulo escaleno mide 180°.

Podemos, como en la actividad precedente, verificar con pliegues que la suma de los ángulos de un triángulo escaleno mide 180°, ve usted las siguientes figuras.

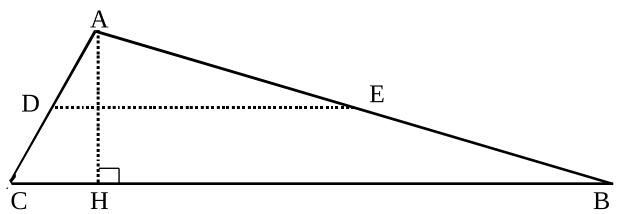


Observamos que obtenemos, con plegamiento, un rectángulo de área mitad de la del triángulo.

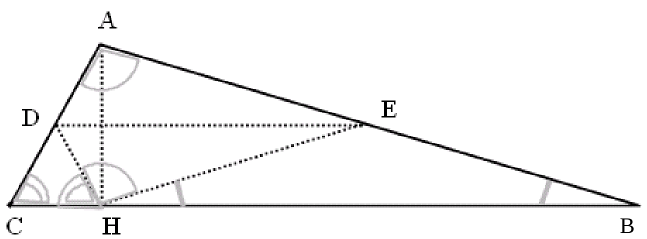
Demostración, para los alumnos mayores, de la propiedad:
"La suma de los ángulos de un triángulo mide 180°"



Los alumnos codifican los vértices del triángulo. El primer pliegue, que pasa por A y pone el lado [BC] sobre si mismo permite trazar la altura [AH]. Ella sera útil para poner A sobre [CB] con el siguiente pliegue.

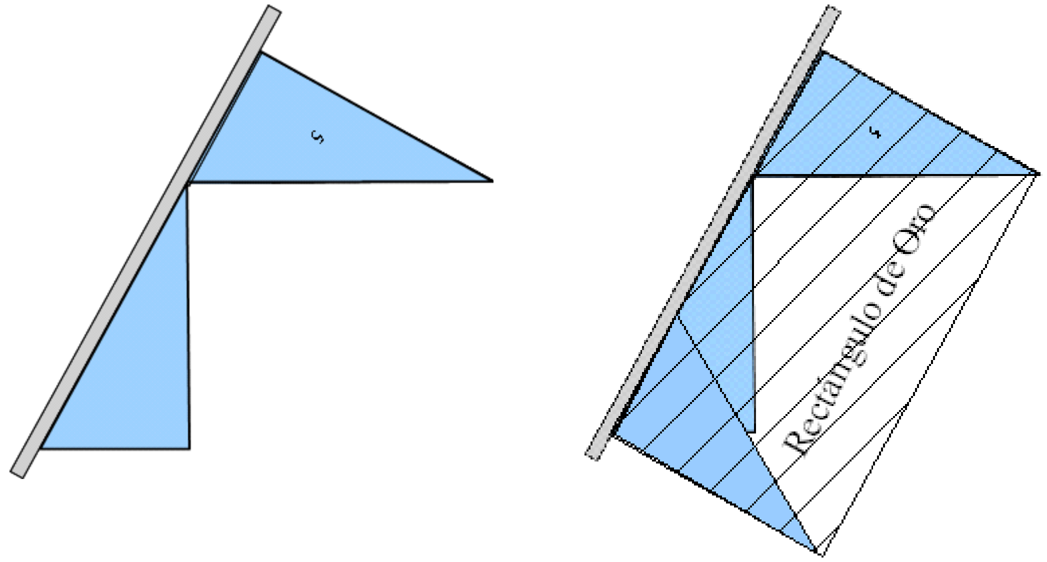


Notemos que el segundo pliegue [DE] que es el segmento de los puntos medios de los segmentos [AC] y [AB].



Los triángulos CDH y HEB, son isósceles por la simetría definida por el segundo pliegue. Por la misma razón, son iguales los triángulos ADE y HDE.

Los ángulos DHC y DCH ; EHB y EBH ; DHE y DAE son iguales dos a dos. La suma de los ángulos del triángulo ABC es igual a la suma de los ángulos DHC, DHE y EHB quien es el ángulo plano CHB. Tenemos el resultado que nos deseamos.



Ejercicio opcional para los grandes: Explicar a un compañero de clase de cómo construir un Rectángulo de Oro con una regla y tres triángulos azules.

Le pedimos a cada alumno que escriba un texto corto para enviar a un amigo que explica cómo construir los rectángulos azules y cómo hacerlo de manera que su contorno exterior dibuje un Rectángulo de Oro.

Recuerde que este tipo de ejercicio que se llama "transmisor-receptor", es especialmente beneficioso para la formación del discurso -oral o escrito- de una actividad matemática.

Un ejemplo de escritura

Se necesitan tres triángulos azules: aquellos con un lado corto del ángulo recto que es el doble del otro lado del ángulo recto.

Usted pone la regla en el escritorio, se puso dos triángulos de extremo a extremo, el primero con su hipotenusa a lo largo de la regla y su lado más corto a la izquierda de la regla, el segundo con su lado corto del ángulo recto a lo largo de la regla y su lado más largo a la derecha de la regla, que limitará al rectángulo. Los dos vértices de los dos triángulos deben tocarse. Usted coloca el tercer triángulo azul con su pequeño lado junto a la regla sobre el primer triángulo, el lado más largo a la izquierda de la regla se forma el segundo lado corto del Rectángulo de Oro.

Si se inscribe el contorno exterior de los triángulos azules por una línea para obtener un rectángulo, este contorno es un Rectángulo de Oro.

Este texto es bastante complicado, lo podemos arreglar todos juntos en la clase para conseguir un buen "modo de empleo".

Comentario didáctico

Esto es importante ya que nos muestra una vez más, que desde el punto de vista didáctico, es fundamental de construir los discursos en la clase de manera interactiva entre los alumnos y el profesor.

anchura de la columna y la altura es el Número de Oro) es el número:

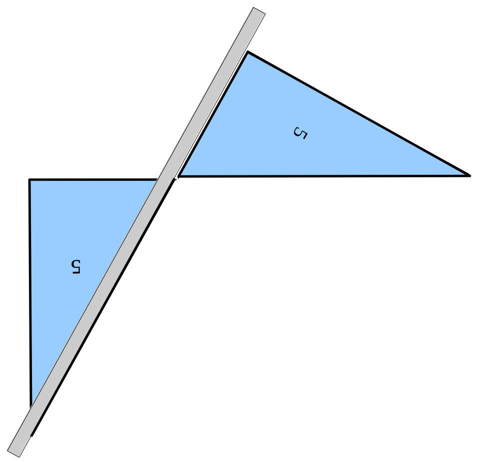
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Finalización de la actividad: Les pedimos a los alumnos si el número aparece en la tabla en la página 9 o figura en la página 16.

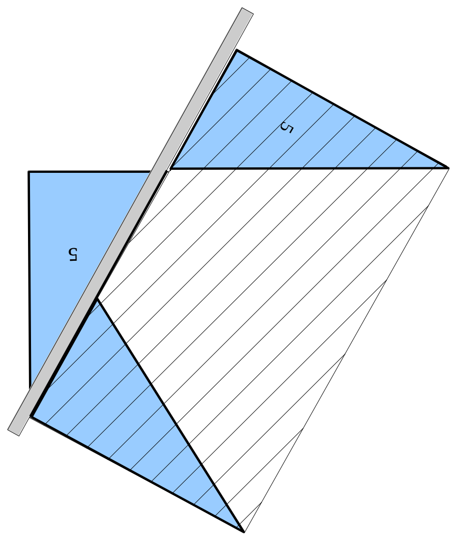
Tomamos nota de que es la longitud de la hipotenusa del triángulo azul (pieza 5) de los lados cortos de medida 1 y ½.

Nos falta la longitud ½ para obtener el Número de Oro. Sugerimos la colocación de las dos longitudes de la otra, la más "bonita" como sea posible.

Los alumnos pueden ver que si se alinearon dos triángulos azules (usamos la regla) en la siguiente figura, no sólo da el Número de Oro, sino también porque los triángulos azules son rectángulos, uno Rectángulo de Oro. Se utilizó un rectángulo azul tercio para ayudar a completar el Rectángulo de Oro que hemos elaborado con sombreado.



Dos triángulos azules (pieza 5)



Tres triángulos azules

Si existe la preocupación de que algunos alumnos tengan dificultades para encontrar, sin ayuda, se puede proponer la construcción del Número de Oro con un acertijo:

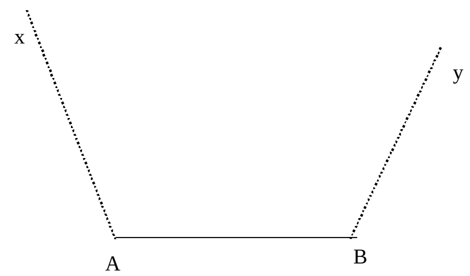
"Si tenemos tres triángulos azules (pieza 5) ¿se puede, utilizando sólo la regla (no sea graduada), definir un Rectángulo de Oro, es decir, un rectángulo con la razón del lado grande al pequeño es el Número de Oro?"

Los alumnos también podrán proponer la siguiente solución que a su vez permite una superposición de dos de los tres triángulos para obtener el contorno del Rectángulo de Oro (siguiente página).

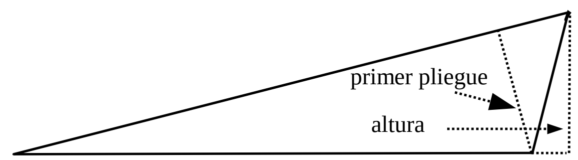
Caso donde la altura esta al exterior del triángulo

Primero remarcamos que un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso. (Ve la figura siguiente).

Ahora decimos que, si la altura esta al exterior del triángulo, es que hay un ángulo obtuso, y los otros son agudos. Entonces, es suficiente hacer el primer pliegue al otro lado.



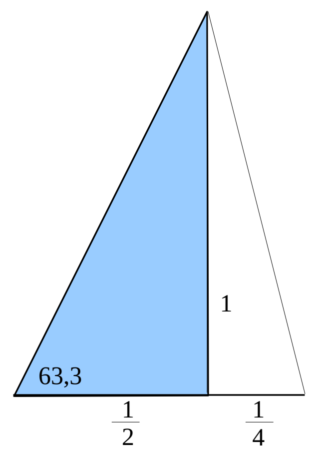
Las derechas [Ax) y [By) no se pueden encontrar para formar un triángulo.

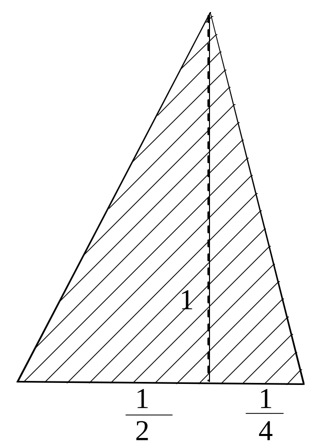


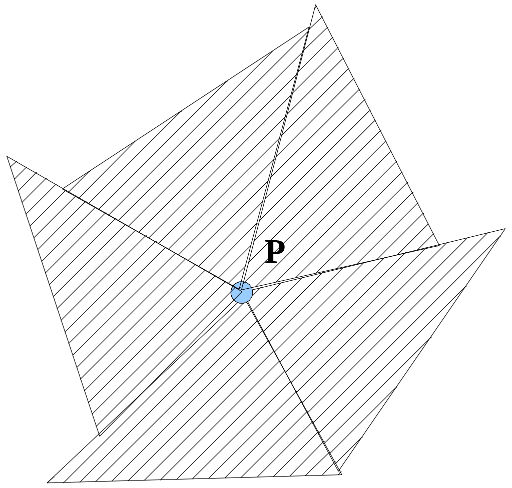
También puede, como hemos sugerido antes, construir un triángulo escaleno a partir del triángulo azul que su área es una cuarta parte del área del cuadrado amarillo. La calculadora nos dice que los ángulos de tangentes 2 y ½ respectivos son ángulos respectivamente de medida 26,7° y 63,3° en el décimo grado.

Tomamos nota, como en la construcción de las piezas que estas medidas son muy similares a los de los triángulos verdes: 30° y 60° y que será divertido pedir a los alumnos de construir, por ejemplo, un pavimento falso del plano (R. RODRIGUEZ y SALLES D. "Du dessin perçu...", en francés, véase la bibliografía) para que se den cuenta de que **" ver "no es " demostrar**. Como tampoco recortar y plegar es demostrar.

Mostramos a continuación un ejemplo de un triángulo escaleno construido a partir de un triángulo azul con un lado de medida ¾ y una medida de la altura 1.







Por ejemplo, observamos el pavimento del plano alrededor de un punto P, producido con 5 copias del triángulo escaleno anterior.

Nos preguntamos: ¿Es este cubrimiento "verdadero"?

Este ejercicio será dado a los más grandes, se puede ser verificado solo por el cálculo. Como decíamos superponer no es demostrar.

Como le hemos dicho antes, el ángulo cuya tangente es 2 es de medida 63,3°. El ángulo cuya tangente es 4 es de medida 76°. El tercer ángulo mide entonces:

180 - 63,3 - 76 = 39,3 en grados.

Para construir el pavimento alrededor del punto P hemos colocado sucesivamente lado a lado 4 ángulos de 76° y un ángulo de 63,3°, es decir:

76 × 4 + 63,3 = 367,3 grados lo que nos da un error de menos de 3%. No es bueno pero es una aproximación del mismo orden que la de los recortes.

Además preguntamos: ¿Se puede construir un verdadero pavimento con esos triángulos escálenos? ¿Cuantos triángulos debemos utilizar?

Respuesta: la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, girando las piezas podemos fácilmente obtener un ángulo plano. Colocando 6 piezas lado a lado se puede, entonces, obtener un real cubrimiento del punto P.

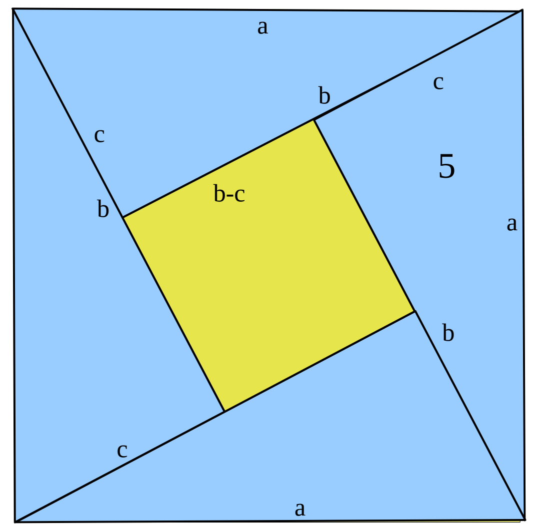
Invitamos ahora a los alumnos construir figuras engañosas, introduciendo ligeros errores sobre la medida de los ángulos.

Observación: Esta actividad nos recuerda la propuesta por Didier BOURSIN y Valérie LAROSE en su folleto agradable "Pliages et mathématiques" (en francés). Proponen construir un ángulo de tangente que mide ½ es decir midiendo 26,6°, por plegamiento, y un ángulo de 45° y así obtener un ángulo de 71,6°, que es "casi" ángulo 72° necesario para construir el pentágono. Ya tenemos las piezas necesarias para que puedan los alumnos por agrupación por cinco, realizar la construcción de un pentágono "casi exacto". Obtenemos una figura que se parece a los "molinos de viento" de los niños. Para obtener un "casi verdadero" pentágono, se acaba de cortar los pequeños pedazos de triángulos rojos y azules a lo largo de la línea de puntos como se muestra a continuación.

Por la posición respectiva de los cuatro triángulos, los cuatro ángulos del "agujero" amarillo son rectos, el cuadrilátero es un cuadrado. La medida de sus lados es $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

Pedimos entonces si se puede hacer una construcción similar con otros triángulos rectángulos, por ejemplo los triángulos azules (son un poco particulares ya que la medida de sus pequeños lados son ½ y 1, pero no cubren el plano de modo simple como ya lo observamos).

Los alumnos tratan y observan que "se necesita un cuadrado más grande" (en amarillo obscuro):



Pedimos a los alumnos, codificar las medidas de los lados de los triángulos "a" para la hipotenusa, "b" el lado mayor del ángulo recto, "c" el lado menor. Tenemos entonces: a > b > c > 0.

La medida del lado del cuadrado pequeño es (b-c), su área es $(b-c)^2$. El área del cuadrado grande amarillo es a^2, la de los cuatro triángulos es: $\frac{bc}{2}\times 4 = 2bc$.

Entonces: $\mathbf{a^2 = (b\text{-}c)^2 + 2bc = b^2 + c^2}$. **(1)**

Preguntamos: **¿Es bueno el resultado para cualquier triángulo de hipotenusa a y de otros lados b y c?**

La respuesta es "¡Si!" porque es cada vez posible poner cuatros triángulos iguales de hipotenusa "a" sobre un cuadrado de lado de medida "a", porque los ángulos de los triángulos que no son rectos son de suma 90°.

Como el pequeño cuadrado amarillo oscuro es de lado (b-c) al aplicar la fórmula (1) tenemos de nuevo el teorema de Pitágoras.

V - Una fácil construcción del Rectángulo de Oro

Recordamos que el Número de Oro, llamado así por los matemáticos griegos por su relación con la estética de los edificios (el frente columna rectangular de la Acrópolis de Atenas es un Rectángulo de Oro, es decir, la proporción entre la

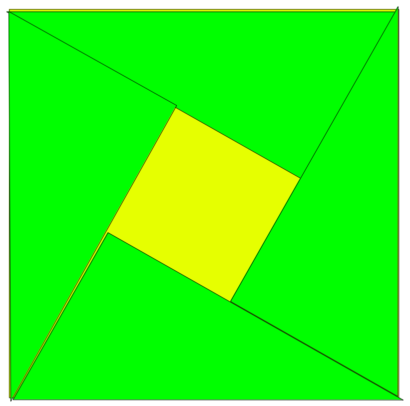
ángulo en grados	seno	coseno	tangente
15	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$	$2-\sqrt{3}$
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
75	$\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

IV – El teorema de Pitágoras « a la manera china »

Existen numerosas demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras (se puede leer el sitio interesante de Patrice DEBART: "Descartes et les mathématiques" (en francés).

La demostración que damos a ustedes es de verdad el espiritu de nuestras actividades para hacer demostraciones con puzzles. Ella es conocida como la "Construcción de Bhaskara" (siglo XII India).

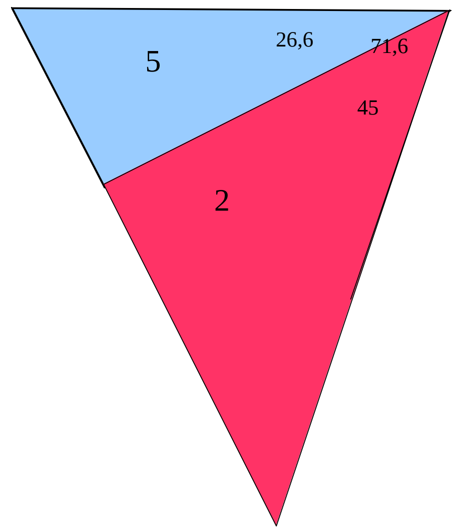
Pedimos a los alumnos agruparse por dos, para tener cuatro triángulos verdes (pieza 4), estos son medias de triángulos equiláteros. Pues, poner los cuatros triángulos tal que sean adyacentes según la figura abajo.

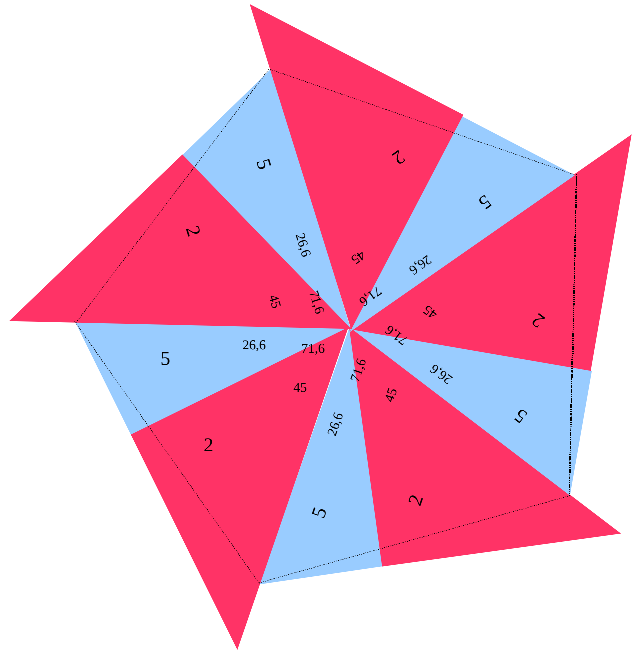


Preguntamos a los alumnos: ¿Por qué podemos fácilmente poner los rectángulos verdes sobre el cuadrado amarillo?

Indicamos que los triángulos verdes son medios triángulos equiláteros cuyos lados son de medida 1. Los ángulos que no son rectos miden 30 y 60 grados. Podemos poner el pequeño lado de medida ½ a lo largo del lado de medida $\frac{\sqrt{3}}{2}$ del otro triángulo.

Preguntamos ahora cuál es la naturaleza del cuadrilátero central y cuál es la medida de sus lados.





Preguntamos ahora ¿Cuál es la medida de los lados de los cinco triángulos azules y de los cinco triángulos rojos que constituyen el pentágono? (Los vértices al centro del pentágono son de medida 71,6 grados).

Estos lados son hipotenusas de los pequeños lados de los triángulos azules (de medidas 1/2 y 1). El teorema de Pitágoras nos da esta medida: $\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Hay que observar que el aproximado pentágono que hemos construido no tiene sus lados de medida 1, entonces sus diagonales no son de medida el Número de Oro: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Cuarto ejemplo

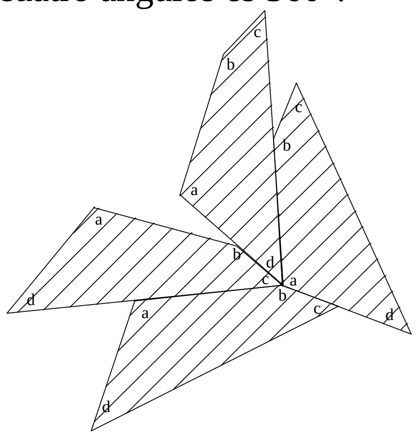
Comprobación de la propiedad: la suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo tiene una medida de 360 °.

En primer lugar, observamos que los cuadriláteros que hemos construido: el cuadrado, el trapecio, el rombo y la cometa. Observamos que con todos estos cuadriláteros plegados a lo largo de una de sus diagonales, se obtienen dos triángulos adyacentes cuya suma de los ángulos es 180°, se puede concluir que la suma de los ángulos del cuadrilátero es 360°.

En el caso de un cuadrilátero convexo, sin propiedad especial (se dice que es "escaleno") pedimos a los alumnos de unir dos triángulos, que son piezas diferentes del rompecabezas, pero tiene dos lados iguales, según este lado. Observamos entonces que por la construcción del cuadrilátero en dos triángulos con un lado de la misma medida, la suma de los ángulos del cuadrilátero mide 360°. Pedimos entonces si es necesario de construir un "verdadero cuadrilátero escaleno" para convencerse a sí mismo que la suma de sus ángulos mide 360°. La respuesta es seguramente "no", ya que siempre puede doblar el cuadrilátero a lo largo de una de sus diagonales y obtener dos triángulos.

Sin embargo, solicitamos a los alumnos, para estar convencidos, de construir un cuadrilátero escaleno convexo y plegarle a lo largo de su diagonal.

A continuación, por grupos de cuatro alumnos, cortar el mismo cuadrilátero escaleno y ver por la yuxtaposición de cuatro ángulos distintos al rededor de un punto que la suma de estos cuatro ángulos es 360°.



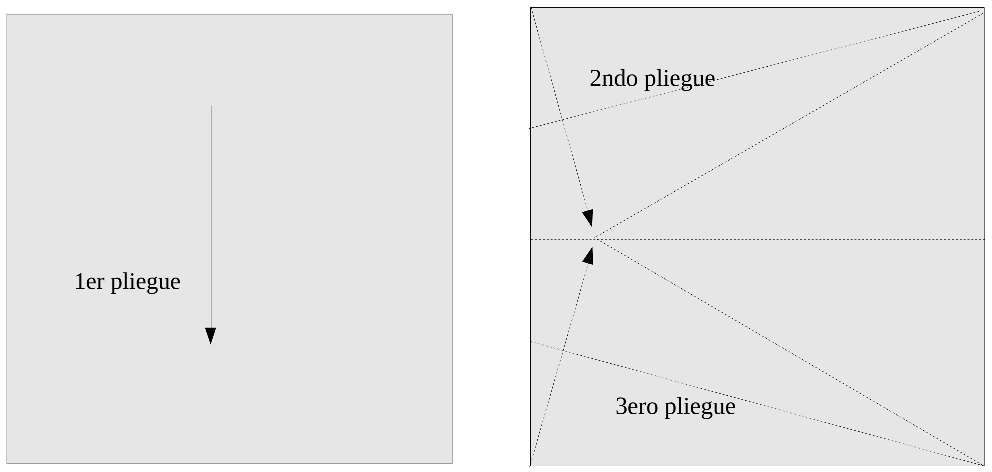
Por último, pedimos a los alumnos de utilizar el transportador para verificar si es buena la **conjetura**: "la propiedad es verdadera para el deltoides".

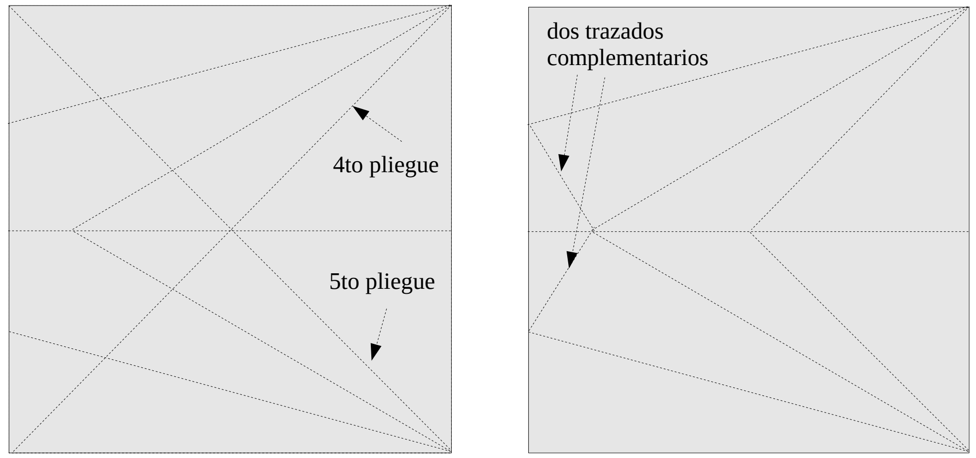
III – El mismo tipo de actividad sin utilizar los colores

Si no tenemos papeles de colores, o si tenemos menos tiempo con los alumnos mayores, podemos lograr una variante de bajo costo de las actividades anteriores con un papel fuerte blanco, que eventualmente puede conducir a otras actividades igualmente interesantes.

Pero insistimos, como siempre, el interés de "**ponerse en las manos**" los objetos geométricos y a través de "**la inteligencia háptica**", (es decir la estructuración del universo táctil), que los alumnos razonan y descubren las propiedades geométricas de las figuras.

Damos una hoja A4 de papel de color muy claro a cada alumno y les pedimos que plieguen la hoja, con apertura de la hoja entre cada operación y que pasen una línea ligera con el lápiz sobre cada uno de los pliegues:



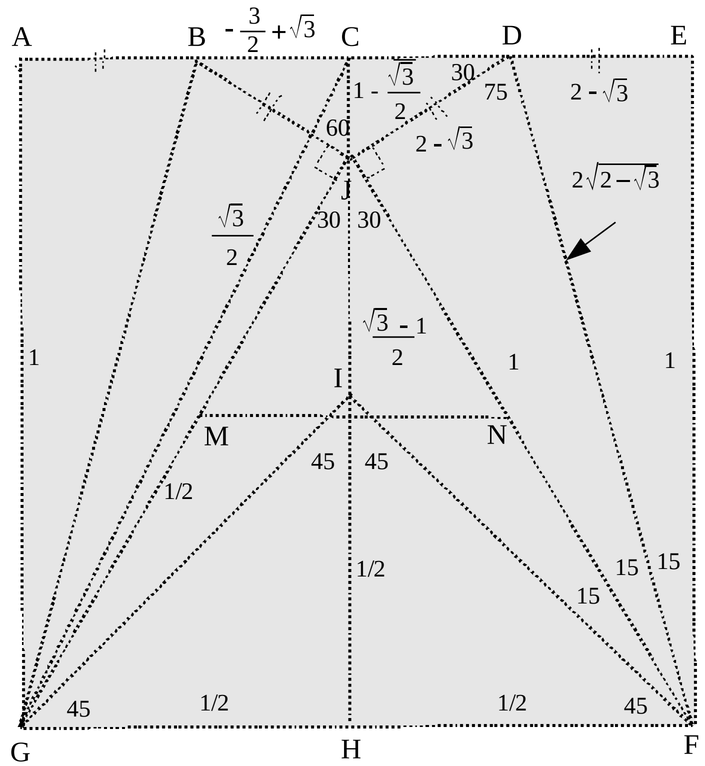


Entonces pedimos a los alumnos, (sabiendo que hemos decidido dar la medida uno al lado del cuadrado amarillo), codificar la figura e indicar todas las longitudes que son iguales y los ángulos que son iguales, pues calcular sus medidas si es fácil.

Entonces, pedimos a los alumnos mayores de hacer el cálculo trigonométrico y algebraico, es decir con los radicales.

Por ejemplo $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Damos abajo, sobre la figura, algunos resultados con medidas de longitud y angulares.



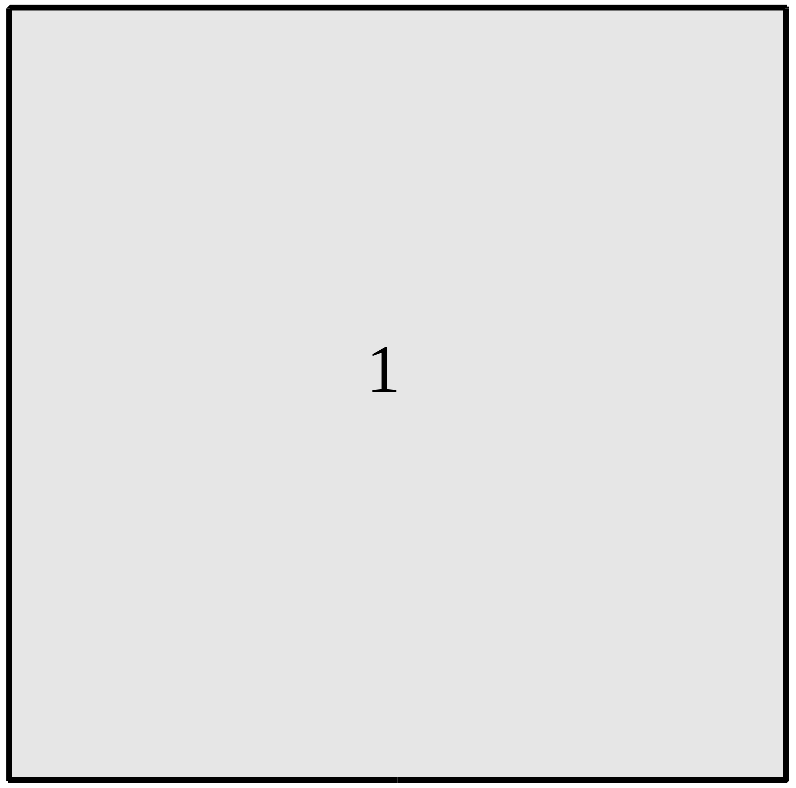
Para terminar pedimos a los alumnos escribir, en un cuadro, las medidas exactas (con radicales) de las líneas trigonométricas de los ángulos que hemos estudiado sobre la precedente figura.

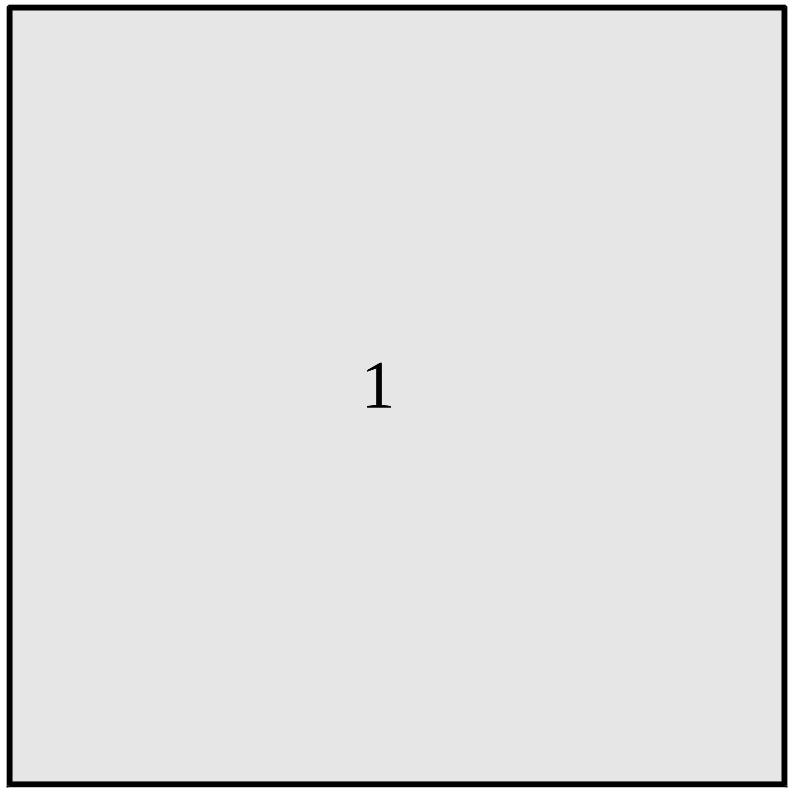
Pedimos a los alumnos verificar que las medidas aproximadas dadas por la calculadora son correctas al centésimo.

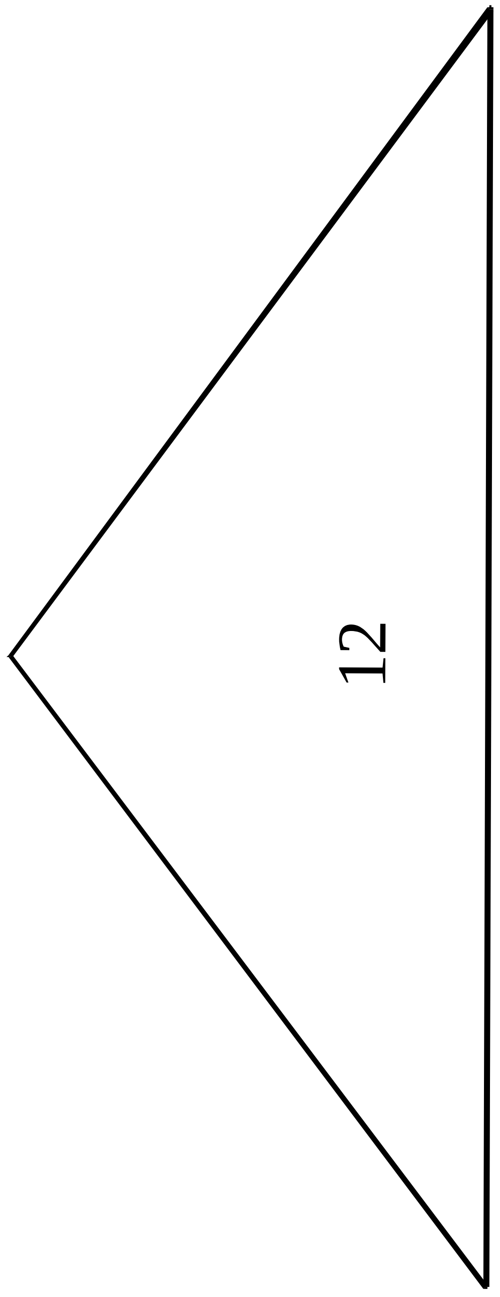
Todos los patrones están a escala reducida

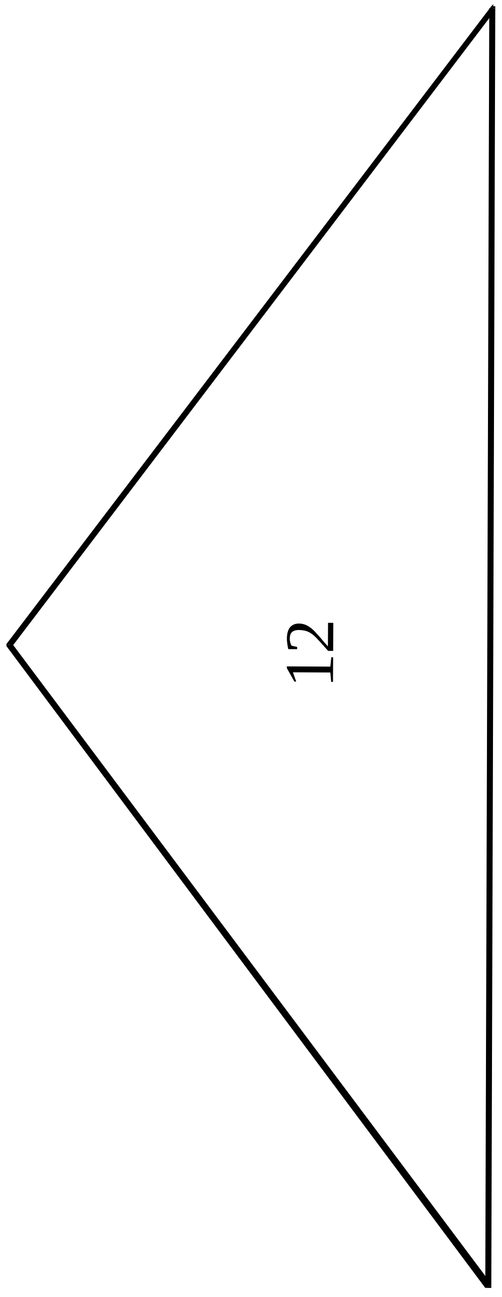
Todos los patrones están a escala reducida

Tous les patrons sont à échelle réduite

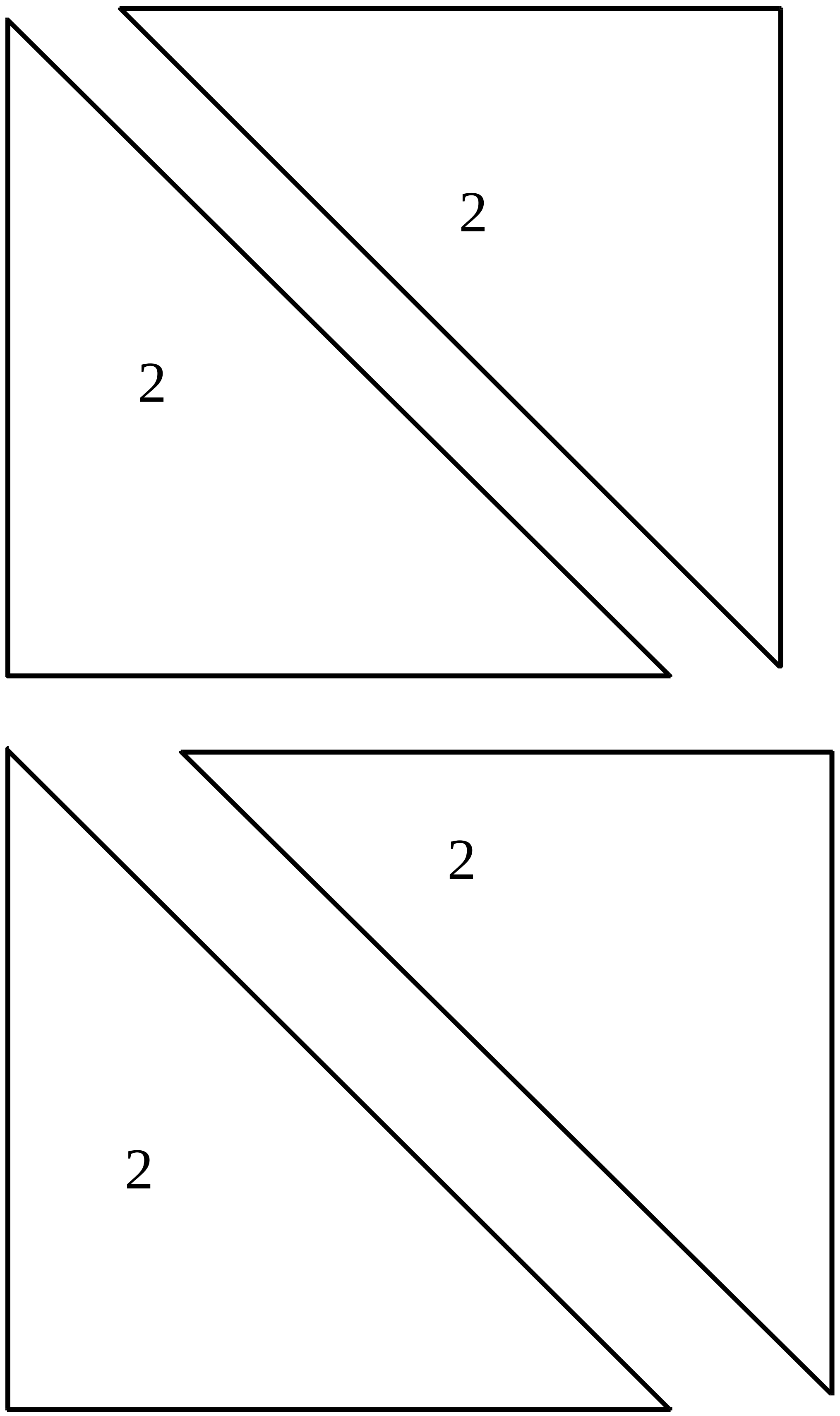




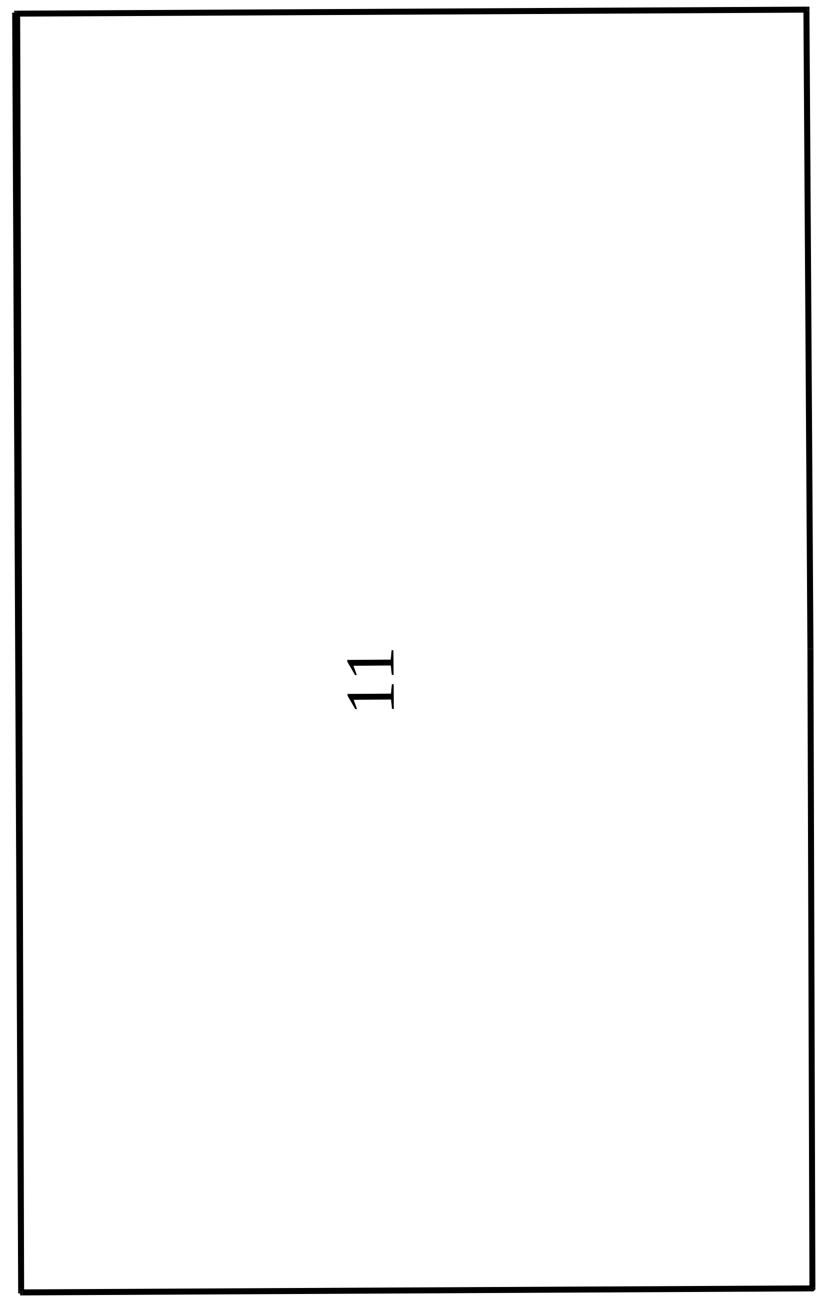




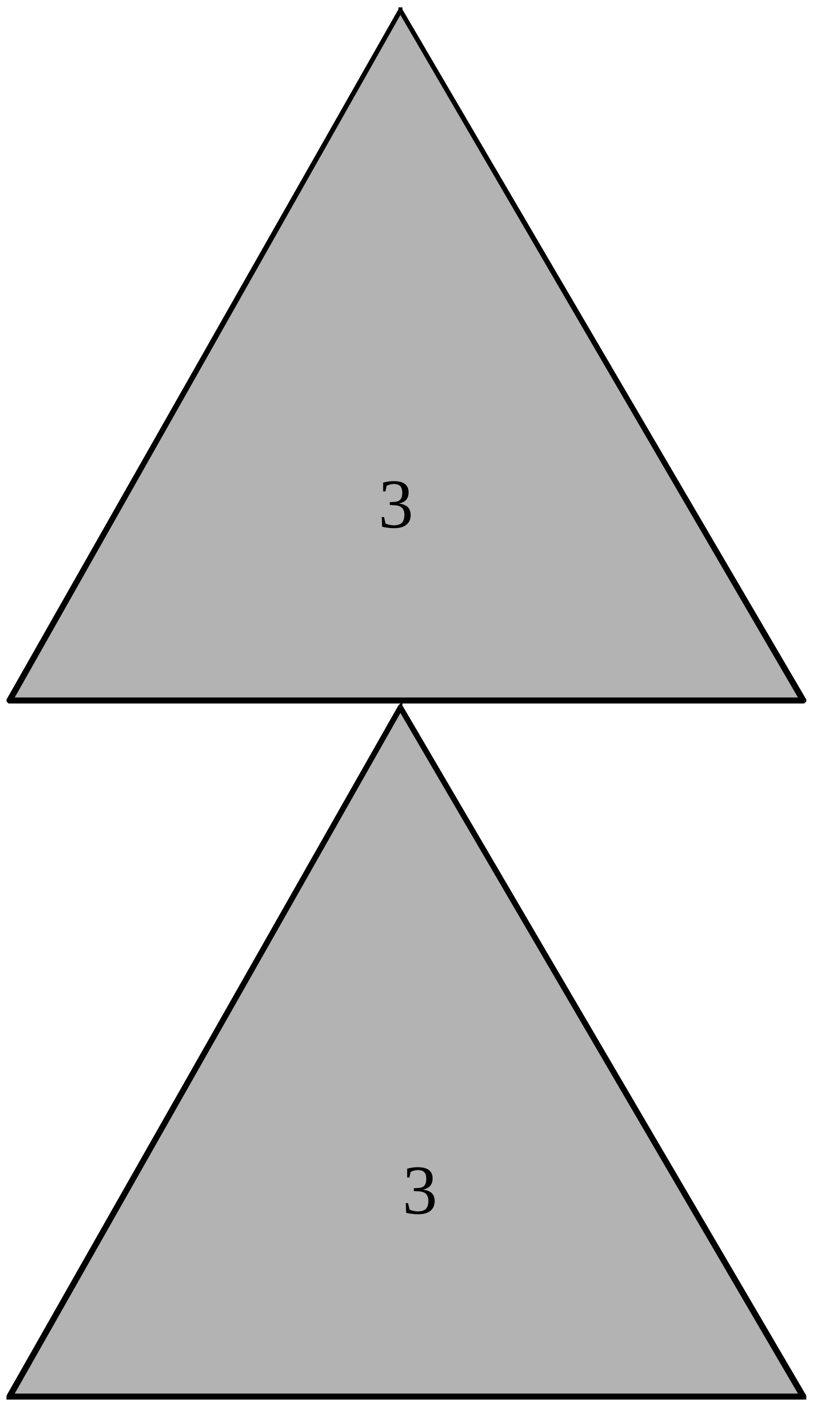
Todos los patrones están a escala reducida



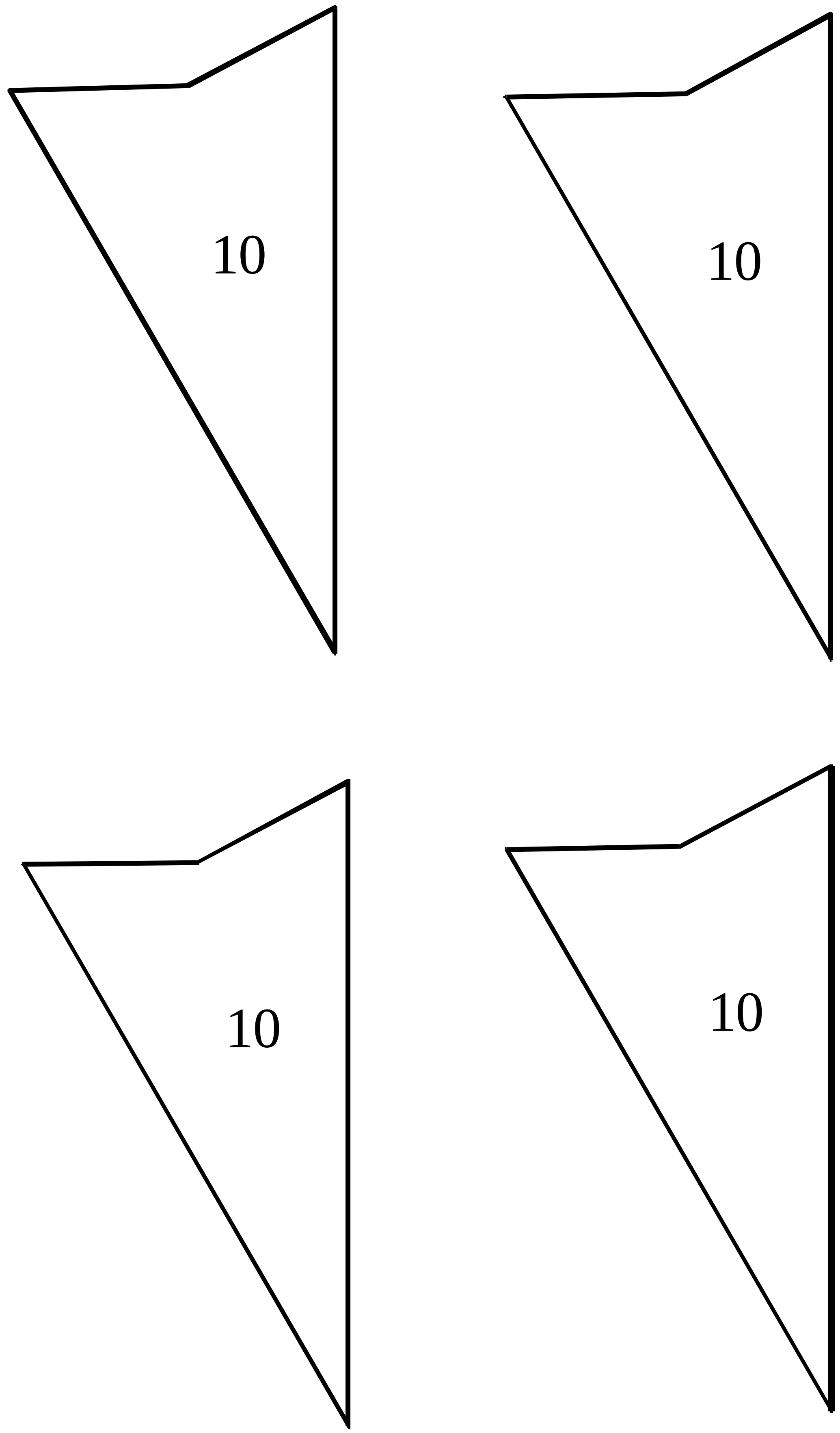
Todos los patrones están a escala reducida



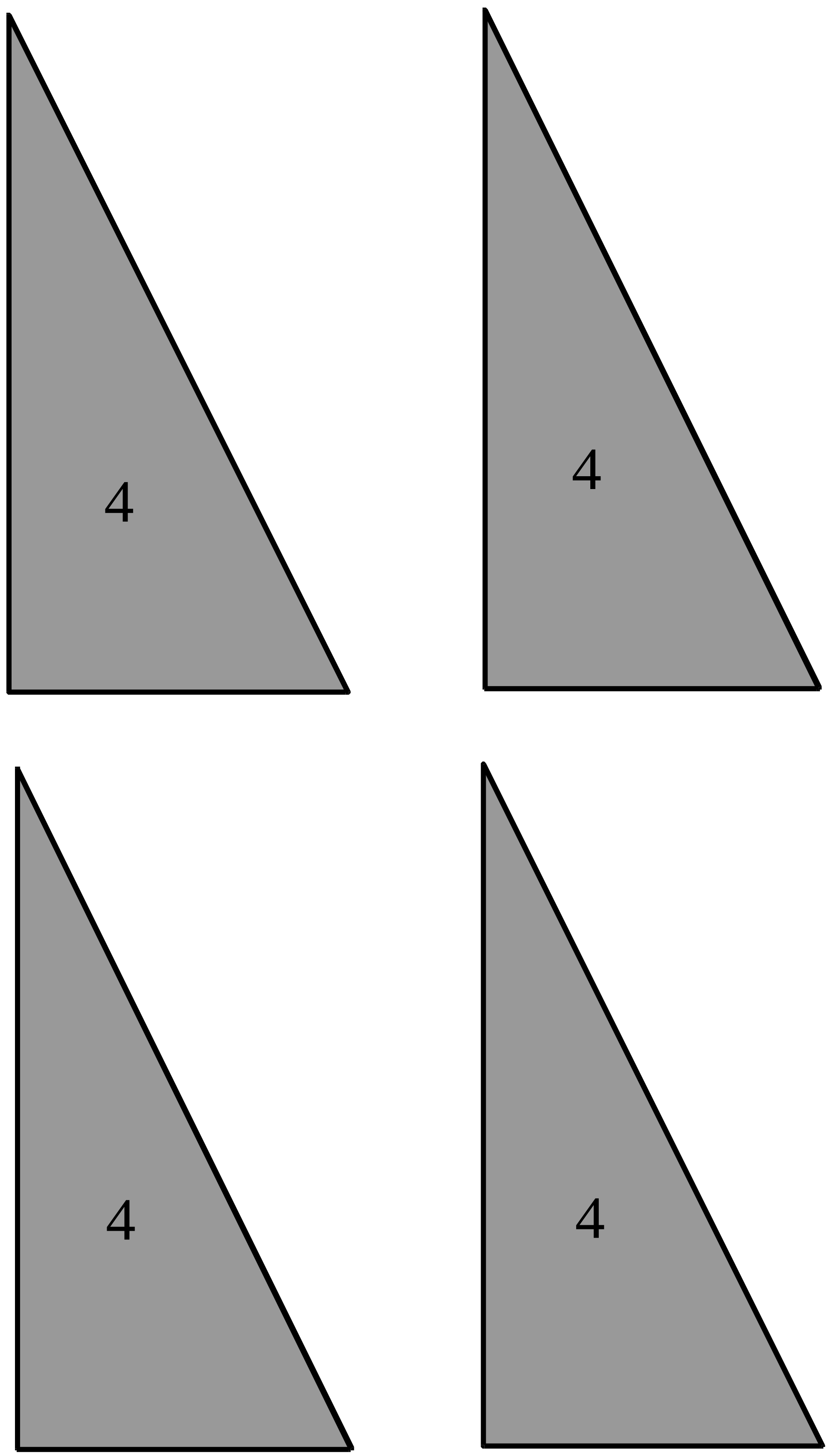
Todos los patrones están a escala reducida



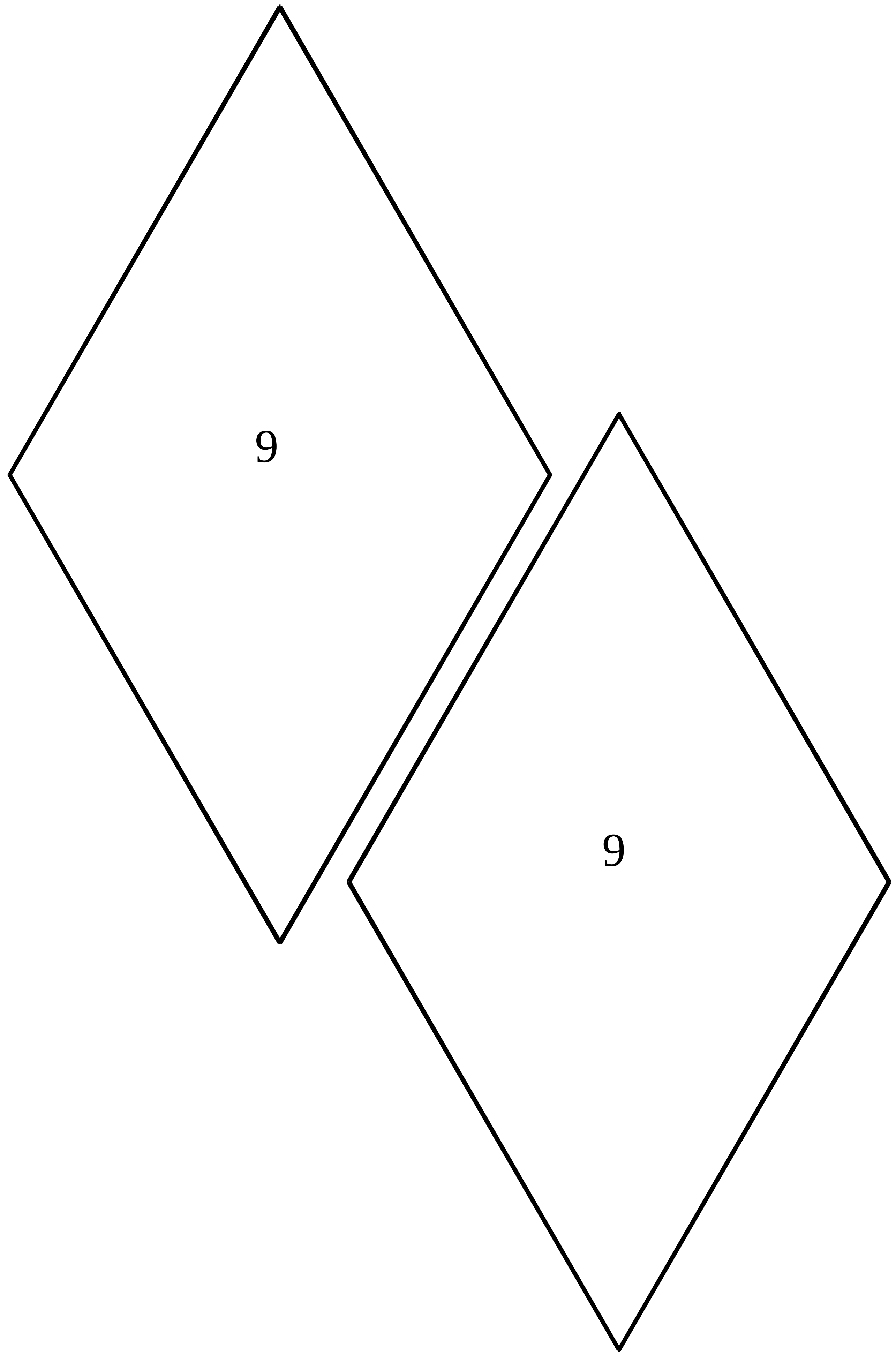
Todos los patrones están a escala reducida



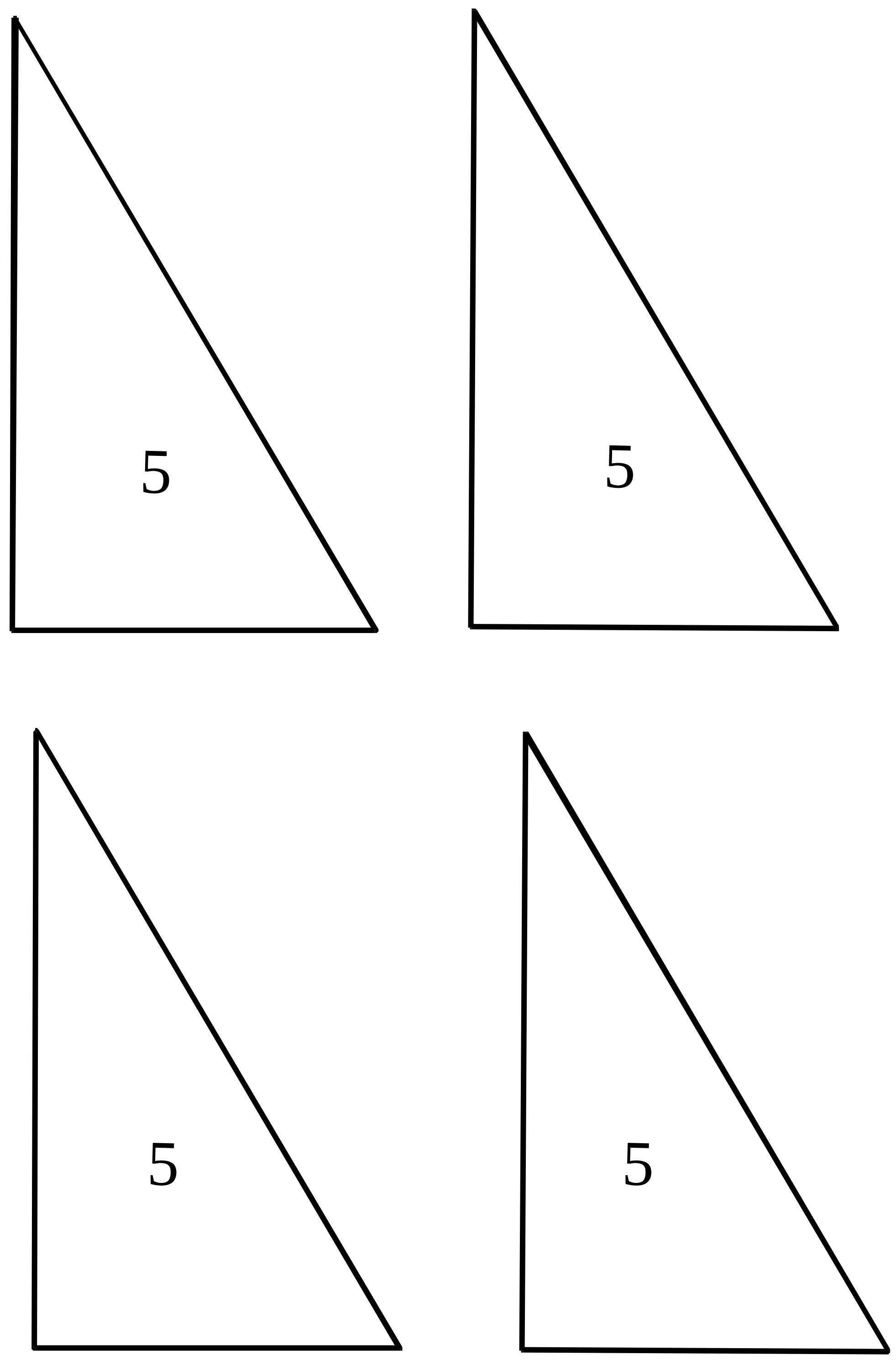
Todos los patrones están a escala reducida



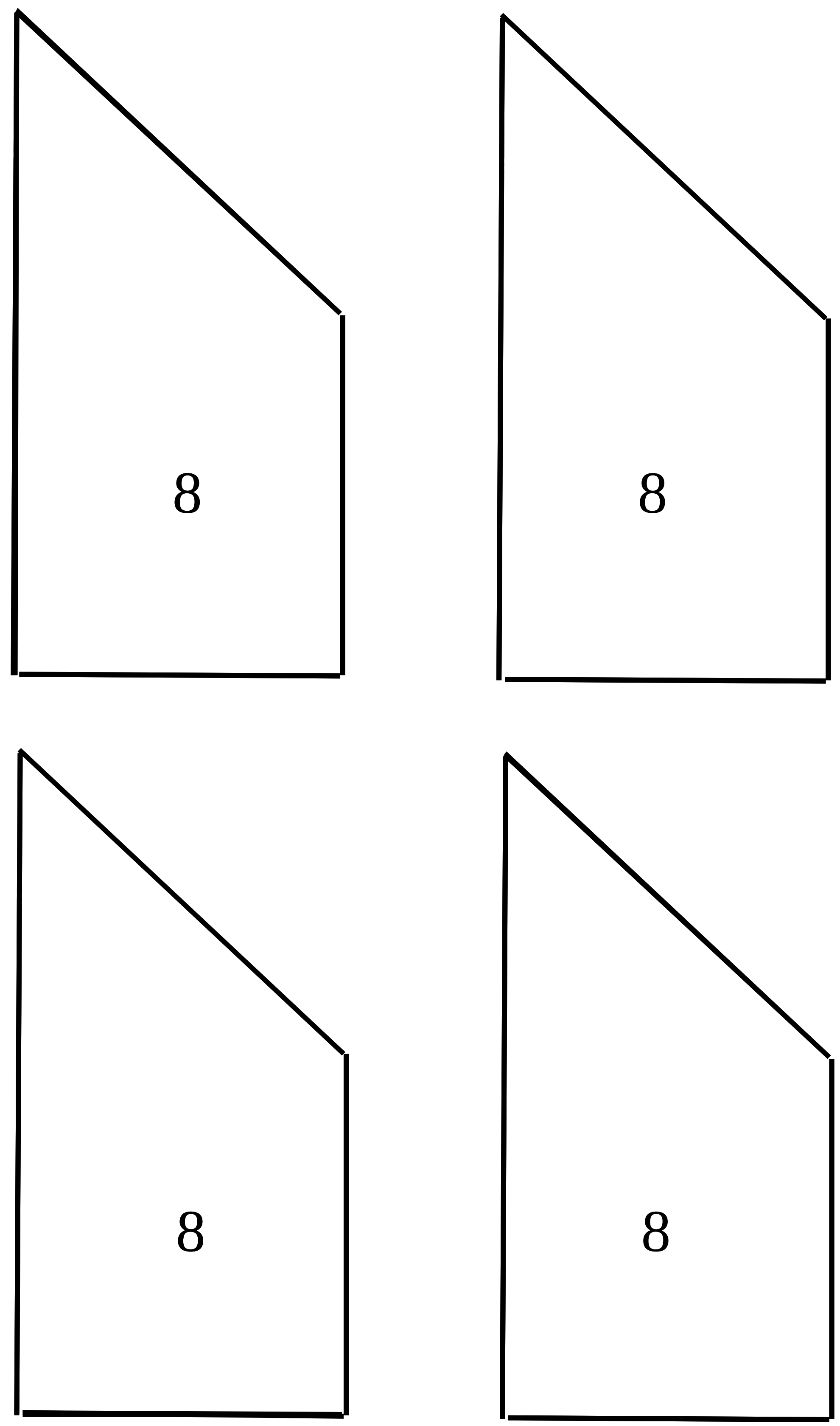
Todos los patrones están a escala reducida



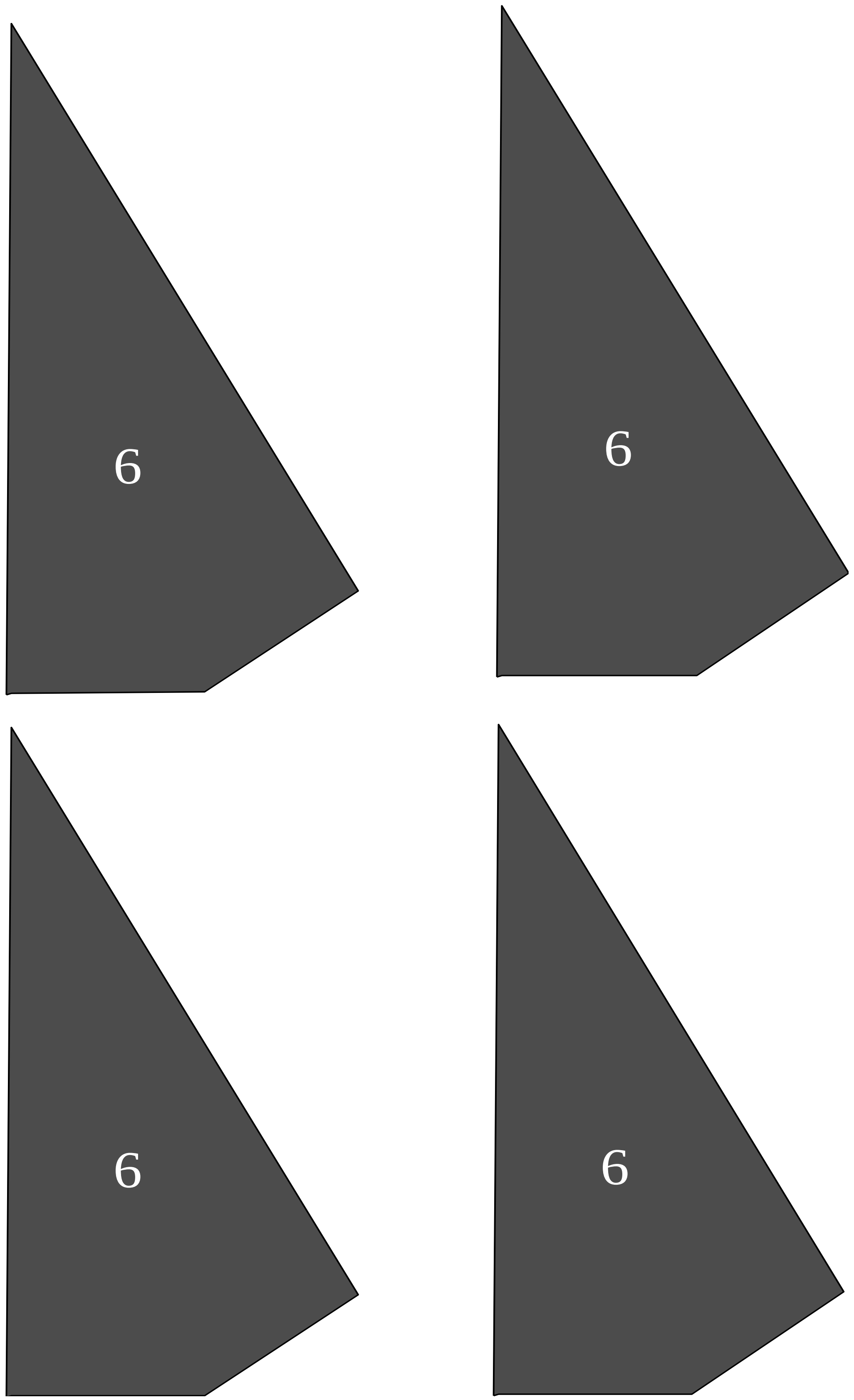
Todos los patrones están a escala reducida



Todos los patrones están a escala reducida



Todos los patrones están a escala reducida



Todos los patrones están a escala reducida